அடிப்படை இயந்திரவியல்

(பட்டப்படிப்பிற்குரியது)

(திருத்தப்பட்ட பாடத்திட்டத்தின்படி வெளியிடப்படுகின்றது)

முதல் பாகம்

நிலையியல்

ஆசிரியர்

ஆர். இராமகிருஷ்ணன், எம்.ஏ., எம்.எஸ்சி.,

துணைப்பேராசிரியர், கணிதத்துறை,

இராஜபாளையம் ராஜுக்கள் கல்லூரி,

இராஜபாளையம்.

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

த. பா. நி. (க.வெ.) வரிசை எண்—723

அடிப்படை இயந்திரவியல்

(பட்டப்படிப்பிற்குரியது)

(திருத்தப்பட்ட பாடத்திட்டத்தின்படி வெளியிடப்படுகின்றது)

முதல் பாகம்

நிலையியல்

ஆசிரியர்
ஆர். இராமகிருஷ்ணன், எம்.ஏ., எம்.எஸ்சி.,
துணைப்பேராசிரியர், கணிதத்துறை,
இராஜபாளையம் ராஜுக்கள் கல்லூரி,
இராஜபாளையம்.

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

First Edition—September, 1976

T.N.T.B.S. (C.P.) No. 723

© Government of Tamilnadu

ELEMENTARY MECHANICS - Part I

R. RAMAKRISHNAN

Price Rs. 16-75

Published by the Tamilnadu Textbook Society under the Centrally Sponsored Scheme of Production of books and literature in regional languages at the University level, of the Government of India in the Ministry of Education and Social Welfare (Department of Culture), New Delhi.

Printed out of the Paper allotted by the Government of India.

Printed by

Metro Printers & Packaging Industry,

Madras-600029.

பதிப்புரை

அடிப்படை இயந்திரவியல் (முதல் பாகம்) என்ற இந் நூல், தமிழ் நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனத்தின் 723ஆவது வெளியீடாகும். கல்லூரித் தமிழ்க்குழுவின் சார்பில் வெளியான 35 நூல்களையும் சேர்த்து இதுவரை 758 நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன. இந் நூல் மைய அரசு, கல்வி, சமூகநல அமைச்சகத்தின் 'மாநில மொழியில் பல்கலைக்கழக நூல்கள் வெளியிடும் திட்டத்'தின்கீழ் வெளியிடப்படுகிறது.

மேலாண்மை இயக்குநர்
தமிழ்நாட்டுப் பாட நூல் நிறுவனம்

பொருளடக்கம்

பக்கம்

தோற்றுவாய் ... 1

முதல் பாகம்

நிலையியல்

(STATICS)

1. ஒரு புள்ளியில் செயல்படும் விசைகள் (Forces acting at a Point) ... 41
2. இணை விசைகள் (Parallel Forces) ... 129
3. திருப்புதிறன் (Moment) ... 155
4. சுழலிணைகள் (Couples) ... 199
5. ஒருதள விசைகள் (Coplanar Forces) ... 236
6. உராய்வு (Friction) ... 338
7. புவியீர்ப்பு மையம் (Centre of Gravity) ... 428
8. நிலைப்புத் தன்மை (Stability) ... 549
9. கற்பித வேலை (Virtual Work) ... 573
10. சங்கிலியம் (Catenary) ... 620

விடைகள் ... 671

மேற்கோள் நூற்பட்டியல் ... 677

கலைச்சொற்கள் ... 678

தோற்றுவாய்

பல்வேறு விசைகளின் செயலாற்றல்கட்குட்படுத்தப்பட்ட பொருள்களின் நிலைகளிலேற்படுகின்ற மாறுதல்களைப் பகுப்பாய்வு செய்கின்ற அறிவியலே 'இயந்திரவியல்' அல்லது 'நிலையியக்கவியல்' ஆகும். நாம் வாழ்ந்து வரும் இக்காலத்தை 'இயந்திரயுகம்' என்று சொல்லலாம்; ஏனெனில், நம் அன்றுட வாழ்வில் பலதிறப்பட்ட பொறிகள் பயன்படுத்தப்பட்டு வருகின்றன. பொறிகளின் துணையின்றித் தற்காலத்தில் வாழ்வது மிகவும் கடினம் என்று சொல்லும் அளவிற்குப் பொறிகள் நம் வாழ்வில் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. பொறியியல் (Engineering) என்னும் அறிவியலுக்கு இயந்திரவியல் (Mechanics) மிக இன்றியமையாத அடிப்படையாக அமைந்துள்ளது. பௌதிகவியல் (Physics), வானியல் (Astronomy) என்ற அறிவியல்களின் அடிப்படைப் பகுதியாகவும் இயந்திரவியல் அமைந்துள்ளது.

பல விசைகளின் செயலாற்றல்கட்குட்படுத்தப்பட்ட பொருள்களின் நிலைத்தன்மை, இயக்கத்தன்மை என்பவற்றிற்கேற்ப 'இயந்திரவியல்' என்னும் இவ் வறிவியலானது 'நிலையியல்' (Statics), 'இயக்கவிசையியல்' (Dynamics) என்னும் இரு பிரிவுகளாகப் பிரிக்கப்படுகின்றது. ஆகவே, இந் நூலின் முதற்பாகம் 'நிலையியல்' என்றும், இரண்டாம் பாகம் 'இயக்கவிசையியல்' என்றும் அமைக்கப்பட்டுள்ளது. இவ்விரு இயல்களைப் பற்றி ஆராயு முன்னர் இவ்வியல்களில் பயன்படுத்தப்படுகின்ற சில கலைச்சொற்களின் வரையறைகளைக் காண்போம்.

வெளி (Spaces), காலம் (Time), சடப்பொருள் (Matter) என்ற இம் மூன்றையும் அடிப்படையாகக் கொண்டமைந்த தத்துவங்கள் இயந்திரவியல் என்னும் இவ் வறிவியலில் விளக்கப்படுகின்றன. இரு பொருள்களுக்கிடையேயுள்ள

தூரத்தை இடைவெளி என்று சொல்லுகிறோம். இத் தூரமாகிய இடைவெளியை ஏதாவதொரு குறிப்பிட்ட நீளமுள்ள ஒரு குச்சியினால் அளவிடலாம். அதாவது, இடைவெளி என்பது நீளம் (Length) என்ற கணியத்தினால் அளவிடப்படுகின்றது.

இரண்டாவதாக, காலத்தை அளவிடக் கூடிய அலகுபற்றி ஆராய்வோம். திரும்பத்திரும்ப இடைவிடாது நிகழக்கூடிய பரிசோதனை ஒன்றை எடுத்துக்கொள்வோம். முதற் பரிசோதனை முடிவடையும் நேரம் இரண்டாவது பரிசோதனை தொடங்கும் நேரமாகவும், இரண்டாவது பரிசோதனை முடிவடையும் நேரம் மூன்றாவது பரிசோதனை தொடங்கும் நேரமாகவும் இவ்வாறு ஒரு பரிசோதனை முடிவடையும் நேரம் அதற்கு அடுத்த பரிசோதனை தொடங்கும் நேரமாகவும், ஒவ்வொரு பரிசோதனையும் ஒரேமாதிரியான நிபந்தனைகளுக்குட்பட்டு நிகழ்வதாகவுமிருத்தல் வேண்டும். இத்தகைய பரிசோதனை யொன்று நிகழ்வதற்கு ஆகும் கால அளவே, காலத்தை அளவிடக் கூடிய ஓர் அலகு (unit) என்று கொள்ளப்படுகிறது. உதாரணமாக, விநாடி யூசலிக்கடிகாரம் (Seconds pendulum clock) ஒன்றில் ஊசற் குண்டின் அலைவு என்பதை ஒரு பரிசோதனையாகக்கொண்டு ஓர் அலைவுக்கு ஆகும் நேரமாகிய ஓர் 'விநாடி' (second) என்பது காலத்தை அளவிடப் பயன்படும் ஓர் அலகாக நடைமுறையில் கொள்ளப்படுகிறது. பூமி தன்னைத்தானே சுழல்கின்ற ஒரு சுழற்சியை ஒரு பரிசோதனையாகக் கொண்டால், அச் சுழற்சிக் காலமாகிய 'மின்வழிநாள்' (Sidereal day) ஒன்றினைக் கால அலகாகக் கொள்ளலாம். இதுபோல், பூமியானது சூரியனை ஒருமுறை சுற்றிவருவதை ஒரு பரிசோதனையாகக் கொண்டால் ஒரு சுற்றுக் காலமாகிய ஆண்டு (year) ஒன்றினைக் கால அலகாகக் கொள்ளலாம்.

சடப்பொருள் (Matter)

உணர்வுகளின் மூலம் அறிந்து கொள்ளப்படுகின்ற திட, திரவ, வாயுப் பொருள்கள் சடப்பொருள்கள் (Matter) எனப்படுகின்றன. இச் சடப்பொருள்களுக்குப் பரிமாணங்கள் (dimensions) உண்டு. இவை தங்களின் பரிமாணங்களுக்கேற்ப வெளியை அடைத்துக் கொண்டிருக்கும். இச் சடப்பொருளினை அளவிடப் பயன்படும் அலகு 'பொருண்மை' அல்லது 'திணிவு' அல்லது 'நிறை' (Mass) எனப்படும்.

உருவிலும் அளவிலும் சர்வசமமான இரண்டு இரும்புத் துண்டுகளை ஒரு தராசின் இரு தட்டுகளிலும் வைத்துப் பார்த்

தால், தராசு தட்டுகள் சமநிலையிலிருப்பதைக் காணலாம். இப்பொழுது ஒரு தட்டிலுள்ள இரும்புத் துண்டுக்குப் பதிலாக அதேமாதிரியான உருவும், அளவும் கொண்ட ஒரு மரத் துண்டை வைத்தோமானால், மரத்துண்டு வைக்கப்பட்டுள்ள தட்டு மேலெழுந்து நிற்பதைக் காணலாம். இரு தட்டுகளும் சமநிலையிலிருக்கவேண்டுமாயின் மரத்துண்டு உருவிலும் அளவிலும் மிகப்பெரியதாயிருக்க வேண்டும். இப்பொழுது தட்டுகள் சமநிலையிலிருக்கும் வண்ணம் உருவிலும் அளவிலும் பெரியதான ஒரு மரத்துண்டு அத் தட்டின்மீது வைக்கப்படுவதாகக் கொள்க. இவ்வாறு சமநிலை பெறுகின்ற இரும்புத் துண்டும் மரத்துண்டும் 'பொறியியல் முறையில் சமமானவை' (Mechanically equivalent) என்று கருதப்படுகின்றன. பொறியியல் முறையில் சமமானவை என்பதைக் காட்டும் பொருட்டு ஓர் எண்ணால் குறிப்பிடப்படுகின்றன. இந்த எண்ணானது அச் சடப்பொருளின் 'பொருண்மை' (அல்லது 'திணிவு' அல்லது 'நிறை') (Mass) என்று குறிப்பிடப்படுகின்றது. அதாவது, ஒரு பொருளின் பொருண்மை யென்பது அப் பொருள் தன்னுள் கொண்டுள்ள சடப்பொருளின் கணியம் (quantity) ஆகும். மேற்கூறப்பட்ட உதாரணத்திலுள்ள இரும்புத் துண்டின் பொருண்மையை ஓர் அலகு பொருண்மையெனக் கொண்டால் அதுபோன்ற பத்து இரும்புத் துண்டுகளின் மொத்தத்துக்குப் பொறியியல் சமமான ஒரு சடப்பொருளின் பொருண்மை 10 ஆகும். இரும்புத் துண்டைப் பல சிறு துண்டுகளாக வெட்டி $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, 0·1, 0·05, ... போன்ற பொருண்மைகளுள்ள சடப்பொருள்களையும் உண்டுபண்ணலாம். இவ்வாறு சடப்பொருள்களை அளவிடப் பொருண்மை யென்னும் அலகு பயன்படுத்தப்படுகிறது.

துகள் (Particle)

வடிவ கணிதத்தில் புள்ளி (Point) என்பது வரையறுக்கப்பட்டிருப்பதுபோல் இயந்திரவியலில் துகள் என்பது வரையறுக்கப்படுகிறது.

உருவும் அளவுமில்லாத ஆனால் ஒரு வரையறுக்கப்பட்ட நிலையிலமைந்த ஒரு பொருளுக்குத் துகள் என்று பெயர். ஆனால், இயந்திரவியலில் பொருள்களும்கூடச் சூழ்நிலைகளுக்கேற்பத் துகள்களாகக் கருதப்படுவதுண்டு. ஒரு சடப்பொருள் எத்தகைய பரிமாண முடையதாயினும் அப் பொருள்பற்றிய ஆய்வில் வேறு பொருள்களிலிருந்து அதன் தூரங்களை ஒப்பிடும் போது அதன் பரிமாணங்கள் புறக்கணிக்கத் தக்க அளவில்

மிகச் சிறியனவையாயிருப்பின் அப் பொருளை ஒரு துகளாகக் கருதலாம். உதாரணமாக, வானியலில் சூரியனிலிருந்து பூமியின் தூரத்துடன் ஒப்பிடும்போது பூமியின் பரிமாணம் புறக்கணிக்கத் தக்க அளவில் மிகச் சிறியதாயிருப்பதால் பூமி ஒரு துகளாகக் கருதப்படுகிறது. இதுபோல், ஓர் ஊசலியில் ஊசற்குண்டின் பரிமாணம் ஊசலியின் நீளத்துடன் ஒப்பிடப்படும்போது மிகச் சிறியதாகவிருப்பின் ஊசற்குண்டை ஒரு துகளாகக் கருதலாம்.

கட்டிறுக்கப் பொருள் (Rigid Body)

சிலவகைச் சடப்பொருள்கள் ஏதேனுமொரு விசையின் செயலாற்றலுக்குட்படும்போது தங்களுடைய உருவத்தைப் பெரிதும் மாற்றிக்கொள்வதைக் காணலாம். உதாரணமாக, வெண்ணெய்யானது சூடேற்றப்பட்டால் தன்னுடைய திட உருவை மாற்றித் திரவ உருவைப் பெறுகிறது. ஆனல், வேறு சில திடப் பொருள்கள் எவ்வகையான விசைகளின் செயலாற்றல்கட்குட்படுத்தப்பட்டபோதிலும் தங்களுடைய உரு அமைப்புகளை மாற்றிக் கொள்வதில்லை. சிறிதளவு மாறுதல் பெற்றாலும் அம்மாறுதல் புறக்கணிக்கத் தக்க அளவாகவேயிருக்கும். இவ்வாறு புறவிசைகளினல் தங்களுடைய உருவு, அளவுகளில் எவ்வித மாறுதலுக்குமுட்படாத சடப்பொருள்களுடைய பாகங்களின் சாரிடங்கள் (relative positions) மாருத்தன்மையுடையவையாயிருக்கும். இத்தகைய பொருள்களுக்குக் கட்டிறுக்கப் பொருள்கள் (Rigid bodies) என்று பெயர்.

குறியீட்டச்சு (Frame of Reference)

நாம் ஏதேனுமொரு நிகழ்ச்சியைப் பற்றிக் குறிப்பிடும்போது அந் நிகழ்ச்சி நடைபெற்ற இடத்தையும் நேரத்தையும் குறிப்பிடுகின்றோம். நடுக்கடலில் புயலில் சிக்கிக் கொண்ட கப்பலின் தலைவன் கரையிலிருக்கும் உயர் அதிகாரிகளுக்குத் தன்னிருப்பிடத்தை அட்சரேகை (latitude), தீர்க்க ரேகை (longitude) ஆகியவற்றின் மூலம் குறிப்பிடலாம். இங்குப் பூமியைக் குறியீட்டச்சாகக் கொண்டு கப்பலின் இருப்பிடம் குறிப்பிடப்படுகின்றது. இதுபோல், இயந்திரவியலில் பலதிறப்பட்ட விசைகளின் ஆற்றல்கட்குட்படுத்தப்பட்ட ஒரு பொருளின் நிலைத்தன்மையைப் பற்றி அப்பொருளின் நிலை ஏதேனுமொரு குறியீட்டச்சைக் குறித்துச் சொல்லப்படல் வேண்டும். பொதுவாக, இயந்திரவியலில் ஏதேனுமொரு கட்டிறுக்கப் பொருளே குறியீட்டச்சாக ஏற்றுக்கொள்ளப்படுகின்றது. குறியீட்டச்சாக ஏற்றுக் கொள்ளப்படுகின்ற கட்டிறுக்கப் பொருளில்

O - xyz என்ற நிலையான செங்குத்து அச்சுத் தொகுதியை (rectangular system of coordinate axes) எடுத்துக்கொண்டு அதன் மூலம் ஆய்வுக்குட்பட்ட எந்தப் பொருளின் நிலையையும் குறிப்பிடலாம். பல விசைகளின் செயற்பாடுகளுக்குட்பட்ட கட்டிறுக்கப் பொருள்களின் இயக்கங்கள் பற்றிய ஆய்வுகளில் ஒவ்வொரு கட்டிறுக்கப் பொருளையும் ஒரு குறியீட்டச்சாகக் கொள்ளலாம். ஆகவே, இத்தகைய ஆய்வுகளில் ஏதேனு மொரு குறியீட்டச்சைத் தெரிவு செய்து அதில் அச்சுத்தொகுதியை எடுத்துக்கொண்டு ஒரு பொருளின் நிலையையோ அல்லது ஒரு நிகழ்ச்சி இடத்தையோ (x, y, z) என்ற அச்சுத் தூரங்களின் மூலம் குறிப்பிடலாம். ஒரே இயக்கத் தளத்தில் (Plane of motion) உள்ள பொருள்களின் நிலைகள் பற்றிய ஆய்வில் o - x, y என்ற அச்சுத் தொகுதியின் மூலம் பொருள்களின் நிலைகளைக் குறிப்பிடலாம்.

ஓய்வும் இயக்கமும் (Rest and Motion)

ஓய்வு (rest), இயக்கம் (motion) என்ற சொற்களின் பொருள், கையாளப்படுகின்ற குறியீட்டச்சுகளுக்கேற்ப மாறுபடும். தொடர் வண்டியொன்றில் பயணம் செய்துகொண்டிருக்கும் ஒருவன் அவ் வண்டியைப் பொறுத்தவரை ஓய்விலிருப்பதாகக் கொள்ளலாம்; ஆனால், வண்டிக்கு வெளியேயுள்ள பொருள்களைப் பொறுத்தவரை, அவன் வண்டியின் வேகத்துடன் போய்க்கொண்டிருப்பதாகக் கொள்ளவேண்டும். ஆகவே, தொடர்வண்டியைக் குறியீட்டச்சாகக் கொண்டால் அம்மனிதன் ஓய்விலிருப்பதாகவும், தொடர்வண்டிக்கு வெளியேயுள்ள ஏதேனுமொரு பொருளைக் குறியீட்டச்சாகக் கொண்டால் அவன் வண்டியின் வேகத்துடன் போய்க்கொண்டிருப்பதாகவும் கொள்ளப்படுகின்றான். அதாவது, குறிப்பிட்ட ஒரு குறியீட்டச்சைப் பொறுத்தவரை ஒரே நிலையில் தொடர்ந்து இருந்து வருகின்ற ஒரு பொருள் ஓய்விலிருப்பதாகவும், அக் குறியீட்டச்சைப் பொறுத்தவரை அதன் நிலை மாறிக்கொண்டேயிருக்குமாயின் அப் பொருள் இயக்கத்திலிருக்குமாறும் கொள்ளலாம்.

விசை (Force)

ஒரு பொருளை இழுக்கும்போதோ அல்லது தூக்கும்போதோ அல்லது தள்ளும்போதோ நாம் ஒருவிதச் சக்தியைப் பயன்படுத்துவதை உணர்கிறோம். இச் சக்தியைத்தான் 'விசை' என்று சொல்கிறோம். ஒரு நாற்காலியை இழுக்கும்போது பயனீடுத்துகின்ற விசையைவிட ஒரு பெரிய அலமாரியை இழுக்க

அதிக விசை தேவைப்படுகிறது என்பதை நாம் உணர்கிறோம். ஆகவே, விசையை அளவிட முடியுமென்று காண்கிறோம். தவிர, அலமாரியைக் குறிப்பிட்ட ஒரு திசையில் தள்ளவேண்டுமானால் அலமாரியின் ஒரு குறிப்பிட்ட பகுதியில் கைகளைக் கொடுத்துக் குறிப்பிட்ட திசையில் தள்ளவேண்டுமென்பதையும் நாம் உணர்கிறோம். ஆகவே, விசைக்குத் 'திசை'யும் (direction) உண்டு என்று காண்கிறோம். மேலும், அலமாரியில் குறிப்பிட்ட ஓர் இடத்தில் கைகளைக் கொடுத்துத் தள்ளுவதால், அக் குறிப்பிட்ட இடமானது அவ் விசையின் 'இடுபுள்ளி' (Point of application) என்றழைக்கப்படுகிறது. ஆகவே, விசையென்பது (1) அளவு (magnitude), (2) திசை (direction), (3) இடுபுள்ளி (Point of application) ஆகிய இம் மூன்றையும் கொண்டமைந்த ஒரு கணியம் என்று காண்கிறோம். விசையானது செயல்படுகின்ற திசைக்கு 'விசைத்திசை' என்றும், விசையின் இடுபுள்ளி வழியே விசைத்திசையில் வரையப்படுகின்ற நேர்கோட்டிற்குச் 'செயற்கோடு' (line of action) என்றும் பெயர். விசைகளை அவற்றின் செயல்களுக்கேற்ப மூன்று வகைகளாகப் பிரிக்கலாம்.

(அ) ஒன்றையொன்று தொட்டுக் கொண்டிருக்கும் இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட பொருள்களின்மீது செயல்படுத்தப்படுகின்ற அழுத்தம் (Pressure), எதிரழுத்தம் அல்லது எதிர்விசை (Reaction), அமுக்கம் (Thrust), உராய்வு (Friction) போன்ற விசைகள் முதலாவது வகையாகும். எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு மேசையின்மேல் ஒரு பொருளை வைத்தால் அப்பொருள் தன்னுடைய எடையினால் (Weight) ஏற்படுகின்ற அமுக்கம் என்ற விசையினால் மேசையை அமுக்குகிறது. மாறாக, அந்த மேசையானது அவ்வமுக்கத்தின் விளைவை ஈடு செய்து அப் பொருளை ஓய்விலிருக்கச் செய்கிறது. உராய்வுடைய ஒரு சாய்தளத்தின்மீது ஒரு பொருளை வைத்தால் அப் பொருள் அத்தளத்தின்மீது கீழ்நோக்கி வழுக்கிவிடாமல் அத்தளத்தின் உராய்வுத்தன்மை தடுப்பதை நாமறிவோம். இவ்வாறு, அப்பொருள் வழுக்கிவிடாமல் தடுக்கின்ற விசையானது 'உராய்வு விசை' (Frictional force) எனப்படும்.

(ஆ) கயிற்றினால் பிணைக்கப்பட்ட இரு பொருள்கள் ஒன்றையொன்று இழுக்கும்போது கயிற்றின் வழியே செயல்படுகின்ற இழுவிசை (Tension) இரண்டாவது வகையாகும். இத்தகைய ஓர் அமைப்பில் ஒவ்வொரு பொருளும் மற்றப் பொருளை இழுப்பதால் இரு சம இழுவிசைகள் எதிர்த் திசைகளில் செயல்படுவதைக் காணலாம்.

(இ) காந்தம், மின்சக்தி, புவியீர்ப்புக் கவர்ச்சி போன்ற வற்றினுலேற்படுகின்ற கவர்ச்சி (Attraction), பிணக்கம் (Repulsion) எனப்படும் விசைகள் மூன்ருவது வகையாகும். இவ்வகை விசைகளின் செயலாற்றல்கட்குட்பட்ட பொருள் களுக்கிடையே எவ்விதத் தொடுகையும் இராது.

எடை (Weight)

நியூட்டனின் ஈர்ப்புக் கவர்ச்சி விதியின்படி (Newton's Law of Gravitation) இப் பேரண்டத்திலுள்ள ஒவ்வொரு பொருளும் பிற பொருள் ஒவ்வொன்றையும் ஒரு விசையினுல் ஈர்க்கின்றது என்று காணப்பட்டுள்ளது. அவ்வாறு ஈர்க்கின்ற விசையானது அப் பொருள்களின் பொருண்மைகளின் பெருக் கத்திற்கு நேரடி விகித சமமாகவும், அவற்றிற்கிடையேயுள்ள தூரத்தின் வர்க்கத்திற்குத் தலைகீழ் விகித சமமாகவுமிருக்கும். இவ் விதியின்படி, பூமியின் மேற்பரப்பின் மேலுள்ள ஒவ்வொரு பொருளும் அப் பொருளின் பொருண்மைக்கு நேர்விகித சமமான ஒரு ஈர்ப்பு விசையினுல் (Force of attraction) பூமியின் மையத்தை நோக்கி ஈர்க்கப்படுகிறது. இவ் வீர்ப்பு விசையே அப் பொருளின் எடை (Weight) எனப்படுகிறது.

அலகுகள் (Units)

இயந்திரவியலுக்கு அடிப்படையாக விளங்குகின்ற வெளி, சடப்பொருள், காலம் ஆகியவை பற்றியும் அவற்றை அளவிடு வதற்கு ஆதாரமான நீளம், பொருண்மை, காலம் ஆகியவை பற்றியும் ஆராய்ந்தோம். ஒவ்வொரு வகையிலும் ஏதேனு மொரு குறிப்பிட்ட அளவை அலகாக எடுத்துக்கொள்ளலாம். அதாவது, ஏதாவது ஒரு குறிப்பிட்ட பொருள்ன் பொருண் மையை ஓர் அலகு பொருண்மையாகவும், ஒரே மாதிரியான நிபந்தனைகட்குட்பட்டுத் திரும்பத் திரும்ப நிகழக் கூடிய ஏதாவது ஒரு குறிப்பிட்ட பரிசோதனையின் நிகழ்வுக் காலத்தை ஒரு கால அலகாகவும் கொள்ளலாம்.

பொதுவாக இரு வகையான அலகு முறைகள் வழக்கி லுள்ளன. அவற்றுள் ஒன்று அடி - ராத்தல் - விஞடி (அ.ரா.வி.) எனப்படும் பிரிட்டிஷ் முறை (F.P.S. or British System) ஆகும். மற்றது, சென்டிமீட்டர்-கிராம்-விஞடி (செ. கி. வி.) எனப்படும் மெட்ரிக் முறை (C.G.S. or Metric System) ஆகும். பிரிட்டிஷ் முறையில் ஓர் அடி (Foot) என்பது நீளத்தின் அலகாகவும், ஒரு ராத்தல் (Pound) என்பது பொருண்மையின் அலகாகவும், ஒரு விஞடி (Second) என்பது

காலத்தின் அலகாகவும் கொள்ளப்படுகின்றன. மெட்ரிக் முறையில் ஒரு சென்டிமீட்டர் (Centimetre) என்பது நீளத்தின் அலகாகவும், ஒரு கிராம் (Gramme) என்பது பொருண்மையின் அலகாகவும், ஒரு விஞடி (Second) என்பது காலத்தின் அலகாகவும் கொள்ளப்படுகின்றன. ஆனல், சென்டிமீட்டர், கிராம் என்பன மிகக் குறைந்த அளவுகளைக் கொண்ட அலகுகளாதலின், நடைமுறைப் பயன் கருதி மீட்டர் (=100 செ. மீ.) என்பது நீளத்தின் அலகாகவும், கிலோகிராம் (=1000 கிராம்) என்பது பொருண்மையின் அலகாகவும் கொள்ளப்படுவது முண்டு. இவ்வாறு, மீட்டர் (Metre), கிலோகிராம் (Kilogram), விஞடி (Second) ஆகியவற்றை அலகுகளாகக் கொண்டு வழங்கப்படுகின்ற முறையானது மீட்டர்–கிலோகிராம்–விஞடி (Metre - Kilogram - Second System) என்றழைக்கப்படுகின்றது. இதைச் சுருக்கமாக மீ–கி-வி முறை (M. K. S. System) என்று கூறலாம்.

திசையிகள் (Vectors)

பொருள்களின் எடை, கன அளவு (Volume), விலை மதிப்பு ஆகியவற்றை முறையே கிலோகிராம், லிட்டர், ரூபாய் போன்ற அளவுகளினல் குறிப்பிடுவதை நாமறிவோம். ஆனல், சில வகைக் கணியங்களை (Quantities) அவற்றின் அளவுகளினல் (Magnitudes) மட்டும் முழுமையாகக் குறிப்பிட முடியாது. எடுத்துக்காட்டாக, காற்றின் வேகம் மணிக்கு 20 கிலோமீட்டர் என்று குறிப்பிடுவதன் மூலம் அதன் முழுப் பொருளையும் உணர்த்த முடியாது. அக் காற்று வீசுகின்ற திசையையும் காற்றின் வேக அளவுடன் சேர்த்துக் குறிப்பிடுவதன் மூலமே காற்றின் வேகத்தை முழுமையாகக் குறிப்பிட முடியும். இது போல், விசைகளைப் (Force) பற்றிக் குறிப்பிடுகையில் அவற்றின் அளவுகளுடன் அவை செயல்படுகின்ற திசைகளும் (Direction) சேர்த்துக் குறிப்பிடப்பட்டால் மட்டுமே அவ் விசைகளின் தன்மை பற்றி முழுமையாக உணர முடியும். இவ்வாறு அளவு (Magnitude), திசை (Direction) ஆகியவற்றுடன் கூடிய வேகம் (Velocity), விசை (Force) ஆகியவை போன்ற கணியங்களை வடிவ கணித முறைப்படி 'திசையுடன் கூடிய நேர்கோட்டுத் துண்டங்களினல் (Directed segment of straight lines) குறிப்பிடலாம். எடுத்துக்காட்டாக, மணிக்குப் பத்துக் கிலோமீட்டர் வேகத்தில் கிழக்கிலிருந்து மேற்கு நோக்கிச் செல்லும் ஒரு வண்டியின் வேகத்தை 1 செ.மீ. = 10 கி.மீ. மணி என்ற அளவு திட்டத்தின்படி இடமிருந்து வலமாக வரையப்பட்ட 1 செ. மீ. நீளமுள்ள நேர்கோட்டுத் துண்டினல்

குறிப்பிடலாம். இந் நேர்கோட்டுத் துண்டானது இடமிருந்து வலமாக *AB* என்று குறிப்பிடப்பட்டால், வண்டியின் வேக மாகிய 10 கி. மீ. / மணி என்பதை $\overrightarrow{AB}$ அல்லது $\overleftarrow{BA}$ என்ற குறி யீடுகளின் மூலம் குறிப்பிடலாம். இங்கு *AB* என்ற நீளமானது வண்டியின் வேக அளவையும், அம்புக் குறியானது *A*-லிருந்து *B* ஐ நோக்கி என்ற திசையினையும் குறிப்பிடுகின்றன. பொது வாக, ஒரு துகள் *A* என்னும் புள்ளியிலிருந்து *B* என்னும் புள்ளிக்கு நகர்த்தப்பட்டால் அத் துகளின் இடப்பெயர்ச்சியை (Displacement) $\overrightarrow{AB}$ என்னும் திசையுடன் கூடிய நேர் கோட்டுத் துண்டினுல் குறிப்பிடலாம். இவ்வாறு, ஒரு திசை கொண்ட நேர்கோட்டுத் துண்டத்தினுல் குறிப்பிடக் கூடிய பௌதிகக் கணியத்திற்கு (Physical quantity) 'வெக்டர்' அல்லது 'திசையி' (Vector) என்று பெயர். மேற்கூறப்பட்ட எடுத்துக்காட்டில் *A* என்பது $\overrightarrow{AB}$ என்ற திசையியின் 'ஆதி' (Origin) அல்லது 'இடுபுள்ளி' (Point of application) எனப் படும். ஆகவே, ஒரு திசையியானது பின்வரும் மூன்று சிறப் பியல்புகளைக் கொண்ட ஒரு கணியம் ஆகும்.

(அ) ஓர் ஆதி அல்லது இடுபுள்ளி (Origin or Point of application)

(ஆ) அளவு (Magnitude)

(இ) திசை (Direction)

திசையிகளை (i) தன்வயத் திசையி (Free vector), (ii) நழுவுந் திசையி (Sliding vector), (iii) எல்லைத் திசையி (Bound vector) என்று மூன்று வகைகளாகப் பிரிக்கலாம். வெவ்வேறு ஆதி களையும், ஒரே அளவும் திசையும் கொண்ட திசையித் தொகுதி யைச் சேர்ந்த ஒரு திசையியிக்குத் 'தன்வயத் திசையி' (Free vector) என்று பெயர்.

ஒரு திசை கொண்ட நேர்கோட்டுத் துண்டத்தை அது அமைந்துள்ள நேர் கோட்டின் மேல் பல நிலைகளில் நகர்த்து வதால் கிடைக்கப் பெறுகின்ற நேர்கோட்டுத் துண்டங்களின் தொகுதியைச் சேர்ந்த ஒரு நேர்கோட்டுத் துண்டத்திற்கு 'நழுவுந்திசையி' (Sliding vector) என்று பெயர். ஒரு தனிப் பட்ட திசைகொண்ட நேர்கோட்டுத் துண்டத்தினுல் குறிப் பிடப்படுகின்ற ஒரு திசையி அல்லது பௌதிகக் கணியத் திற்கு 'எல்லைத் திசையி' (Bound vector) என்று பெயர். இவற்

றுள் தன்வயத் திசையியானது சுருக்கமாகத் 'திசையி' என்றே இந்நூல் முழுவதும் குறிப்பிடப்படுகின்றது. P என்னும் அளவுடன் (magnitude) கூடிய ஒரு திசையியை **P** என்ற தடித்த எழுத்தால் அல்லது P என்ற எழுத்தின்மேல் ஓர் அம்புக் குறியிட்டு $\vec{P}$ என்ற குறியீட்டின் மூலம் குறிப்பிடுவது வழக்கம். ஆகவே, **P** அல்லது $\vec{P}$ ஐத் 'திசையி **P**' என்று வாசிக்கவேண்டும். **P** என்ற திசையியின் அளவு | **P** | (எண்ணளவு **P**) அல்லது P என்று குறிப்பிடப்படும்.

திசையில்லாமல் அளவு மட்டும் கொண்டுள்ள ஒரு கணியத்திற்குத் 'திசையிலி' (scalar) என்று பெயர். நடைமுறையில் கையாளப்படுகின்ற 1,2,3,.... என்ற எண்கள் யாவும் திசையிலிகளே. பொருள்களின் எடை, கன அளவு, விலை ஆகிய கணியங்கள் அளவுகள் மட்டுமே கொண்டவையாகும். இவற்றிற்குத் திசைகள் கிடையா. ஆகவே, இவையாவும் திசையிலிகளாகும்.

திசையியைத் திசையிலியால் பெருக்கல்

$\vec{P}$ என்னும் திசையி, m என்னும் திசையிலி ஆகியவற்றின் பெருக்கற்பலனாகிய $m\vec{P}$ என்பது பின்வருமாறு வரையறுக்கப் படுகின்றது. m என்பது ஒரு நேரெண்ணாயின் ,$m\vec{P}$ என்பது $\vec{p}$-ன் திசையையும் mP என்ற அளவையும் கொண்ட ஒரு திசையியாகும்; m என்பது ஓர் எதிரெண்ணாயின் $m\vec{P}$ என்பது $\vec{P}$-ன் திசைக்கு எதிர்த் திசையையும் mP என்ற அளவையும் கொண்ட ஒரு திசையியாகும். உதாரணம்: $2(\vec{P}) = 2\vec{P}$; $P(-1) = -\vec{P}$.

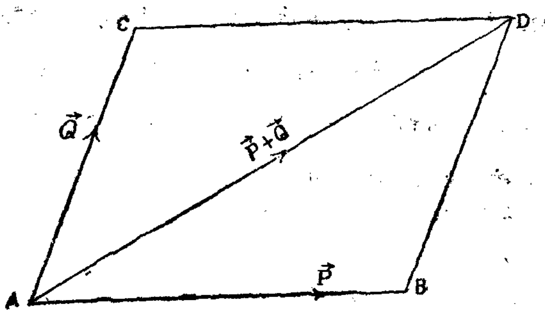
$-\vec{P}$ என்பது P என்ற அளவையும் $\vec{P}$-ன் திசைக்கு எதிர்த் திசையையும் கொண்ட ஒரு திசையியாகும்.

திசையிகளின் கூட்டல்

$\vec{P}, \vec{Q}$ ஆகிய இரு திசையிகளின் கூட்டல் $(\vec{P} + \vec{Q})$ என்ற திசையியாகும் இக் கூட்டுத் திசையியை இணைகர விதி (Parallelogram law) அல்லது முக்கோண விதி (Law of triangle) ஆகியவற்றின் மூலம் பின்வருமாறு குறிப்பிடலாம்.

இணைகரவிதி

$\vec{AB}$, $\vec{AC}$ என்ற இரு திசை கொண்ட நேர்கோட்டுத் துண்டங்கள் முறையே $\vec{P}$, $\vec{Q}$ என்ற இரு திசையிகளைக் குறிப்பிடுமானால், இவ்விரு திசையிகளின் கூட்டுத் திசையியாகிய $(\vec{P} + \vec{Q})$ என்பது $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ ஆகியவற்றை அடுத்துள்ள பக்கங்களாகக் கொண்டு வரையப்படும் $ABDC$ என்னும் இணைகரத்தின் மூலைவிட்டமாகிய $\vec{AD}$-யால் குறிப்பிடப்படும் என்பதே இணைகர விதியாகும்.

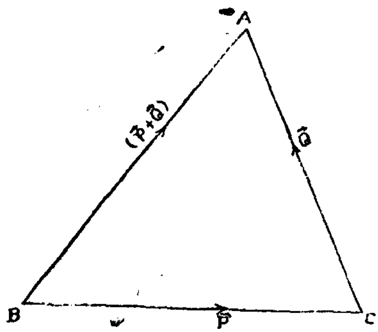


படம் 1

முக்கோண விதி

$\vec{P}, \vec{Q}$ ஆகிய இரு திசையிகள் ABC என்ற முக்கோணத்தின் இரு பக்கங்களாகிய $\vec{AB}, \vec{BC}$ ஆகியவற்றால் குறிப்பிடப்பட்டால் அவ்விரு திசையிகளின் கூட்டலாகிய $(\vec{P}+\vec{Q})$ என்பது அம் முக்கோணத்தின் மூன்றாவது பக்கமாகிய $\vec{AC}$-யால் அளவிலும் திசையிலும் குறிப்பிடப்படும்.

$\vec{P}, \vec{Q}$ ஆகிய திசையிகள் ஒரே திசையைக் கொண்டிருப்பின் $(\vec{P}+\vec{Q})$ என்ற கூட்டுத் திசையியானது $(P+Q)$ என்ற அளவையும், $\vec{P}, \vec{Q}$ ஆகிய திசையிகளின் பொதுத் திசையையும்



படம் 2

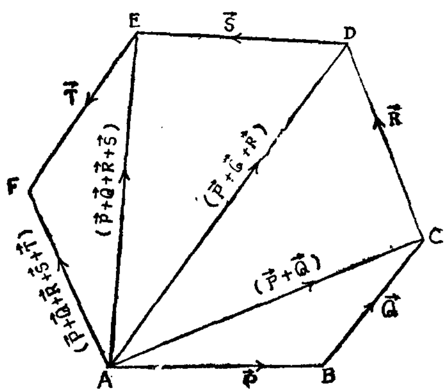
கொண்டிருக்கும். $\vec{P}, \vec{Q}$ ஆகியவை எதிர்த் திசைகளைக் கொண்டவையாகவும், $\vec{P}$-யின் அளவு $\vec{Q}$-வின் அளவைவிட அதிகமானதாகவுமிருப்பின் $(\vec{P}+\vec{Q})$ என்ற கூட்டுத் திசையியானது $(P-Q)$ என்ற அளவையும், $\vec{P}$-ன் திசையையும் கொண்டிருக்கும். திசையிகள் கீழ்க்காணும் இயற்கணித விதிகளை நிறைவு செய்கின்றன.

$$\vec{P}+\vec{P} = 2\vec{P}$$
$$\vec{P}+\vec{Q} = \vec{Q}+\vec{P}$$
$$m\vec{P}+n\vec{P} = (m+n)\vec{P}$$
$$m(\vec{P}+\vec{Q}) = m\vec{P}+m\vec{Q}$$
$$\vec{P}+(-\vec{Q}) = \vec{P}-\vec{Q}$$
$$\vec{P}-\vec{P} = 0$$
$$(\vec{P}+\vec{Q})+\vec{R} = \vec{P}+\vec{Q}+\vec{R} = \vec{P}+(\vec{Q}+\vec{R})$$

$\vec{P}-\vec{P}$ என்பது 0 அளவுடன் கூடிய ஒரு திசையியாகும். இது 'பூச்சியத் திசையி' (Zero vector or Null vector) என்றழைக்கப்படுகிறது. ஓர் அலகு அளவுடன் கூடிய திசையியானது 'திசையி அலகு' (Unit vector) என்றழைக்கப்படுகிறது.

திசையிப் பல்கோணம் (Polygon of Vectors)

$\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}, \vec{S}, \vec{T}$ ஆகிய திசையிகள் முறையே $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{CD}$, $\vec{DE}$, $\vec{EF}$ ஆகிய திசைகொண்ட நேர்கோட்டுத் துண்டங்களில் குறிப்பிடப்பட்டால், இவற்றின் கூட்டல் திசையியாகிய $(\vec{P} + \vec{Q} + \vec{R} + \vec{S} + \vec{T})$ என்பது $ABCDEF$ என்ற பல்கோணத்தின் $\vec{AF}$ என்ற பக்கத்திஞல் குறிப்பிடப்படும் ஒரு திசையியாகும்.



படம் 3

நிறுவல்

முக்கோண விதியின்படி,

$$\vec{P} + \vec{Q} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

$$\vec{P} + \vec{Q} + \vec{R} = (\vec{P} + \vec{Q}) + \vec{R}$$

$$= \vec{AC} + \vec{CD}$$

$$= \vec{AD}$$

$$\vec{P} + \vec{Q} + \vec{R} + \vec{S} = (\vec{P} + \vec{Q} + \vec{R}) + \vec{S}$$

$$= \vec{AD} + \vec{DE}$$

$$= \vec{AE}$$

$$\vec{P} + \vec{Q} + \vec{R} + \vec{S} + \vec{T} = (\vec{P} + \vec{Q} + \vec{R} + \vec{S}) + \vec{T}$$

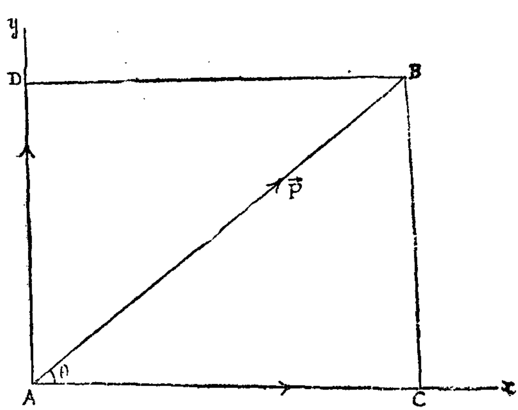
$$= \vec{AE} + \vec{EF}$$

$$= \vec{AF}$$

திசையிக் கூறுகள் (Components of a Vector)

இணைகர விதி அல்லது முக்கோண விதியின்படி இரு திசையிகள் ஒரு திசையியாகக் கூட்டப்படுதல் போன்று ஒரு திசையியை இரு வெவ்வேறு திசைகளைக் கொண்ட இரு திசையிக் கூறுகளாகப் பிரிக்கலாம். இவ்வாறு ஒரு திசையியானது இரு திசையிக் கூறுகளாகப் பிரிக்கப்படுதலுக்குத் 'திசையிப் பகுப்பு' (Resolution of a vector) என்று பெயர்.

$\vec{AB} = \vec{P}$ என்ற திசையியைக் கருதுக. A வழியே Ax, Ay என்ற இரு செங்குத்துக் கோடுகள் வரைக. $BC \parallel Ay$-ம், $BD \parallel Ax$-ம் Ax, Ay ஆகியவற்றை முறையே C, D ஆகிய புள்ளி



படம் 4

களில் வெட்டுமாறு வரைக. $\vec{AC}$, $\vec{AD}$ என்பன $\vec{AB} = \vec{P}$-ன் திசையிக் கூறுகளெனப்படும்; ஏனெனில், இணைகர விதியின்படி,

$$\vec{AC} + \vec{AD} = \vec{AB} \text{ ஆகும்.}$$

மேலும் $B\hat{A}C = \theta$ எனில்,

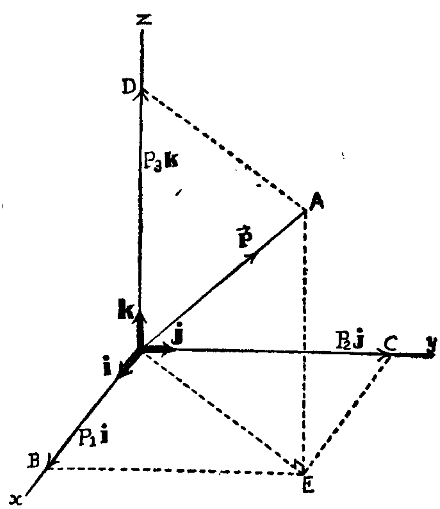
$$AC = AB \cos\theta = P \cos\theta,$$

$$AD = CB = AB \sin\theta = P \sin\theta.$$

இவ்வாறு, $\vec{P}$ என்ற ஒரு திசையியை $P \cos\theta$, $P \sin\theta$ ஆகிய அளவுகள் கொண்ட இரு செவ்வகத் திசையிக் கூறுகளாகப் (Rectangular component vectors) பிரிக்கலாமென்று அறிகிறோம்.

கூற்றுத் திசையி அலகுகள் (Unit Coordinate Vectors)

ஏதேனுமொரு குறியீட்டச்சில் $O - xyz$ என்ற செங்குத்து அச்சுகளை எடுத்துக்கொண்டு Ox, Oy, Oz ஆகிய அச்சுகளில் முறையே **i**, **j**, **k** என்ற திசையி அலகுகளை (Unit vectors) நேர்த் திசைகளில் (Positive directions) எடுத்துக் கொள்க.



படம் 5

$\vec{OA} = \vec{P}$ என்ற திசையியைக் கருதுக. A-லிருந்து xOy தளத்திற்கு AE என்ற செங்குத்துக் கோடு வரைந்து, $EB \parallel Oy$,

$EC \parallel Ox$ என்ற நேர்கோடுகள் Ox, Oy ஆகிய அச்சுகளை முறையே B, C என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுமாறு வரைக. Oz-ல் $OD=EA$ இருக்குமாறு D என்ற புள்ளியைக் குறிக்கவும். இப்பொழுது, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$, $\vec{OD}$ என்பன. $\vec{OA}$ என்ற திசையியின் மூன்று திசையிக் கூறுகளாகும். எவ்வாறெனில், இணைகர விதியின்படி,

$$\vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OE}$$

$$\vec{OE} + \vec{OD} = \vec{OA}$$

அதாவது, $\vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{OA}$

இப்பொழுது, $OB = P_1$, $OC = P_2$, $OD = P_3$ என்க.

$$\therefore \quad \vec{OB} = P_1\mathbf{i}, \vec{OC} = P_2\mathbf{j}, \vec{OD} = P_3\mathbf{k}$$

எனவே, $\vec{\mathbf{P}} = P_1\mathbf{i}, + P_2\mathbf{j}, + P_3\mathbf{k}$ என்று காண்கிறோம்.

மேலும், $OA^2 = OE^2 + AE^2$

$$= (OB^2 + BE^2) + OD^2$$

$$= OB^2 + OC^2 + OD^2$$

அதாவது, $P^2 = P_1{}^2 + P_2{}^2 + P_3{}^2$

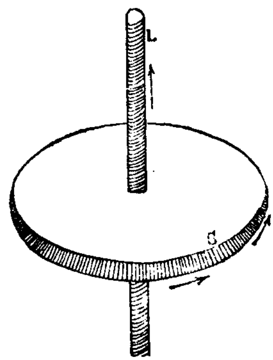
அல்லது, $P = \sqrt{P_1{}^2+P_2{}^2+P_3{}^2}$

அதாவது. $|\vec{P}| = \sqrt{P_1{}^2+P_2{}^2+P_3{}^2}$.

நேர் சுழற்சி (Positive Rotation)

மேல்நோக்கி அமைந்துள்ள L என்னும் திருகாணியின் மீது பொருத்தப்பட்டுள்ள S என்னும் திருகு (screw) வலக்கை வசமாகச் (Right hand direction) சுழற்றப்படுமானல் அத் திருகு, திருகாணியின் மீது மேல்நோக்கிய திசையில் நகருமென்றும், இடக்கை வசமாகச் (Left hand direction) சுழற்றப் படுமானல் அத் திருகு, திருகாணியின் மீது கீழ்நோக்கி நகருமென்றும் நாமறிவோம். இவ்வாறு, மேல்நோக்கி அமைந் துள்ள ஒரு திருகாணியின்மீது அதே திசையில் (அதாவது மேல் நோக்கிய திசையில்) நகருமாறு திருகு சுழற்றப்படுகின்ற

வலக்கை வசச் சுழற்சி (Right handed Rotation)க்கு "நேர் சுழற்சி" (Positive Rotation) என்று பெயர். மாறுக, மேல் நோக்கிய திருகாணியின் மீது கீழ் நோக்கி நகருமாறு திருகு சுழற்றப்படுகின்ற இடக்கை வசச் சுழற்சி (Left handed Rotation)க்கு "எதிர்ச் சுழற்சி" (Negative Rotation) என்று பெயர். அதாவது, திசை கொண்ட ஒரு நேர்கோட்டுத் துண் டத்தை அச்சாகக் கொண்டு சுழற்றப்படும் ஒரு சுழற்சி



படம் 5 (அ)

யானது, அத்தகைய சுழற்சியின் மூலம் ஒரு திருகாணியை அந் நேர்கோட்டுத் துண்டத்தின் திசையிலேயே நகர்த்தக் கூடியதா யிருப்பின் நேர் சுழற்சி என்றும், எதிர்த் திசையில் நகர்த்தக் கூடியதாயிருப்பின் எதிர்ச் சுழற்சி என்றும் அழைக்கப்படு கின்றது.

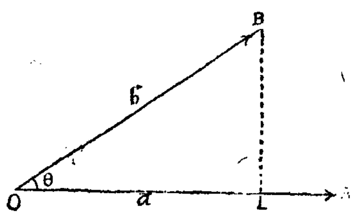
வலக்கை முறை, இடக்கை முறை அச்சுக்கள் (Right handed and Left handed axes)

படம் 5-இல் குறிப்பிடப்பட்டுள்ள O-xyz என்ற செங் குத்து அச்சுத் தொகுதியைக் கருதுக. Ox என்னும் Oy-அச்சி லிருந்து x- என்னும் y- அச்சை நோக்கி ஒரு நேர் கோணத்தில் திருப்பப்படுகின்ற சுழற்சியானது, Oz என்னும் மேல் நோக்கிய z-அச்சைப் பொறுத்து நேர் சுழற்சியாகயிருப்பதால், O-xyz என்னும் இவ்வச்சுத் தொகுதியானது வலக்கை முறை அச்சுக் கள் (Right handed axes) எனப்படும் மாறுக, இவ்வச்சுத் தொகுதியினை O-yxz என்ற வரிசையிலெடுத்துக் கொண்டால், Oy என்னும் y-அச்சிலிருந்து Ox என்னும் x-அச்சை நோக்கி ஒரு நேர் கோணத்தில் திருப்பப்படுகின்ற சுழற்சியானது Oz என்னும் மேல் நோக்கிய z-அச்சைப் பொறுத்து எதிர்ச் சுழற்சி

யாகயிருக்குமாதலின், O-yxz என்னும் இவ்வச்சுத் தொகுதி யானது இடக்கை முறை அச்சுக்கள் (Left handed axes) ஆகும். ஆகவே, Ox, Oy, Oz ஆகிய அச்சுக்களின் மீது குறிப்பிடப் பட்டுள்ள **i,j,k**, என்ற திசையி அலகுகள் வலக்கை முறையில மையப் பெற்ற திசையி அலகுகளாகும். மேலும் **i j,k**, என்ற திசையி அலகுகள் வலக்கை முறையிலமையப் பெற்றதாயின், **j,i,k** என்பன இடக்கை முறையிலமைந்திருக்குமென்றறிக இந்நூலில் வலக்கை முறை அச்சுக்களே குறியீட்டசுக்களாக எடுத்துக் கொள்ளப்படுகின்றன.

திசையிலிப் பெருக்கம் அல்லது புள்ளிப் பெருக்கம் (Scalar Product or Dot Product)

a, b என்னும் அளவுகளையும், θ என்னும் இடைக் கோணத் தையும் கொண்ட $\vec{a}$, $\vec{b}$ என்னும் இருதிசையிக்களின் "திசை யிலிப் பெருக்கம்" அல்லது "புள்ளிப் பெருக்கம்" என்பது $ab \cos\theta$ என்னும் திசையிலி யென வரையறுக்கப்படுகிறது. இப்பெருக்கமானது $\vec{a} \cdot \vec{b}$ என்று குறிப்பிடப்படுகின்றது.



படம் 6

அதாவது, $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos\theta$ ஆகும்.

$\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$ என்ற இரு திசையிக்களுக்கிடையே யுள்ள கோணம் θ என்க.

$$\therefore \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{OA} \cdot \vec{OB}$$
$$= (OA)\,(OB) \cos\theta$$
$$= (OA)\,(OB \cos\theta)$$
$$= (OA)\,(OL),\ BL \perp OA.$$

$= OA \cdot OA$யின் மீது OBயின் வீச்சு (Projection)

குறிப்பு 1. $\vec{b} \cdot \vec{a} = ba \cos \theta = ab \cos \theta = \vec{a} . \vec{b}$

குறிப்பு 2. $\vec{a} \; (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

குறிப்பு 3. $\theta = 0$ எனில், $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos 0 = ab$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \text{ எனில், } \vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

ஆகவே, $\vec{a} \cdot \vec{a} = a \cdot a \cos 0 = a^2$

இதுபோல், $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$

மேலும், i, j, k ஆகிய திசையிி அலகுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக அமைந்திருப்பதால்,

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0 = \mathbf{j} \cdot \mathbf{i},$$
$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{j},$$
$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0 = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k}$$

ஆகும்.

ஆகவே,

$$\vec{a} = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}, \quad \vec{b} = b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}$$

என்பன இரு திசையிக்களெனில்,

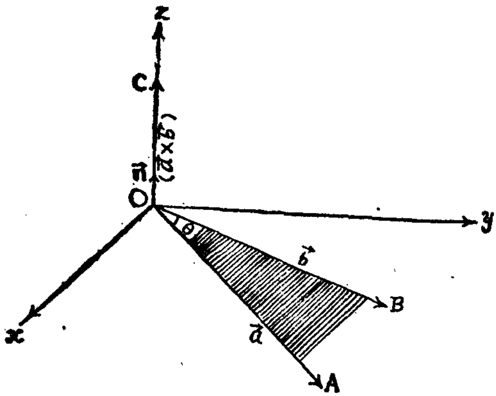
$$\vec{a} . \vec{b} = (a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_8 \mathbf{k}) - (b_1 \mathbf{i} = b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}$$
$$= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

ஆகும். இப் பெருக்கம் ஒரு திசையிலி யென்பதை அறிந்து கொள்க.

திசையிப் பெருக்கம் அல்லது குறுக்குப் பெருக்கம் (Vector Product or Cross Product)

a, b என்னும் அளவுகளும் θ என்னும் இடைக் கோணமும் கொண்டு $\vec{a} = \vec{OA}$, $\vec{b} = \vec{OB}$ என்னும் இரு திசையிக்களை எடுத்துக் கொள்க. இவ்விரு திசையிக்களும் அமைந்துள்ள AOB என்னும் தளத்திற்குச் செங்குத்தாக இருக்குமாறு OZ

என்னும் திசையில் $\vec{n}$ என்னும் ஒரு திசையி அலகினை $\vec{a}, \vec{b}, \vec{n}$ என்பன ஒரு வலக்கை முறை திசையித் தொகுதியாக அமையு மாறு எடுத்துக் கொள்க.



படம் 7

இப்பொழுது, $\vec{a}, \vec{b}$ ஆகிய இரு திசையிக்களின் திசையிப் பெருக்கம் (Vector Product) அல்லது குறுக்குப் பெருக்கம் (Cross Product) என்பது $O\,Z$ திசையிலமைந்துள்ள ab Sinθ என்னும் அளவுடன் கூடிய ab Sin θ $\vec{n}$ என்னும் திசையியாகும் என்று வரையறுக்கப்படுகிறது. இத் திசையிப் பெருக்கமானது $\vec{a} \times \vec{b}$ என்று எழுதப்படுமாதலின்,

$$\vec{a} \times \vec{b} = ab \operatorname{Sin} \theta \; \vec{n}$$

ஆகும். $\vec{a}, \vec{b}, \vec{n}$ என்பன வலக்கை முறையிலமைந்திருப்பதால் $\vec{a}, \vec{b}$ ஆகிய இரு திசையிக்களுக்கிடையேயுள்ள கோணம் இரு நேர் கோணங்களுக்குக் குறைவாகயிருப்பின், $\vec{a}$-யிலிருந்து $\vec{b}$-ஐ நோக்கிந் திருப்பப்படுகின்ற சுழற்சியானது $\vec{n}$ என்னும் திசையி யைப் பற்றிய நேர் சுழற்சியாகும் என்பது திசையிப் பெருக்க வரையறையிலிருந்து தெளிவாக விளங்கும். அதாவது, $\vec{a}$

என்னும் திசையிலிருந்து $\vec{b}$ என்னும் திசையியை நோக்கி இரு நேர் கோணங்களுக்குக் குறைவாகத் திருப்பப்படுகின்ற சுழற்சியானது $\vec{a} \times \vec{b}$ என்ற திசையியைப் பற்றிச் சுழலுகின்ற நேர் சுழற்சியாகும். ஆகவே, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{n}$ ஆகியவை வலக்கை முறையிலமைந்திருப்பின் $\vec{a} \times \vec{b}$ என்னும் திசையிப் பெருக்கம் நேரடையாளமுடையதாகவும், இடக்கை முறையிலமைந்திருப்பின், $\vec{a} \times \vec{b}$ என்னும் திசையிப் பெருக்கம் எதிரடையாளமுடையதாகவும் கொள்ளப்படுகிறது. OZ-இன் மீது ab Sin θ என்னும் அளவுடைய OC என்னும் நேர்கோட்டுத் துண்டத்தை யெடுத்துக் கொள்வோமானால்,

$$\vec{OC} = ab \sin \theta \, \vec{n}$$

ஆகும். ஆகவே,

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{OC}$$

ஆகும்.

குறிப்பு 1 : $\vec{a} \times \vec{b}$ என்ற திசையிப் பெருக்கமானது ab Sinθ $\vec{n}$ என்னும் திசையியாகும். இத் திசையிப் பெருக்கத்தின் அளவு ab Sin θ ஆகும். இது $\vec{a}, \vec{b}$ ஆகிய திசையிக்களை அடுத்துள்ள பக்கங்களாகக் கொண்ட இணைகரத்தின் பரப்பிற்குச் சமமாகும்.

குறிப்பு 2 : $\vec{a}, \vec{b}, \vec{n}$ என்பன வலக்கை முறையிலமைந்திருப்பதால், $\vec{b}, \vec{a}, \vec{n}$ என்பன இடக்கை முறையிலமைந்திருக்கும். எனவே, $\vec{a} \times \vec{b}$ என்பது நேரடையாளமுடையதாகவும், $\vec{b} \times \vec{a}$ என்பது எதிரடையாளமுடையதாகவும் கொள்ளப்படும்.

ஆகவே,

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

ஆகும்.

குறிப்பு 3 : $\theta = 0$ எனில், $\vec{a} \times \vec{b} = ab \operatorname{Sin} 0 \ \vec{n} = 0$

$\theta = \frac{\pi}{2}$ எனில், $\vec{a} = \vec{b} = ab \operatorname{Sin} \frac{\pi}{2} \vec{n}\, ab \cdot n;$

அல்லது, $|\vec{a} \times \vec{b}| = |ab \cdot \vec{n}| = ab.$

ஆகவே, $\vec{a} \times \vec{a} = (a)(a) 0 \cdot \vec{n} = 0$ ஆகும்.

குறிப்பு 4 : $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0.$

மற்றும், i, j, k என்பன முறையே Ox, Oy, Oz என்னும் வலக்கை முறை அச்சுக்களில் எடுத்துக் கொள்ளப்பட்ட திசையி அலகுகளாதலின், அவை மூன்றும் ஒரு வலக்கை முறை திசையி அலகுத் தொகுதியாகும். மேலும், அவை மூன்றும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக யிருப்பதால்,

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = 1.1.\mathbf{k} = \mathbf{k}$$

ஆகும். இதுபோல், $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$; $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$ என்பது காணலாம்.

தவிர, $\mathbf{j}, \mathbf{i}, \mathbf{k}$ என்பன ஒரு இடக்கை முறை திசையி அலகுத் தொகுதியாகுமாகையால்,

$$\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{i} \times \mathbf{j} = -\mathbf{k},$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{k} \times \mathbf{i} = -\mathbf{j},$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{j} \times \mathbf{k} = -\mathbf{i}$$

என்று காணலாம்.

குறிப்பு 5 : $\vec{a} = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}$, $\vec{b} = b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}$ எனில்,

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}) \times (b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k})$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2)\mathbf{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\mathbf{k}$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

என்று காணலாம்.

முப்பெருக்கிகள் (Triple Products)

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ என்பன மூன்று திசையிக்களெனில், $\vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c})$ என்பது அத் திசையிக்களின் "திசையிலி முப்பெருக்கி" (Scalar triple product) என்றும், $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ என்பது அவற்றின் "திசையி முப்பெருக்கி" (Vector triple product) என்றும் வரையறுக்கப்பட்டுள்ளன.

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (a_1\,\mathbf{i} + a_2\,\mathbf{j} + a_3\,\mathbf{k}). \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_3 & \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \mathbf{c}_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

ஆகவே, திசையிலி முப்பெருக்கியானது ஒரு திசையிலிக் கணியம் (Scalar quantity) யென்று காணலாம்.

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (a_1\,\mathbf{i} + a_2\,\mathbf{j} + a_3\,\mathbf{k}) \times \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$\vec{a}$, $(\vec{b} \times \vec{c})$ ஆகியவை திசையிக்களாதலின், அவற்றின் திசையிப் பெருக்கமும் ஒரு திசையிக் கணியம் (Vector qnantity) ஆகும்.

மாதிரி 1 : $\vec{a} = 2\,\mathbf{i} + 10\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$, $\vec{b} = 3\,\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$,

$\vec{c} = 2\,\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}$ என்றால் $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c})$ என்ன?

(மதுரை பி. எஸ் ஸி. 1973 ஏப்.)

தீர்வு : $\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

$= \mathbf{i} - 5\mathbf{j} + \mathbf{k}$

$\therefore \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (2\mathbf{i} + 10\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) \times (\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + \mathbf{k})$

$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 10 & 2 \\ 1 & -5 & 1 \end{vmatrix}$

$= 20\mathbf{i} - 20\mathbf{k}$

$= 20(\mathbf{i} - \mathbf{k})$

மாதிரி 2 : $\vec{\alpha} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\vec{\beta} = \mathbf{i} - \mathbf{k}$, $\vec{\gamma} = 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\vec{\delta} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, என்றால் $(\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \cdot (\vec{\gamma} \times \vec{\delta})$ஐக் கணக்கிடுக. (சென்னை பி. எஸ். ஸி, 1969 ஏப்.)

தீர்வு : $\vec{\alpha} \times \vec{\beta} = (3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}) \times (\mathbf{i} + 0\mathbf{j} - \mathbf{k})$

$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

$= -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

$= -2(\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k})$

$\gamma \times \delta = (0\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}) \times (3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k})$

$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$

$= -3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$

$= -3(\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k})$

$\therefore (\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \cdot (\vec{\gamma} \times \vec{\delta}) = -2(\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}) \cdot -3(\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k})$

$= 6(\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}) \cdot (\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k})$

$$= 6(1 - 1 + 2)$$
$$= 12$$

மாதிரி 3 : $\vec{a} = \mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} - 2\,\mathbf{k}$, $\vec{b} = 2\,\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$ என்ற திசையிக்கள் செங்குத்தானவை யென்று காட்டுக.

(மதுரை பி. எஸ். ஸி. 1972 ஏப்.)

தீர்வு : $\vec{a} \cdot \vec{b} = (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\,\mathbf{k}) \cdot (2\,\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\,\mathbf{k})$
$$= 2 + 2 - 4$$
$$= 0$$

ஆனல் $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos\theta$

$$\therefore ab\cos\theta = 0$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{2}$$

$\therefore \vec{a}, \vec{b}$ ஆகிய இரு திசையிக்களும் செங்குத்தான்வை.

மாதிரி : 4. $2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$ ஆகிய திசையிக்கள் ஒவ்வொன்றுடனும் செங்குத்தாக அமைந்த ஒரு திசையி அலகைக் காண்க.

(மதுரை பி.எஸ்ஸி. 1972 ஏப்.)

தீர்வு : $\vec{a} = (2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k})$, $\vec{b} = (3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k})$ என்க. எனில்,

$$\vec{a} \times \vec{b} = ab\sin\theta \cdot \vec{n}$$

$$\therefore \vec{n} = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{ab\sin\theta}$$

ஆனல் $ab\sin\theta$ என்பது $(\vec{a} \times \vec{b})$ இன் எண்ணளவை (modulus) ஆகும்.

$$\therefore \quad ab \sin\theta = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$$

ஆகவே, திசையி அலகு $\vec{n} = \dfrac{\vec{a} \times \vec{b}}{\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|}$

இப்பொழுது, $\vec{a} \times \vec{b} = (2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}) \times (3\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k})$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 11\,\mathbf{k}$$

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \sqrt{9 + 25 + 121}$$

$$= \sqrt{155}$$

$\therefore$ செங்குத்துத் திசையி அலகு $= \dfrac{-3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 11\mathbf{k}}{\sqrt{155}}$

மாதிரி : 5. $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ எனும் இரு வெக்டர்களில் A, B, C என்ற புள்ளிகளின் நிலைவெக்டர்கள் முறையே $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ ஆகும். இரு வெக்டர்களுக் கிடையேயுள்ள கோணத்தைக் கணக்கிடுக.

(மதுரை பி.எஸ்ஸி. 1972 ஏப்.)

குறிப்பு : $O - xyz$ என்ற அச்சுக்களைக் கொண்ட ஏதேனு மொரு குறியீட்டச்சைக் குறித்து நகர்ந்து செல்லும் P என்னும் ஒரு துகளைக் கருதுக. $\vec{OP}$ என்ற திசையியானது அத்துளி களின் " Oஐச் சார்ந்த திசையிநிலை அல்லது வெக்டர்நிலை " (Position Vector of P relative to O) ஆகும். $\vec{OP} = \vec{r}$ என்றும் Pயின் அச்சுத் தூரங்கள் (x, y, z) என்று கொண்டால்,

Pயின் திசைநிலை (வெக்டர் நிலை) $= \vec{r} = \vec{OP} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ஆகும். இதன் எண்ணளவை $OP = \left|\vec{r}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ஆகும்.

தீர்வு : Aயின் வெக்டர் நிலை $= \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ ஆகையால்,

$$\overrightarrow{OA} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k} \text{ ஆகும்.}$$

இதுபோல்,

$$\overrightarrow{OB} = 2\mathbf{j} + \mathbf{k},$$

$$\overrightarrow{OC} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

$$= (2\mathbf{i} + 3\mathbf{k}) - (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k})$$

$$= \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$$

$$= (3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}) - (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k})$$

$$= 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

$$\therefore \quad \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{1 + 4 + 16} = \sqrt{21}$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{4 + 9 + 9} = \sqrt{22}$$

$$\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AC} = (\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) . (2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k})$$

$$= 2 + 6 + 12$$

$$= 20$$

ஆனால் $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ ஆகியவற்றிற்கிடையே யுள்ள கோணம் θ எனில்,

$$\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \left|\overrightarrow{AC}\right| \cos\theta$$

$$\therefore \quad \cos\theta = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \left|\overrightarrow{AC}\right|}$$

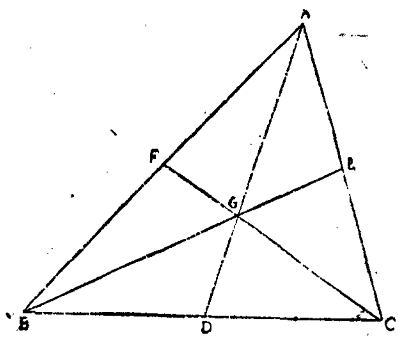
$$= \frac{20}{\sqrt{21}\sqrt{22}}$$

$$= \frac{20}{\sqrt{462}}$$

$$\therefore \theta = \cos^{-1}\left(\frac{20}{\sqrt{462}}\right)$$

மாதிரி 6 : G என்பது $\triangle ABC$யின் திணிவு மையம் (centroid) எனில், $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = O$ என நிறுவுக.

தீர்வு : AD, BE, CF என்ற மையக்கோடுகளை வரைக. Gஐ ஆதியாக எடுத்துக் கொள்க.



படம் 8

$$\vec{GB} + \vec{BD} = \vec{GD}$$

$$\vec{GC} + \vec{CD} = \vec{GD}$$

$$\therefore \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{BD} + \vec{CD} = 2\vec{GD}$$

ஆனால் $BD = DC$ ஆகையால், $\vec{BD} = \vec{DC} = -\vec{CD}$ ஆகும்.

அல்லது, $\vec{BD} + \vec{CD} = O$

$$\therefore \vec{GB} + \vec{GC} = 2\vec{GD}$$

மேலும், G என்பது திணிவு மையமாகையால், $\vec{AG} = 2\vec{GD}$ ஆகும்

$$\therefore \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{AG}$$

$$= -\overrightarrow{GA}$$

அல்லது. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = O.$

வேகமும் திசை வேகமும் (Speed and Velocity)

ஒரு துகள் A என்ற புள்ளியிலிருந்து B என்ற புள்ளிக்கு நகர்ந்து செல்லுமெனில், $\overrightarrow{AB}$ என்பது அத்துகளின் இடப்பெயர்ச்சி (displacement) யாகுமென்று கண்டோம். ஒரு அலகு காலத்தில் ஒரு துகள் செல்லும் தூரமானது அத்துகளின் சராசரி வேகம் (Average speed) ஆகும். $AB = s$ என்னும் தூரத்தை P என்னும் துகள் t என்னும் காலத்தில் கடந்து சென்றால் அதன் சராசரி வேகம் $\frac{s}{t}$ ஆகும். இச்சராசரி வேகமானது ஒரு திசையிலியாகும். அதற்குத் திசை கிடையாது. திசையையும் குறிப்பிடுகின்ற வேகம் "திசை வேகம்" (Velocity) என்றழைக்கப்படுகின்றது. இது பெரும்பாலும் $\overrightarrow{V}$ என்று குறிக்கப்படுகின்றது. அதாவது, திசை வேகமானது இடப் பெயர்ச்சியின் மாறுபாட்டு வீதமாகும். இடப்பெயர்ச்சியென்பது ஒரு திசையி ஆகையால் திசை வேகமும் ஒரு திசையியாகும்.

$\overrightarrow{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ என்பது P என்ற துகளின் திசையிநிலையெனில் அதன் திசை வேகத்தை t என்னும் காலத்தைப் பொறுத்த $\overrightarrow{r}$ இன் வகையீட்டுத் குணகத்தின் (Differential coefficient of $w. r. t. t.$) மூலம் கணக்கிடலாம்.

$$\text{அதாவது, } \overrightarrow{V} = \frac{d\overrightarrow{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\,\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\,\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\,\mathbf{k},$$

அல்லது, $\overrightarrow{V} = \dot{\overrightarrow{r}} = \dot{x}\,\mathbf{i} + \dot{y}\,\mathbf{j} + \dot{z}\,\mathbf{k}$ என்பது P என்ற துகளின் திசைவேகத்தைக் குறிப்பிடும். $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ என்பன $\overrightarrow{V}$ இன் கூறுகயாகும்.

முடுக்கம் (Acceleration)

ஒரு துகளின் திசைவேகம் காலத்தைப்பொறுத்து அதிகரித்துக்கொண்டிருக்குமானால் அத்திசை வேகத்தின் மாறுவீத

மானது (Rate of change of Velocity) அத்துகளின் முடுக்கம் (Acceleration) என்றழைக்கப்படுகின்றது. இது பெரும்பாலும் $\vec{a}$ என்று குறிப்பிடப்படுகின்றது. ஆனால், $\vec{V}$ என்பது ஒருதிசையியாகையால் $\vec{a}$ யும் ஒரு திசையியாகும். $\vec{V}$ என்ற திசைவேகத்தின் வளர்ச்சி வீதத்தை $\dot{\vec{V}}$ அல்லது $\frac{d\vec{v}}{dt}$ என்ற t ஐப்பொறுத்த $\vec{V}$ இன் வகையீட்டுக் குணகத்தின் மூலம் காணலாம்.

ஆகவே,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{db}\,\mathbf{i} + \frac{dv}{dt}\,\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\,\mathbf{k}\right)$$

$$= \frac{d^2x}{dt^2}\,\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\,\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\,\mathbf{k}.$$

ஆகும். அதாவது,

$$\vec{a} = \dot{\vec{V}} = \ddot{x}\,\mathbf{i} + \ddot{y}\,\mathbf{j} + \ddot{z}\,\mathbf{k}$$

ஆகும். $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$ என்பன அம்முடுக்கத்தின் கூறுகளாகும்.

வேக அலகுகள் (units of velocity)

வினாடிக்கு ஒரு சென்டி மீட்டர் இடப் பெயர்ச்சி வீதம் நகர்ந்து செல்லும் ஒரு துகளின் வேகம் செ. கி. வி முறையில் ஒரு அலகு வேகமாகக் கொள்ளப்படுகிறது. இது சுருக்கமாக 1 செ.மீ. /வினாடி அல்லது 1 செ.மீ.வி$^{-1}$ என்று குறிக்கப்படுகின்றது. வினாடிக்கு ஒரு அடி இடப்பெயர்ச்சி வீதம் நகர்ந்து செல்லும் ஒரு துளிகளின் வேகம் அ. ரா. வி. முறையில் ஒரு அலகு வேகமாகக் கொள்ளப்படுகிறது. இது சுருக்கமாக 1 அடி /வினாடி அல்லது 1 அடி.வி.$^{-1}$ என்று குறிக்கப்படுகிறது.

முடுக்க அலகுகள் (units of Acceleration)

வினாடிதோறும் 1 செ.மீ. / என்ற வீதத்தில் அதிகரித்துக் கொண்டிருக்கும் திசை வேக வளர்ச்சி வீதம் செ.கி.வி. முறை

யில் ஒரு அலகு முடுக்கமாகக்கொள்ளப்படுகிறது. இது சுருக்கமாக 1 செ மீ./ (வினுடி)^2 அல்லது 1செ.மீ./வி^{2} அல்லது 1செ மீ. வி$^{-2}$ என்று குறிப்பிடப்படுகின்றது. வினுடிதோறும் 1 அடி / (விஞடி) என்ற வீதத்தில் அதிகரித்துக் கொண்டிருக்கும் திசை வேக வளர்ச்சி வீதம் அ.ரா.வி முறையில் ஒரு அலகு முடுக்கமாகக் கொள்ளப்படுகிறது. இது சுருக்கமாக 1 அடி/ (விஞடி)^2 அல்லது 1 அடி/வி^{2} அல்லது 1 அடி/வி$^{-2}$ என்று குறிப்பிடப்படுகின்றது. மேற்கண்டவை வேகம், முடுக்கம் ஆகியவற்றின் அலகுகளாகக் கொள்ளப்பட்ட போதிலும் வேகமானது மைல்/மணி அல்லது கிலோ மீட்டர்/மணி என்ற அலகுகளின் மூலமே பெரும்பாலும் குறிப்பிடப்படுகின்றன.

விசையின் அலகுகள் (units of Force)

ஒரு அலகுப் பொருண்மையில் ஒரு அலகு முடுக்கத்தை விளைவிக்கின்ற விசையானது ஒரு அலகு விசையென்று வரையறுக்கப்படுகிறது. செ.கி.வி. முறையில் ஒரு அலகு விசையென்பது ஒரு "டைன்" (dyne) என்றும், அ.ரா.வி. முறையில் ஒரு அலகு விசையென்பது ஒரு ராத்தலி அல்லது பவுண்டல் (poundal) என்றும் அழைக்கப்படுகின்றன. ஆகவே, ஒரு டைன் என்பது ஒரு கிராம் நிறையுள்ள ஒரு சடப்பொருளில் 1 செ.மீ./வி^{2} என்ற முடுக்கத்தை விளைவிக்கத் தக்க ஆற்றலுடைய விசையாகும். ஒரு ராத்தலியென்பது ஒரு ராத்தல் பொருண்மையுள்ள ஒரு சடப் பொருளில் 1அடி/வி^{2} என்ற முடுக்கத்தை விளைவிக்கத்தக்க ஆற்றலுடைய விசையாகும். இவ்வலகுகளுக்குத் தனியலகுகள் (Absolute units) என்று பெயர்.

உந்தம் (Momentum)

இயக்கத்திலிருக்கும் ஒரு துகளின் உந்தம் என்பது அத்துகளின் பொருண்மை, திசைவேகம் ஆகியவற்றின் பெருக்கம் என்று வரையறுக்கப்படுகின்றது. m எனும் பொருண்மையுள்ள ஒரு துகள் $\vec{V}$ எனும் திசை வேகத்துடன் இயங்கிக்கொண்டிருப்பின் அத்துகளின் உந்தம் $m\vec{V}$ ஆகும் திசைவேகம் v ஆனது ஒரு திசையியாகையால் உந்தமும் ஒரு திசையியாகும்.

நியூட்டனின் இயந்திரவியலின் அடிப்படை விதிகள் (Fundamental Laws of Newtonian Mechanics)

துகள்களின் இயக்கம் பற்றிய தத்துவங்களை முதன் முதலில் கலீலியோ என்னும் அறிஞர் பரிசோதனைகள் மூலம்

செய்து காட்டிய போதிலும் சா. ஐசக் நியூட்டன் என்னும் அறிஞரே அத்தத்துவங்களை மூன்று விதிகளாக வரையறுத்துக் கூறியவராவர். நியூட்டனின் அம் மூன்று இயக்க விதிகளே இயந்திரவியல் என்ற அறிவியலுக்கு அடிப்படையாக அமைந்துள்ளன. இதன் காரணமாகவே இவ்வறிவியல் "நியூட்டனின் இயந்திரவியல்" என்றும் அழைக்கப்படுகின்றது. இவ்வளவு முக்கியத்துவம் வாய்ந்த நியூட்டனின் மூன்று விதிகள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

முதல் விதி

ஓய்வு நிலையிலிருக்கின்ற அல்லது ஒரு நேர்கோட்டில் சீரான இயக்கத்துடன் இயங்கிக் கொண்டிருக்கின்ற ஒவ்வொரு துகளும் புறவிசைகளின் தாக்குதலினால் தன் நிலையை மாற்றிக் கொள்ளப் பலவந்தப்படுத்தப்பட்டாலொழிய தொடர்ந்து அந்நிலையிலேயே இருந்து வரும்.

எந்தத் துகளாலும் தன் நிலையைத் தானாகவே மாற்றிக் கொள்ள இயலாது. இவ்வாறு துகள்களின் தன்னிலை மாற்றிக் கொள்ள இயலாத் தன்மையை "சடத்துவம்" அல்லது "நிலையம்" (Inertia) என்று சொல்லப்படுகிறது. துகள்களின் இச்சடத்துவத்தத்துவத்தையே நியூட்டனின் முதல் விதி விளக்குகிறது. மேலும், எந்தத் துகளும் ஏதேனுமொரு புறவிசையின் தாக்குதலுக்குட்படுத்தப்பட்டால் மட்டுமே தன் நிலையை மாற்றிக் கொள்ள இயலுமென்றும் முதல் விதியிலிருந்து அறியப்படுகிறது. ஆகவே, முதல் விதியினுதவியால் விசையென்பது பின் வருமாறு வரையறுக்கப்படுகின்றது.

"ஒரு துகளின் மீது செயல்பட்டு அத்துகளின் ஓய்வு நிலையை அல்லது ஒரு நேர் கோட்டிலுள்ள அதன் சீரியக்கத்தை மாற்றுகின்ற அல்லது மாற்ற முயலுகின்ற வினையே விசை (Force) யாகும்."

இரண்டாம் விதி

ஒரு விசையின் தாக்குதலுக்குள்ளான ஒரு துகளின் உந்த மாறு வீதம் (Rate of change of momentum) அவ்விசைக்கு விகித சமமாயிருப்பதோடு அவ்விசையின் செயற்கோட்டிலேயே செயல்படும்.

m என்னும் பொருண்மையுள்ள ஒரு துகள் v என்னும் திசைவேகத்துடன் நகர்ந்து கொண்டிருந்தால், அதன் உந்தம் $m\vec{V}$ என்று கண்டோம். இப்பொழுது F என்னும் ஒரு விசையினால்

அத்துகள் t என்னும் காலத்திற்குத்தாக்கப்பட்டால் அப்பொருளின் திசைவேகம் மாறுதலடையும். ஆகவே, அத்துகளின் உந்தமும் அவ்விசையின் தாக்குதலினல் மாறுபடுகிறது. இவ்வுந்த மாறுதலின் வீதமானது அவ்விசைக்கு விகித சமமாகயிருக்குமென்பதையே இரண்டாம் விதி கூறுகிறது.

$m\vec{V}$ என்பது உந்தமாதலின் $\frac{d}{dt}(m\vec{v})$ என்பது உந்தமாறு வீதத்தைக் குறிக்குமென்பது வகை நுண்கணிதத்திலிருந்து நாமறிவோம். எனவே, நியூட்டனின் இரண்டாம் விதியிலிருந்து

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) \propto \vec{F}.$$

என்று அறிகிரேம். k என்பது விகிதசம மாறிலி யெனில்,

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = k\vec{F}.$$

அதாவது, $$m.\frac{d\vec{v}}{dt} = k\vec{F},$$

ஆனல், $\frac{d\vec{v}}{dv}$ என்பது முடுக்கமாகும். இம்முடுக்கமானது $\vec{a}$ என்று குறிப்பிடப்பட்டால்,

$$m\vec{a} = k\vec{F}$$

ஆகும். இப்பொழுது ஒரு அலகு பொருண்மையுள்ள ஒரு துகளில் செயல்பட்டு ஒரு அலகு முடுக்கத்தையுண்டு பண்ணுகின்ற விசையே ஒரு அலகு விசையாகுமென்று வரையறுக்கப்பட்டால்,

$$\therefore m = 1\ a = 1\ F = 1 \text{ ஆகும்.}$$

ஆகவே, $1.1 = k\,1$, அல்லது $k = 1$ ஆகும்.

இவ்வாறு $\vec{F} = m\vec{a}$ என்னும் சூத்திரத்தைப் பெறுகிரேம். இச்சூத்திரத்திற்கு இயக்கச் சமன்பாடு (Equation of motion of a particle) என்று பெயர். இச்சூத்திரம் விசைகளை

அளவிடப் பயன்படுகிறது. மேலும், துகள்களின் பொருண்மைகளை அளவிடவும் இச்சூத்திரம் பயன்படுகிறது. எவ்வாறெனில், இரு வெவ்வேறு பொருண்மைகளையுடைய துகள்களின் மீது இரு சமமான விசைகளைச் செயல்படச் செய்து அவ்விரு பொருட்களும் பெறுகின்ற முடுக்கங்களை அளவிட்டு மேற்கண்ட சூத்திரத்தினின்றும் பெறப்படுகின்ற $m = \frac{F}{a}$ என்ற தொடர்பின் மூலம் அவ்விரு துகள்களின் பொருண்மைகளை ஒப்பிடலாம். அவற்றுள் ஒன்றின் பொருண்மை ஒரு அலகு இருக்குமாறு எடுத்துக்கொண்டு மற்ற துகளின் பொருண்மையைக் கணக்கிடலாம். அதுமட்டுமன்று; இச்சூத்திரத்தில் $\vec{F} = o$ எனில், $a = o$ என்று காண்கிறோம். அதாவது, ஓய்விலிருக்கின்ற அல்லது ஒரு நேர் கோட்டில் சீரியக்கத்தில் சென்று கொண்டிருக்கின்ற ஒரு துகள் புறவிசையினால் தாக்கப்படாதிருக்குமேயாயின் அதன் முடுக்கம் $\vec{a}$ பூச்சியமாகிறது. அதாவது, அத்துகள் தன்னிலையை மாற்றிக் கொள்ள இயலாது. என்னும் முதல் விதியைப் பெறுகிறோம்.

மூன்றும் விதி ஒவ்வொரு விசைத்தாக்கத்திற்கும் எப்பொழுதும் ஒரு சம எதிர் விசைத் தாக்கம் உண்டு.

A என்னும் ஒரு துகள் *B* என்னும் மற்றொரு துகளின் மீது ஏதேனுமொரு விசையினால் தாக்குதல் செய்யுமாயின் *B* யானது *A* யின் மீது அவ்விசைத் தாக்கத்திற்குச் சமமான எதிர்விசையால் தாக்குதல் செய்யுமென்று இவ்விதி கூறுகிறது. அதாவது, விசையும் எதிர் விசையும் சமமாகவும் எதிராகவுமிருக்கும் என்பது இயற்கையின் நியதி.

புவியீர்ப்பு வேக வளர்ச்சி வீதம் அல்லது ஈர்ப்பு முடுக்கம் (Acceleration due to Gravity)

நாம் ஒரு பொருளை மேல் நோக்கி எறிந்தால் அது சிறிது தூரம் மேலே சென்று பின் பூமியை நோக்கிக் கீழே விழுவதைக் காணலாம். பூமியின் ஈர்ப்புக் கவர்ச்சியின் காரணமாகவே மேல் நோக்கி எறியப்பட்ட பொருட்கள் கீழ் நோக்கி விழுகின்றன. அவ்வாறு கீழ் நோக்கி ஈர்க்கப்படுகின்ற பொருட்களின் வேகத்தில் ஒரு முடுக்கம் (Acceleration) ஏற்படுவதையும் காணலாம். இம்முடுக்கத்திற்குப் "புவியீர்ப்பு முடுக்கம்" அல்லது "புவி

யீர்ப்பு வேக வளர்ச்சி வீதம்" Acceleration due to Gravity) என்று பெயர். இப் புவியீர்ப்பு முடுக்கம் பொதுவாக *g* என்று குறிப்பிடப்படுகிறது. ஈர்ப்புக்கவர்ச்சி விதி (Law of Gravitation) யின்படி, ஒரு பொருளைத்தன் வயமிழுக்கின்ற பூமியின் ஈர்ப்புக் கவர்ச்சி விசையானது அப்பொருளின் பொருண்மைக்கு விகித சமமாக யிருக்கும். ஆகவே ஈர்ப்பு முடுக்கமானது எல்லாப் பொருட்களுக்கும் சமமாகயிருக்குமென்று அறியலாம்.

பூமியின் மேற்பரப்பில் இப்புவியீர்ப்பு முடுக்கம் இடத்துக்கு இடம் சிறிது மாறுபடக் கூடியதாகவும், பூமியிலிருந்து உயரே செல்லச் செல்ல ஈர்ப்பு முடுக்கமானது பூமியின் மையத்திலிருந்து பொருளின் தூரத்தின் தலைகீழ் வர்க்கத்திற்கேற்ப மாறுபடுமென்றும், பூமிக்குள்ளே ஈர்ப்பு முடுக்கமானது பூமியின் மையத்திலிருந்து பொருளின் தூரத்திற்கேற்ப மாறுபடுமென்றும் கணக்கிடப்பட்டுள்ளது. இப்புவியீர்ப்பு முடுக்கத்தின் மதிப்புக்கள் நில நடுக் கோட்டில் (Equator) 978 செ.மீ./வி^{2} என்றும், துருவப்பகுதிகளில் (Polar regions) 983.2 செ.மீ./வி^{2} என்றும் கணக்கிடப்பட்டுள்ள. அ.ரா.வி. முறையில் இதன் மதிப்பு 32.2 அடி/வி^{2} ஆகும். இருப்பினும், சாதாரணச் சூழ்நிலைகளில் பூமியின் மேற்பரப்பிலுள்ள எல்லா இடங்களிலும் இதன் மதிப்பு ஒரு மாறிலி (Constant) யாக யிருப்பதாகக் கொள்ளப்படுகிறது. நடை முறையில் இந்த ஈர்ப்பு மாறிலி (Gravitational Constant) யின் மதிப்பு செ.கி.வி. முறையில் 981 செ.மீ./வி^{2} என்றும், அ.ரா.வி. முறையில் 32 அடி/வி^{2} என்றும் ஏற்றுக் கொள்ளப் பட்டுள்ளது. நியூட்டனின் இரண்டாவது விதியின்படி பூமியின் மேற்பரப்பிலுள்ள m பொருண்மையுள்ள ஒரு பொருளானது mg எனும் ஈர்ப்புக் கவர்ச்சி விசையினால் பூமியின் மையத்தை நோக்கி இழுக்கப்படுகிறது. இந்த ஈர்ப்புக் கவர்ச்சி விசையையே நாம் அப்பொருளின் எடை (Weight) என்று சொல்லுகிறோம். ஆகவே, m பொருண்மையுள்ள ஒரு பொருளின் எடை mg ஆகும். எடையை w என்று குறிப்பிட்டால், $w = mg$ ஆகும். விசையின் அலகு செ.கி.வி. முறையில் டைன் என்றும், அ.ரா.வி. முறையில் ராத்தலி அல்லது பவுண்டல் என்றும் கண்டோம். ஆகவே, ஒரு பொருளின் எடை (w) யானது செ.கி.வி. முறையில் mg டைன்கள் என்றும், அ.ரா.வி. முறையில் mg ராத்தலிகள் என்றும் அறிந்து கொள்க.

தனியலகும் ஈர்ப்பலகும் (Absolute unit and Gravitational units)

நடை முறையில் ஒரு அலகு பொருண்மையுள்ள ஒரு பொருளின் எடையே ஒரு விசையாகப் பயன்பட்டுவருகிறது.

இந்த முறையலகு "ஈர்ப்பலகு" (Gravitational unit) என்று பெயர். அ.ரா.வி. முறையில் ஈர்ப்பலகு என்பது ஒரு "ராத்தல் எடை" (Pound weight) ஆகும்; அதாவது ஒரு ராத்தல் பொருண்மையுள்ள பொருளின் எடையாகும். செ.கி.வி. முறையில் ஈர்ப்பலகு என்பது ஒரு "கிராம் எடை" (Gram weight) ஆகும்; அதாவது ஒரு கிராம் பொருண்மையுள்ள பொருளின் எடையாகும். ஆகவே, முன் கூறப்பட்ட விளக்கத்தின்படி,

1 கிராம் எடை = g டைன்கள் = 981 டைன்கள்

1 ராத்தல் எடை = g ராத்தலிகள் = 32 ராத்தலிகள்.

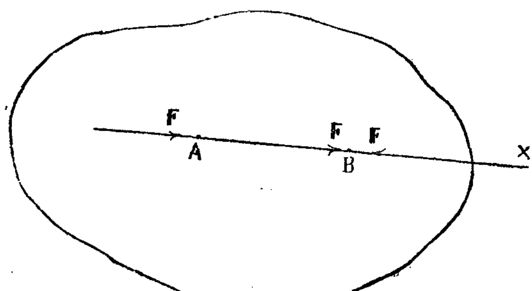
ஆனால் டைன், ராத்தலி ஆகியவை தனியலகுகளாகையால்,

1 ஈர்ப்பலகு = g தனியலகுகள்

என்று காண்க.

விசை ஊடு கடத்தற் கோட்பாடு (Priuciple of transmissibility of Force)

ஒரே நேர் கோட்டிலுள்ள ஒரு புள்ளியில் எதிரெதிர்த் திசைகளில் செயல்படுகின்ற இருசம விசைகள் ஒன்றுக் கொன்று விளைவு நீக்கம் பெற்றுச் சமநிலை (State of equilibrium) பெறுகின்றன வென்பது யாவரும் அறிந்ததே.



படம் 9

ஒரு கட்டிருக்கப் பொருளில் $\vec{F}$ என்னும் விசை A என்னும் புள்ளி வழியே Ax என்னும் திசையில் செயல்படுவதாகக் கொள்க. இப்பொழுது, Ax ன் மேலுள்ள B என்னும் மற்றொரு

புள்ளி வழியே எதிர்த் திசைகளில் $\vec{F}, \vec{F}$ எனும் இரு சம விசைகளைச் செயல்படுத்துக. இவ்விரு சம விசைகளும் ஒன்றுக்கொன்று விளைவு நீக்கம் பெற்றுச் சமநிலை பெறுமாகையால் அப் பொருளில் A யில் செயல்படுகின்ற $\vec{F}$ என்னும் விசையின் விளைவே காணப்படும். ஆனால் A, B ஆகிய புள்ளிகள் வழியே செயல்படுகின்ற மூன்று விசைகளுள், A வழியே Ax திசையில் செயல்படுகின்ற $\vec{F}$ என்னும் விசையும், B வழியே xA என்னும் திசையில் செயல்படும் $\vec{F}$ என்னும் விசையும் ஒன்றுக் கொன்று விளைவு நீக்கம் பெற்றுச் சமநிலை பெறுமெனக் கொள்வோமாயின், அப்பொருளில் B வழியே Bx திசையில் செயல்படும் $\vec{F}$ என்னும் விசையின் விளைவே மிஞ்சி நிற்பதைக் காணலாம். இவ்விளைவும், B யில் சம எதிர் விசைகளைச் செயல்படுத்து முன்னர் A யில் செயல்பட்ட $\vec{F}$ என்னும் விசையின் விளைவும் சமமாகயிருக்குமென்பதை அறியவும். அதாவது, $\vec{F}$ என்னும் விசையின் இடு புள்ளியை A யிலிருந்து அவ்விசைக் கோட்டிலுள்ள மற்றொரு புள்ளியாகிய B க்கு மாற்றுவதால் அவ்விசையினால் அக்கட்டிறுக்கப் பொருளின் மீது ஏற்படுகின்ற விளைவில் எவ்வித மாறுதலும் ஏற்படுவதில்லையென்று காண்கிறோம். ஆகவே, ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளில் ஏதேனுமொரு புள்ளி வழியே செயல்படுகின்ற ஒரு விசையானது அவ்விசைக் கோட்டின் மேல் அப்பொருளின் மேல் அப்பொருளோடு கட்டிறுக்கமாகப் பிணைக்கப் பட்டுள்ள மற்றொரு புள்ளி வழியே செயல்படுவதாகக் கொள்ளலாம். இத்தத்துவத்திற்கு "விசை ஊடு கடத்தற் கோட்பாடு" என்று பெயர்.

பயிற்சி 1

(1) $2\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{i}-3\mathbf{j}-5\mathbf{k}$, $3\mathbf{i}-4\mathbf{j}-4\mathbf{k}$ ஆகியவற்றை திசையி நிலைகளாகக் கொண்ட புள்ளிகள் ஒரு நேர்கோண முக்கோணத்தின் மூலைகளாக அமையுமென்று காட்டுக.

(2) $\vec{a} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\vec{b} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ ஆகிய திசையிகளுக்கிடையேயுள்ள கோணத்தின் கொசைன் விகிதத்தைக்

காண்க. மேலும், $\vec{a}$, $\vec{b}$ ஆகிய திசையிகளுக்குச் செங்குத்தான திசையி அலகையும் காண்க.

(3) $\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$ ஆகிய திசையிகளுக்கிடையேயுள்ள கோணத்தின் சைன் விகிதம் காண்க.

(4) $\vec{a} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\vec{b} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\vec{c} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ எனில, $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$, $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

(5) $\vec{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\vec{b} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\vec{c} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ எனில், $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\, \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\, \vec{c}$ என்று நிறுவுக.

(6) $2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$ ஆகிய திசையிகளுக்குச் செங்குத்தான திசையி அலகு $\dfrac{-3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 11\mathbf{k}}{\sqrt{155}}$ என்று காட்டுக.

முதற் பாகம்

நிலையியல்

(STATICS)

1. ஒரு புள்ளியில் செயல்படும் விசைகள்

(FORCES ACTING AT A POINT)

விசைகளின் விளைவு (Resultant of Forces)

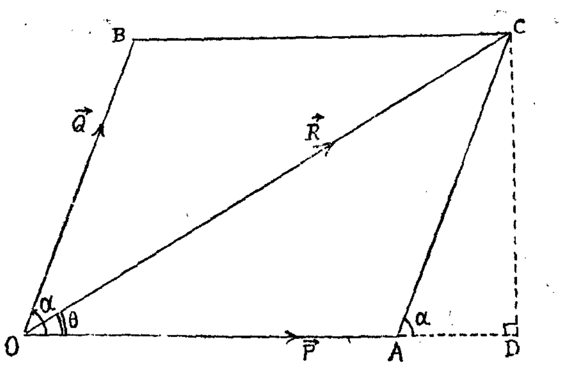
இரண்டு அதற்கு மேற்பட்ட விசைகள் ஒரு துகளின்மீது ஒரே நேரத்தில் செயல்படுவதால் அத்துகளிலேற்படுகின்ற விளைவுக்குச் சமமான விளைவை ஒரு தனிவிசை அத்துகளில் உண்டாக்குமெனில், அத்தனி விசையானது பிறவிசைகளின் விளைவு (Resultant) என்றும், அவ்விசைகள் யாவும் அவ்விளைவு விசையின் கூறுகள் (components) என்றும் கூறப்படுகின்றன.

P, Q என்னும் அளவுகள் கொண்ட $\vec{P}, \vec{Q}$ என்னும் இரு விசைகள் ஒரு பொருளின் மீது ஒரே நேர்கோட்டில் செயல்பட்டால், அவற்றின் விளைவு $(\vec{P} + \vec{Q})$ ஆகும். அவ்விருவிசைகளும் அந்நேர்கோட்டில் ஒரே திசையில் செயல்பட்டால், அவற்றின் விளைவு $(P + Q)$ எனும் அளவுடையதாகவும், அவ்விரு விசைகளுள் $P > Q$ ஆகவும், அவை எதிர்த் திசைகளில் செயல்படுவதாகவுமிருப்பின் அவற்றின் விளைவு $(P - Q)$ எனும் அளவுடையதாகவுமிருக்கும். பொதுவாக, ஒரு பொருளின்மீது செயல்படும் பலவிசைகள் $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \ldots\ldots$ என்ற திசையிக்களினால் குறிப்பிடப்பட்டால் அவற்றின் விளைவு விசையாகிய $\vec{R}$ என்பது அவ்விசைகளின் திசையிக் கூட்டலாகிய $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots\ldots$ என்ற திசையியினால் குறிப்பிடப்படும்.

ஒரு துகளின் மீது வெவ்வேறு திசைகளில் செயல்படுகின்ற இரு விசைகளின் விளைவை "விசைகளின் இணைகரவிதி" (Parallelogram law of Forces) யின் மூலம் பின் வருமாறு பெறலாம்.

விசைகளின் இணைகரவிதி (Parallelogram law of Forces)

ஒரு புள்ளி வழியே செயல்படும் இரு விசைகள் அப்புள்ளியை ஒரு மூலையாகக் கொண்டு வரையப்படும் ஒரு இணைகரத்தின் அப்புள்ளி வழிப்பக்கங்களால் அளவிலும், திசையிலும் குறிப்பிடப்பட்டால் அவ்விரு விசைகளின் விளைவு அப்புள்ளிவழி செல்லும் அவ்விணைகரத்தின் மூலை விட்டத்தினால் அளவிலும் திசையிலும் குறிப்பிடப்படும்.



படம் 10

O என்னும் புள்ளியில் OA, OB என்ற திசைகளில் செயல்படும் $\vec{P}, \vec{Q}$ என்னும் இரு விசைகளைக் கருதுக. அவற்றின் அளவுகள் முறையே P, Q என்று கொள்க.

$\vec{OA} = \vec{P}$, $\vec{OB} = \vec{Q}$ இருக்குமாறு OA, OB என்ற இரு திசைகொண்ட நேர்கோட்டுத் துண்டங்களை வரைந்து $OACB$ என்ற இணைகரத்தைப் பூர்த்தி செய்து OC ஐச் சேர்க்கவும்.

$\vec{R}$ என்பது $\vec{P}, \vec{Q}$ என்ற இரு விசைகளின் விளைவு எனில் இணைகரவிதியின்படி $\vec{OC} = \vec{R}$ ஆகும். இவ்விதியின் உண்மையைப் பரிசோதனை முறையில் சரி பார்க்க முடியும்.

இணைகரம் $OACB$ யில். $AC = OB$, $AC \parallel OB$

$$\therefore \vec{AC} = \vec{OB} = \vec{Q}.$$

மேலும், $\vec{P}, \vec{Q}$ ஆகியவற்றின் விளைவு $(\vec{P} + \vec{Q})$ என்று முன்பு கண்டோம். ஆகவே, திசையி முறையில்,

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q}$$

$$= \vec{OA} + \vec{OB}$$

$$= \vec{OA} + \vec{AC}$$

$$= \vec{OC}.$$

விசைச் சேர்க்கைக்கான இவ்விணைகர விதி முதன் முதலில் கி. பி. 1586-ஆம் ஆண்டில் சைமன் ஸ்டீவின் (Simon Stevin 1548—1620) என்ற அறிஞரால் நிர்ணயிக்கப்பட்டது.

விளைவு விசையின் அளவு, திசை ஆகியவற்றை நிர்ணயித்தில்

இருவிசைக் கோடுகளுக் கிடையேயுள்ள கோணம் $\widehat{AOB} = \alpha$ எனக் கொள்க. அவ்விசைகளின் விளைவுக்கோடு (OC) ஏதாவதொரு விசைக் கோட்டுடன் $(OA$யுடன்$)$ θ என்னும் கோணத்தையுண்டு பண்ணுவதாகக் கொள்க. OAஐ நீட்டி, Cயிலிருந்து $CD \perp OA$ வரைக. R என்பத விளைவு விசை $\vec{R}$ இன் அளவு எனில், $R = OC$ ஆகும்.

$\triangle OAC$யில், $OC^2 = OA^2 + AC^2 - 2OA \, . \, AC \, . \cos \widehat{OAC}$

அதாவது, $R^2 = P^2 + Q^2 - 2P.Q \cos (180° - \alpha)$

$= P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \alpha.$

அல்லது, $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \alpha}$

= விளைவு விசையின் அளவு.

மேலும் $\triangle ADC$யில், $CD = AC \sin \alpha = Q \sin \alpha.$

$$AD = OA + AD$$

$$= OA + AC \cos \alpha.$$

$$= P + Q \cos \alpha.$$

$$\triangle ADC\text{யில் } \tan\theta = \frac{CD}{AD}$$

$$= \frac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}.$$

இத்தொடர்பிலிருந்து விளைவுவிசையின் திசை நிர்ணயிக்கப் படுகிறது.

குறிப்பு 1 $\vec{P}$, $\vec{Q}$ ஆகிய இருவிசைகளும் ஒன்றுக் கொன்று செங்குத்துத் திசைகளில் செயல்பட்டால் அவற்றின் விளைவு விசையானது $R = \sqrt{P^2 + Q^2}$ என்னும் அளவுடன் $\tan\theta = \frac{Q}{P}$ என்ற தொடர்பிற்கேற்ப அமைந்துள்ள திசையில் செயல்படும் ஒரு விசையாகும்.

குறிப்பு 2 இரு விசைகளும் அளவில் சமமாயிருப்பின், அதாவது $P = Q$ எனில், இணைகரம் ஒரு சாய்சதுரமாக மாறுகிறது.

$$\text{விளைவின் அளவு } R = \sqrt{P^2+P^2+2P^2\cos\alpha}$$
$$= \sqrt{2P(1+\cos\alpha)}$$
$$= \sqrt{P^2\left(1+2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1\right)}$$
$$= \sqrt{4P^2\cos^2\frac{\alpha}{2}}$$
$$= 2P\cos\frac{\alpha}{2}$$

$\vec{P}$ யின் திசையுடன் விளைவு விசை $\vec{R}$ இன்சாய்வு θ எனில்,

$$\tan\theta = \frac{P\sin\alpha}{P+P\cos\alpha}$$
$$= \frac{P\sin\alpha}{P(1+\cos\alpha}$$
$$= \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{1+2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1}$$

$$= \tan \frac{\alpha}{2}$$

$$\therefore \theta = \frac{\alpha}{2}$$

ஆகவே, ஒரு புள்ளி வழியே செயல்படும் இருசம விசைகளின் விளைவு விசையின் செயற்கோடானது அவ்விரு விசைகளின் திசைகளுக்கிடையேயுள்ள கோணத்தின் இரு சம வெட்டியாகும்.

குறிப்பு 3 $\vec{P}, \vec{Q}$ ஆகிய இரு விசைகளுக்குமிடையேயுள்ள கோணம் பூச்சியமெனில், cos α ஆனது cos o = 1 என்னும் உச்சமதிப்பைப் பெறுகிறது.

ஆகவே, விளைவு விசை R இன் உச்சமதிப்பு

$$= \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ}$$

$$= (P + Q)$$

அதாவது, இரு விசைகள் ஒரே நேர் கோட்டில் ஒரே திசையில் செயல்படும் போது அவற்றின் விளைவு விசை உச்ச அளவு கொண்டதாயிருக்கும்.

மாதிரி 7 ஒன்றுக் கொன்று செங்குத்தாகச் செயல்படுகின்ற $\vec{P_1}, \vec{P_2}$ என்ற இரு விசைகளின் விளைவு $\vec{R}$ ஆகும். $\vec{P_1}, \vec{P_2}$ ஆகிய விசைகளின் அளவுகள் ஒவ்வொன்றும் 3 ராத்தல் எடை அதிகரிக்கப் பட்டால், $\vec{R}$ இன் அளவு 4 ராத்தல் எடை அதிகரிப்பதுடன் $\vec{P_1}, \vec{P_2}$ ஆகிய விசைகளின் முந்திய மொத்த அளவுக்குச் சமமாகுமெனில், $\vec{P_1}, \vec{P_2}$ ஆகியவற்றின் அளவுகளைக் காண்க.

தீர்வு

இங்கு $\alpha = 90°$ ஆதலின்,

$$R^2 = P_1^2 + P_2^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

மேலும், $R+4 = P_1+P_2$ ... ... (2)

தவிர, $(R+4)^2 = (P_1+3)^2 + (P_2+3)^2$ ... (3)

(2), (3) ஆகிய சமன்பாடுகளிலிருந்து,

$$(P_1+P_2)^2 = (P_1^2+6P_1+9)+(P_2^2+6P_2+9)$$

அதாவது, $P_1^2+P_2^2+2P_1P_2 = P_1^2+P_2^2+6(P_1+P_2)+18$

$$2P_1P_2 - 6P_1 = 6P_2+18$$

$$2P_1(P_2-3) = 6(P_2+3)$$

$$P_1 = \frac{3(P_2+3)}{P_2-3} \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

(2) இலிருந்து, $R = P_1+P_2-4$

இதை (1) இல் பிரதியிடவும்.

$$(P_1+P_2-4)^2 = P_1^2+P_2^2$$

$$(P_1+P_2)^2 - 8(P_1+P_2)+16 = P_1^2+P_2^2$$

$$2P_1P_2 - 8P_1 - 8P_2 + 16 = 0$$

$$2P_1(P_2-4) = 8(P_2-2)$$

$$P_1 = \frac{4(P_2-2)}{P_2-4} \quad \ldots \quad \ldots \quad (5)$$

(4) ; (5) ஆகிய சமன்பாடுகளிலிருந்து,

$$\frac{3(P_2+3)}{P_2-3} = \frac{4(P_2-2)}{P_2-4}$$

$$3(P_2+3)(P_2-4) = 4(P_2-2)(P_2-3)$$

$$3(P_2^2-P_2-12) = 4(P_2^2-5P_2+6)$$

$$P_2^2-17P_2+60 = 0$$

$$(P_2-5)(P_2-12) = 0$$

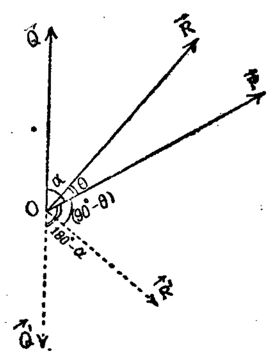
$\therefore P_2 = 5$ அல்லது 12.

(4) இலிருந்து $P_1 = 12$ அல்லது 5 என்று காணலாம்.

மாதிரி 8 ஒரு புள்ளி வழியே செயல்படுகின்ற இருவிசைகளுள் ஒன்றின் திசையை எதிர்த்திசைக்கு மாற்றினால் அவற்றின் விளைவு ஒரு நேர்கோணத்தில் திரும்புமெனில் அவ்விருவிசைகளும் சம அளவு கொண்டவையாகயிருக்க வேண்டுமென்று நிறுவுக.

தீர்வு $\vec{P}$, $\vec{Q}$ என்னும் இருவிசைகளின் விளைவு $\vec{R}$ என்க. இவற்றிற்கிடையேயுள்ள கோணம் α என்றும், $\vec{R}$ க்கும் $\vec{P}$ க்குமிடையேயுள்ள கோணம் θ என்றும் கொள்க.

$$\therefore \tan\theta = \frac{Q \sin\alpha}{P + Q\cos\alpha} \quad \ldots \quad (1)$$



படம் 11

இப்பொழுது, Qஐ எதிர்த்திசையில் செயல்படச் செய்தால் புதிய விளைவு விசையாகிய $\vec{R'}$ என்பது OR' எனும் திசையில் OR க்குச் செங்குத்தாகச் செயல்படுகிறது. ஆகவே, விசைகளுக்கிடையேயுள்ள கோணம் $(180° - \alpha)$ என்றும், $\vec{R'}$க்கும் $\vec{P}$ க்குமிடையேயுள்ள கோணம் $(90° - \theta)$ என்றும் காணலாம்.

$$\therefore \tan(90° - \theta) = \frac{Q \sin(180° - \alpha)}{P + Q\cos(180° - \alpha)}$$

அதாவது,
$$\cot\theta = \frac{Q\sin\alpha}{P - Q\cos\alpha}$$

அல்லது, $$\tan\theta = \frac{P - Q\cos\alpha}{Q\sin\alpha} \quad \ldots \quad (2)$$

(1), (2) ஆகிய சமன்பாடுகளிலிருந்து,

$$\frac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha} = \frac{P - Q\cos\alpha}{Q\sin\alpha}$$

$$\therefore \quad P^2 - Q^2\cos^2\alpha = Q^2\sin^2\alpha$$

$$\therefore \quad P^2 = Q^2\sin^2\alpha + Q^2\cos^2\alpha$$

$$= Q^2$$

அல்லது, $P = Q.$

மாதிரி 9 $\vec{P}, \vec{Q}$ ஆகிய இருவிசைகளின் விளைவு $\vec{R}$ ஆகும். $\vec{Q}$ இரட்டிப்பானால் $\vec{R}$ இரட்டிப்பாகிறது. $\vec{Q}$ஐ எதிர்த் திசையை நோக்கி மாற்றினாலும் $\vec{R}$ இரட்டிப்பாகிறது. $P : Q : R = \sqrt{2} : \sqrt{3} : \sqrt{2}$ என்று காட்டுக.

தீர்வு $\vec{P}, \vec{Q}$ ஆகிய விசைகளுக்கிடையேயுள்ள கோணம் α என்க

$\vec{P}, \vec{Q}$ ஆகியவற்றின் விளைவு $\vec{R}$.

$$\therefore \quad R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$\vec{Q}$ இரட்டிப்பானால் விளைவு $2\vec{R}$ ஆகும்.

$$\therefore \quad (2R)^2 = P^2 (2Q)^2 + 2P (2Q)\cos\alpha$$

அதாவது, $$4R^2 = P^2 + 4Q^2 + 4PQ\sin\alpha \quad \ldots \quad (2)$$

Q எதிர்த்திசைக்கு மாற்றப்பட்டால், விளைவு $2\vec{R}$ ஆகும்.

$$\therefore \quad (2R)^2 = P^2 + (-Q)^2 + 2P(-Q)\cos\alpha$$

அதாவது, $$4R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ\cos\alpha \quad \ldots \quad (3)$$

$$(1) + (3) : \quad 5R^2 = 2P^2 + 2Q^2$$

அல்லது, $$2P^2 + 2Q^2 - 5R^2 = 0 \quad \ldots \quad (4)$$

$$2 \times (1) - (2) : \quad -2R^2 = P^2 - 2Q^2$$

அல்லது, $$P^2 - 2Q^2 + 2R^2 = 0 \quad \ldots \quad (5)$$

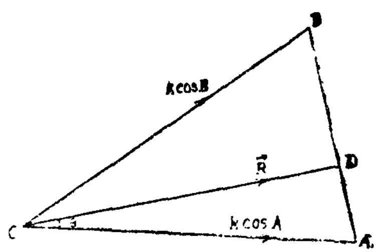
(4), (5) ஆகிய சமன்பாடுகளியருந்து,

$$\frac{P^2}{-6} = \frac{Q^2}{-9} = \frac{R^2}{-6}$$

அதாவது, $$\frac{P^2}{2} = \frac{Q^2}{3} = \frac{R^2}{2}$$

அல்லது. $P : Q : R = \sqrt{2} : \sqrt{3} : \sqrt{2}$

மாதிரி 10 ABC என்ற முக்கோணத்தில் CA, CB ஆகிய பக்கங்களின் வழியே செயல்படுகின்ற இருவிசைகளின் அளவுகள் முறையே $\cos A$, $\cos B$ ஆகியவற்றிற்கு விகித சமமாகயிருக்கின்றன. அவற்றின் விளைவு விசையின் அளவு $\sin C$க்கு விகித சமமாயிருக்குமெனவும் அதன் திசையானது கோணம் Cஐ $\frac{1}{2}(C + B - A)$, $\frac{1}{2}(C + A - B)$ என இரு பிரிவுகளாகப் பிரிக்குமெனவும் நிறுவுக.



படம் 12

தீர்வு

CA, CB ஆகிய பக்கங்களின் மீது செயல்படுகின்ற விசைகளை முறையே $K \cos A$, $K \cos B$ என்றும், அவற்றின் விளைவு விசை $\vec{R}$ க்கும், CAக்குமிடையேயுள்ள கோணம் θ என்றும் கொள்க.

$$\begin{aligned}
\therefore R^2 &= K^2 \cos^2 A + K^2 \cos^2 B + 2K^2 \cos A \cos B \cos C \\
&= K^2 [\cos^2 A + \cos^2 B + 2\cos A.\ \cos B \cos C] \\
&= K^2 [\cos A (\cos A + \cos B \cos C) \\
&\qquad + \cos B (\cos B + \cos A \cos C)]
\end{aligned}$$

ஆனால் $A+B+C=180°$ $\therefore \cos A = \cos [180° - (B+C)]$
$= -\cos (B+C)$

இதுபோல் $\cos B = -\cos(A+C)$

$$\therefore R^2 = K^2 [\cos A\{-\cos(B+C)+\cos B\cos C\} + \cos B \{-\cos(A+C)+\cos A\cos C\}]$$

$$- K^2 [\cos A(\sin B \sin C)+\cos B(\sin A \sin C)]$$

$$= K^2 \sin C [\cos A \sin B + \cos B \sin A]$$

$$= K^2 \sin C. \sin(A+B)$$

$$= K^2 \sin C. \sin(180° - C)$$

$$= K^2 \sin C. \sin C$$

$$= K^2 \sin^2 C$$

$$\therefore R = K \sin C$$

அதாவது, விளைவு விசை R ஆனது $\sin C$க்கு விகித சமமாயிருக்கும்.

மேலும், $\tan\theta = \dfrac{(K\cos B)\sin C}{(K\cos A) + (K\cos B)\cos C}$

$$= \frac{\cos B \sin C}{\cos A + \cos B \cos C}$$

$$= \frac{\cos B. \sin C}{\cos(B+C) + \cos B \cos C}$$

$$= \frac{\cos B \sin C}{-\cos B \cos C + \sin B \sin C + \cos B \cos C}$$

$$= \frac{\cos B \sin C}{\sin B \sin C}$$

$$= \cot B$$

$$= \tan(90 - B)$$

$$= \tan\left(\frac{A+B+C}{2} - B\right)$$

$$= \tan \tfrac{1}{2}(C + A - B)$$

$$\therefore \theta = \tfrac{1}{2}(C + A - B)$$

$\therefore$ கோணம் C-யின் மற்ற பகுதி $= C - \theta$

$$= C - \tfrac{1}{2}(C + A - B)$$

$$= \tfrac{1}{2}(2C - C - A + B)$$

$$= \tfrac{1}{2}(C + B - A)$$

ஆகவே, விளைவுக்கோணம் Cயை $\frac{1}{2}(C + A - B)$, $\frac{1}{2}(C+B-A)$ என இரு பிரிவுகளாகப் பிரிக்கின்றது.

பயிற்சி 2

(1) கீழேகொடுக்கப்பட்டுள்ள பயிற்சிகளில் P, Q என்பன α இடைக்கோணம் கொண்ட திசைகளில் செயல்படுகின்ற இரு விசைகளின் அளவுகளாகும். R என்பது அவ்விசைகளின் விளைவு விசையின் அளவு ஆகும்.

(i) $P=3, Q=9$ $\alpha=60°$. Rஐக் காண்க.

(ii) $P=5, Q=3, \alpha=60°$. Rஐக் காண்க.

(iii) $P=8, R=2\sqrt{31}, \alpha=30°$. Qஐக் காண்க.

(iv) $Q=5, R=7, \alpha=60°$. Pஐக் காண்க.

(v) $P=6; Q=3\sqrt{5}, R=9$, αஐக் காண்க.

(2) 5 கி.கி., 10 கி.கி. எடையளவுகள் கொண்ட இரு விசைகளின் விளைவுக் கோடு 5 கி.கி. விசைக் கோட்டிற்குச் செங்குத்தாகயிருப்பின், அவ்விரு விசைகளுக்கிடையேயுள்ள கோணத்தைக் காண்க,

(3) 8 கி.கி., 10 கி.கி. எடையளவுகள் கொண்ட இருவிசைகளின் விளைவு 14 கி.கி. எடையளவு கொண்ட விசையெனில் அவ்விரு விசைகட்கிடைப்பட்ட கோணத்தைக் காண்க.

(4) P அளவு கொண்ட இருசம விசைகள் ஒரு புள்ளி வழியே செயல்படுகின்றன. அவற்றின் விளைவு $P\sqrt{3}$ அளவு கொண்ட ஒரு விசையெனில் அவ்விரு விசைகளுக்கிடையேயுள்ள கோணம் யாது ?

(5) இரண்டு சம விசைகள் ஒரு துகளின் மீது செயல்படுகின்றன. அவற்றின் விளைவின் வர்க்கம் அவ்விசைகளின் பெருக்கத்தின் மும்மடங்கிற்குச் சமமெனில் அவற்றிற்கிடையேயுள்ள கோணத்தைக் காண்க.

(6) 150° இடைக் கோணத்தில் செயல்படுகின்ற இரு விசைகளின் விளைவு அவ்விசைகளுள் சிறியதுக்குச் செங்குத்தாகச் செயல்படுகிறது. பெரிய விசையின் அளவு 30 ராத்தல் எடையெனில், சிறிய விசையையும் விளைவு விசையையும் காண்க.

(7) ஒன்றுக் கொன்று செங்குத்தான திசைகளில் செயல்படுகின்ற $\vec{P}, \vec{Q}$ என்ற இரு விசைகளின் $(P<Q)$ விளைவு விசையின்

அளவு 2 P அவ்விளைவு விசைக்கும் $\vec{Q}$ க்கு முள்ள சாய்வு 30° என்று காட்டுக.

(8) ஒரு புள்ளியில் செயல்படுகின்ற $\vec{P}, \vec{Q}$ என்ற விசைகளின் விளைவு $\vec{R}. \vec{Q}$ ஐ $\frac{(R^2 - P^2)}{Q}$ என்னும் அளவுடன் பின்முகமாகச் செயல்படுத்திய போதும் விளைவு விசை R அளவுடன் கூடியதாகவேயிருக்குமென்று காட்டுக.

(9) $\vec{P}, 2 \vec{P}$ என்பன ஒரு புள்ளியில் செயல்படும் இரு விசைகள். முதல் விசையை 16 கி.கி. எடை அதிகப்படுத்தி, இரண்டாவது விசையை இரட்டிப்பாக்கிய போதிலும் அவற்றின் விளைவு விசையின் மாருதிருந்தால் $\vec{P}$ யின் அளவைக் காண்க.

(10) 2 P, P என்னும் அளவுகளுடன் கூடிய இரு விசைகள் ஒரு துகளின் மீது செயல்படுகின்றன. முதல் விசையை இரட்டித்து, இரண்டாவது விசையை 12 கி.கி. அதிகரித்த போதிலும் அவற்றின் விளைவு விசையின் அளவு மாருதிருந்தால் P யின் மதிப்பைக் காண்க.

(11) $\vec{P}, \vec{Q}$ ஆகிய இருவிசைகளின் விளைவு $\vec{R}$ ஆகும். இவற்றுள் ஒரு விசையை பின்முகமாகத் திருப்பினுல் விளைவு R^1 ஆக மாறுகிறது.

$$R^2 + R_1^2 = 2 (P^2 + Q^2)$$

என்று காட்டுக.

(12) ஒரு புள்ளி வழியே செயல்படும் $\vec{P}, \vec{Q}$ என்னும் இரு விசைகளின் விளைவு விசையின் செயற்கோடு அவற்றின் இடைக் கோணத்தை 1 : 2 என்னும் விகிதத்தில் பிரித்தால், விளைவு விசையின் அளவு $\frac{(P^2 - Q^2)}{Q}$ என்று காட்டுக.

(13) P, Q என்னும் அளவுகளுடன் கூடிய இரு விசைகளின் திசைகளுக்கிடையேயுள்ள கோணம் θ என்ருல், அவற்றின் விளைவு $(2m+1)\sqrt{P^2+Q^2}$. ஆனல் அவற்றின் இடைக் கோணம் $(90^\circ-\theta)$ என்ருல் விளைவு $(2m+1)\sqrt{P^2+Q^2}$ ஆகும்•

$$\tan \psi = \frac{m-1}{m+1}$$ என நிறுவுக.

(14) $\vec{P}, \vec{Q}$ என்னும் இரு விசைகள் அவற்றின் விளைவு விசை P அளவுடையதாகயிருக்குமாறு ஒரு புள்ளி வழியே செயல்படுகின்றன. $\vec{P}$ என்னும் விசை இரட்டிக்கப்பட்டால் அவற்றின் விளைவு விசை $\vec{Q}$ வின் திசைக்குச் செங்குத்தாகயிருக்குமெனக் காட்டுக.

(15) $\vec{P}, \vec{Q}$ ஆகிய இரு விசைகளின் விளைவு விசை $\vec{R}$ ஆகும். $\vec{R}$ இது P யின் திசையுடன் θ கோணச் சாய்வில் செயல்படுகிறது. $\vec{P}$ என்ற விசைக்குப் பல்லாக அதே திசையில் $(P \times R)$ என்னும் அளவுடைய ஒரு விசையைச் செயல்படுத்திஞல் புதிய விளைவு விசை $\vec{P}$ யின் திசையுடன் $\theta/2$ என்னும் கோணத்தில் செயல் படுமென்று காட்டுக.

(16) $(P+Q)$, $(P-Q)$ என்ற அளவுகளுடைய இரு விசைகள் $2\,Q$ இடைக் கோணத்தில் செயல்படுகின்றன. அவற்றின் விளைவு விசை அவ்விடைக் கோணத்தின் சமவெட்டியுடன் θ என்னும் கோணத்தில் சாய்ந்துள்ளது. $P \tan \theta = Q \tan \alpha$ என்று காட்டுக.

(17) இரு விசைகளின் திசைகளுக்கிடையேயுள்ள கோணம் 2α ஆகயிருக்கும் போது ஏற்படுகின்ற விளைவு விசையின் அளவு, அவற்றின் இடைக் கோணம் 2β ஆகயிருக்கும் போது ஏற்படுகின்ற விளைவு விசையின் அளவைப்போல் இரு மடங்காகும். $\cos \alpha = 2 \cos \beta$ எனில் அவ்விரு விசைகளும் சமமாகுமென்று காட்டுக.

(18) இருசம விசைகளுக்கிடையேயுள்ள கோணம் 2θ ஆக யிருக்கும் போது கிடைக்கின்ற விளைவு விசையின் அளவானது அவற்றின் இடைக் கோணம் 2ϕ ஆகயிருக்கும் போது கிடைக்கின்ற விளைவு விசையின் அளவைப் மும்மடங்கு எனில் $3\cos\phi = \cos\theta$ என்று நிறுவுக.

(19) சம அளவுடைய இரு விசைகளின் இடைக் கோணம் 2θ வாகயிருக்கும் போது கிடைக்கின்ற விளைவு விசையின் அளவானது, அவற்றின் இடைக் கோணம் 2ϕ ஆகயிருக்கும் போது கிடைக்கின்ற விளைவு விசையின் அளவில் பாதியெனில் $2\cos\theta\cos\phi = 3$ என்று காட்டுக.

(20) O என்னும் புள்ளியிலுள்ள ஒரு துகளின் மீது $\vec{oA}$. $\vec{oB}$ என்னும் திசைகளில் செயல்படுகின்ற P, Q என்ற இரு விசைகளின் விளைவு விசையானது $\vec{oC}$ என்னும் திசையில் செயல்படுகின்ற R என்னும் விசையாகும். விசை Q ஐப் பின்முகமாகத் திருப்பினால் புது விளைவு விசையானது $\frac{R}{\sqrt{3}}$ என்ற அளவுடன் OC க்குச் செங்குத்துத் திசையில் செயல்படுகிறது. $A\hat{O}C = B\hat{O}C = \frac{\pi}{6}$ என்று காட்டுக.

(21) ஒரு புள்ளி வழியே செங்குத்தாகச் செயல்படும் P_1, P_2 என்னும் அளவுகளைக் கொண்ட இரு விசைகளின் விளைவு விசை R என்னும் அளவுடன் கூடிய ஒரு விசையாகும். அவ் விசைகளின் அளவுகளை P_1+3, P_2+3 என்று மாற்றினால் விளைவு விசையின் அளவு $R+4$ என்று மாறுகிறது. $P_1+P_2 = R+4$ எனில், P_1, P_2 ஆகியவற்றைக் காண்க.

(22) $\vec{P}, \vec{Q}$ ஆகிய விசைகளின் விளைவாகிய $\vec{R}$ என்பது $\vec{Q}$ வின் திசையுடன் 2θ கோணத்தில் செயல்படுகிறது. அதே திசைகளில் செயல்படும் P, $(Q \times R)$ ஆகிய அளவுகளுடைய விசைகளின் விளைவு $2R\cos\theta$ அளவுடைய தென்றும், $(Q+R)$ அளவுள்ள விசையுடன் θ கோணத்தில் அவ்விளைவு செயல்படு மென்றும் காட்டுக.

(23) இரு விசைகளின் மீப்பெருள் விளைவின் அளவு அவற்றின் மீச்சிறு விளைவின் அளவைப்போல் m மடங்கு

எனில், அவ்விசைகளின் விளைவு அவற்றின் அளவுகளின் மொத்தத்தில் பாதியளவுடையதாகயிருக்கும் போது அவற்றின் இடைக் கோணம் θ என்பது

$$\cos\theta = \frac{m^2+2}{2(1-m^2)}$$

என்னும் தொடர்பினால் பெறப்படுமென்று காட்டுக.

(24) மாறா அளவுகள் கொண்ட இரு விசைகளின் விளைவின் மீப்பெரு, மீச்சிறு அளவுகள் முறையே X, Y ஆகும். அவ்விசைகள் 2α இடைக் கோணத்தில் செயல்படும் போது அவற்றின் விளைவின் அளவு

$$(X^2\cos^2\alpha + Y^2\sin^2\alpha)^{\frac{1}{2}}$$

என்று காட்டுக.

(25) முக்கோணம் ABC யில் $AD\perp BC$; AB, AC ஆகிய பக்கங்களின் வழியாகச் செயல்படுகின்ற $\sec B, \sec C$ அளவுகள் கொண்ட விசைகளின் விளைவு AD வழியாகச் செயல்படும் $(\tan B+\tan C)$ என்னும் அளவுடைய விசையாகுமென்று காட்டுக.

சமநிலை (Equilibrium)

ஓய்வு நிலையிலிருக்கும் ஒரு பொருளின் மீது அப்பொருளின் ஓய்வு நிலையை மாற்ற முயல்கின்ற வகையில் செயல்படுகின்ற பல்வேறு விசைகள் தங்களின் விளைவுகளை ஒன்றுக் கொன்று ஈடுசெய்து அப்பொருளை அதே ஓய்வு நிலையில் வைத்திருக்குமேயானால் அப்பொருளானது அவ்விசைகளின் செயற்பாடுகளுக்குட்பட்டுச் சமநிலையிலிருப்பதாகக் கூறப்படும். இவ்வாறு தங்களின் செயற்பாடுகளினால் ஒரு பொருளைச் சமநிலையில் வைத்திருக்கும் விசைகளையும் சமநிலையிலிருப்பதாகக் கூறலாம்.

ஒரு விசையின் தாக்குதலுக்குள்ளான ஒரு துகள் சமநிலையிலிருப்பதாகக் கொள்வோம். $\vec{V}$ என்னும் திசை வேகத்துடன் இயக்கிக் கொண்டிருக்கும் m பொருண்மையுள்ள ஒரு பொருளின் உந்தம் என்பது $m\vec{V}$ என்று வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது. (இயக்கவிசையியல் பகுதியைப் பார்க்கவும்) இங்கு விசையின் தாக்குதலுக்குள்ளான துகள் ஓய்வு நிலையிலிருப்பதால் உந்தமாறு வீதமும் பூச்சியமாகும். ஆனால் நியூட்டனின்

இரண்டாவது விதிபின்படி உந்தமாறு வீதம் அத்துகளின் மீது செயல்படும் விசைக்கு விகிதசமமாகும். இங்கு உந்தமாறு வீதம் பூச்சியமாகையால், அவ்விசையின் அளவும் பூச்சியமாகும். ஆகவே, பூச்சியமல்லாத ஒரு விசை ஒரு துகளைச் சமநிலையில் வைத்திருக்க முடியாதென அறிகிறோம்.

$\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ ஆகிய இரு விசைகளின் செயற்பாடுகளுக்குட்பட்ட ஒரு துகள் சமநிலையிலிருக்குமானல் அவ்விசைகளின் மொத்த விளைவு பூச்சியமாக வேண்டும்.

$$\therefore F_1 + F_2 = O$$

அல்லது, $$F_1 = - F_2$$

அதாவது, ஒரு துகளைச் சமநிலையில் வைத்திருக்கும் இரு விசைகள் அளவில் சமமாகவும், திசைகளில் எதிராகவுமிருக்க வேண்டும்.

இதுபோல், $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$,...., $\vec{F}n$ ஆகிய n விசைகளின் செயற்பாடுகளுக்குட்பட்ட ஒரு துகள் சமநிலையிலிருக்குமானல், அவ்விசைகளின் விளைவு பூச்சியமாக வேண்டும். ஆனல் அவ்விசைகளின் திசையிக் கூட்டலே அவற்றின் விளைவு ஆகும்.

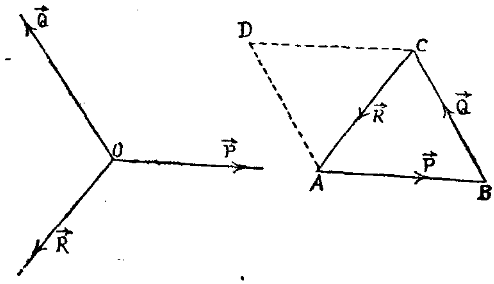
$$\therefore \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + ... - + \vec{F}n = O.$$

விசை முக்கோணம் (Triangle of Forces)

ஒரு புள்ளி வழியே செயல்படுகின்ற மூன்று விசைகள் ஒரு முக்கோணத்தின் ஒரு முகவரிசையிலெடுக்கப்பட்ட மூன்று பக்கங்களால் அளவிலும், திசையிலும் குறிப்பிடப்படின் அம் மூன்று விசைகளும் சமநிலையிலிருக்கும்.

ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்களால் குறிப்பிடப் படுகின்ற மூன்று விசைகளின் சமநிலை பற்றிய விதியைக் குறிப்பதால் இது விசை முக்கோண விதி யென்று கூறப்படுகின்றது.

O என்னும் புள்ளியில் செயல்படுகின்ற $\vec{P}$, $\vec{Q}$, $\vec{R}$ என்னும் மூன்று விசைகள் ABC என்ற முக்கோணத்தின் ஒரு முகவரிசையிலெடுக்கப்பட்ட AB, BC, BA என்னும் பக்கங்களால் அளவிலும் திசையிலும் குறிப்பிடப்படுகின்றன.



படம் 13

அதாவது, $\vec{AC} = \vec{P}$; $\vec{BC} = \vec{Q}$; $\vec{CA} = \vec{R}$

$ABCD$ என்னும் இணைகரத்தைப் பூர்த்தி செய்க.

$$AD = BC : \quad AD \parallel BC.$$

$$\therefore \quad \vec{AD} = \vec{BC} = \vec{Q}.$$

விசையிணைகரவிதியின்படி, AB ஆகிய பக்கங்களால் குறிப்பிடப்படுகின்ற $\vec{P}, \vec{Q}$ ஆகிய விசைகளின் விசையானது அளவிலும் திசையிலும் AC என்னும் மூலைவிட்டத்தினல் குறிப்பிடப்படும்.

அதாவது, $\vec{AC} = \vec{P} + \vec{Q}$;

ஆனல், $\vec{CA} = \vec{R}$

$$\therefore \quad \vec{P} + \vec{Q} + \vec{R} = \vec{AC} + \vec{CA} = O.$$

மூன்று விசைகளின் விளைவு பூச்சியமாவதால் அவை சமநிலையிலிருக்கும்.

குறிப்பு 1: திசையிலி முறைப்படி, முக்கோணம் ABCயிலிருந்து,

$$\vec{P} + \vec{Q} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

$$\therefore \quad \vec{P} + \vec{Q} + \vec{R} = \vec{AC} + \vec{CA} = O$$

$\therefore$ மூன்று விசைகளும் சமநிலையிலிருக்கும்.

குறிப்பு 2 ஒரு புள்ளியில் செயல்படுகின்ற மூன்று விசைகளுக்கு மட்டுமே இவ்விதி பொருந்தும். மாருக, ஒரு முக்கோணத்தின் ஒரு முகவரிசையிலெடுக்கப்பட்ட மூன்று பக்கங்களால் அளவிலும் திசையிலும் குறிப்பிடப்படுகின்ற மூன்று விசைகளுக்கு இவ்விதி பொருந்தாது ; அம்மூன்று விசைகளும் ஒரு புள்ளியில் செயல்படவேண்டுமென்ற நிபந்தனையை நினைவிற் கொள்ளவும்.

விசை முக்கோண விதியின் மறுதலை
(Converse of Law of Triangle of Forces)

விசை முக்கோண விதியின் மறுதலையும் உண்மையாகும்.

ஒரு புள்ளி வழியே செயல்படுகின்ற மூன்று விசைகள் சமநிலையிலிருப்பின், அம்மூன்று விசைகளையும் அவற்றின் செயற்கோடுகளுக்கு இணையாக வரையப்பட்ட பக்கங்களாலான ஒரு முக்கோணத்தின் ஒருமுக வரிசையிலெடுக்கப்பட்ட மூன்று பக்கங்களால் அளவிலும் திசையிலும் குறிப்பிட முடியும்.

O என்னும் புள்ளிலல் OA, OB, OC என்னும் திசைகளில் செயல்படுகின்ற $\vec{P}$, $\vec{Q}$, $\vec{R}$ என்னும் விசைகள் சமநிலையிலிருப்பதாகக் கொள்க.

$$\therefore \quad \vec{P} + \vec{Q} + \vec{R} = O$$

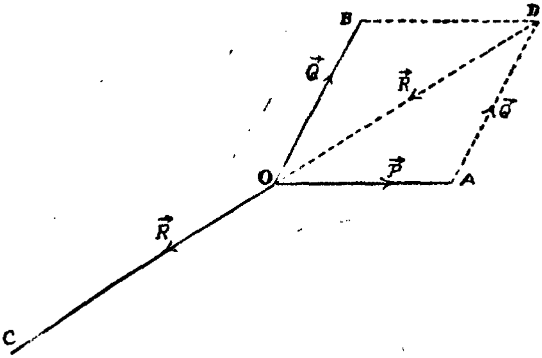
$$\therefore \quad \vec{P} + \vec{Q} = -\vec{R}$$

இப்பொழுது, $\vec{OA} = \vec{P}$, $\vec{OB} = \vec{Q}$ என்றிருக்குமாறு OA, OB என்னும் நேர்கோட்டுத் துண்டங்களையெடுத்து $OADB$ என்னும் இணைகரத்தைப் பூர்த்தி செய்க.

இணைகர விதியின்படி, $\vec{P} + \vec{Q} = \vec{OD}$ ஆகும்.

ஆனல், $\vec{P} + \vec{Q} = -\vec{R}$

$$\therefore \quad \vec{OD} = -\vec{R}$$



படம் 14

அல்லது, $\vec{DO} = \vec{R}$

மேலும், $AD = OB,\ AD \parallel OB$

$$\therefore\ \vec{AD} = \vec{OB} = \vec{Q}$$

ஆகவே, $\triangle OAD$யில், $\vec{OA} = \vec{P},\ \vec{AD} = \vec{Q},\ \vec{DO} = \vec{R}$ என்று காண்கிறோம். அதாவது, $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$ ஆகிய விசைகள் $\triangle OAD$யின் ஒரு முக வரிசையிலெடுக்கப்பட்ட OA, AD, DO ஆகிய பக்கங்களால் அளவிலும் திசையிலும் குறிப்பிடப்படுகின்றன. மேலும் OA, OB, OC ஆகிய விசைக்கோடுகளுக்கு இணையான பக்கங்களைக் கொண்ட வேறு எந்த முக்கோணமும் $\triangle OAD$க்கு வடிவொத்திருக்குமாகையால், அவ்வொடிவொத்த முக்கோணத்தின் பக்கங்களும், இம்மூன்று விசைகளையும் அளவிலும், திசையிலும் குறிப்பிடுமென்றறிக,

செங்குத்து விசை முக்கோணம் (Perpendicular Triangle of Forces.

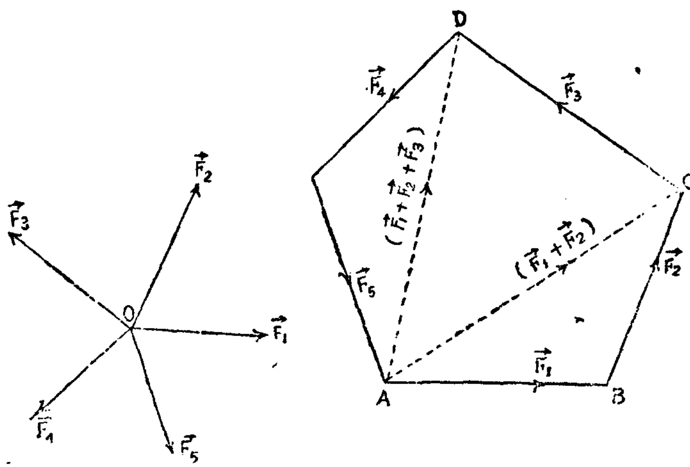
ஒரு முக்கோணத்தின் ஒருமுக வரிசையிலெடுக்கப்பட்ட மூன்று பக்கங்களால் அளவிலும் திசையிலும் குறிப்பிடப்படுகின்ற மூன்று விசைகள் தங்களால் குறிப்பிடப்படுகின்ற பக்கங்களுக்குச் செங்குத்துத் திசைகளில் ஒரு புள்ளி வழியே செயல்படுமாயின் அவ்விசைகள் சமநிலையிலிருக்கும்.

இது செங்குத்து முக்கோண விதியென்றழைக்கப்படுகிறது ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்களுக்குச் செங்குத்தாக வரையப் படும் பக்கங்களாலான முக்கோணம் அம்முக்கோணத்துடன் வடிவொத்திருக்குமென்பதிலிருந்து மேற்கண்ட விதியின் உண் மையை அறிந்து கொள்ளலாம்.

ஒரு புள்ளி வழியே செயல்படும் மூன்று விசைகள் சமநிலை பெறுதற்கான நிபந்தனையை விசை முக்கோண விதியின் மூலம் கண்டறிந்தோம். இவ்விதியை விரிவுபடுத்தி ஒருபுள்ளி வழியே செயல்படும் மூன்றுக்கு மேற்பட்ட விசைகள் சமநிலை பெறுதற் கான நிபந்தனையைக் காணலாம். இவ்வாறு விரிவுபடுத்தப் பட்ட விதியானது "விசைகளின் பல்கோண விதி" (Law of Polygon of Forces) என்றழைக்கப்படுகிறது.

விசைப்பல கோணம் (Polygon of Forces)

ஒரு புள்ளி வழியே செயல்படுன்ற பல்வேறு விசைகள் ஒரு பல் கோணத்தின் ஒரு முக வரிசையிலெடுக்கப்பட்ட அதன் பக்கங்களால் அளவிலும் 'திசையிலும் குறிப்பிடப்படின் அவ் விசைகள் சமநிலையிலிருக்கும்.



படம் 15

O என்னும் புள்ளி வழியே செயல்படுகின்ற $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ $\vec{F}_5$ என்னும் விசைகள் $ABCDEA$ என்னும் மூடிய பல்கோணத் தின் AB, BC, CD, DE, EA ஆகிய பக்கங்களால் அளவிலும் திசையிலும் குறிப்பிடப்படுகின்றன.

அதாவது, $\vec{AB}=\vec{F_1}$, $\vec{BC}=\vec{F_2}$, $\vec{CD}=\vec{F_3}$, $\vec{DE}=\vec{F_4}$, $\vec{EA}=\vec{F_5}$
இவ்விசைகள் யாவும் சமநிலை பெறவேண்டுமாயின் அவற்றின் மொத்த விளைவு பூச்சியமாக வேண்டும்.

அதாவது, $\vec{F_1}+\vec{F_2}+\vec{F_3}+\vec{F_4}+\vec{F_5}=O$ ஆகவேண்டும்.

பல்கோணத்தில் AC, AD ஆகியவற்றைச் சேர்க்கவும்.

திசையி முறைப்படி,

$\triangle ABC$யில் $\vec{F_1}+\vec{F_2}=\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{AC}$

$\triangle ACD$யிலிருந்து, $\vec{AC}+\vec{CD}=\vec{AD}$

அதாவது, $\vec{F_1}+\vec{F_2}+\vec{F_3}=\vec{AD}$

$\triangle ADE$யிலிருந்து, $\vec{AD}+\vec{DE}=\vec{AC}$

அதாவது, $\vec{F_1}+\vec{F_2}+\vec{F_3}+\vec{F_4}=\vec{AB}$

$\therefore\ \vec{F_1}+\vec{F_2}+\vec{F_3}+\vec{F_4}+\vec{F_5}=\vec{AE}+\vec{EA}=O$

$\therefore\ \vec{F_1}$, $\vec{F_2}$, $\vec{F_3}$, $\vec{F_4}$, $\vec{F_5}$ ஆகிய விசைகள் சமநிலையிலிருக்கும்.

குறிப்பு 1 நிறுவல் எளிதாயிருக்கும் பொருட்டு ஒரு புள்ளியில் செயல்படும் ஐந்து விசைகளைக் கொண்டு மேற்கண்ட விதி நிறுவப்பட்டுள்ளது. ஆனால் ஒரு புள்ளி வழியே செயல்படும் எவ்வெண்ணிக்கையிலுமான விசைகளுக்கும் இந்நிறுவல் பொருந்துமென்றறிக.

குறிப்பு 2 ஒரு புள்ளியில் செயல்படும் விசைகள் யாவும் ஒரே தளத்தில் அசையாமலிருப்பினும், பல்கோணவிதியின் நிபந்தனைக்குட்பட்டுச் செயல்படின் அவை சமநிலைபெறுமென்றறிக.

குறிப்பு 3 இவ்விதியின் மறுதலை உண்மையாகாது.

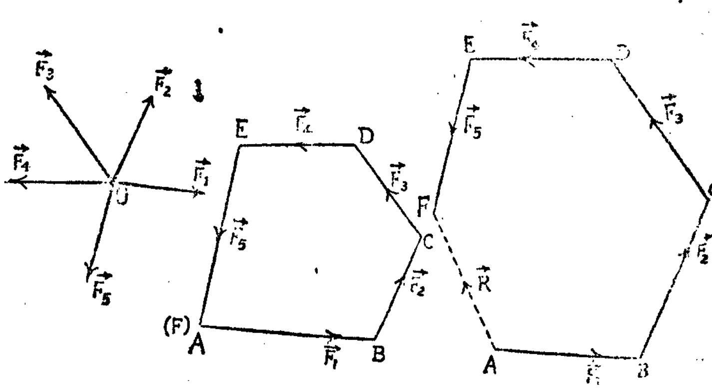
ஒரு புள்ளிவழியே செயல்பட்டுச் சமநிலையிலிருக்கின்ற பல விசைகளின் திசைகளுக்கு இணையாக வரையப்படும் நேர்கோடுகளாலுண்டாகும் பல்கோணத்தின் பக்கங்கள் அவ்விசைகளின் திசைகளைக் குறிப்பிட்ட போதிலும் அளவுகளைக் குறிப்பிடமாட்டா ; ஏனெனில், அவ்விசைகளின் திசைகளுக்கிணையான பக்கங்களைக் கொண்ட பல்கோணங்கள் யாவும் சமகோணப் பல் கோணங்களா யிருக்குமேயல்லாது வடிவொத்தப் பல் கோணங்களாயிரா. வடிவொத்தப் பல்கோணங்களின் பக்கங்களே விகித சமத்திலிருக்மேயல்லாது சமகோணப் பல்கோணத்தின் பக்கங்கள் விகிதசமத்திலிருக்கமாட்டா வென்பதை வடிவ கணிதத் தேற்றங்களிலிருந்து அறிந்துகொள்ளலாம்.

குறிப்பு 4 செங்குத்து விசைப்பல்கோணம்
(Perpendicular Polygon of Forces)

ஒரு புள்ளியில் செயல்படும் பலவிசைகளின் அளவுகள் ஒரு மூடிய பல்கோணத்தின் ஒரு முக வரிசையிலெடுக்கப்பட்ட பக்கங்களுக்கு விகித சமமாகவும், அவற்றின் திசைகள் அவை குறிப்பிடுகின்ற பக்கங்களுக்குச் செங்குத்தாகவுமிரும்பின் அவ் விசைகள் சமநிலையிலிருக்கும்.

வடிவ கணித முறையில் ஒருபுள்ளி விசைகளின் விளைவு காணல்

விசைகளின் பல்கோண விதியைப் பின்பற்றி ஒருபுள்ளி வழியே செயல்படுகின்ற பலவிசைகளின் விளைவை அதன் அளவு, திசை ஆகியவற்றுடன் வடிவ கணித முறையில் பின் வருமாறு காணலாம்.



படம் 16

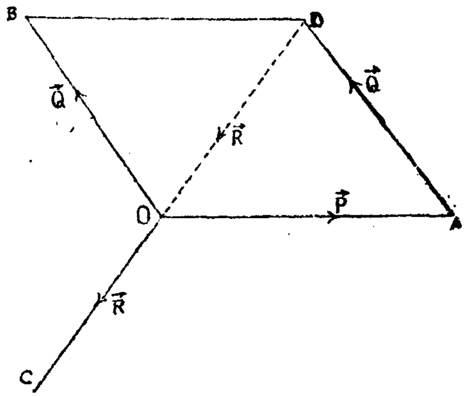
$\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$, $\vec{F_3}$, $\vec{F_4}$, $\vec{F_5}$ ஆகிய விசைகள் O என்னும் புள்ளி வழியே படத்தில் குறிப்பிடப்பட்டுள்ள திசைகளில் செயல்படுகின்றனவெனக் கொள்வோம். இவ்விசைகளின் அளவுகளை நேர்கோட்டுத் துண்டங்களால் குறிப்பிடும் பொருட்டு ஏதாவதொரு அளவுத் திட்டத்தை (Scale) நிர்ணயித்துக் கொள்க. உதாரணமாக, $F_1 = 5$ கி கி., $F_2 = 3$ கி. கி., $F_3 = 7$ கி. கி., $F_4 = 4$ கி. கி., $F_5 = 6$ கி. கி. எடைகளெனில், 1 கி.கி. எடை $=1$ செ. மீ. என்னும் அளவு திட்டப்படி F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 ஆகிய விசையளவுகளை முறையே 5 செ. மீ., 3 செ. மீ., 7 செ.மீ., 4 செ. மீ., 6 செ. மீ., நீளங்களுமுள்ள நேர்கோட்டுத்துண்டங்களினால் குறிப்பிடலாம்.

இப்பொழுது A என்னும் ஏதேனுமொரு புள்ளியைக் குறித்துக்கொண்டு F_1 இன் திசைக்கு இணையாக F_1ஐக் குறிப்பிடுகின்ற நீளத்தில் $\vec{AB}$ என்னும் நேர்கோட்டுத் துண்டத்தை வரைந்து கொள்க. பின் B-யிலிருந்து $\vec{F_2}$-ன் திசைக்கு இணையாக F_3ஐக் குறிப்பிடுகின்றன. நீளத்தில் BCயை வரைக. Cயிலிருந்து $\vec{F_3}$க்கு இணையாக F_3ஐக் குறிப்பிடுகின்ற நீளத்தில் CD-யையும், D-யிலிருந்து $\vec{F_4}$-க்கு இணையாக F_4-ஐக் குறிப்பிடுகின்ற நீளத்தில் DE-யையும், E-யிலிருந்து $\vec{F_5}$-க்கு இணையாக $\vec{F_5}$-ஐக் குறிப்பிடுகின்ற நீளத்தில் EF-ஐயும் வரைக. இப்பொழுது F என்னும் புள்ளியானது Aயுடன் பொருந்துமானால் $ABCDEA$ என்னும் மூடிய பல்கோணம் கிடைக்கும். விசைகளின் பல்கோண விதியின்படி கொடுக்கப்பட்ட விசைகள் யாவும் சமநிலையிலிருப்பதாகக் கொண்டு அவற்றின் விளைவு பூச்சியமென அறிந்துகொள்க.

அவ்வாறின்றி, F என்னும் புள்ளியானது Aயுடன் பொருந்தாமல் தனித்துநிற்குமெனில், $\vec{AF}$ திசைகொண்ட நேர்கோட்டுத் துண்டமானது கொடுக்கப்பட்டுள்ள விசைகளுடைய விளைவு விசையின் அளவையும் (எடுத்துக் கொள்ளப்பட்டிருக்கும் அளவுத் திட்டப்படி) திசையையும் குறிப்பிடுவதாகக் கொள்ளலாம்.

இலாமியின் தேற்றம் (Lami's Theorem)

ஒரு புள்ளியில் செயல்படும் மூன்று விசைகள் சமநிலையிலிருப்பின் ஒவ்வொரு விசையின் அளவும் ஏனைய இருவிசைகட்கிடைப்பட்ட கோணத்தின் "சைன்" (Sine) விகிதத்திற்குச் சமமாகும்.



படம் 17.

O என்னும் புள்ளியில் செயல்படுகின்ற $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$ என்னும் விசைகள் சமநிலையிலிருப்பதாகக் கொள்க. $\vec{P}, \vec{Q}$ ஆகிய விசைகளின் செயற்கோடுகளில் $\vec{OA} = \vec{P}, \vec{OB} = \vec{Q}$ இருக்குமாறு OA, OB என்னும் நேர்கோட்டுத் துண்டங்களையெடுத்துக் கொள்க. $OADB$ என்னும் இணைகரத்தைப் பூர்த்தி செய்து ODஐச் சேர்க்கவும்.

விசை முக்கோண விதியின்படி, $\vec{AD} = \vec{Q}, \vec{DO} = \vec{R}$ ஆகும்.

$$\triangle\ OAD\text{-யில்},\quad \frac{OA}{\sin \widehat{ADO}} = \frac{AD}{\sin \widehat{DOA}} = \frac{DO}{\sin \widehat{OAD}}$$

ஆனால், $OA = P,\ AD = Q,\ DO = R;$

$$\widehat{ADO} = \widehat{DOB} = (\pi - \widehat{BOC})$$

$$\widehat{DOA} = (\pi - \widehat{COA})$$

$$\widehat{OAD} = (\pi - \widehat{AOB})$$

ஆகவே, $\dfrac{P}{\sin(\pi - \angle BOC)} = \dfrac{Q}{\sin(\pi - \angle COA)} = \dfrac{R}{\sin(\pi - \angle AOB)}$

அதாவது, $\dfrac{P}{\sin \angle BOC} = \dfrac{Q}{\sin \angle COA} = \dfrac{R}{\sin \angle AOB}$

இலாமியின் தேற்றத்தின் மறுதலை

ஒரு புள்ளியில் செயல்படும் மூன்று விசைகளுள் ஒவ்வொன்றும் மற்ற இரு விசைகளின் திசைகளுக் கிடைப்பட்ட கோணத்தின் சைன் விகிதத்திற்கு விகிதசமத்திலிருப்பின் அவ் விசைகள் சமநிலையிலிருக்கும். (படம் 17-ஐப் பார்க்கவும்.)

$P = \vec{OA}, Q = \vec{OB}, R = \vec{OC}$ என்னும் விசைகள் O என்னும் புள்ளியில் செயல்படுகின்றன.

மேலும், $\dfrac{P}{\sin \angle BOC} = \dfrac{Q}{\sin \angle COA} = \dfrac{R}{\sin \angle AOB}$ என்றும்

கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

இணைகரம் $OADB$ஐப் பூர்த்தி செய்து ODஐச் சேர்க்கவும்.

$$\sin \angle BOC = \sin(\pi - \angle BOD) = \sin \angle BOD = \sin \angle ODA$$

$$\sin \angle COA = \sin(\pi - \angle DOA) = \sin \angle DOA$$

$$\sin \angle AOB = \sin(\pi - \angle OAD) = \sin \angle OAD$$

$$\therefore \quad \frac{P}{\sin \angle ODA} = \frac{Q}{\sin \angle DOA} = \frac{R}{\sin \angle OAD} \qquad \cdots (1)$$

ஆனால் $\triangle OAD$-யிலிருந்து,

$$\frac{OA}{\sin \angle ODA} = \frac{AD}{\sin \angle DOA} = \frac{DO}{\sin \angle OAD} \qquad \cdots (2)$$

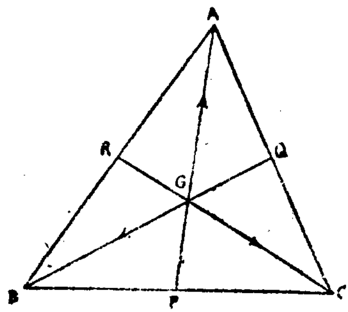
என்று அறிவோம். ஆகவே, (1), (2) ஆகிய சமன்பாடுகளிலிருந்து,

$$\frac{P}{OA} = \frac{Q}{AD} = \frac{R}{DO}$$

என்று காண்கிறோம். அதாவது, கொடுக்கப்பட்டுள்ள விசை

கள் யாவும் $\triangle OAD$-யின் ஒருமுக வரிசையிலெடுக்கப்பட்ட பக்கங்களுக்கு விகித சமத்திலிருக்கின்றன. எனவே, விசை முக்கோண விதியின்படி மூன்று விசைகளும் சமநிலையிலிருக்கு மென்றறிக.

மாதிரி 11: P, Q, R என்பன $\triangle ABC$-யின் BC, CA, AB என்ற பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகள். $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{QB}$, $\overrightarrow{RC}$ ஆகியவற்றால் குறிப்பிடப்படுகின்ற விசைகள் சமநிலையிலிருக்கு மென்று நிறுவுக.



படம் 18.

தீர்வு. AP, BQ, CR என்பன நடுக்கோடுகளாதலின் அவை G என்னும் திணிவு மையத்தில் (centroid) சந்திக்கும்.

$$\therefore \quad \overrightarrow{PA} = \tfrac{3}{2}\,\overrightarrow{GA}$$

$$\overrightarrow{QB} = \tfrac{3}{2}\,\overrightarrow{GB}$$

$$\overrightarrow{RC} = \tfrac{3}{2}\,\overrightarrow{GC}$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{RC} = \tfrac{3}{2}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})$$

ஆனால், $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = (\overrightarrow{GP} + \overrightarrow{PB}) + (\overrightarrow{GX} + \overrightarrow{PC})$

$$= 2\,\overrightarrow{GP} + (\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC})$$

$$= 2\,\overrightarrow{GP} + O$$

$$= 2\,\overrightarrow{GP}$$

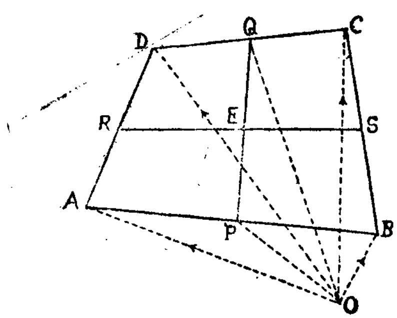
$$= \overrightarrow{AG}.$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AG} = O$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = O$$

மூன்று விசைகளும் சமநிலையிலிருக்கும்.

மாதிரி 12: $ABCD$ என்னும் நாற்கரத்தில் E என்பது எதிர்ப்பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோடுகளின் வெட்டுப்புள்ளி. O என்பது அத்தலத்திலுள்ள ஏதேனுமொரு புள்ளி. $\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}$ என்னும் விசைகளின் விளைவு $4\,\overrightarrow{OE}$ என்று நிறுவுக.



படம் 19

தீர்வு

$\triangle OAB$-யில் P என்பது AB-யின் நடுப்புள்ளி.

$$\therefore\quad \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\,\overrightarrow{OP}$$

$\triangle OCD$-யில் Q என்பது CD-யின் நடுப்புள்ளி.

$$\therefore\quad \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\,\overrightarrow{OQ}$$

$\triangle OPQ$-வில் E என்பது PQ-வின் நடுப்புள்ளி.

$$\therefore\ \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\,\overrightarrow{OP} + 2\,\overrightarrow{OQ}$$

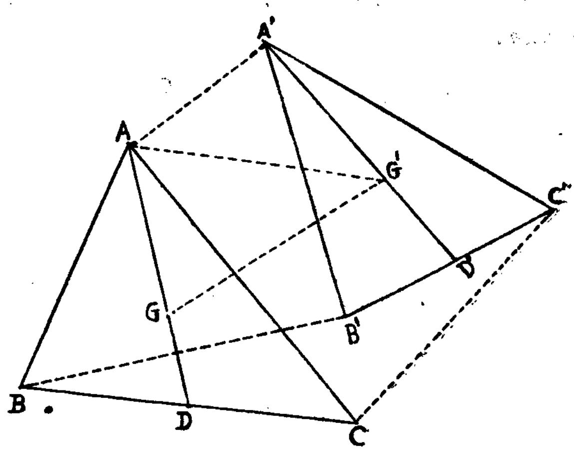
$$= 2\,(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ})$$

$$= 2\,(2\,\overrightarrow{OE})$$

$$= 4\,\overrightarrow{OE}.$$

மாதிரி 13. G, G' என்பன ABC, $A'B'C'$ என்னும் இரு முக்கோணங்களின் திணிவு மையங்கள் (centroids) ஆகும். $\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{CC'}$ என்னும் விசைகளின் விளைவு $3\,\overrightarrow{GG'}$ என்று காட்டுக.

தீர்வு



படம் 20

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AG'} + \overrightarrow{G'A'}$$

$$= \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'A'}$$

இதுபோல், $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'B'}$

$$\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'C'}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG}) + 3\ \overrightarrow{GG'} + (\overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{G'C'})$$

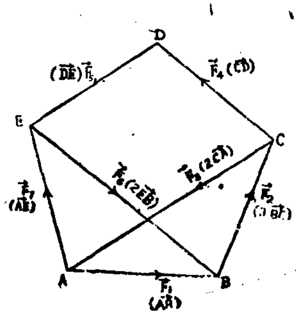
$$= 0 + 3\ \overrightarrow{GG'} + 0$$

(மாதிரி 11ஐப் பார்க்கவும்)

$$= 3\ \overrightarrow{GG'}$$

மாதிரி 14: *ABCDE* என்பது ஒரு ஐங்கோணம். $\overrightarrow{AB}$, $3\ \overrightarrow{BC}$, $2\ \overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $2\ \overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{AE}$, என்பவற்றால் அளவிலும் திசையிலும் குறிப்பிடப்படுகின்ற ஒரு புள்ளி விசைகள் சம நிலையிலிருக்குமென்று காட்டுக.

தீர்வு



படம் 21

கொடுக்கப்பட்டுள்ள விசைகளை

$\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}, \overrightarrow{F_4}, \overrightarrow{F_5}, \overrightarrow{F_6}, \overrightarrow{F_7}$

என்று குறிப்பிடவும்.

$$\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} + \overrightarrow{F_4} + \overrightarrow{F_5} + \overrightarrow{F_6} + \overrightarrow{F_7}$$

$$= \overrightarrow{AB} + 3\ \overrightarrow{BC} + 2\ \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + 2\ \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{AE}$$

$$= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}) + (2\ \overrightarrow{BC} + 2\ \overrightarrow{CA} + 2\ \overrightarrow{EB}) + \overrightarrow{AE}$$

$$= \vec{AE} + 2(\vec{BC} + \vec{CA} + \vec{EB}) + \vec{AE}$$

$$= 2(\vec{BC} + \vec{CA} + \vec{AE} + \vec{EB})$$

$$= 2(\vec{BA} + \vec{AB})$$

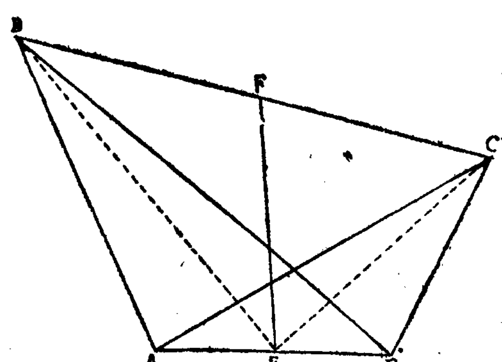
$$= 0$$

∴ விசைகள் சம நிலையிலிருக்கும்.

மாதிரி 15: *ABCD* என்பது ஒரு நாற்கரம். $\vec{CA}$, $\vec{CB}$, $\vec{DA}$, $\vec{DB}$ என்பவற்றினால் குறிப்பிடப்படுகின்ற விசைகள் ஒரு புள்ளியில் செயல்படுகின்றன. *E*, *F* என்பன *AB*, *CD* ஆகிய பக்கங்களின் நடுப் புள்ளிகளெனில் $4\vec{FE}$ ஆல் குறிப்பிடப்படுகின்ற ஒரு விசைக்கு இவ்விசைகள் யாவும் சமம் என்று காட்டுக.

(சென்னை பி.எஸ்ஸி 1964 ஏப்.)

தீர்வு



படம் 22

$\triangle CAB$-யில் *E* என்பது *AB*-யின் நடுப் புள்ளி.

$$\therefore \vec{CA} + \vec{CB} = 2\vec{CE}$$

$\triangle$ DAB-யில் E என்பது AB-யின் நடுப் புள்ளி.

$$\therefore \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} = 2\,\overrightarrow{DE}$$

$\triangle$ ECD-யில் F என்பது CD-யின் நடுப் புள்ளி.

$$\therefore \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED} = 2\,\overrightarrow{EF}$$

$$= -2\,\overrightarrow{FE}$$

இப்பொழுது,

$$\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}$$

$$= (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB})$$

$$= 2\,\overrightarrow{CE} + 2\,\overrightarrow{DE}$$

$$= -2\,\overrightarrow{EC} - 2\,\overrightarrow{ED}$$

$$= -2\,(\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED})$$

$$= -2\,(-2\,\overrightarrow{FE})$$

$$= 4\,\overrightarrow{FE}$$

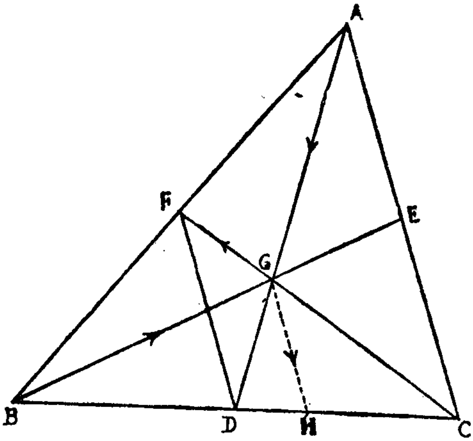
மாதிரி 16 : $\triangle$ ABC-யில் D, E, F என்பன முறையே BC, CA, AB ஆகிய பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகள். $\overrightarrow{AD}$, $\frac{2}{3}\,\overrightarrow{BE}$, $\frac{1}{3}\,\overrightarrow{CF}$ என்பவற்றினால் குறிப்பிடப்படுகின்ற விசைகள் ஒரு துகளின் மீது செயல்படுகின்றன. அவைகளின் விளைவு $\frac{1}{2}\,\overrightarrow{AC}$-ஆல் குறிப்பிடப்படுமென்றும், அவ்விளைவு விசையின் செயற்கோடு BC-ஐ $2 : 1$ என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்குமென்றும் காட்டுக.

(பி. எஸ்ஸி. சென்னை 1961 செப்., மதுரை '71 ஏப்.

தீர்வு

$\triangle$ ABC-யில் AD. BE, CF என்பன நடுக்கோடுகளாதலின் G என்னும் புஇளியில் சந்திக்கும்.

∴ $\frac{2}{3}\vec{BE} = \vec{BG}$; $\frac{1}{3}\vec{CF} = \vec{GF}$ கொடுக்கப்பட்டுள்ள விசைகளின் விளைவு $\vec{R}$ எனில்,



படம் 23

$$\vec{R} = \vec{AD} + \tfrac{2}{3}\vec{BE} + \tfrac{1}{3}\vec{CF}$$

$$= \vec{AD} + \vec{BG} + \vec{GF}$$

$$= (\vec{AG} + \vec{GD}) + (\vec{BG} + \vec{GF})$$

$$= (\vec{AG} + \vec{GF}) + (\vec{BG} + \vec{GD})$$

$$= \vec{AF} + \vec{BD}$$

$$= \vec{FB} + \vec{BD}$$

$$= \vec{FD}$$

$$= \tfrac{1}{2}\vec{AC}.$$

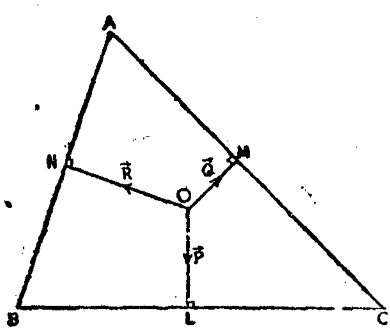
மேலும் கொடுக்கப்பட்டுள்ள மூன்று விசைகளும் G வழியே செயல்படுகின்றனவாகையால் அவற்றின் விளைவும் G வழியே

செயல்படும் ஒரு விசையாகும். ஆனால் விளைவு விசையானது $\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ ஆல் குறிக்கப்படுமென்று கண்டோம். ஆகவே, விளைவு விசை $\overrightarrow{R}$ ஆனது G வழியே $\overrightarrow{AC}$-க்கு இணையாகச் செல்லும் GH என்னும் நேர்கோட்டின் வழியே செயல்படும் ஒரு விசையாகும்.

$$\triangle\ BEC \text{ யில்}, \frac{BH}{HC} = \frac{BG}{GE} = \frac{2}{1}$$

ஆகவே, விளைவு விசையின் செயற்கோடு BCயை $2:1$ என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்கிறது.

மாதிரி 17 : $\triangle\ ABC$-யில் O என்பது ஒரு புள்ளி: OL, OM, GN, என்பன O-விலிருந்து BC, CA, AB க்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோடுகள், BC, CA, AB ஆகிய பக்கங்களுக்கு விகித சமமான அளவுகள் கொண்ட விசைகள் ஒரு துகளின் மீது OL, OM, ON என்ற திசைகளில் தாக்கினல் அத்துகள் ஓய்வு நிலையிலிருக்குமென நிறுவுக.



படம் 24

தீர்வு : OL, OM, ON என்னும் திசைகளில் செயல்படும் விசைகளை $\overrightarrow{P}, \overrightarrow{Q}, \overrightarrow{R}$ என்க. இவ்விசைகள் BC, CA, AB ஆகியவற்றிற்கு விகித சமத்திலிருப்பதால், $\frac{P}{BC} = \frac{Q}{CA} = \frac{R}{AB}$ ஆகும்.

ஆனல், திரிகோணக் கணிதத்திலிருந்து,

$\frac{BC}{\sin A} = \frac{CA}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C}$ என்று நாமறிவோம்.

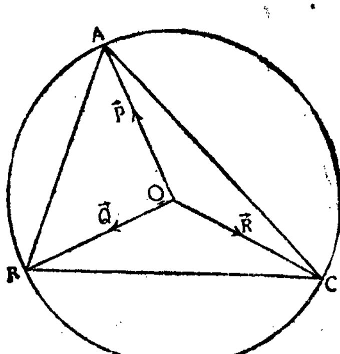
$$\therefore \quad \frac{P}{\sin A} = \frac{Q}{\sin B} = \frac{R}{\sin C}$$

அதாவது, $\frac{P}{\sin(\pi - A)} = \frac{Q}{\sin(\pi - B)} = \frac{R}{\sin(\pi - C)}$

ஆனல் $(\pi - A)$, $(\pi - B)$, $(\pi - C)$ என்பன முறையே $\vec{Q}, \vec{R}$; $\vec{R}, \vec{P}$; $\vec{P}, \vec{Q}$ ஆகிய விசைச் சோடிகளுக்கிடையேயுள்ள கோணங்களாகும். எனவே, இலாமியின் தேற்றத்தின் மறுதலையின்படி $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$ ஆகிய விசைகள் சமநிலையிலிருப்பதாகக் காணலாம்.

மாதிரி 18 : O என்பது $\triangle ABC$யின் சுற்று வட்டமையம். OA, OB, OQ ஆகியவற்றின் வழியாகச் செயல்படுகின்ற $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$ என்ற விசைகள் சமநிலையிலிருக்கின்றனவெனில்,

$$\frac{P}{a^2(b^2+c^2-a^2)} = \frac{Q}{b^2(c^2+a^2-b^2)} = \frac{R}{c^2(a^2+b^2-c^2)}$$ என்று காட்டுக.



படம் 25

தீர்வு : O என்பது சுற்று வட்ட மையமாகையால்

$\angle BOC = 2A$, $\angle COA = 2B$, $\angle AOB = 2C$ ஆகும்.

இலாமியின் தேற்றப்படி,

$$\frac{P}{\sin 2A} = \frac{Q}{\sin 2B} = \frac{R}{\sin 2C}$$

$$\frac{P}{2\sin A\cos A} = \frac{Q}{2\sin B\cos B} = \frac{R}{2\sin C\cos C}$$

ஆனல், R_1 எனபது சுற்றுவட்ட ஆரையெனில்,

$$\sin A = \frac{a}{2R_1},\ \sin B = \frac{b}{2\ R_1},\ \sin C = \frac{c}{2\ R_1}$$

$$\therefore \quad \frac{P}{2\left(\frac{a}{2R_1}\right)\cos A} = \frac{Q}{2\left(\frac{b}{2R_1}\right)\cos B} = \frac{R}{2\left(\frac{c}{2R_1}\right)\cos C}$$

அதாவது, $\frac{P}{a\cos A} = \frac{Q}{b\cos B} = \frac{R}{c\cos C}$

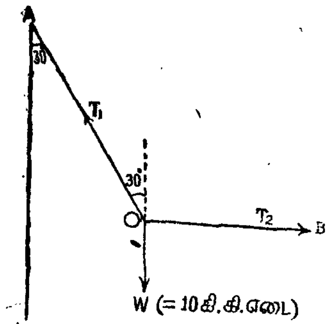
$$\frac{P}{\frac{a\,(b^2+c^2-a^2)}{2\,bc}} = \frac{Q}{\frac{b\,(c^2+a^2-b^2)}{2\,ca}} = \frac{R}{\frac{c\,(a^2+b^2-b^2)}{2\,ab}}$$

அதாவது, $\frac{P}{a^2(b^2+c^2-a^2)} = \frac{Q}{b^2(c^2+a^2-b^2)} = \frac{R}{c^2(a^2+b^2-c^2)}$

மாதிரி 19: இலேசான கயிறு ஒன்றினுல் தொங்க விடப்பட்ட 10 கி. கி. எடையுள்ள ஒரு பொருள் அக் கயிற்றில் கட்டப்பட்டுள்ள மற்ருெரு இலேசான கயிற்றினுல் முதல் கயிறு நிலேக்குத்துக் கோட்டிற்கு 30° சரிவிலிருக்குமாறு கிடைத் திசையில் இழுக்கப்படுகிறது, இரண்டு கயிறுகளின் இழு விசைகளையும் (Tensions) காண்க.

தீர்வு : $A\,O$ என்னும் கயிற்ருல் 10 கி. கி. எடை தொங்க விடப்பட்டுள்ளது. $O\,B$ என்னும் கயிருனது முதல் கயிற்றில் 0 என்னும் புள்ளியில் கட்டப்பட்டுக் கிடைத் திசையில் இழுக்கப்படுகிறது. ஆகவே, 10 கி. கி. எடையானது 0–விலிருந்து நிலேக்குத்தாகக் கீழ் நோக்கித் தொங்கும். $O\,A$ என்னும் கயிருனது நிலேக்குத்துடன் 30° சாய்விலுள்ளது. $O\,A$, $O\,B$ என்னும் திசைகளில் கயிறுகளின் இழு விசைகளை முறையே T_1, T_2 என்று குறிப்பிடுக.

T_1, T_2, 10 கி. கி. எடை ஆகிய மூன்று விசைகளும் O-வில் செயல்பட்டுச் சமநிலையிலுள்ளன. எனவே, இலாமியின் தேற்றப்படி,



படம் 26

$$\frac{T_1}{\sin 90°} = \frac{T_2}{\sin(\pi - 30°)} = \frac{10}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + 30°\right)}$$

அதாவது, $\dfrac{T_1}{1} = \dfrac{T_2}{\sin 30°} = \dfrac{10}{\cos 30°}$

அதாவது, $\dfrac{T_1}{1} = \dfrac{T_2}{1/2} = \dfrac{10}{\sqrt{3}/2}$

$$\therefore \quad T_1 = \frac{20}{\sqrt{3}}, \; T_2 = \frac{10}{\sqrt{3}}$$

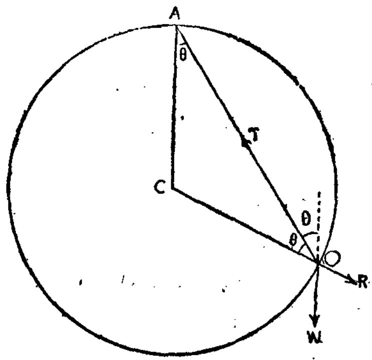
அதாவது, கயிற்றின் இழு விசைகள் முறையே $\dfrac{20}{\sqrt{3}}$ கி.கி., $\dfrac{10}{\sqrt{3}}$ கி. கி. எடைகளாகும்.

மாதிரி 20: W எடையுள்ள சிறிய குன்றி மணியொன்று நிலைத்தளத்திலமைந்துள்ள ஒரு வட்டக் கம்பியொன்றின் மீது நழுவிச் செல்லக் கூடியதாயுள்ளது. அது ஒரு இலேசான நூலின் மூலம் வட்டத்தின் உச்சிப் புள்ளியுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. சமநிலையில் நூலானது விறைப்பாக நிலைக்குத்துடன் θ கோணத்திலிருந்தால், நூலின் இழு விசையையும், குன்றி மணியின் மீது வட்டக் கம்பியின் எதிரமுத்தத்தையும் காண்க.

(சென்னை பி.எஸ்ஸி 1961 ஏப்.)

தீர்வு

C என்பது வட்டக் கம்பியின் மையம். A என்பது உச்சிப் புள்ளி. O என்பது சமநிலையில் மணியின் நிலை. $O A$ என்பது மணியை உச்சிப் புள்ளியுடன் இணைக்கும் நூல்.



படம் 27

மணியின் எடையாகிய W என்பது O-வில் நிலைக்குத்தாகக் கீழ் நோக்கிச் செயல்படும்.

நூலின் இழு விசை T ஆனது $O A$ வழியேயும், மணியின் மீது வட்டக் கம்பியின் எதிர் அழுத்தம் R ஆனது $C O$ வழியேயும் செயல்படும்.

ஆகவே, குன்றி மணியானது O-வில் W, T, R என்னும் மூன்று விசைகளினால் தாக்கப்பட்டுச் சமநிலையிலுள்ளது. ஆகவே, இலாமியின் தேற்றப்படி,

$$\frac{R}{\sin \angle TOW} = \frac{T}{\sin \angle WOR} = \frac{W}{\sin \angle TOR}$$

இப்பொழுது, OA-க்கும், O வழி நிலைக் குத்துக் கோட்டிற்கு மிடையேயுள்ள கோணம் θ என்று தரப்பட்டுள்ளது.

$$\therefore \quad \angle O A C = \theta.$$

$C A = C O =$ ஆரையாகையால், $\angle A O C = \angle O A C = \theta.$

$$\therefore \quad \angle T O W = (\pi - \theta).$$

$$\angle WOR = 2\theta,$$

$$\angle TOR = (\pi - \theta)$$

$$\therefore \quad \frac{R}{\sin(\pi-\theta)} = \frac{T}{\sin 2\theta} = \frac{W}{\sin(\pi-\theta)}$$

அதாவது, $$\frac{R}{\sin\theta} = \frac{T}{\sin 2\theta} = \frac{W}{\sin\theta}$$

$$\therefore \quad R = \frac{W\sin\theta}{\sin\theta} = W$$

$$T = \frac{W\sin 2\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{W.2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta}$$

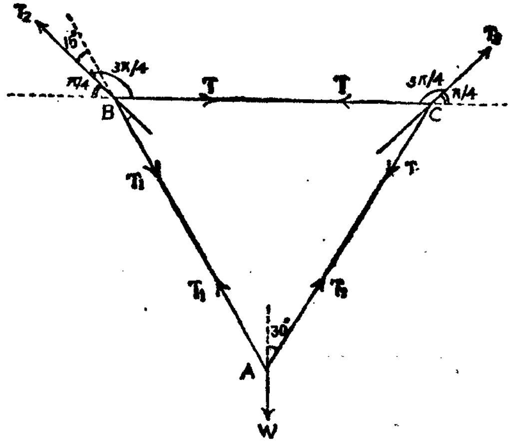
$$= 2W\cos\theta.$$

மாதிரி 21 : குறிப்பிடத்தக்க எடையில்லாத சம நீளமுள்ள மூன்று கயிறுகள் ABC என்னும் சம பக்க முக்கோண வடிவில் அமையுமாறு முடிச்சிடப்பட்டு A-யில் W எனும் தொங்கவிடப் பட்டுள்ளது. BC-யானது கிடையாக யிருக்குமாறு B-யிலும் A-யிலும் கிடைத் திசையுடன் $\frac{3\pi}{4}$ கோணத்தில் இரு கயிறுகளால் அந்த முக்கோண அமைப்புக்கு குலேயாதவாறு பாதுகாக்கப் படுகிறது. BC என்னும் கியிற்றின் மீதுள்ள இழு விசை $\frac{W}{6}(3 - \sqrt{3})$ என்று காட்டுக.

தீர்வு

ABC என்பது மூன்று சம நீளக் கயிறுகளாலான ஒரு சம பக்க முக்கோணம். A-யில் தொங்க விடப்பட்டுள்ள எடை W ஆனது நிலைக்குத்தாகக் கீழ் நோக்கிச் செயல்படும். இந்த எடையானது AB, AC என்னும் இரு சம நீளக் கயிறுகளினல் நிலைக்குத்துடன் சம கோணங்களில் தாங்கப்படுவதால் அக் கயிறுகளின் இழு விசைகள் சமமாகயிருக்கும். இச்சம இழு விசைகளை T_1 என்க. B, A ஆகிய முடிச்சுக்களில் இணைக்கப் பட்டுள்ள கயிறுகள் முக்கோணத்தையும் A-யிலுள்ள W-ஐயும் கிடைக் கோட்டுடன் சம கோணங்களில் இழுத்துத் தாங்குவ

தால் இவ்விரு கயிறுகளின் இழுவிசைகளும் சமமாகயிருக்கும். இச்சம இழுவிசைகளை T_2 என்று குறிப்பிடுக. AB என்னும்



படம் 28

கயிற்றில் அதன் இரு முனைகளிலும் முறையே W, T_2 ஆகிய விசைகளைத் தாங்கவேண்டியிருப்பதால் A-யிலிருந்து B-யை நோக்கியும், B-யிலிருந்து A-யை நோக்கியும் இரு இழுவிசைகள் செயல்படுகின்றன. ஆனால் AB என்பது ஒரே சீரான கயிறாகையால் இவ்விழுவிசைகள் சமமாகயிருக்கும், அதாவது, AB என்னும் கயிற்றில் A-யிலிருந்து B-யை நோக்கி T_1 என்னும் இழுவிசையும் B-யிலிருந்து A-யை நோக்கி T_1 என்னும் இழுவிசையும் செயல்படும். இதுபோல் AC-யிலும் A-யிலிருந்து C-யை நோக்கியும் C-யிலிருந்து A-யை நோக்கியும் இரு சம இழுவிசைகள் செயல்படும். ஆனால் A-யிலிருந்து C-யை நோக்கிச் செயல்படும் இழுவிசையானது A-யிலிருந்து B-யை நோக்கிச் செயல்படும் இழுவிசைக்குச் சமமாகயிருக்குமாதலின் AC-யில் செயல்படும் இரு சம எதிர் இழுவிசைகள் T^1-க்குச் சமமாகும். இதுபோல BC-யில் எதிரெதிராகச் செயல்படும் இழுவிசைகளை T என்று குறிப்பிடுக.

A-யில் செயல்படுகின்ற T_1, T_1, W ஆகிய விசைகள் சமநிலையிலுள்ளன.

$$\therefore \quad \frac{T_1}{\sin (180° - 30°)} = \frac{W}{\sin 60°}$$

அதாவது, $\dfrac{T_1}{1/2} = \dfrac{W}{\sqrt{3}/2}$

அல்லது, $T_1 = \dfrac{W}{\sqrt{3}}.$

B-யில் செயல்படுகின்ற T, T_2, T_1 ஆகிய விசைகள் சமநிலையி லுள்ளன.

எனவே, இலாமியின் தேற்றப்படி,

$$\frac{T}{\sin 15^\circ} = \frac{T_1}{\sin\left(\pi - \frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{T}{\sin\frac{\pi}{4}}$$

$$\therefore \quad T = \frac{T_1 \sin 15^\circ}{\sin \pi/4}$$

$$= \frac{W}{\sqrt{3}} \cdot \frac{(\sin 45^\circ - 30^\circ)}{1/\sqrt{2}}$$

$$= W\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} (\sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ)$$

$$= W\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{W}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$$

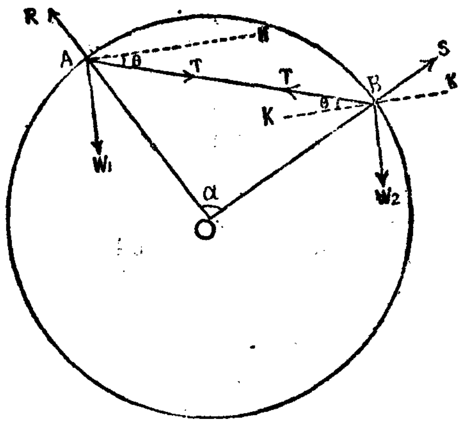
$$= \frac{W}{6}(3 - \sqrt{3}).$$

மாதிரி 22 : ஒரு பெரிய வழவழப்பான வளையத்தின்மேல் எவ்விதத் தடையுமின்றி நழுவிச் செல்லக்கூடிய W_1, W_2 என்னும் எடைகளைக் கொண்ட இரு சிறு வளையங்கள் ஒரு இலேசான கயிற்றின்மூலம் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. கயிறு வளையத்தின் மையத்தில் தாங்கும் கோணம் α எனில், சமநிலையில் கயிறு விறைப்பாகவும் கிடைத்திசையுடன் θ கோணச் சாய்விலுமிருக்கும்போது

$$(W_1 + W_2) \tan\theta = (W_1 - W_2)\tan\frac{\alpha}{2}$$ என்று நிறுவுக.

தீர்வு

A, B என்பன *O*ஐ மையமாகக் கொண்ட பெரிய வளையத்தின்மேல் நழுவி நழுவிச் செல்லும் இருசிறிய வளையங்களாகும். இவ்விரு வளையங்களும் *AB* என்னும் கயிற்றினால் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. *A, B* ஆகிய சிறு வளையங்களின் எடைகளான



படம் 29

W_1, W_2 ஆகியவை முறையே *A, B* என்ற புள்ளிகளில் நிலைக்குத்தாகக் கீழ்நோக்கிச் செயல்படும். *A, B* ஆகிய இரு சிறு வளையங்களின் மீதும பெரிய வளையத்தின் எதிரெழுத்துக்களாகிய *R, S* என்பவை முறையே *OA, OB* என்னும் ஆரங்களின் வழியே வெளிநோக்கிச் செயல்படுகின்றன. *AB* என்ற கயிற்றின்மீது *A*யிலிருந்து *B*யை நோக்கியும், *B*யிலிருந்து *A*யை நோக்கியும் *T* என்னும் இருசம எதிர் இழுவிசைகள் செயல்படும்.

AH என்பது *A* வழியே வரையப்படும் கிடைக்கோடு என்றால் $\angle BAH = \theta$ ஆகும்.

$\therefore \angle BAW_1 = (90° - \theta)$; $\angle AOB = \alpha$ (கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.)

OAB என்பது இருசமபக்க முக்கோணம்.

$$\therefore \angle OAB = \angle OBA = \tfrac{1}{2}(180° - \alpha) = \left(90° - \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\therefore \angle BAR = 180° - \left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) = \left(90 + \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\therefore \angle OAW_1 = 90° - \angle BAH - \angle OAB$$

$$= 90° - \theta - \left(90° - \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{\alpha}{2} - \theta\right)$$

$$\therefore \angle RAW_1 = 180° - \left(\frac{\alpha}{2} - \theta\right)$$

இப்பொழுது, Aயில் சமநிலையிலிருக்கும் W_1, T, R என்னும் விசைகளுக்கு இலாமியின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்துக.

$$\frac{T}{\angle \sin RAW_1} = \frac{W_1}{\sin \angle BAR}$$

அதாவது,

$$\frac{T}{\sin\left[180° - \frac{\alpha}{2} - \theta\right)\right]} = \frac{W_1}{\sin\left(90° + \frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$\frac{T}{\sin\left(\frac{\alpha}{2} - \theta\right)} = \frac{W_1}{\cos\frac{\alpha}{2}} \quad \ldots \quad (1)$$

இதுபோல் Bயில் சமநிலையிலிருக்கும் W_2, S, T என்னும் விசைகளின் சமநிலையைக் கருதுக.

$$\angle ABS = 180° - \left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) = \left(90° + \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\angle ABK = \theta$$

$$\angle SBK' = \angle OBK = \left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) - \theta = 90° - \frac{\alpha}{2} - \theta$$

$$\therefore \angle W_2BS = 90° + \angle SBK = 90° + 90° - \left(\frac{\alpha}{2} + \theta\right)$$

$$= 180° - \left(\frac{\alpha}{2} + \theta\right)$$

$$\therefore \frac{T}{\sin W_2BS} = \frac{W_2}{\sin \angle ABS}$$

$$\frac{T}{\sin\left[180° - \left(\frac{\alpha}{2} + \theta\right)\right]} = \frac{W_2}{\sin\left(90° + \frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$\frac{T}{\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \theta\right)} = \frac{W_2}{\cos\frac{\alpha}{2}} \qquad \dots (2)$$

(1)ஐ (2)ஆல் வகுக்கவும்.

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \theta\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2} - \theta\right)}.$$

$$= \frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\theta + \cos\frac{\alpha}{2}\sin\theta}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\theta - \cos\frac{\alpha}{2}\sin\theta}$$

$$= \frac{\tan\frac{\alpha}{2} + \tan\theta}{\tan\frac{\alpha}{2} - \tan\theta}$$

$$\therefore \frac{W_1 + W_2}{W_1 - W_2} = \frac{\left(\tan\frac{\alpha}{2} + \tan\theta\right) + \left(\tan\frac{\alpha}{2} - \tan\theta\right)}{\left(\tan\frac{\alpha}{2} + \tan\theta\right) - \left(\tan\frac{\alpha}{2} - \tan\theta\right)}$$

$$= \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{2 \tan \theta}$$

$$= \frac{\tan \frac{\alpha}{2}}{\tan \theta}$$

$$\therefore (W_1 + W_2) \tan \theta = (W_1 - W_2) \tan \frac{\alpha}{2}.$$

பயிற்சி 3

(1) A, B, P, Q, R என்பன ஒரு தளத்திலுள்ள ஐந்து $\vec{AP}, \vec{AQ}, \vec{AR}$ என்னும் விசைகள் Aயிலும், $\vec{PB}, \vec{QB}, \vec{RB}$ என்னும் விசைகள் Bயிலும் செயல்படுகின்றன. இந்த ஆறு விசைகளின் விளைவு $3\vec{AB}$ என்று காட்டுக.

(2) O என்பது $ABCD$ என்ற இணைகரத்தின் தளத்திலுள்ள ஒரு புள்ளி. $\vec{OA}, \vec{OC}, \vec{BO}, \vec{DO}$ ஆகிய விசைகளினுல் தாக்கப்படுகின்ற ஒரு துகள் சம நிலையிலிருக்குமென நிறுவுக.

(3) $ABCD$ என்னும் இணைகரத்தில் E என்பது AB யின் நடுப்புள்ளி. $\vec{AC}$ ஆகிய விசைகளின் விளைவு $\vec{AD}, \vec{AE}$ ஆகிய விசைகளின் விளைவைப் போல் இரு மடங்கு என்று நிறுவுக.

(4) $\triangle ABCD$யில் D, E, F என்பன BC, CA, AB ஆகிய பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகள். P என்பது $\triangle ABC$யின் ஏதேனுமொருபுள்ளி, $\vec{AP}, \vec{BP}, \vec{CP}, \vec{PD}, \vec{PE}, \vec{PF}$ ஆகிய விசைகள் சமநிலையிலிருக்குமென நிறுவுக.

(5) $ABCD$ என்ற இணைகரத்தின் தளத்திலமைந்துள்ள P என்னும் துகள் $\vec{PA}, \vec{PC}$ என்னும் விசைகளினுல் A, C ஆகியவற்றை நோக்கி ஈர்க்கப்படுகின்றன; அதே நேரம் $\vec{BP}, \vec{DP}$ என்னும் தள்ளு விசைகளினுல் Bயிலிருந்தும், Dயிலிருந்தும் தள்ளப்படுகிறது. அத்துகள் இணைகரத்தின் தளத்தில் எங்கிருந்தாலும் சமநிலையிலிருக்குமென்று காட்டுக.

(6) D, E, F என்பன $\triangle ABC$யின் BC, CA, AB ஆகிய பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகள். O என்பது முக்கோணம் ABC யின் தளத்திலுள்ள ஏதேனுமொரு புள்ளியெனில், $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}, \vec{DO}, \vec{ED}, \vec{FO}$ என்னும் விசைகள் சமநிலையிலிருக்குமென்று காட்டுக.

(7) ஒருபுள்ளி வழியே செயல்படுகின்ற ஐந்து விசைகள் $ABCD$ என்னும் சதுரத்தில் $\vec{AB}, 2\vec{BC}, 2\vec{CD}, \vec{DA}, \vec{DB}$ என்பன வற்றால் அளவிலும், திசையிலும் குறிப்பிடப்படுகின்றன. அவ்விசைகள் சமநிலையிலிருக்குமென்று காட்டுக,

(8) E, F, G, H என்பன நாற்கரம் $ABCD$யின் பக்கங்களான, AB, BC, CD, DA ஆகியவற்றின் நடுப்புள்ளிகள். ஒரு புள்ளியில் செயல்பட்டு, $\vec{EG}, \vec{HF}$ ஆல் குறிப்பிடப்படுகின்ற விசைகளின் விளைவு $\vec{AC}$ஆல் குறிப்பிடப்படுமென்று காட்டுக.

(9) $ABCD, A'B'C'D'$ என்பன இரு இணைகரங்கள். AA', BB', CC', DD', ஆகிய திசைகளில், அந்நேர்கோட்டுத்துண்டங்களுக்கு விகிதசமமான அளவுகளுடன் ஒரு புள்ளி வழியே செயல்படுகின்ற விசைகள் சமநிலையிலிருக்குமென்று காட்டுக.

(சென்னை பி.எஸ்ஸி. 1963 ஏப்.)

(10) $ABCDE$ என்பது ஒரு ஐங்கோணம். ஒரு துகளின் மீது செயல்படுகின்ற விசைகள் அளவிலும், திசைகள் $\vec{AB}, \vec{AE}, \vec{BC}, \vec{DC}, \vec{ED}, \vec{AC}$, ஆகியவற்றால் குறிப்பிடப்படுகின்றன. அவற்றின் விளைவு 3 $\vec{AC}$ ஆல் குறிப்பிடப்படுமென்று காட்டுக,

(11) $AECDEF$ என்பது ஒரு ஒழுங்கு அறுகோணம். P என்பது அதன் தளத்திலுள்ள ஏதேனுமொரு புள்ளி, $\vec{PA}, \vec{BP}, \vec{PC}, \vec{DP}, \vec{PE}, \vec{FP}$, ஆகியவற்றால் அளவிலும் திசையிலும் குறிப்பிடப்படுகின்ற விசைகள் சமநிலையிலிருக்குமென்று காட்டுக.

(12) ABC என்பது ஒரு முக்கோணம் $\vec{AD}, 2\vec{AC}$ ஆகிய வற்றால் குறிப்பிடப்படுகின்ற விசைகளின் விளைவு BC யை 2 : 1 என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்குமென்று காட்டுக.

(13) O என்னும் துகள் F_1, F_2, 10 கி.கி. எடை ஆகிய அளவுகளுடன் கூடிய மூன்று விசைகளின் தாக்குதல்களுக்குட் பட்டுச் சமநிலையிலிருக்கின்றது. முதலிரு விசைகளின் இடைக் கோணம் 120°-ம் எனில், $F_1 = 10\sqrt{3}$ கி.கி. எடை $F_2 = 20$ கி. கி. எடையென்று காட்டுக.

(14) ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்களுக்கு விகிதசம அளவு களுடைய மூன்று விசைகள் பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகளின் வழியே பக்கங்களுக்குச் செங்குத்தாகச் செயல்படுகின்றன. அவ்விசைகள் சமநிலையிலிருக்குமென்று காட்டுக.

(15) A, B என்பன ஒரே கிடைக் கோட்டில் C இடை வெளியிலமைந்துள்ள இரு நிலையான புள்ளிகள். முறையே b, a எனும் நீளங்களுடைய AC, BC எனும் இரு இலேசான கயிறுகள் C யில் ஒரு எடையைத் தாங்குகின்றன. அக்கயிறு களின் மீது செயல்படும் இழுவிசைகள் $b(a^2+c^2-b^2)$: $a(b^2+c^2-a^2)$ என்னும் விகிதத்திலிருக்குமென்று காட்டுக.

(16) O என்பது $\triangle ABC$ யின் சுற்றுவட்ட மையம். $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$ என்னும் விசைகள் முறையே OA, BC, OC வழியே செயல் பட்டுச் சமநிலையிலிருக்கின்றன. $P:Q:R = \sin 2A : \sin 2B : \sin 2C$ என்று காட்டுக.

(17) O என்பது $\triangle ABC$ யின் செங்குத்து மையம். $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$ என்னும் விசைகள் முறையே OA, OB, OC வழியே செயல் பட்டுச் சமநிலையிலிருக்கின்றன.

$$\frac{P}{BC} = \frac{Q}{CA} = \frac{R}{AB}$$ என்று நிறுவுக.

(18) O என்பது $\triangle ABC$ யின் உள் வட்டமையம் $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$ என்னும் விசைகள் முறையே OA, OB, OC வழியே செயல் பட்டுச் சமநிலையிலிருக்கின்றன.

$$\frac{P}{\sin\frac{A}{2}} = \frac{Q}{\sin\frac{B}{2}} = \frac{R}{\sin\frac{C}{2}}$$ என்று காட்டுக

(19) a,b,c என்பன $\triangle ABC$ யின் BC, CA, AB ஆகிய பக்கங்களின் நீளங்கள். O என்பது அதன் சுற்றுவட்டமையம். $\vec{P}$, $\vec{Q}$, $\vec{R}$ என்னும் விசைகள் முறையே OA, OB, OC வழியே செயல்பட்டுச் சமநிலையிலுள்ளன.

$$\frac{P}{\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{a^2}{b^2c^2}\right)} = \frac{Q}{\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}-\frac{b^2}{c^2a^2}\right)} = \frac{R}{\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{c^2}{a^2b^2}\right)}$$

என்று காட்டுக.

(20) W எடையுள்ள ஒரு சீரான நேர்வட்ட உருளையானது ஒன்று நிலைக்குத்தாகவும், மற்றது நிலைக்குத்துடன் $60°$ சாய்வி லிருக்குமாறும் அமைந்த இரு நிலையான தளங்களுக்கிடையில் தாங்கப்பட்டுள்ளது. தளங்களின் எதிரமுத்தங்கள் முறையே $\frac{2W}{\sqrt{3}}$, $\frac{W}{\sqrt{3}}$ என்று காட்டுக.

(21) ஒரே சம மட்டத்தில் a இடைவெளியலமைந்த வழ வழப்பான இரு முனைகளின் வழியே செல்லும் இலேசான நீளியல்பற்ற கயிறு (light inextensible string) ஒன்றின் இரு முனைகளிலும் கட்டப்பட்டுள்ள $2W$, $3W$ எடைகளுள்ள இரு துகள்கள் அம் முனைகளுக்கிடையேயுள்ள கயிற்றுப் பகுதி யில் கட்டப்பட்டுள்ள W' எடையுள்ள மூன்றாவது துகளினுல் சமநிலையில் வைக்கப்படுகின்றன. சாய்வு நிலைகளிலுள்ள கயிற்றுப் பகுதிகளுக்கிடையேயுள்ள கோணம் $120°$ எனில், $W' = \sqrt{7}\, W$ என்று காட்டுக.

(22) நிலைத்தளத்தில் (verticle plane) நிலையாக அமைந்த ஒரு வழவழப்பான வட்டக்கம்பியின் மேல் w எடையுள்ள ஒரு சிறு கனமான வளையம் தாராளமாக நழுவிச் செல்லும் நிலையிலமைந்துள்ளது. அது, மையத்துடன் கிடைக் கோட்டி லமைந்த கம்பியின் மேலுள்ள ஒரு புள்ளியுடன் $2a > l > a\sqrt{2}$ என்பதற்கேற்ப l நீளமுள்ள ஒரு கயிற்றினுல் இணைக்கப் பட்டுள்ளது. கயிற்றின் இழுவிசை $\frac{w(l^2-2a^2)}{a\sqrt{4a^2-l^2}}$ என்று காட்டுக.

(a என்று வட்டத்தின் ஆரை).

(23) r ஆரையுள்ள ஒரு வழவழப்பான நிலைக்குத்து வட்டக் கம்பியின் மேல் நழுவிச் செல்லக்கூடிய w எடையுள்ள சிறிய குன்றிமணியொன்று $\sqrt{3}\ r$ நீளமுள்ள இலேசான கயிறு ஒன்றினால் கம்பியின் உச்சிப்புள்ளியுடன் இணைக்கப் பட்டுள்ளது. கயிற்றின் இழுவிசை $\sqrt{3}\ W$ என்றும், கம்பியின் மேல் மணியின் அழுத்தம் W என்றும் காட்டுக.

(24) AE என்னும் இலேசான கயிறு ஒன்றினை நான்கு சம பாகங்களாகப் பிரிக்கின்ற B, C, D என்னும் புள்ளிகளில் முறையே W, ω, W என்னும் எடைகள் கட்டப்பட்டுள்ளன. A, E என்ற முனைகள் சமமட்டத்திலுள்ள புள்ளிகளில் கட்டப் பட்டு, ஓர் ஒழுங்கு எண்கோணத்தின் அடுத்தடுத்த நான்கு பக்கங்களின் அமைப்பில் அக்கயிறு தொங்குமானால் $W = (\sqrt{2}+1)\ \omega$ என்று காட்டுக.

(25) சமமட்டத்தில் c இடைவெளியிலுள்ள A, B என்னுமிரு புள்ளிகளில் l நீளமுள்ள ஒரு இலேசான கயிறு கட்டப்பட் டுள்ளது. அக்கயிற்றில் நழுவிச் செல்லக் கூடிய W எடையுள்ள ஒரு வளையம் P எனனும் ஒரு கிடை விசையினால் B க்கு நிலைக் குத்தாகக் கீழே சமநிலையில் வைக்கப்பட்டுள்ளது.

$P = \dfrac{cW}{l}$ என்றும், கயிற்றின் இழுவிசை $= \dfrac{W(l^2 + c^2)}{2l^2}$ என்றும் காட்டுக.

(26) கிடைத்தளத்துடன் α சாய்விலுள்ள ஒரு வழவழப் பான சாய்தளத்தின் மேல் ஒரு எடையானது கிடைக் கோட்டிற்கு β கோணத்தில் சாய்ந்துள்ள ஒரு கயிற்றினால் தாங்கப்பட்டுள்ளது. சாய்தளத்தின் சாய்வு γ எனும் கோணத் திற்கு அதிகரிக்கப்பட்டபோது கயிற்றின் திசைமாறுமலிருக்க இழுவிசை இரட்டிப்பாகிறது.

$$\cot\alpha = \tan\beta + 2\cot\gamma$$

என்று நிறுவுக.

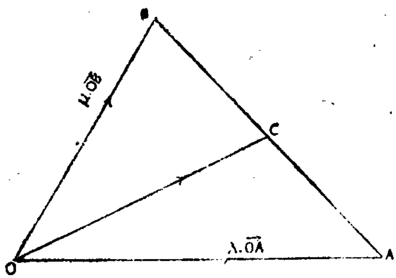
(மதுரை பி.எஸ்ஸி. 1969 செப்.)

λ, μ) தேற்றம்

O என்னும் புள்ளி வழியே OA, OB என்னும் திசைகளில் செயல்படுகின்ற $\lambda\cdot\overrightarrow{OA}$, $\mu\cdot\overrightarrow{OB}$ என்னும் விசைகளின் விளைவு,

PB-யில் $\lambda\cdot AC = \mu\cdot CB$ என்றவாறு அமையப்பெறும். C என்னும் புள்ளி வழியே செயல்படுகின்ற $(\lambda + \mu)\,\vec{OC}$ என்னும் விசையாகும்.

நிறுவல்



படம் 30

விசை முக்கோண விதியின்படி, △ OCA-யிலிருந்து,

$$\vec{OA}, = \vec{OC} + \vec{CA}$$

$$\therefore \quad \lambda\cdot\vec{OA} = \lambda\cdot\vec{OC} + \lambda\cdot\vec{CA} \qquad \ldots \qquad (1)$$

△ OCB-யிலிருந்து,

$$\vec{OB} = \vec{OC} + \vec{CB}$$

$$\therefore \quad \mu\cdot\vec{OB} = \mu\cdot\vec{C} + \mu\cdot\vec{CB} \qquad \ldots \qquad (2)$$

(1), (2) ஆகிய சமன்பாடுகளைக் கூட்டுக.

$$\lambda\cdot\vec{OA} + \mu\cdot\vec{OB} = (\lambda + \mu)\vec{OC} + \lambda\cdot\vec{CA} + \mu\cdot\vec{CB}$$

ஆனல் $\lambda\cdot AC = \mu\cdot CB$ (கொடுக்கப்பட்டுள்ளது)

$$\therefore \quad \lambda\cdot\vec{AC} = \mu\cdot\vec{CB}$$

அல்லது $\lambda\cdot\vec{CA} = -\,\mu\cdot\vec{CB}$

அல்லது, $\lambda\,\vec{CA} + \mu\cdot\vec{CB} = 0$

$$\therefore \quad \lambda\cdot\overrightarrow{OA} + \mu\cdot\overrightarrow{OB} = (\lambda + \mu)\,\overrightarrow{OC}$$

குறிப்பு: $\lambda = 1$, $\mu = 1$ என்று பிரதியிட $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OC}$ என்ற தொடர்பு கிடைக்கிறது. அதாவது, $\triangle OAB$-யில் OA, OB என்னும் பக்கங்களின் வழியே செயல்படுகின்ற $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ ஆகிய விசைகளின் விளைவு O வழியே எதிர்ப்பக்கத்திற்கு வரையப் படும் OC என்னும் நடுக்கோட்டின் வழியே செயல்படும் $2\overrightarrow{OC}$ என்னும் விசையாகும். விசைகளின் இணைகர விதியிலிருந்தும், திசையிக்களின் கூட்டத்திலிருந்தும் இவ்வுண்மையைக் கண்ட றியலாம்.

(λ, μ) தேற்றத்தின் விரிவு

O என்னும் புள்ளி வழியே OA, OB, OC,......... ஆகிய திசைகளில் செயல்படுகின்ற $\lambda\cdot\overrightarrow{OA}$, $\mu\cdot\overrightarrow{OB}$, $\gamma\cdot\overrightarrow{OO}$,.........ஆகிய விசைகளின் விளைவு A, B, C,...ஆகிய புள்ளிகளில் λ, μ. γ,... ஆகிய அலகுப் பொருண்மைகளின் தொகுதியின் ஈர்ப்புமை மாகிய (Centre of Gravity) G என்னும் புள்ளிவழியே செயல் படும் $(\lambda+\mu+\gamma...)\,\overrightarrow{OG}$ என்னும் விசையாகும்,

குறிப்பு: O வழியே OA, OB, OC ஆகிய திசைகளில் செயல்படுகின்ற $\overrightarrow{OA}$. $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ என்னும் மூன்று விசைகளின் விளைவு, முக்கோணம் ABC-யின் திணிவு மையமாகிய (centroid) G என்னும் புள்ளிவழியில் செயல்படும் $3\overrightarrow{OG}$ என்னும் விசை யாகும்.

மாதிரி 23. G என்பது $\triangle ABC$-யிலுள்ள அமைந்த ஒரு புள்ளி $\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GB}$, $\overrightarrow{GC}$ என்னும் விசைகள் சமநிலையிலிருப்பின் G ஆனது $\triangle ABC$-யின் திணிவு மையமாகுமென நிறுவுக. மேலும் $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{CF}$ ஆகிய நடுக்கோடுகளால் குறிப்பிடப் படுகின்ற விசைகள் சமநிலை பெறுமென்றும் காட்டுக.

தீர்வு

G என்பது $\triangle ABC$-யினுள்ளே ஏதேனுமொரு புள்ளி. AG, BG, CG என்பன முறையே BC, CA, AB ஆகிய பக்கங்களை D, E, F என்னும் புள்ளிகளில் வெட்டுமாறு நீட்டப்பட்டுள்ளன

(λ, μ) தேற்றத்தின்படி, G-யில் செயல்படுகின்ற $\vec{GB}$, $\vec{GC}$ ஆகிய விசைகளின் விளைவு, $BD = DC$ என்றவாறு BC-யில் அமையப் பெற்ற D என்னும் புள்ளிவழியே செயல்படும் $2\,\vec{GB}$ என்னும் விசையாகும்.

அதாவது D என்பது BC-யின் நடுப்புள்ளியாகும்.

மேலும், $\vec{GB} + \vec{GC} = 2\,\vec{GD}$.

ஆனால், $\vec{GA}$, $\vec{GB}$, $\vec{GC}$ ஆகிய விசைகள் சமநிலையிலிருப்பதால்,

$$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = 0$$

அதாவது, $\vec{GA} + 2\,\vec{GD} = 0$

அல்லது, $\vec{GA} = -\,2\vec{GD}$

$$\vec{AG} = 2\vec{GD}$$

$$\therefore \frac{AG}{GD} = \frac{2}{1}$$

அதாவது, G என்பது AD என்ற நடுக்கோட்டை $AG : GD = 2 : 1$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கின்ற புள்ளியாகும், ஆகவே G என்பது $\triangle ABC$-யின் திணிவு மையமாகும்.

மறுதலை

G என்பது $\triangle ABC$-யின் திணிவு மையமெனில், $\vec{GA}$, $\vec{GB}$, $\vec{GC}$ ஆகிய விசைகள் சமநிலையிலிருக்கும்.

தீர்வு

BC-யை D-யில் சந்திக்குமாறு AG-ஐ நீட்டுக. ஆகவே, D என்று BD-யின் நடுப்புள்ளியாகும்.

$$\therefore \quad \vec{GB} + \vec{GC} = 2\vec{GD}$$

ஆனால் G என்பது திணிவு மையமாதலின், $AG = 2GD$ ஆகும்

அதாவது, $\vec{AG} = 2\vec{GD}$

அல்லது, $\vec{GA} = -2\vec{GD}$

$$\therefore \quad \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = -2\vec{GD} + 2\vec{GD} = 0$$

$\therefore \quad \vec{GA}, \vec{GB}, \vec{GC}$ ஆகிய விசைகள் சமநிலையிலிருக்கும்.

இப்பொழுது $\vec{AD}, \vec{BE}, \vec{CF}$ ஆகிய விசைகள் சமநிலை பெறுமெனக் காண்போம்.

$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = 0$ என்று கண்டோம்.

$$\therefore \quad \vec{AG} + \vec{BG} + \vec{CG} = 0$$

ஆனால் $AG = \frac{2}{3} AD;\ BG = \frac{2}{3} BE;\ CG = \frac{2}{3} CF.$

$$\therefore \quad \tfrac{2}{3}(\vec{AD} + \vec{BE} + \vec{CF}) = 0$$

$$AD + BE + CF = 0$$

$\therefore \quad \vec{AD}, \vec{BE}, \vec{CF}$ ஆகிய விசைகள் சமநிலையிலிருக்கும்.

மாதிரி 24: ஒரு நாற்கரத்தினுள்ளமைந்த ஒரு புள்ளியுடன் அதன் கோணப் புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடுகளால் குறிப்பிடப்படுகின்ற விசைகள் அப்புள்ளியில் செயல்பட்டு சமநிலையிலிருக்குமாறு அப்புள்ளியின் நிலையைக் காண்க.

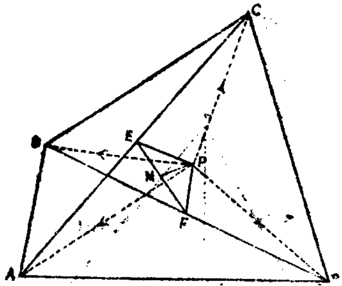
தீர்வு

P என்பது நாற்கரம் $ABCD$-யினுள்ளமைந்த ஒரு புள்ளி. $\vec{PA}, \vec{PB}, \vec{PC}, \vec{PD}$ என்னும் விசைகள் P-யில் செயல்பட்டுச் சமநிலையிலிருக்கின்றன. AC, BD ஆகிய மூலை விட்டங்களின் நடுப்புள்ளிகளை முறையே E, F என்று குறிப்பிடுக.

$\triangle PAC$-யில் E என்பது AC-யின் நடுப்புள்ளி.

$$\therefore \quad \vec{PA} + \vec{PC} = 2\vec{PE}$$

△ *PBD*-யில் *F* என்பது *BD*-யின் நடுப்புள்ளி.



படம் 31

$$\therefore \quad \vec{PB} + \vec{PD} = 2\vec{PF}$$

$$\therefore \quad \vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} + \vec{PD} = 2\,(\vec{PE} + \vec{PF})$$

இப்பொழுது, *M* என்பது *EF*-இன் நடுப்புள்ளியெனில், △ *PEF* இதிலிருந்து,

$$\vec{PE} + \vec{PF} = 2\vec{PM}.$$

$$\therefore \quad \vec{PA}, + \vec{PB} + \vec{PC} + \vec{PD} = 2\,(2\vec{PM}) = 4\,\vec{PM}$$

ஆனல் $\vec{PA}, \vec{PB}, \vec{PC}, \vec{PD}$ ஆகிய விசைகள் சமநிலையிலிருப்பதால்,

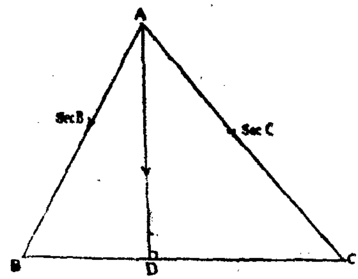
$$\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC}\ \vec{PD} = 0 \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore \quad \vec{PM} = 0$$

அதாவது, *PM* = 0. ∴ *P* என்பது *M* உடன் பொருந்த வேண்டும். அதாவது, *P* ஆனது *EF*-ன் நடுப்புள்ளியாகும்.

அதாவது, *P* என்பது நாற்கரத்தின் மூலைவிட்டங்களின் நடுப்புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோட்டின் நடுப்புள்ளியாகும்.

மாதிரி 25 $\triangle ABC$ யில் AB, AC ஆகிய பக்கங்களின் வழியே செயல்படுகின்ற $\sec B$, $\sec C$ என்னும் அளவுகளுடன் கூடிய விசைகளின் விளைவு, A யிலிருந்து BC க்கு வரையப்படும் AD என்னும் செங்குத்துக் கோட்டின் வழியே செயல்படுகின்ற $(\tan B + \tan C)$ என்னும் அளவு கொண்ட ஒரு விசையாகு மென்று நிறுவுக.



படம் 32

தீர்வு : AB, AC வழியே செயல்படும் $\sec B$, $\sec C$ என்னும் விசைகளை முறையே, $\left(\frac{\sec B}{AB}\right) AB$, $\left(\frac{\sec C}{AC}\right) AC$.

என்று குறிப்பிடுக.

அதாவது, $\lambda = \frac{\sec B}{AB}$, $\mu = \frac{\sec C}{AC}$

என்று கொள்வோமானால் $\lambda \cdot \overrightarrow{AB}$, $\mu \cdot \overrightarrow{AC}$ என்னும் விசைகள் Aயில் AB, AC வழியாகச் செயல்படுகின்றனவென்று காண்கிறோம்.

ஆகவே, (λ, μ தேற்றத்தின்படி, இவ்விசைகளின் விளைவு விசையானது $\lambda \cdot BD = \mu \cdot DC$

அல்லது, $BD \cdot DC = \lambda : \mu$

$$= \frac{\sec C}{AC} : \frac{\sec B}{AB}$$

அதாவது, $\frac{\mu}{\lambda} = \frac{DB}{DC} = \frac{AB \sec C}{AC \sec B} = \frac{AB \cos B}{AC \cos C}$

என்றவாறு BCயைப் பிரிக்கின்ற D என்னும் புள்ளி வழியே செயல்படுகின்ற $(\lambda + \mu)\overrightarrow{AD}$ என்னும் விசையாகும்,

இப்பொழுது $AD \perp BC$ ஆயின்,

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB\cos B}{AC\cos C} = \frac{\mu}{\lambda}$$

ஆகவே, தரப்பட்டுள்ள விசைகளின் விளைவு BCக்குச் செங்குத்தாக Aயிலிருந்து வரையப்படும் AD என்னும் நேர்க்கோட்டின் வழியே செயல்படும்.

விளைவு விசையின் அளவு $= (\lambda + \mu)\, AD$

$$= \left(\frac{\sec B}{AB} + \frac{\sec C}{AC}\right) AD.$$

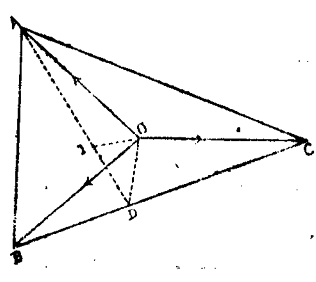
$$= \frac{AD}{AB}\sec B + \frac{AD}{AC}\cdot \sec C$$

$$= \sin B.\sec B + \sin C.\sec C$$

$$= (\tan B + \tan C)$$

மாதிரி 26 O என்பது $\triangle ABC$ யின் சுற்றுவட்ட மையம். BC, CA, AB ஆகிய பக்கங்களுக்கு விகித சம அளவுகளுடன் கூடிய விசைகள் OA, OB, OC வழியே செயல்படின், அவற்றின் விளைவு விசை உள்வட்ட மையத்தின் வழியே செயல்படுமென நிறுவுக.

தீர்வு



படம் 38

O என்பது $\triangle ABC$ யின் சுற்றுவட்டமையம். OA, OB, OC வழியே செயல்படும் விசைகள் BC, CA, AB ஆகிய பக்கங்

களுக்கு விகிதசமமாகும். $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ எனில், அவ்விசைகளை முறையே ka, kb, kc என்று குறிப்பிடலாம்.

OA வழியே செயல்படும் விசையை $\left(\frac{ka}{OA}\right)\vec{OA} = \lambda\cdot\vec{OA}$ என்றும்

OB வழியே செயல்படும் விசையை $\left(\frac{kb}{OB}\right)\vec{OA} = \mu\cdot\vec{OB}$ என்றும்

OC வழியே செயல்படும் விசையை $\left(\frac{kc}{OC}\right)\vec{OC} = \gamma.\vec{OC}$ என்றும்

கொள்ளலாம்:

$BD : DC = \gamma : \mu$ எனில், OA, OC வழியே செயல்படும் விசைகளின் விளைவு விசையானது OD வழியே செயல்படும் $(\mu+\gamma)$ $\vec{OD}$ என்னும் விசையாகும்.

$\frac{BD}{DC} = \frac{\gamma}{\mu} = \frac{kc/OC}{kb/OB} = \frac{c}{b}$ (ஏனெனில் $OC = OB$ = சுற்று வட்ட ஆரை).

$\therefore$ AD யானது கோணம் A யின் இருசம வெட்டியாகும்

மேலும், OA, OD வழியே செயல்படுகின்ற $\lambda\cdot\vec{OA}$, $(\mu+\lambda)$ $\vec{OD}$ ஆகிய விசைகளின் விளைவு $AI : ID = (\mu+\gamma) : \lambda$ என்னும் விகிதத்தில் AD யைப் பிரிக்கின்ற I என்னும் புள்ளி வழியே செயல்படும் $(\lambda+\mu+\gamma)$ $\vec{OI}$ என்னும் விசையாகும்.

$$\therefore \frac{AI}{DI} = \frac{\mu+\gamma}{\lambda} = \frac{\frac{kb}{OB} + \frac{kc}{OC}}{\frac{ka}{OA}} = \frac{b+c}{a}$$

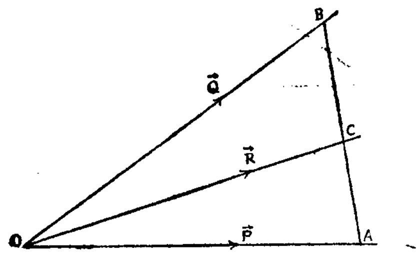
(ஏனெனில், $OA = OA = OC$)

$\therefore$ I என்பது $\triangle ABC$ யின் உள்வட்டமையம். ஆகவே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விசைகளின் விளைவு விசை முக்கோணத்தின் உள்வட்டமையம் வழியே செயல்படும்.

மாதிரி 27 : O என்னும் புள்ளி வழியே செயல்படுகின்ற $\vec{P}, \vec{Q}$ என்னும் விசைகளின் விளைவு $\vec{R}$ ஆகும். ஒரு குறுக்கு வெட்டி

$\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$ ஆகிய விசைகளின் செயற்கோடுகளை முறையே A, B, C என்னும் புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது.

$$\frac{P}{OA} = \frac{Q}{OB} = \frac{R}{OC} \text{ என்று நிறுவுக.}$$



படம் 34

தீர்வு : $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$ என்னும் விசைகளை முறையே $\left(\frac{P}{OA}\right)\vec{OA}, \left(\frac{Q}{OB}\right)\vec{OB}, \left(\frac{P}{OC}\right)\vec{OC}$ என்று குறிப்பிடுக.

ஆகவே, OA, OC வழியே செயல்படும் விசைகள் முறையே $\left(\frac{P}{OA}\right)\vec{OA}, \left(\frac{Q}{OB}\right)\vec{B}$ ஆகும்.

இவற்றை முறையே $\lambda . \vec{AO}, \mu . \vec{OB}$ என்று குறிப்பிடுக.

$$\therefore \; \lambda = \frac{P}{OA}, \mu = \frac{Q}{OB} \text{ ஆகும்.}$$

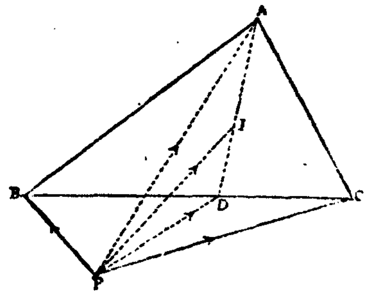
(λ, μ) தேற்றத்தின்படி, இவ்விசைகளின் விளைவு ACயை $\frac{AC}{CB} = \frac{\mu}{\lambda}$ என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்கக்கூடிய C என்னும் புள்ளி வழியே செயல்படும் $(\lambda+\mu)\vec{OC}$ என்னும் விசையாகும்.

$$\therefore \; R = (\lambda + \mu) OC$$

$$\text{அல்லது} \quad \frac{R}{OC} = \lambda + \mu = \frac{P}{OA} + \frac{Q}{OB}.$$

மாதிரி 28 : I எனும் புள்ளியை உள்வட்ட மையமாகக் கொண்ட $\triangle ABC$யின் தளத்தில் P ஏதேனுமொரு புள்ளி. $\vec{PC} \sin A, \vec{PB} \sin B, \vec{PC} \sin C$ என்ற விசைகளின் விளைவு

$4\vec{PI} \cos\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{B}{2} \cdot \cos\frac{C}{2}$ என்று காட்டுக.



படம் 35

தீர்வு: PB, PC வழியே செயல்படும் $PB \sin B$, $PC \sin B$ ஆகிய விசைகளின் விளைவிற்கு (λ, μ) தேற்றத்தைப் பயன் படுத்துக.

D என்பது BC ஐ $\frac{BD}{DC} = \frac{\sin C}{\sin B}$ என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளியெனில் $\vec{PB} \sin B$, $\vec{PC} \sin C$ ஆகிய விசைவுகளின் விளைவு PD வழியே செயலபடும் $(\sin B + \sin C)\vec{PD}$ என்னும் விசையாகும்.

$$\frac{BD}{DC} = \frac{\sin C}{\sin B} = \frac{c/2R}{b/2R} = \frac{c}{b}.$$

ஆகவே, AD என்பது கோணம் Aயின் இருசம வெட்டியாகும்.

இப்பொழுது, PA, PD வழியே செயல்படும் $\vec{PA} \sin A$ $(\sin A + \sin B + \sin C)\vec{PD}$ என்னும் விசைகளின் விளைவிற்கு (λ, μ) தேற்றத்தைப் பயன்படுத்துக.

I என்பது ADயை $\frac{AI}{ID} = \frac{(\sin B + \sin C)}{\sin A}$ என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளியாயின், இவ்விசைகளின் விளைவு $= (\sin A + \sin B + \sin C)\vec{PI}$ ஆகும்.

அதாவது, $\dfrac{AI}{ID} = \dfrac{\dfrac{b}{2R} + \dfrac{c}{2R}}{\dfrac{a}{2R}} = \dfrac{b+c}{a}$

∴ I என்பது $\triangle ABC$ யின் உள்வட்டமையமாகும். ஆகவே, கொடுக்கப்பட்டுள்ள விசைகளின் விளைவு

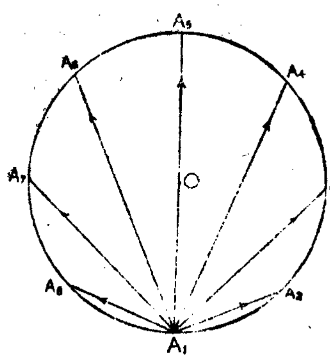
$$= (\sin A + \sin B + \sin C)\,\overrightarrow{PI}$$

$$= \left(4\cos\frac{A}{2}.\quad \cos\frac{B}{2}.\quad \cos\frac{C}{2}\right)\overrightarrow{PI}$$

(திரிகோணக் கணிதத்திலிருந்து)

$$= \quad \overrightarrow{PI}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

மாதிரி 29: ஒரு வட்டத்தின் பரிதியின் மேல் சமதூரங்களிலெடுக்கப்பட்ட எட்டுப் புள்ளிகளுள் ஒரு புள்ளியிலிருந்து ஏனைய புள்ளிகட்கு நேர்கோடுகள் வரையப்படுகின்றன, இந்நேர் கோடுகள் ஒரு புள்ளி வழிச் செயல்படும் விசைகளைக் குறிப்பிடின் அவற்றின் விளைவு விசையின் அளவு, திசை ஆகியவற்றைக் காண்க.



படம் 36

தீர்வு

$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_8$ என்பன O ஐ மையமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் பரிதியில் சமதூரங்களில் அமைந்துள்ள எட்டுப் புள்ளிகள். ஆகவே, $A_1 A_5$, $A_2 A_6$, $A_3 A_7$, $A_4 A_8$ என்பன வட்டத்தின் விட்டங்களாகும். அதாவது, O என்பது $A_1 A_5$, $A_2 A_6$, $A_3 A_7$, $A_4 A_8$ ஆகியவற்றின் நடுப்புள்ளிகளாகும்.

$\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_8}$ ஆகிய விசைகளுக்கு (λ, μ) தேற்றத்தைப் பயன் படுத்துக. O என்பது $A_2 A_6$ இன் நடுப்புள்ளி. மேலும் $\lambda = 1, \mu = 1$..

$\therefore \overrightarrow{A_1 A_2} + \overrightarrow{A_1 A_8} = 2 \overrightarrow{A_1 O}$ ஆகும்.

அதாவது, $\overrightarrow{A_1 A_2}$ A_1 $\overrightarrow{A_1 A_8}$ ஆகியவற்றின் விளைவு $2\overrightarrow{A_1 O}$ ஆகும்

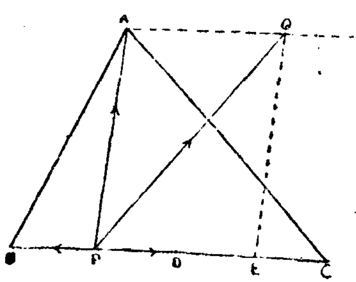
இதுபோல், $\overrightarrow{A_1 A_3}$, $\overrightarrow{A_1 B_7}$ ஆகியவற்றின் விளைவு $2\overrightarrow{A_1O}$ ஆகும்

$A_1'A_4$, $A_1 A_8$ ஆகியவற்றின் விளைவு $2 \overrightarrow{A_1 O}$ ஆகும்.

$\therefore \overrightarrow{A_1 A_2} + \overrightarrow{A_1 A_3} + \overrightarrow{A_1 A_4} + \overrightarrow{A_1 A_6} + \overrightarrow{A_1 A_7} + \overrightarrow{A_1 A_8} =$ $6 \overrightarrow{A_1 O}$ ஆகும்.

$$\therefore (\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_1A_3}+\overrightarrow{A_1A_4})+\overrightarrow{A_1A_5} + (\overrightarrow{A_1A_8} + \overrightarrow{A_1A_7}+\overrightarrow{A_2A_8})$$
$$= 6 \overrightarrow{A_1 O} + \overrightarrow{A_1 A_5} = 6 \overrightarrow{A_1 O} + 2 \overrightarrow{A_1 O} = 8 \overrightarrow{A_1 O}.$$

மாதிரி 30 ABC என்னும் முக்கோணத்தில் P என்பது BC யின் மேலுள்ள ஒரு புள்ளி. $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PC}$ என்பனவற்றால் குறிப்பிடப்படுகின்ற விசைகளின் விளைவு $\overrightarrow{PQ}$ எனில் Q வின் இயங்கு வழி (locus) BC க்கு இணையான ஒரு நேர்கோடு என்று காட்டுக.



படம் 37.

தீர்வு

P வழியே செயல்படும் $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PC}$ ஆகிய விசைகளின் விளைவிற்கு (λ, μ) தேற்றத்தைப்பயன் படுத்துக. இங்கு $\lambda = \mu = 1$

ஆகையால், D என்பது BC யின் நடுப்புள்ளி யெனில் $\vec{PB} + \vec{PC} = 2\vec{PD}$ ஆகும். இப்பொழுது, $PE = 2\,PD$ என்ற வாறு BC யில் E என்னும் புள்ளியைக் குறித்துக் கொள்க.

$$\therefore \vec{PE} = 2\vec{PD}.$$

$PEQA$ என்ற இணைகரத்தைப் பூர்த்தி செய்க.

$$\therefore \vec{PE}, \vec{PA} \text{ ஆகியவற்றின் விளைவு } \vec{PQ} \text{ ஆகும்.}$$

அதாவது, $\vec{PA}, \vec{PB}, \vec{PC}$ ஆகிய விசைகளின் விளைவு $\vec{PQ}$ ஆகும். ஆனால் $PEQA$ என்பது ஒரு இணைகரமாகையால், $AQ \parallel PE$ ஆகும்.

$\vec{PE}, \vec{PA}$ என்பன நிலையான நேர்கோடுகளாகையால், $\vec{AQ}$ வும் ஒரு நிலையான நேர்கோடாகும். ஆகவே, Q என்பது A வழியே BC க்கு இணையான நேர்கோட்டிலுள்ள ஒரு புள்ளி யாகும். அதாவது, Q வின் இயங்குவழி BC க்கு இணையாக Q வழியே செல்லும் ஒரு நேர்கோடாகும்.

பயிற்சி 4

(1) $\triangle ABC$ யின் சுற்றுவட்ட மையம், செங்குத்து மையம் ஆகியவை முறையே S, O ஆகும். ஒவ்வொன்றும் P க்குச் சமமான மூன்று விசைகள் $\vec{SA}, \vec{SB}, \vec{SC}$ ஆகியவற்றினல் அள விலும், திசையிலும் குறிப்பிடப்படுகின்றன. இவற்றின் விளைவு அளவிலும், திசையிலும் $\vec{SO}$ ஆல் குறிப்பிடப்படுமென்று காட்டுக.

(2) $ABCD$ என்பது ஒரு இணைகரம். $4\,AB$, AC ஆகியவற்றல் குறிப்பிடப்படுகின்ற விசைகள் முறையே AB, AC வழியாகச் செயல்படுகின்றன. இவற்றின் விளைவு BD யை $5:1$ என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்குமென்று நிறுவுக.

(3) P என்பது $\triangle ABC$ யின் தளத்திலுள்ள ஏதேனுமொரு புள்ளி. G என்பது முக்கோணத்தின் திணிவு மையமெனில்

$\vec{PA}, \vec{PB}, \vec{PC}$ ஆகிய விசைகளின் விளைவு $3\ \vec{PG}$ என்று நிறுவுக.

(4) $\triangle ABC$ யில் CA, CB வழியாக $K \cos, K \cos B$ அளவுகள் கொண்ட இரு விசைகள் செயல்படுகின்றன. அவற்றின் விளைவு $K \sin C$ என்று நிறுவுக.

(4) $\triangle ABC$ யில் OA, OB வழியாகச் செயல்படுகின்ற இரு விசைகள் $\vec{OA} \tan A, \vec{OB} \tan B$ என்பனவற்றால் குறிப்பிடப்படுகின்றன. அவற்றின் விளைவு $\vec{AB} \tan A \tan B$ ஆல் குறிக்கப்படுமென்றும், O-விலிருந்து AB க்கு வரையப்படும் செங்குத்து வழியாகச் செயல்படுமென்றும் காட்டுக.

(6) ஒரு முக்கோணத்தின் தளத்திலுள்ள ஏதேனுமொரு புள்ளியை அம்முக்கோணத்தின் கோணப் புள்ளிகளுடன் இணைக்கும் கோடுகளால் குறிப்பிடப்படுகின்ற விசைகளின் தொகுதியானது அப்புள்ளியிலிருந்து அந்த முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகளுக்கு வரையப்படும் நேர்கோடுகளால் குறிப்பிடப்படுகின்ற விசைகளின் தொகுதிக்குச் சமம் என்று காட்டுக.

(7) O என்பது $ABCD$ என்னும் நாற்கரத்தினுள்ளே அமைந்த ஒரு புள்ளி. $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}, \vec{OD}$ ஆகியவற்றால் அளவிலும் திசையிலும் குறிப்பிடப்படுகின்ற விசைகள் O-வில் செயல்படுகின்றன. அவ்விசைகள் சமநிலையிலிருப்பின், O-வின் நிலையைக் காண்க.

(சென்னை 1965 ஏப்.)

(8) $ABCD$ என்னும் நாற்கரத்தில் AB, CB, CD, AD ஆகிய பக்கங்களின் வழியாகச் செயல்படும் $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}, \vec{S}$ என்னும் விசைகள் சமநிலையிலிருப்பின்,

$$\frac{P}{AB} : \frac{Q}{CB} = \frac{S}{AD} : \frac{R}{CD}$$

என்று காட்டுக.

(9) $\triangle ABC$ யின் தளத்தில் O என்பது ஒரு புள்ளி. முக்கோணத்தின் a, b, c என்ற பக்கங்களுக்கு விகிதசமமாக OA OB, OC வழியாக விசைகள் செயல்படுகின்றன. I என்பது

முக்கோணத்தின் உள்வட்ட மையமெனில், அவ்விசைகளின் விளைவு OI வழியே செயல்படுமென்றும், அதன் அளவு $(a+b+c)\ OI$ க்கு விகிதசமமாயிருக்குமென்றும் காட்டுக.

(10) $ABCD$ என்பது ஒரு இணைகரம். P என்னும் துகள் PA PB ஆகியவற்ருல் குறிப்பிடப்படுகின்ற விசைகளால் முறையே A, C யை நோக்கி ஈர்க்கப்படுகின்றது; PB, PD ஆகியவற்ருல் குறிப்பிடப்படுகின்ற விசைகளால் அத்துகளானது முறையே B, D யிலிருந்து தள்ளப்படுகிறது. P என்பது எங்கிருந்தாலும் சமநிலையிலிருக்குமென்று காட்டுக.

(11) $ABCD$ என்னும் நாற்கரத்தின் தளத்தில் O என்பது ஒரு புள்ளி. P, Q, R, S என்பன அதன் பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகள். OA, OB, OC, OD என்பனவற்ருல் குறிப்பிடப்படுகின்ற விசைகள் OP, OQ, OR, OS என்பனவற்ருல் குறிப்பிடப்படுகின்ற விசைகளின் விளைவையே கொண்டிருக்குமென்று காட்டுக.

(12) $\vec{AB}, \vec{AC}, 2\vec{CB}$ என்னும் விசைகள் $\triangle ABC$ யின் பக்கங்களின் வழியே செயல்படுகின்றன. அவற்றின் விளைவு விசையின் செயற்கோடு பக்கம் AC ஐ $2:1$ என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்குமென்று காட்டுக.

(13) $a = AB, b = BC, c = CD, d = DA$ என்ற பக்கங்களைக் கொண்ட $ABCD$ என்னும் நாற்கரத்தின் பக்கங்களில் செயல்படுகின்ற $a.\ \vec{AB}, b\ \ \vec{BC}, c\ \ \vec{CD}, d.\ \vec{BD}$ என்னும் விசைகள் சமநிலையிலிருப்பின் $ac = bd$ என்று நிறுவுக.

(14) $ABCD,\ A'B'C'D'$ என்பன இரு இணைகரங்கள். ஒரு புள்ளியில் செயல்படுகின்ற $\vec{AA'}, \vec{BB'}, \vec{CC'}, \vec{D'D}$ என்னும் விசைக்ள் சமநிலையிலிருக்குமென்று காட்டுக.

(15) P என்பது $\triangle ABC$ யின் சுற்றுவட்டப் பரிதியின் மேலுள்ள ஒரு புள்ளி. H என்பது $\triangle ABC$ யின் செங்குத்து மையம். D, E, F என்பன P யிலிருந்து முறையே BC, CA, AB என்ற பக்கங்களுக்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோடுகளின் பாதங்கள். D, E, F என்ற புள்ளிகள் ஒரே நேர்கோட்டிலமைந்

திருக்கும் (சிம்சனின் தேற்றம்). இந்நேர்கோடு A, B, C யிலிருந்து வரையப்பட்ட $\triangle ABC$ யின் குத்துயரங்களை முறையே D', E', F' என்ற புள்ளிகளில் சந்திக்கிறது. $\vec{PD}, \vec{PE}, \vec{PF}, \vec{PD'}, \vec{PE'}, \vec{PF'}$ என்ற விசைகள் Q யில் செயல்படின் அவற்றின் விளைவு $3\,\vec{PH}$ என்று காட்டுக.

(16) $\vec{OA}\cos A, \vec{OB}\cos B, \vec{OC}\cos C$ என்னும் விசைகள் O என்னும் புள்ளியிலிருந்து $\triangle ABC$ யின் உச்சிகளை நோக்கிச் செயல்படுகின்றன. இவற்றின் விளைவு விசையின் அளவு ஒரு மாறிலி (constant) யானல், O-வின் இயங்குவழி $\triangle ABC$ யின் சுற்றுவட்டத்திற்குப் பொதுமைய வட்டம் என்று காட்டுக.

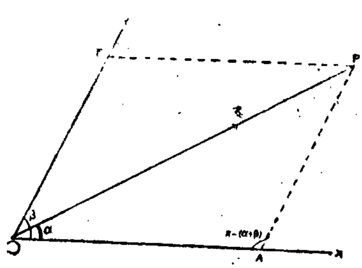
விசைப் பிரிப்பு : (Resolution of Forces)

OA, OB என்னுமிரு நேர்கோட்டுத்துண்டங்களினுல் அளவிலும், திசையிலும் குறிப்பிடப்படுகின்ற $\vec{P}, \vec{Q}$ என்னுமிரு விசைகள் O என்னும் புள்ளியில் செயல்படுவதாகக் கொள்க. இவ்விரு விசைகளின் விளைவு விசையாகிய $\vec{R}$ என்பது OA, OB ஆகியவற்றை இரு அடுத்தடுத்த பக்கங்களாகக் கொண்டு வரையப்படும் இணைகரத்தின் O வழி மூலைவிட்டத்தினுல் அளவிலும் திசையிலும் குறிப்பிடப்படுமென்று விசைகளின் இணைகர விதியின் மூலம் கண்டோம். அவ்வாறு வரையப்படும் இணைகரம் $OA\ CB$ எனில் $\vec{OC} = \vec{R}$ ஆகும். அதாவது, $\vec{P}, \vec{Q}$ ஆகிய இரு விசைகளின் மொத்த விளைவு $\vec{R}$ எனும் ஒரு தனி விசையின் விளைவிற்குச் சமமாகும். இதையே, $\vec{R}$ என்னும் தனி விசையினுல் O என்னும் புள்ளியிலுண்டாக்கப்படுகின்ற விளைவு $\vec{P}, \vec{Q}$ ஆகிய இரு விசைகளும் சேர்ந்து O என்னும் புள்ளியிலேற்படுத்துகின்ற விளைவிற்குச் சமமாகுமென்று கூறலாம். எனவே O என்னும் புள்ளியில் செயல்படுகின்ற $\vec{R}$ என்னும் விசைக்குப் பதிலாக OA, OB என்னும் திசைகளில் முறையே $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ என்னும் திசையிக்களால் குறிப்பிடப்படுகின்ற $\vec{P}, \vec{Q}$ என்னுமிரு

விசைகளைச் செயல்படுத்துவதால் சமமான விளைவே ஏற்படு மென்று காண்கிறோம். இவ்வாறு ஒரு புள்ளியில் ஒரு விசையின் ($\vec{R}$) தாக்குதலினாலேற்படும் விளைவுக்குச் சமமான விளைவை அப்புள்ளி வழியே செயல்படும் வேறு இரு விசைகள் ($\vec{P}$, $\vec{Q}$) ஏற்படுத்துமாயின் அவ்விரு விசைகளும் அத்தனி விசையின் கூறுகள் (components) என்றழைக்கப்படுகின்றன. இங்ஙனம், ஒரு விசையை அதன் விளைவுக்குச் சமமான விளைவைக் கொடுக்கக்கூடிய இரு விசைக் கூறுகளாகப் பிரிப்பதற்கு "விசைப் பிரிப்பு" (Resolution of forces) என்று பெயர். ஆனால் $\vec{R}$ என்னும் விசையைக் குறுப்பிடுகின்ற *OC* என்னும் நேர் கோட்டுத்துண்டத்தை மூலைவிட்டமாகக் கொண்டு எத்தனையோ இணைகரங்கள் வரையலாம். ஒவ்வொரு இணைகரத்திலும் *O* வழியே செல்லும் இரு பக்கங்களும் $\vec{R}$ இன் விசைக் கூறுகளைக் குறிப்பிடுமாகையால், எந்த ஒரு விசையும் எத்தனையோ வகையாக விசைப் பிரிப்புச் செய்யப்படலாம். ஆனால் கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஒரு விசையைக் குறிப்பிட்ட இரு திசைகளில் ஒரேயொரு வகையிலேயே விசைப் பிரிப்பு செய்ய முடியும்.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள இரு திசைகளில் விசைப்பிரிப்பு செய்தல்
(Resolution in only two given directions)

$\vec{R}$ என்னும் விசை $\vec{OP}$ என்னும் திசையினால் அளவிலும் திசையிலும் குறிப்பிடப்பட்டிருப்பதாகக் கொள்க. *OX*, *OY* என்பன விசை $\vec{R}$ ஐ விசைப்பிரிப்பு செய்வதற்காகக் கொடுக்கப்பட்டுள்ள இரு திசைகள். இவ்விரு திசைகளுக்கும், *OP* க்கு மிடையேயுள்ள கோணங்கள் முறையே α, β எனக் கொள்க.



படம் 38

P வழியே PA, PB என்னும் நேர்கோடுகள் OY, OX ஆகிய வற்றிற்கு இணையாக வரைக. இவ்விணை கோடுகள் OX, OY ஆகியவற்றை முறையே A, B என்னும் புள்ளிகளில் வெட்டட்டும்.

வரைதலின்படி, $OAPB$ என்பது ஒரு இணைகரமாகும். எனவே, இணைகர விதியின்படி,

$\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OP} = \vec{R}$ ஆகும்.

$\therefore$ $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ என்பன OX, OY ஆகிய திசைகளில் பிரிக்கப்பட்ட விசை $\vec{R}$ இன் கூறுகளாகும். இவ்விசைக் கூறுகளின் அளவுகளை $\triangle OAP$ யின் திரிகோணப் பண்பின் மூலம் பின்வருமாறு காணலாம்.

$$\frac{OA}{\sin\beta} = \frac{AP}{\sin\alpha} = \frac{OP}{\sin\{\pi - (\alpha+\beta)\}}$$

அதாவது. $$\frac{OA}{\sin\beta} = \frac{AP}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$\therefore \quad OA = \frac{R\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)},$$

$$OB = \frac{R\sin\alpha}{\sin(\beta+\alpha)}$$

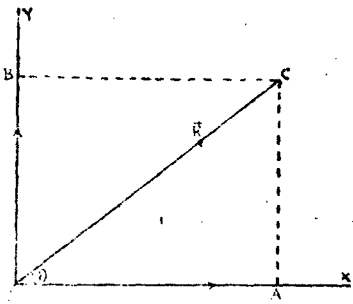
ஆகவே, OX, OY ஆகிய திசைகளில் $\vec{R}$ இன் விசைக் கூறுகளின் அளவுகள் முறையே,

$$\frac{R\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}, \quad \frac{R\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$$ ஆகும்.

செங்குத்துத் திசைகளில் விசைப்பிரிப்பு
(Resolution in perpendicular directions)

விசைகளை இரு செங்குத்துக் திசைகளில் விசைப் பிரிப்புச் செய்தல் நிலையியலில் பெரும்பயனுள்ளதாகக் காணப்படுகிறது.

ஒரு விசையானது இரு செங்குத்துத் திசைகளில் செய்யப்படின், விசைப் பிரிப்புச் செய்யப்பட்ட இரு விசைக் கூறுகளும் அவ் விசையின் "குத்துப் பிரிவுகள்" அல்லது "பிரிந்த பகுதிகள்" **(Resolved parts)** எனப்படுகின்றன.



படம் 39

$\vec{R}$ என்னும் விசை அளவிலும் திசையிலும் $\vec{OC}$ என்னும் திசையினால் குறிப்பிடப்பட்டுள்ளதாகக் கொள்க. O வழியே OX, OY என்னும் இரு செங்குத்துக் கோடுகளை வரைந்து கொள்க. OY, OX ஆகியவற்றின் இடைக் கோணம் θ என்க.

$CA \perp OX$; $CB \perp OY$ வரைக. வரைதலின்படி, $OACB$ என்பது ஒரு செவ்வகமாகும்.

செங்கோண முக்கோணம் OAC யில்,

$$OA = OC \cos\theta = R\cos\theta,$$

$$AC = OC \sin\theta = R\sin\theta.$$

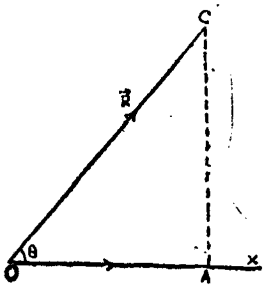
$$\therefore OA = AC = R\sin\theta.$$

$\therefore OA = R\cos\theta$ என்பது OX திசையில் $\vec{R}$ இன் விசைக் கூறு ஆகும்.

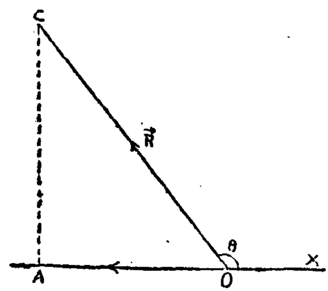
$OB = R\,\text{Sin}\,\theta$ என்பது OY திசையில் $\vec{R}$ இன் விசைக்கூறு ஆகும்.

அதாவது, $R\cos\theta$, $R\,\text{Sin}\,\theta$ என்பன $\vec{R}$ இன் குத்துப் பிரிவுகளாகும்.

குறிப்பு $\vec{OC} = \vec{R}$ என்னும் விசை OP என்னும் திசையுடன் θ கோணத்தில் சாய்ந்திருப்பதாகக் கொள்வோம். $CA \perp OX$ வரைக.



படம் 40 (அ)



படம் 40 (ஆ)

$\vec{OA}$ என்பது OX திசையில் விசை $\vec{R}$ இன் குத்துப் பிரிவு ஆகும். θ குறுங்கோணமாயின் $\vec{OA}$ என்னும் OX திசையிலும் θ விரிகோணமாயின் OA என்னும் குத்துப் பிரிவு OX திசைக்கு எதிர்த் திசையிலுமிருப்பதைக் காணலாம்.

எனவே, θ குறுங்கோணமாயின் OX திசையில் $\vec{R}$ இன் குத்துப் பிரிவு $OA = R \cos \theta$ ஒன்றும், θ விரிகோணமாயின் OX திசையில் $\vec{R}$ இன் குத்துப் பிரிவு $-OA = -R \cos \theta$ என்றும் அறிந்துகொள்க. மேலும், $\vec{R}$ என்னும் விசையின் திசையுடன் θ கோணச் சாய்விலுள்ள திசையில் $\vec{R}$ இன் குத்துப் பிரிவு $R \cos \theta$ என்றும் அறிந்துகொள்க. குத்துப் பிரிவுகள் பற்றிய பின்வரும் விவரங்கள் பயனுள்ளவையாயிருக்கும்.

(அ) ஒரு விசையின் திசையுடன் θ கோணச்சாய்விலுள்ள திசையில் அவ்விசையின் குத்துப் பிரிவு அவ்விசையைக் குறிப்பிடுகின்ற நேர்கோட்டுத்துண்டத்தின் வீச்சு (Projection) ஆகும்.

(ஆ) $\theta = O$ எனில், குத்துப் பிரிவு $B = R \cos O = R$ ஆகும். அதாவது, ஒரு விசை செயல்படும் திசையில் அவ்விசையின் குத்துப் பிரிவு அவ்விசையின் அளவுடையதாகவேயிருக்கும்.

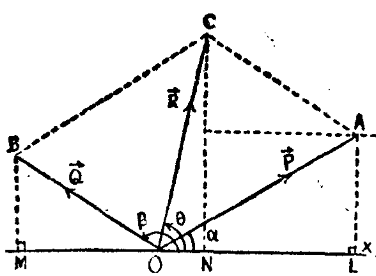
(இ) $\theta = 90^\circ$ எனில், குத்துப் பிரிவு $= R \cos 90^\circ = 0$ ஆகும். அதாவது, ஒரு விசை செயல்படும் திசைக்குச் செங்குத்துத் திசையில் அவ்விசையின் குத்துப்பிரிவு பூச்சியமாகும்.

(ஈ) ஒரு விசையின் திசையுடன் θ கோணச்சாய்விலுள்ள திசையில் அவ்விசையின் குத்துப்பிரிவானது θ குறுங்கோணமாயின் நேரெண்ணளவுடையதாகவும், θ விரிகோணமுடையதாயின் எதிரெண்ணளவுடையதாகவுமிருக்கும்.

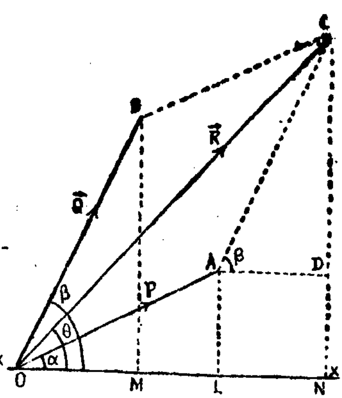
"பிரித்த பகுதிகளின் தேற்றம்" அல்லது "குத்துப்பிரிவுத் தேற்றம்" (Theorem of Resolved Parts)

ஒரு புள்ளி வழியே செயல்படுகின்ற இரு விசைகள் ஒரு குறிப்பிட்ட திசையில் விசைப் பிரிப்புச் செய்யப்பட்டால், அவ்விரு விசைகளின் குத்துப் பிரிவுகளின் இயற்கணித மொத்தமானது அதே திசையில் அவற்றின் விளைவு விசையின் குத்துப்பிரிவுக்குச் சமமாகும்.

நிறுவல்



படம் 41 (அ)



படம் 41 (ஆ)

$\vec{OA}, \vec{OB}$ என்பன O என்னும் புள்ளி வழியே செயல்படும் $\vec{P}, \vec{Q}$ என்னும் இரு விசைகளைக் குறிப்பிடுவதாகக் கொள்க, $OACB$ என்ற இணைகரத்தைப் பூர்த்தி செய்க. இணைகரத்தின் மூலைவிட்டம் $\vec{OC}$ ஆனது $\vec{P}, \vec{Q}$ ஆகியவற்றின் விளைவு விசை

யாகிய $\vec{R}$ ஐக் குறிப்பிடும். $\vec{OX}$ என்பது கொடுக்கப்பட்டுள்ள திசை யென்க. $\vec{OX}$ உடன் $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ ஆகியவற்றின் சாய்வுக் கோணங்கள் முறையே γ, β, θ எனக் கொள்க.

OX திசையில் $\vec{P}$ யின் குத்துப்பிரிவு $= \vec{OX} \cos \alpha = \vec{OL}$,

GX திசையில் $\vec{Q}$ வின் குத்துப்பிரிவு $= \vec{OB} \cos \beta = \vec{OC} \cos \beta$
$= \vec{OD} = \vec{LN}$,

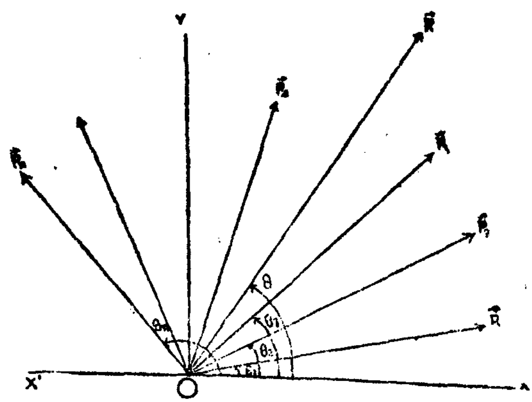
OX திசையில் $\vec{R}$ இன் குத்துப்பிரிவு $= \vec{OC} \cos \theta = \vec{ON}$.

$\therefore$ $\vec{OX}$ திசையில் $\vec{P}, \vec{Q}$ ஆகியவற்றின் குத்துப்பிரிவுகளின்

இயற்கணித மொத்தம் $= \vec{OL} + \vec{LN}$

$= \vec{GN}$

$= \vec{OX}$ திசையில் விளைவு விசை $\vec{R}$ இன் குத்துப்பிரிவு.



படம் 42

ஒரு புள்ளியில் செயல்படும் எவ்வெண்ணிக்கையிலுமான ஒரு தள விசைகளின் விளைவு

(Resultant of any number of coplanar Forces acting at a point)

$\vec{P_1}, \vec{P_2}, \vec{P_3}, \ldots, \vec{P_n}$ என்பன O என்னும் புள்ளி வழியே செயல்படும் n ஒருதள விசைகள் இவற்றின் விளைவு விசை

யானது O வழியே செயல்படும் $\vec{R}$ எனும் விசை என்க.

O வழியே OX, OY என்னும் இரு செங்குத்துக் கோடுகள் வரைக. OX-உடன் $\vec{P_1}, \vec{P_2}, \vec{P_3}, \ldots, \vec{P_n}$ ஆகிய விசைகளின் சாய்வுக்கோணங்கள் முறையே $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_n$ என்க. OX உடன் $\vec{R}$ இன் சாய்வுக்கோணம் θ என்க.

எனவே, OX திசையில் $\vec{P_1}, \vec{P_2}, \vec{P_3}, \ldots, \vec{P_n}$ ஆகிய விசைகளின் குத்துப்பிரிவுகளின் இயற்கணித மொத்தம்

$$= P_1 \cos\theta_1 + P_2 \cos\theta_2 + P_3 \cos\theta_3 + \ldots + P_n \cos\theta_n$$

$$= \sum_{r=1}^{n} P_r \cos\theta_r$$

$= X$ என்க.

இதுபோல், OY திசையில் இவ்விசைகளின் குத்துப்பிரிவுகளின் இயற்கணித மொத்தம்

$$= P_1 \sin\theta_1 + P_2 \sin\theta_2 + P_3 \sin\theta_3 + \ldots + P_n \sin\theta_n$$

$$= \sum_{r=1}^{n} P_r \sin\theta_r$$

$= Y$ என்க.

OX, OY ஆகிய திசைகளில் விளைவு விசையான $\vec{R}$ இன் குத்துப் பிரிவுகள் முறையே $R\cos\theta$, $R\sin\theta$ ஆகும்.

$$\therefore R\cos\theta = X,$$
$$R\sin\theta = Y$$

ஆகும். வர்க்கங்களைக் கூட்டுக.

$$R^2 = X^2 + Y^2$$

அல்லது, $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$

இத்தொடர்பிலிருந்து விளைவு விசை $\vec{R}$ இன் அளவு பெறப்படுகிறது.

$$\text{இனி, } \tan\theta = \frac{R\sin\theta}{R\cos\theta} = \frac{Y}{X}$$

$$\text{அல்லது, } \quad \theta = \tan^{-1}\left[\frac{Y}{X}\right]$$

இத் தொடர்பிலிருந்து விளைவுவிசை $\vec{R}$ இன் திசையைப் பெறலாம்.

குறிப்பு: கொடுக்கப்பட்டுள்ள விசைகளுள் ஏதாவதொன்றினை OX திசையாகக்கொள்வது விளைவுவிசையின் அளவையும் திசையையும் எளிதாகப் பெற வழி செய்யும் என்பதைக் கருத்திற் கொள்க.

ஒரு துகளின் மீது செயல்படும் ஒருதள விசைத் தொகுதியின் சமநிலை நிபந்தனைகள்: (Conditions of Equilibrium of a system of Coplanar Forces acting on a particle)

$\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \ldots, \vec{P}_n$ என்பன O என்னும் புள்ளியிலுள்ள ஒரு துகளின் மீது செயல்படுகின்ற n-விசைகளாலான விசைத் தொகுதியெனக் கொள்க. O வழியே OX, OY என்ற இரு செங்குத்துக் கோடுகளையெடுத்துக் கொள்க. n விசைகளையும் OX, OY திசைகளில் விசைப் பிரிப்புச் செய்க. X, Y என்பன முறையே OX, OY என்ற திசைகளில் n-விசைகளின் குத்துப் பிரிவுகளின் இயற்கணிதக் கூட்டல்களெனில், அவ்விசைகளின் விளைவு விசையின் அளவு $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ ஆகும். விசைகள் யாவும் சமநிலையிலிருக்க வேண்டுமாயின், $R = O$ ஆக வேண்டும்.

$$\therefore \quad X^2 + Y^2 = O$$

ஆனால் $X = O$, $Y = O$ என்றால் மட்டுமே இது சாத்தியமாகும். எனவே, ஒரு துகளின் மீது செயல்படுகின்ற ஒருதள விசைத் தொகுதி சமநிலையிலிருக்க வேண்டுமாயின், அத்துகளமைந்துள்ள புள்ளி வழியே செல்லும் இரு செங்குத்துத் திசைகளில் அவ்விசைகளின் குத்துப்பிரிவுகளின இயற்கணித மொத்தங்கள் தனித்தனியே பூச்சியமாக வேண்டும்.

மறுதலை: ஒரு புள்ளி வழியே செல்லும் இரு செங்குத்துத் திசைகளில், அப்புள்ளியிலமைந்துள்ள ஒரு துகளின்மீது செயல்

படும் ஒருதள விசைகளின் குத்துப் பிரிவுகளின் இயற்கணித மொத்தங்கள் தனித்தனியே பூச்சியமாகுமெனில் அவ்வொருதள விசைத் தொகுதி சமநிலை பெறும்,

O என்னும் புள்ளியில் பலவிசைகள் செயல்படுவதாகக் கொள்க. *Ox*, *Oy* என்னுமிரு செங்குத்துத் திசைகளில் அவ் விசைகளின் குத்துப் பிரிவுகளின் இயற்கணித மொத்தங்கள் முறையே *X*, *Y* என்க.

$\therefore$ அவ்விசைகளின் விளைவு $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ ஆகும்.
ஆனால்' $X = O$; $Y = O$ $\quad \therefore \quad R = O$.

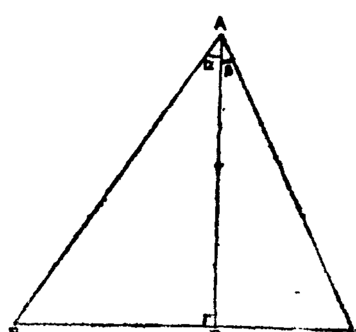
அதாவது, அவ்வொரு தளவிசைகளின் விளைவு பூச்சிய மாகும். எனவே, அவ்விசைகள் யாவும் சமநிலை பெறும்.

மேற்கூறப்பட்டவற்றிலிருந்து, ஒரு துகளின் மீது செயல் படும் ஒருதள விசைத் தொகுதி சமநிலை பெறுவதற்கு வேண்டிய போதிய நிபந்தனையைப் பின்வருமாறு கூறலாம்.

"ஒரு புள்ளி வழியே செல்லும் ஏதேனுமிரு செங்குத்துத் திசைகளில், அப்புள்ளியிலமைந்துள்ள ஒரு துகளின் மீது செயல்படும் ஒருதள விசைகளின் குத்துப் பிரிவுகளின் இயற் கணித கூட்டல்கள் தனித்தனியே மறைய வேண்டுமென்பதே அவ்வொரு தளவிசைத் தொகுதி சமநிலையிலிருக்க வேண்டிய-போதிய நிபந்தனையாகும்."

மாதிரி 31 : *AD* என்பது $\triangle ABC$-யின் குத்துயரம். *AB* *AC* வழியே *AD*-ஆல் குறிக்கப்படும் விசையின் கூறுகள்

முறையே $\left[\frac{a^2+b^2-c^2}{2a^2}\right]AB$, $\left[\frac{c^2+a^2-b^2}{2a^2}\right]AC$ என்று காட்டுக.



படம் 43

தீர்வு: $\angle BAD = \alpha$, $\angle CAD = \beta$ என்று கொள்க.

$\therefore \quad \alpha = 90 - B, \; \beta = 90^\circ - C$ மேலும் $\alpha + \beta = A$.

$AD = AB \sin B = AC \sin C$ விசைப் பிரிவு தேற்றத்தின் படி, AB, AC ஆகிய திசைகளில் விசை AD-யின் கூறுகள் முறையே

$$\frac{AD \sin \beta}{\sin (\alpha+\beta)}, \quad \frac{AD \sin \alpha}{\sin (\alpha+\beta)} \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore \quad AB \text{ வழிக் கூறு} = \frac{AD \sin \beta}{\sin (\alpha+\beta)}$$

$$= \frac{AB \sin B. \sin (90^\circ - C)}{\sin A}$$

$$= \frac{AB \sin B \cos C}{\sin A}$$

$$= \frac{AB \frac{b}{2R} \cos C}{\frac{a}{2R}}$$, R என்பது சுற்று வட்ட ஆரை.

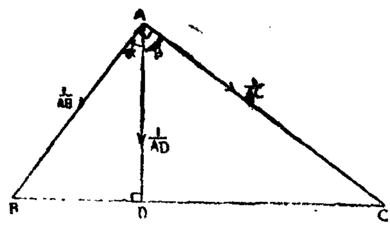
$$= AB \frac{b}{a} \cos C$$

$$= AB \frac{b}{a} \frac{(a^2 + b^2 - c^2)}{2ab}$$

$$= \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a^2} \right) AB.$$

இதுபோல, AC வழிக் கூறு $= \left(\dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2a^2} \right) AC$ என்று காணலாம்.

மாதிரி 32: ABC என்பது A-யில் செங்கோணத்தையுடைய ஒரு செங்கோண முக்கோணம். $PD\perp BC$. AE வழியே செயல்படும் $\frac{1}{AB}$ அளவுள்ள விசை, AC வழியே செயல்படும் $\frac{1}{AC}$ அளவுள்ள விசை ஆகியவற்றின் விளைவு விசையானது AD வழியே செயல்படும் $\frac{1}{AD}$ அளவுள்ள விசையென்று காட்டுக.



படம் 44

தீர்வு

$\triangle\ ABC$-யில் $A = 90°$; $AD\perp BC$.

$\angle BAD = \alpha,\ \angle CAD = \beta$ என்க.

$\therefore\ \alpha + \beta = 90°$.

மேலும், $\alpha = 90° - C,\ \beta = 90° - C$

$\therefore\ \alpha = C,\ \beta = B$.

$\frac{1}{AB}, \frac{1}{AC}$ ஆகிய விசைகளின் விளைவு $\frac{1}{AD}$ எனில், $\frac{1}{AD}$ யின் கூறுகள் $\frac{1}{AB}, \frac{1}{AC}$ ஆகயிருக்க வேண்டும்.

விசைப் பிரிப்புத் தேற்றத்தின்படி,

AD வழியே செயல்படும் $\frac{1}{AD}$-யின் AB வழிக் கூறு $= \dfrac{\frac{1}{AD}\cdot \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$

$= \dfrac{\frac{1}{AD}\cdot \text{si}}{\sin 90°}$

$$= \frac{\sin B}{AD}$$

$$= \frac{\sin B}{AB \sin B}$$

$$= \frac{1}{AB}$$

இதுபோல், AD வழியே செயல்படும் $\frac{1}{AD}$-யின் AC வழிக் கூறு

$$= \frac{\frac{1}{AD} \sin \alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$= \frac{\frac{1}{AD} \sin C}{\sin 90^\circ}$$

$$= \frac{\sin C}{AD}$$

$$= \frac{\sin C}{AC \sin C}$$

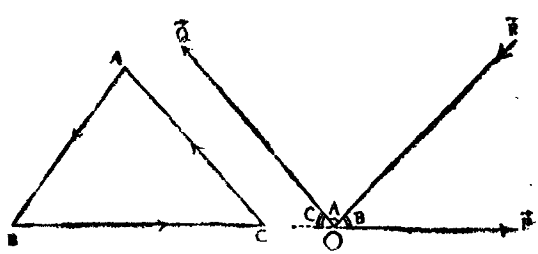
$$= \frac{1}{AC}$$

மாதிரி 33 : $\triangle\ ABC$-யின் BC, CA, AB ஆகிய பக்கங்களுக்கு இணையான திசைகளில் முறையே P, Q, R எனும் அளவுகளுள்ள விசைகள் ஒரு புள்ளியில் செயல்படின் அவற்றின் விளைவின் அளவு

$$[P^2+Q^2+R - 2\,QR \cos A - 2\,RP \cos B - 2\,PQ \cos C]$$

என்று நிறுவுக. (சென்னை பி.எஸ்.ஸி. 1760 செப்.)

தீர்வு



படம் 45

Q, R ; R, P ; P, Q ஆகிய விசைச் சோடிகளுக்கிடையே யுள்ள கோணங்கள் முறையே A, B, B ஆகும். $\vec{P}$-யின் திசை வழியாகவும், அதற்குச் செங்குத்துத் திசை வழியாகவும் விசைப் பிரிப்புச் செய்க.

X = $\vec{P}$-யின் திசை வழிக் குத்துப் பிரிவுகளின் இயற்கணித மொத்தம்.

$$= P - R\cos B + Q\cos(A+B)$$
$$= P - R\cos B + Q\cos(180^\circ - C)$$
$$= P - R\cos B - Q\cos C$$

Y = $\vec{P}$-யின் திசைக்குச் செங்குத்துத் திசையில் குத்துப் பிரிவுகளின் மொத்தம்

$$= O - R\sin B + Q\sin C$$
$$= Q\sin C - R\sin B$$

விளைவு விசையின் அளவு R_1 எனில்,

$$R_1^2 = X^2 + Y^2$$

$$= (P - R\cos B - Q\cos C)^2 + (Q\sin C - R\sin B)^2$$

$= P^2 + R^2\cos^2 B + Q^2\cos^2 C - 2PR\cos B - 2PQ$ $\cos C + QR\cos B\cos C + Q^2\sin^2 C + R^2\sin^2 C$ $- 2QR\sin C\sin B.$

$= P^2 + Q^2 + R^2 - 2RP\cos B - 2AQ\cos C$ $+ 2QR(\cos B\cos C - \text{Sin } B \text{ Sin } C)$

$= P^2 + Q^2 + R^2 - 2RP\cos B - 2PQ\cos C$ $+ 2QR\cos(B+C).$

$= P^2 + Q^2 + R^2 - 2RP\cos B - 2PQ\cos C$ $+ 2QR\cos(180^\circ - A).$

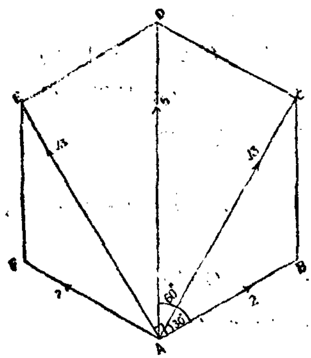
$= P^2 + Q^2 + R^2 + 2RP\cos B - 2PQ\cos C$ $- 2QR\cos A.$

$$\therefore R_1 = [P^2 + Q^2 + R^2 - 2QR\cos A - 2RP\cos B - 2PQ\cos C]^{\frac{1}{2}}.$$

மாதிரி 34 : ஓர் ஒழுங்கு அறுகோணத்தின் ஒரு முனையில், அந்த முனையை மற்ற முனைகளோடு சேர்க்கும் திசைகளில் முறையே 2, $\sqrt{3}$, 5, $\sqrt{3}$, 2 அளவுகளுள்ள விசைகள் செயல் படுகின்றன. இவைகளின் விளைவு விசை காண்க.

(மதுரை பி.எஸ்.ஸி. 1973)

தீர்வு



படம் 46

ABCDEF என்ற ஒழுங்கு அறுகோணத்தில் 2, $\sqrt{3}$, 5, $\sqrt{3}$, 2 என்ற அளவுகளுள்ள விசைகள் முறையே *AB*, *AC*, *AC*, *AE* *AF* திசைகளில் செயல்படுகின்றன. இது ஒரு ஒழுங்கு அறு கோணமாகையால், $\angle ABC = 120°$ $AB = BC$ ஆகையால், $\angle BAC = 30°$ $\angle BAD = 60°$; $\angle BAE = 90°$ $\angle BAE = 120°$. *AB*, *AE* என்பன செங்குத்துக் கோடுகளாகையால் இத்திசை களில் விசைப் பிரிப்பு செல்க.

X = *AB* திசையில் குத்துப் பிரிவுகளின் இயற்கணித மொத்தம்

$$= 2+\sqrt{3}\cos 30°+5\cos 60°+\sqrt{3}\cos 90°+2\cos 120°$$

$$= 2+\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+5\left(\tfrac{1}{2}\right)+\sqrt{3}\,(0)+2\left(-\tfrac{1}{2}\right)$$

$$= 2+\frac{3}{2}+\frac{5}{2}+0-1$$

$$= 5.$$

Y = AE திசையில் குத்துப் பிரிவுகளின் இயற்கணித மொத்தம்

$$= 2(0)+\sqrt{3}\sin 30^\circ+5\sin 60^\circ+\sqrt{3}+2\sin 120^\circ$$

$$= 0+\sqrt{3}(\tfrac{1}{2})+5\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\sqrt{3}+2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{5\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}+\sqrt{3}$$

$$= 5\sqrt{3}$$

விளைவு $R = \sqrt{X^2+Y^2}$

$$= \sqrt{25+75}$$

$$= 10.$$

ABயுடன் விளைவு விசையின் சாயவு θ எனில்,

$$\tan\theta = \tan\theta = \frac{Y}{X} = \frac{5\sqrt{3}}{5} = \sqrt{3}$$

$$\therefore \quad \theta = 60^\circ$$

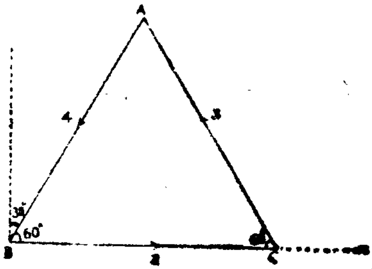
$\therefore$ விளைவு விசையானது 10 அலகு அளவுடன் AD திசையில் செயல்படுறது.

மாதிரி 35: ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தின் BC, CA, AB என்ற பக்கங்களின் வழியாக முறையே 2, 3, 4 அலகுகள் அளவுகளுடன் கூடிய விசைகள் செயல்படுகின்றன. விளைவு விசையின் அளவையும், அது முக்கோணத்தின் பக்கங்களைச் சந்திக்கும் புள்ளிகளையும் காண்க.

(சென்னை பி.எஸ்ஸி. 1969 செப்.)

தீர்வு: $\triangle ABC$ என்ற சமபக்க முக்கோணத்தில் AB, BC, CA வழியாக 2, 3, 4 அளவுகளுள்ள விசைகள் செயல்படு

கின்றன. BC வழியாகவும், BCக்குச் செங்குத்துத் திசை வழியாகவும் விசைப் பிரிப்புச் செய்து குத்துப் பிரிவுகளைக் கூட்டுக.



படம் 47

X = BC திசையில் குத்துப் பிரிவுகளின் மொத்தம்

$$= 2 - 3\cos 60^\circ - 4\cos 60^\circ$$

$$= 2 - \tfrac{3}{2} - 2$$

$$= -\tfrac{3}{2}$$

Y = BCக்குச் செங்குத்துத் திசையில் குத்துப் பிரிவுகளின் மொத்தம்

$$= 0 + 3\sin 60^\circ - 4\sin 60^\circ$$

$$= 0 + 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

விளைவு விசை R எனில்,

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

$$= \sqrt{\tfrac{9}{4} + \tfrac{3}{4}}$$

$$= \sqrt{3}$$

BCயுடன் விளைவு விசையின் சாய்வு θ எனில்,

$$\tan\theta = \frac{Y}{X} = \frac{-\sqrt{3}/2}{-3/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ஆகவே, விளைவு விசையானது $\sqrt{3}$ அலகு அளவுடைய தாகவும், BCயின் திசைக்கு 30° கோணத்தில் செயல்படுவதாகவு முள்ளது.

குறிப்பு : விளைவு விசையானது முக்கோணத்தின் பக்கங் களைச் சந்திக்கும் புள்ளிகளைக் காணும் முறை பிறிதொரு அத்தி யாயத்தில் விவரிக்கப்படுகிறது.

மாதிரி 36 : ஒரு முக்கோணத்தின் முனைகளின் வழியே எதிர்ப்பக்கங்களுக்குச் செங்குத்தாக, அம்முனைக் கோணங் களின் கொசைன்களுக்கு விகித சம அளவுகளுள்ள விசைகள் செயல்படுகின்றன. விளைவு விசையானது.

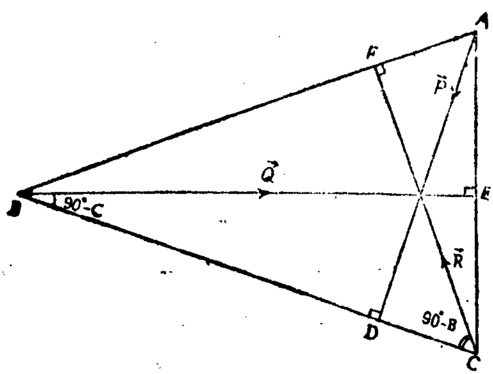
$$[1-8\cos A\cos B\cos C]^{\frac{1}{2}}$$

க்கு விகித சமமாயிருக்குமென்று காட்டுக.

தீர்வு : $\triangle ABC$யில் $AD \perp BC$: $BE \perp CA$; $CF \perp AB$.

AD, BE, CF வழியே முறையே P, Q, R என்னும் விசைகள் செயல்படுகின்றன. K என்பது விகித சம மாறலியெனில்,

$P = K\cos A$, $Q = K\cos B$, $R = K\cos C$.



படம் 48

BC திசையிலும், BCக்குச் செங்குத்துத் திசையிலும் இவ் விசைகளின் குத்துப் பிரிவுகளின் கூட்டல்களைக் காண்க.

X = BC திசையில் விசைகளின் குத்துப் பிரிவுகளின் மொத்தம்

$$= O + Q\cos(90° - C) - R\cos(90° - B)$$
$$= Q\sin C - R\sin B$$
$$= K\cos B\sin C - K\cos C\sin B$$
$$= K\sin(C - B)$$

Y = BCக்குச் செங்குத்துத் திசையில் குத்துப் பிரிவுகளின் மொத்தம்

$$= -P + Q\sin(90° - C) + R\sin(90° - B)$$
$$= -P + Q\cos C + R\cos B$$
$$= -K\cos A + K\cos B\cos C + K\cos C\cos B$$
$$= -K\cos A + 2K\cos B\cos C$$
$$= -K\cos A + K[\cos(B+C) + \cos(B-C)]$$
$$= -K\cos A + K[\cos(180° - A) + \cos(B-C)]$$
$$= -K\cos A - K\cos A + K\cos(B - C)$$
$$= -2K\cos A + K\cos(B-C)$$

R என்பது விளைவு விசையெனில்,

$$R^2 = X^2 + Y^2$$
$$= K^2\sin^2(C-B) + K^2\{-2K\cos A + K\cos(B-C)\}^2$$
$$= K^2\sin^2(C-B) + 4K^2\cos^2 A + K^2\cos^2(B-C) - 4K^2\cos A\cos(B-C).$$
$$= K^2[1 + 4\cos^2 A - 4\cos A\cos(B-C)]$$
$$= K^2[1 - 4\cos A\{\cos(B-C) - \cos A\}]$$
$$= K^2[1 - 4\cos A\{\cos(B-C) - \cos(180° - B+C)\}]$$
$$= K^2[1 - 4\cos A\{\cos(B-C) + \cos(B+C)\}]$$
$$= K^2[1 - 4\cos A\{2\cos B\cos C\}]$$
$$= K^2[1 - 8\cos A\cos B\cos C]$$

$$\therefore R = K[1 - 8\cos A\cos B\cos C]^{\frac{1}{2}}$$
$$R \propto [1 - 8\cos A\cos B\cos C]^{\frac{1}{2}}$$

மாதிரி 37 : ஒவ்வொன்றும் Pக்குச் சமமான பெரு எண்ணிக்கையிலான n சிறு விசைகள் ஒரு துகளின்மீது செயல்படுகின்றன. இவ்விசைகள் யாவும் ஒரு நிலைத்தளத்தில் O முதல் α வரை கூட்டுத் தொடரிலமைந்த கோணங்களில் கிடைக் கோட்டுடன் சரிந்திருப்பின் விளைவு விசையின் அளவையும் திசையையும் காண்க.

தீர்வு : P அளவுள்ள n சம விசைகள் செயல்படுகின்றன. முதல் விசையானது கிடைக்கோட்டுடன் $0°$ சரிவில் செயல்படுகிறது. எஞ்சியுள்ள $(n-1)$ விசைகளின் கோணங்கள் α வரை கூட்டுத் தொடரில் இருப்பதால், கிடைக்கோட்டுடன் அவற்றின் கோணங்கள் முறையே,

$$\frac{\alpha}{n-1},\ \frac{2\alpha}{n-1},\ \frac{3\alpha}{n-1},\ \ldots\ldots \frac{(n-1)\ \alpha}{n-1} \text{ ஆகும்.}$$

X, Y என்பன முறையே கிடைத்திசையிலும், செங்குத்துத்திசையிலும் இவ்விசைகளின் குத்துப் பிரிவுகளின் கூட்டல்களெனில்,

$$X = P \cos 0° + P \cos \frac{\alpha}{n-1} + P \cos \frac{2\alpha}{u-1} + \ldots\ldots + P \cos \frac{(n-1)\ \alpha}{n-1}$$

$$= P \left[\cos\left(0 + \frac{n-1}{2} \cdot \frac{\alpha}{n-1}\right) \cdot \frac{\sin \frac{n}{2} \cdot \frac{\alpha}{n-1}}{\sin \frac{\alpha}{n-1}} \right]$$

[திரிகோண கணிதத்திலிருந்து]

$$= \frac{P . \cos \frac{\alpha}{2} . \sin \frac{n\alpha}{2(n-1)}}{\sin \frac{\alpha}{n-1}}$$

$$Y = P \sin 0° + P \sin \frac{\alpha}{n-1} + P \sin \frac{2\alpha}{n-1} + \ldots\ldots + P \sin \frac{n-1)\ \alpha}{n-1}$$

$$= P\left[\sin\left(0+\frac{n-1}{2}\,\frac{\alpha}{n-1}\right)\frac{\sin\frac{n}{2}\,\frac{\alpha}{n-1}}{\sin\frac{\alpha}{n-1}}\right]$$

விளைவுவிசை R எனில்,

$$R^2 = X^2 + Y^2$$

$$= P^2\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\sin^2\frac{n\alpha}{2(n-1)}}{\sin^2\left(\frac{\alpha}{n-1}\right)}+P^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\,\frac{\sin^2\frac{n\alpha}{2(n-1)}}{\sin^2\left(\frac{\alpha}{n-1}\right)}$$

$$= P^2\,\frac{\sin^2\frac{n\alpha}{2(n-1)}}{\sin^2\left(\frac{\alpha}{n-1}\right)}$$

$$\therefore R = P\,\frac{\sin\frac{n\alpha}{2(n-1)}}{\sin\left(\frac{\alpha}{n-1}\right)}$$

கிடைக் கோட்டுடன் விளைவுவிசையின் சாய்வு θ எனில்,

$$\tan\theta = \frac{Y}{X}$$

$$= \frac{\left[P\sin\frac{\alpha}{2}\,\frac{\sin\frac{n\alpha}{2(n-1)}}{\sin\left(\frac{\alpha}{n-1}\right)}\right]}{\left[P\cos\frac{\alpha}{2}\,\frac{\sin\frac{n\alpha}{2(n-1)}}{\sin\left(\frac{\alpha}{n-1}\right)}\right]}$$

$= \tan\frac{\alpha}{2}$

அல்லது, $\theta = \frac{\alpha}{2}$

பயிற்சி 5

(1) D என்பது $\triangle ABC$ யின் பக்கம் BC யின் மேலுள்ள ஒரு புள்ளி. முறையே AB, AC வழியே செயல்படுகின்ற P, Q என்னும் விசைகளின் விளைவு AD வழியே செயல்படும் R என்னும் விசையாகும்.

$\frac{P}{R} = \frac{AB \cdot CD}{AD \cdot BC}$ என்று நிறுவுக.

(2) O என்பது $\triangle ABC$யின் சுற்றுவட்டவட்டமையம். AO என்ற கோடு BC ஐ D யில் சந்திக்கிறது. AB, AC வழியே விசை AD யின் கூறுகள் முறையே

$\frac{\sin 2B}{\sin 2B + \sin 2C} \cdot AB$, $\frac{\sin 2C}{\sin 2B + \sin 2C} \cdot AC$ என்று காட்டுக.

(3) ஓர் ஒழுங்கு ஐங்கோணத்தின் ஒரு முனை வழியே வரிசைக் கிரமமாக ஏனைய முனைகளை நோக்கிச் செயல்படுகின்ற 7,1,1,3 கி.கி. எடைகளுக்குச் சமமான விசைகளின் விளைவு $\sqrt{71}$ கி.கி. எடைக்குச் சமமான விசையென்று காட்டு.

(4) ஓர் ஒருங்கு அறுகோணத்தின் ஒரு முனை வழியே ஒழுங்கான வரிசையில் ஏனைய முனைகளை நோக்கி 1,2,3,4,5 கி.கி. எடைகளுக்குச் சமமான விசைகள் செயல்படுகின்றன. அவற்றின் விளைவு விசையைக் காண்க,

(5) $ABCDEF$ என்பது ஓர் ஒழுங்கு அறுகோணம். $\vec{AB}$, $2\,\vec{AC}$, $3\,\vec{AD}$, $4\,\vec{AE}$, $5\,\vec{AF}$ என்பனவற்றுல் குறிப்பிடப்படுகின்ற விசைகள் A யில் செயல்படுகின்றன. அவற்றின் விளைவு விசையின் அளவு $AB\sqrt{351}$ என்று காட்டு.

(6) *ABCDEF* என்பது ஓர் ஒழுங்கு அறுகோணம் $\vec{AB}$ என்பது *P* அளவுள்ள ஓர் விசையைக் குறிப்பிடுமாயின் $\vec{AC}, \vec{AD}, \vec{AE}$ என்பனவற்றால் குறிப்பிடப்படுகின்ற விசைகளின் விளைவு விசையைக் காண்க.

(7) ஒரு கம்பத்தின் உச்சியானது நான்கு கிடைக்கம்பிகளால் கட்டப்பட்டு நிலைநிறுத்தப்பட்டுள்ளது. அக்கம்பிகளின் இழுவிசைகள் முறையே வடக்கு நோக்கி 20 ராத்தல் எடை, கிழக்கு நோக்கி 30 ராத். எடை, தென் மேற்கு நோக்கி 40 ராத். எடை, தென்கிழக்கு நோக்கி 50 ராத். எடையாகும். விளைவு இழுவிசையின் அளவையும் திசையையும் காண்க.

(சென்னை பி.இ. 1951)

(8) *ABCD* ஒரு சதுரம் *AB, BC, CD, DA, AC* ஆகிய திசைகளில் ஒரு புள்ளி வழியே செயல்படும் 1,2,3,4 $2\sqrt{2}$ கி.கி. எடையளவுகள் கொண்ட விசைகள் சமநிலையிலிருக்குமென்று நிறுவுக.

(9) $2\sqrt{3}$,2,2,$2\sqrt{3}$ கி.கி. எடைகளுள்ள விசைகள் ஒரு துகளின் மீது செயல்படுகின்றன. முதல் விசைக்கும் பிற விசைகளுக்குடையேயுள்ள கோணங்கள் முறையே 90°, 150°, 240° எனில், அத்துகள் சமநிலையிலிருக்குமென்று நிறுவுக.

(10) 2*P*, 3*P*, 4*P* அளவுகள் கொண்ட விசைகள் ஒரு புள்ளியில் ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தின் ஒருமுக வரிசையிலெடுக்கப்பட்ட பக்கங்களுக்கு இணையான திசைகளில் செயல்படுகின்றன. அவற்றின் விளைவு விசையின் அளவு செயற்கோடு ஆகியவற்றைக் காண்க.

(11) (*P*–*Q*), *P*, (*P*+*Q*) அளவுகள் கொண்ட விசைகள் ஒரு புள்ளியில் ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தின் ஒருமுக வரிசையிலெடுக்கப்பட்ட பக்கங்களுக்கு இணையான திசைகளில் செயல்படுகின்றன. அவற்றின் விளைவு விசையைக் காண்க.

(12) $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$ என்னும் ஒரு தள விசைகள் *O* விலுள்ள ஒரு துகளின் மீது செயல்படுகின்றன. $\vec{Q}, \vec{R}; \vec{R}, \vec{P}; \vec{P}, \vec{Q}$ ஆகிவற்றிற்

கிடையேயுள்ள கோணங்கள் முறையே ∝, β, λ எனில், அதன் விளைவு விசை

$$[P^2+Q^2+R^2+2QR\cos\alpha+2RP\cos\beta+2PQ\cos\gamma]^{1/2}$$

என்று காட்டுக.

(13) ஒரு புள்ளியில் செயல்படுகின்ற மூன்று விசைகளின் திசைகள் ABC என்ற முக்கோணத்தின் ஒரு முகவரிசையிலெடுக்கப்பட்ட பக்கங்களுக்கு இணையாகவும், அவ்விசைகளின் அளவுகள் எதிர்க்கோணங்களின் கொசைன்களுக்கு விகிதசமமாகவுமிருக்கின்றன. அவற்றின் விளைவு விசை

$$[1-8\cos A\cos B\cos C]^{1/2}$$

என்று காட்டுக.

(14) ஒவ்வொன்றும் P க்குச் சமமான விசைகள் ஒரு புள்ளி வழியே $\triangle ABC$ யின் ஒருமுக வரிசையிலெடுக்கப்பட்ட பக்கங்களுக்கு இணையான திசைகளில் செயல்படுகின்றன. அவற்றின் விளைவு விசை

$$R = P(3-2\cos A-2\cos B-2\cos C)^{1/2}$$

என்று காட்டுக.

(15) A, B, C என்பன ஒரு வட்டத்தின் பரிதியின் மேலுள்ள மூன்று புள்ளிகள் AB, BC வழியாக அவற்றின் நீளங்களுக்குத் தலைகீழ் விகிதசம அளவுகளுள்ள விசைகள் செயல்படுகின்றன. அவற்றின் விளைவு விசை B யில் வரையப்படும் தொடுகோட்டின் வழியே செயல்படுமென்று காட்டுக.

(16) ஒவ்வொன்றும் P க்குச் சமமான ஐந்து ஒரு தள விசைகள் O என்ற புள்ளியில் செயல்படுகின்றன. அவ்விசைகள் அதே தளத்திலுள்ள OX என்னும் நேர்கோட்டுடன் முறையே 15°, 30°, 45°, 60°, 75° கோணங்களில் சாய்ந்துள்ளன. அவற்றின் விளைவு விசையின் அளவு $\frac{P(1+\sqrt{2})(1+\sqrt{3})}{\sqrt{2}}$ என்று காட்டுக.

(17) O என்பது $ABCD$ என்னும் சதுரத்தின் மையம், $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \vec{P}_4$ ஆகிய விசைகள் O–வில் செயல்படுகின்றன. $\vec{P}_1, \vec{P}_2$ என்பன OA, OB என்ற மூலைவிட்டங்களிலும், $\vec{P}_3, \vec{P}_4$ என்பன AB, AC ஆகிய பக்கங்களுக்குச் செங்குத்தாக

வும் செயல்படுகின்றன. $P_1 : P_2 : P_3 : P_4 = 4:6:5:1$ எனில், அவற்றின் விளைவின் அளவு, திசை ஆகியவற்றைக் காண்க.

(18) α இடைக்கோணத்தில் ஒரு புள்ளி வழியே செயல்படும் $\vec{P}, \vec{Q}$ என்னும் இழுவிசைகளின் விளைவு $\vec{R}$ ஆகும். ஒவ்வொரு விசையின் அளவுடனும் R அளவு கூட்டப்பட்டால், புதிய விளைவு R விசையுடன் θ என்றும் கோணத்தை

$$\tan\theta = \frac{(P-Q)\sin\alpha}{P+Q+R+(P+Q)\cos\alpha}$$

என்னும் தொடர்பிலிருக்குமாறு உண்டுபண்ணும் என்று நிறுவுக.

2. இணை விசைகள்

(PARALLEL FORCES)

ஒரு புள்ளி வழியே செயல்படுகின்ற இருவிசைகளின் விளைவுவிசையை இணைகர விதியின் மூலம் காணலாமென்று முன்பு கண்டோம். இரு விசைகளின் செயற்கோடுகள் இணையாகயிருப்பின் அவற்றின் விளைவுவிசையைக் காண இணைகர விதி பயன்படாது. இணையான செயற்கோடுகளைக் கொண்ட விசைகள் இணை விசைகளென்றழைக்கப்படுகின்றன. இணை விசைகளின் விளைவு விசையைக் காணும் வகையினை இங்கு ஆராய்வோம்.

ஒருதிசை இணைவிசைகள் அல்லது ஒருமுக இணைவிசைகள் (Like Parallel Forces)

ஒரே திசையில் செயல்படுகின்ற இணைவிசைகளுக்கு "ஒருதிசை இணைவிசைகள்" என்று பெயர்.

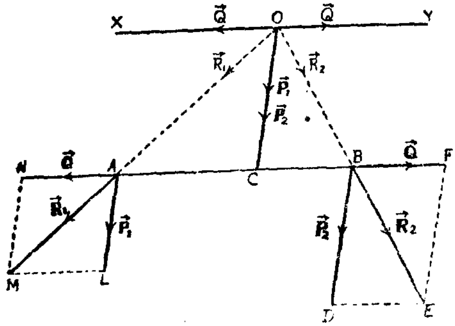
எதிரிணை விசைகள் அல்லது எதிர்முக இணை விசைகள் (Unlike Parallel Forces)

எதிர்த் திசைகளில் செயல்படுகின்ற இரு இணைவிசைகளுக்கு "எதிரிணை விசைகள்" அல்லது "எதிர்முக இணை விசைகள்" அல்லது "எதிர்த்திசையிணை விசைகள்" என்று பெயர்.

ஒருதிசை யிணைவிசைகளின் விளைவு
(Resultant of two like parallel forces)

கட்டிறுக்கமாக இணைக்கப்பட்ட A, B என்னும் இருபுள்ளிகளின் வழியே $\vec{P_1}$, $\vec{P_2}$ என்னும் இருதிசையிணை விசைகள்

முறையே AL, BD வழியே செயல்படுவதாகக் கொள்க. ABயைச் சேர்க்கவும். இக்கோட்டின் வழியாக A, B என்ற



படம் 49

புள்ளிகளில் முறையே $\vec{Q}$, $-\vec{Q}$ என்னும் சமஎதிர் விசைகளைப் படத்தில் காட்டியுள்ளது போல் செயல்படுத்துக. $\vec{AL} = \vec{P_1}$ $\vec{BD} = \vec{P_2}$ என்றும், $\vec{AN} = \vec{Q}, \vec{BF} = \vec{Q}$ என்றும் கொள்க இவ்விரு சம எதிர்விசைகளும் தங்கள் விளைவுகளை ஒன்றுக் கொன்று ஈடுசெய்து கொள்ளுமாகையால் கொடுக்கப்பட்டுள்ள விசைத் தொகுயில் எவ்வித மாறுதலுமேற்படாது.

$ALMN$, $BDEF$ என்னும் இணைகரங்களைப் பூர்த்தி செய்க. Aயில் செயல்படுகின்ற $\vec{P_1}, \vec{Q}$ ஆகிய விசைகளின் விளைவாகிய $\vec{R_1}$ என்பது AM வழியாகவும் Bயில் செயல்படுகின்ற $\vec{P_2}, \vec{Q}$ ஆகிய விசைகளின் விளைவாகிய $\vec{R_2}$ என்பது BE வழியாகவும் செயல்படும்.

MA, EB ஆகிய மூலை விட்டங்களை O என்னும் புள்ளியில் சந்திக்குமாறு நீட்டுக. O வழியாக XOY என்னும் நேர்கோடு ABக்கு இணையாக வரைக. O வழியாக OC என்னும் நேர்கோடு $\vec{P_1}$, $\vec{P_2}$ ஆகிய விசைகளின் செயற்கோடுகளுக்கு இணையாக ABஐ Cயில் வெட்டுமாறு வரைக.

$$AL \text{ வழி } \vec{P_1} + BD \text{ வழி } \vec{P_2} = [AL \text{ வழி } \vec{P_1} + AN \text{ வழி } \vec{Q}]$$

$$+ [BD \text{ வழி } \vec{P_2} + BF \text{ வழி } \vec{Q}]$$

$$= AM \text{ வழி } \vec{R_1} + BE \text{ வழி } \vec{R_2}$$

விசை ஊடுகடத்தற்கோட்பாட்டின்படி, கொடுக்கப்பட்டுள்ள விசைத் தொகுதியானது O வில் முறையே OA, OB வழியே செயல்படும் $\vec{R_1}$, $\vec{R_2}$ ஆகிய இரு விசைகளுக்கு மாற்றப்படுகிறது. O-வில் செயல்படுகின்ற $\vec{R_1}$ விசையை முறையே OC, OX ஆகிய திசைகளில் $\vec{P_1}$, $\vec{Q}$ என்னும் விசைக் கூறுகளாகவும், $\vec{R_2}$ என்னும் விசையை முறையே OC, OY ஆகிய திசைகளில் $\vec{P_2}$, $\vec{Q}$ என்னும் விசைக் கூறுகளாகவும் பிரிக்கலாம். இவ் விசைக் கூறுகளுள் OX, OY ஆகிய எதிர்த்திசைகளில் செயல் படுகின்ற $\vec{Q}$, $\vec{Q}$ என்னும் சமவிசைகள் ஒன்றுக்கொன்று விளைவு நீக்கம் பெறுமாகையால் கொடுக்கப்பட்டுள்ள விசைகளின் தொகுதியானது O-வில் OC வழியே செயல்படுகின்ற $\vec{P_1}$, $\vec{P_2}$ ஆகிய இருவிசைகளுக்குச் சமமாகிறது. இவ்விரு விசைகளும் OC என்னும் ஒரே நேர்கோட்டில் ஒரே திசையில் செயல்படுவதால் இவற்றின் விளைவு OC வழியே செயல்படும் (P_1+P_2) அளவுள்ள விசையாகும். அதாவது, கொடுக்கப்பட்டுள்ள இரு ஒரு திசை இணைவிசைகளின் விளைவு C வழியே அவ்விணைவிசைகளின் திசைக்கு இணையான திசையில் செயல்படும் (P_1+P_2) அளவுள்ள ஒரு திசையிணை விசையாகும்.

படத்திலிருந்து, $\triangle ACO \;|||\; \triangle ALM$ என்று காணலாம்.

$$\therefore \frac{AC}{OC} = \frac{LM}{AL} \quad \text{(அளவில் மட்டும்)}$$

$$= \frac{AN}{AL}$$

$$= \frac{Q}{P_1}$$

இதுபோல், $\triangle OCB \;|||\; \triangle BDE$

$$\therefore \frac{OC}{CB} = \frac{BD}{DE}$$

$$= \frac{BD}{BF}$$

$$= \frac{P_2}{Q}$$

$$\therefore \quad \frac{AC}{OC} \cdot \frac{OB}{CB} = \frac{Q}{P_1} \cdot \frac{P_2}{Q}$$

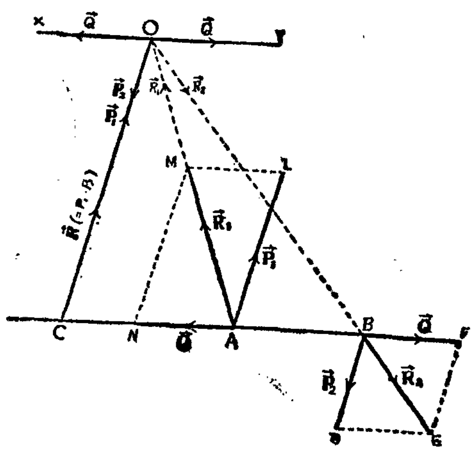
அதாவது, $\frac{AC}{CB} = \frac{P_2}{P_1}$

அல்லது, $P_1 \ AC = P_2 \ CB$.

அதாவது C-யானது AB-யை உட்புறமாக அவ்விசைகளின் அளவுகளில் எதிர்மாறு விகிதத்தில் $(P_2 : P_1)$ பிரிக்கிறது.

ஆகவே, A, B என்னும் இரு புள்ளிகளில் செயல்படுகின்ற $\vec{P_1}$, $\vec{P_2}$ என்ற இரு ஒரு திசையிணை விசைகளின் விளைவு அப்புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் AB என்னும் நேர்கோட்டை அவ்விசைகளின் அளவுகளின் எதிர்மாறு விகிதத்தில் உட்புறமாகப் பிரிக்கின்ற புள்ளி வழியே செயல்படுகின்ற $(P_1 + P_2)$ என்னும் அளவுடைய ஒரு திசையிணை விசையாகும்.

எதிரிணை விசைகளின் விளைவு
(Resultant of unlike parallel forces)



படம் 50

கட்டிறுக்கமாக இணைக்கப்பட்ட A, B என்னும் இரு புள்ளிகள் வழியே $\vec{P_1}$, $\vec{P_2}$ என்னும் இரு எதிரிணை விசைகள் முறையே AL, AD வழியே செயல்படுகின்றன. AB-யைச் சேர்க்கவும் இக்கோட்டின் வழியாக A, B என்ற புள்ளிகளில் $\vec{AN} = \vec{Q}$, $\vec{BF} = \vec{Q}$ என்னும் இரு சம எதிர் விசைகளைப் படத்தில்

காட்டியுள்ளதுபோல் செயல்படுத்துக. இவ்விரு சம எதிர் விசைகளும் தங்கள் விளைவுகளை ஒன்றுக்கொன்று ஈடு செய்து கொள்ளுமாகையால் கொடுக்கப்பட்டுள்ள விசைத் தொகுதியில் எவ்வித மாறுதலுமேற்படாது.

ALMN, *BDEF* என்ற இணைகரங்களைப் பூர்த்தி செய்க. *A*யில் செயல்படுகின்ற $\vec{P}, \vec{Q}$ ஆகிய விசைகளின் விளைவாகிய $\vec{R_1}$ என்பது *AM* வழியாகவும், *B*-யில் செயல்படுகின்ற $\vec{P_2}, \vec{Q}$ ஆகிய விசைகளின் விளைவாகிய $\vec{R_2}$ என்பது *BE* வழியாகவும் செயல்படும்.

AM, *EB* ஆகிய மூலை விட்டங்களை *O* என்னும் புள்ளியில் சந்திக்குமாறு நீட்டுக. *O* வழியாக *XOY* என்னும் நேர்கோடு *AB*க்கு இணையாக வரைக. *O* வழியாக *OC* என்னும் நேர் கோடு $\vec{P_1}, \vec{P_2}$ ஆகிய விசைகளின் செயற்கோடுகளுக்கு இணை யாக *AB*யை *C*யில் வெட்டுமாறு வரைக.

$$AL \text{ வழி } \vec{P_1} + BD \text{ வழி } \vec{P_2} = [AL \text{ வழி } \vec{P_1} + AN \text{ வழி } \vec{Q}] + [BD \text{ வழி } \vec{P_1} + BE \text{ வழி } \vec{Q}]$$

$$= AM \text{ வழி } \vec{R_1} + BE \text{ வழி } \vec{R_2}$$

விசை ஊடு கடத்தற் கோட்பாட்டின்படி, கொடுக்கப்பட்டுள்ள விசைத் தொகுதியானது *O*வில் முறையே *AO*, *OB* வழியே செயல்படும் $\vec{R_1}, \vec{R_2}$ ஆகிய இரு விசைகளுக்கு மாற்றப்படு கிறது. *O*வில் செயல்படும் $\vec{R_1}$ என்னும் விசையை முறையே *CO*, *OX* ஆகிய திசைகளில் $\vec{P_1}, \vec{Q}$ என்னும் விசைக் கூறுகளா களாகவும், $\vec{R_2}$ என்னும் விசையை முறையே *CO*, *OY* ஆகிய திசைகளில் $\vec{P_2}, \vec{Q}$ என்னும் விசைக் கூறுகளாகவும் பிரிக்கலாம், இவ்விசைக் கூறுகளுள் *OX*, *OY* ஆகிய எதிர்த்திசைகளில் செயல்படும் $\vec{Q}, \vec{Q}$ என்னும் சம விசைகள் ஒன்றுக்கொன்று தத்தம் விளைவுகளை ஈடு செய்து கொள்ளுமாகையால், கொடுக் கப்பட்டுள்ள விசைத் தொகுதியானது *O*வில் *CO* வழியே செயல்

படுகின்ற P_1 விசை, OC வழியே செயல்படுகின்ற $\vec{P_2}$ விசை ஆகியவற்றின் மொத்தத்துக்குச் சமமாகிறது. இவ்விரு விசைகளும் OC என்னும் நேர்கோட்டில் எதிர்த் திசைகளில் செயல்படுவதால், $P_1 > P_2$ எனில், இவற்றின் விளைவு CO வழியே செயல்படும் $(P_1 - P_2)$ அளவுடன் கூடிய ஒரு இணை விசையாகும். அதாவது, கொடுக்கப்பட்டுள்ள இரு எதிரிணை விசைகளின் C வழியே அவ்விணை விசைகளுள் பெரிய அளவுடன் கூடிய விசையின் திசைக்கு இணையான திசையில் செயல்படும் $(P_1 - P_2)$ அளவுடன் கூடிய ஒரு இணை விசையாகும்.

படத்திலிருந்து, $\triangle ACO \parallel\!| \triangle ANM$

$$\therefore \frac{AC}{CO} = \frac{AN}{NM} = \frac{AN}{AL} = \frac{Q}{P_1}$$

இதுபோல், $\triangle OCB \parallel\!| \triangle BDE$.

$$\therefore \frac{CO}{CB} = \frac{BD}{DE} \text{ (அளவில் மட்டும்)}$$

$$= \frac{BD}{BF} = \frac{P_2}{Q}$$

$$\therefore \frac{AC}{CO} \quad \frac{CO}{CB} = \frac{Q}{P_1} \quad \frac{P_2}{Q}$$

அதாவது, $$\frac{AC}{CB} = \frac{P_2}{P_1}$$

அல்லது, $$P_1 AC = P_2 \cdot CB$$

அதாவது, C யானது ABயை வெளிப்புறமாக அவ்விசைகளின் அளவுகளின் எதிர்மாறு விகிதத்தில் பிரிக்கிறது.

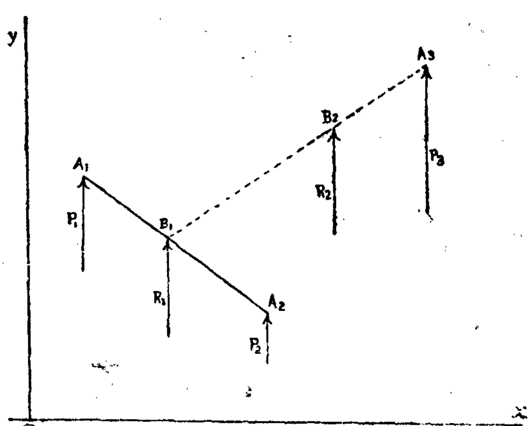
ஆகவே, A, B என்ற இரு புள்ளிகளில் செயல்படுகின்ற P_1, P_2 $(P_1 > P_2)$ என்ற இரு எதிரிணை விசைகளின் விளைவு அப்புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நேர்கோட்டை அவ்விசைகளின் அளவுகளின் எதிர்மாறு விகிதத்தில் வெளிப்புறமாகப் பிரிக்கின்ற புள்ளி வழியே அவ்விசைகளுள் பெரிய அளவுடன் கூடிய விசையின் (P_1 இன்) திசையில் செயல்படுகின்ற $(P_1 - P_2)$ அளவுடைய ஒரு இணை விசையாகும்.

குறிப்பு: 1 $\vec{P_1}, \vec{P_2}$ ஆகிய இரு எதிரிணை விசைக்கும் சம அளவுடையதாயின், AM, EB ஆகிய இரு மூலை விட்டங்களும்

இணையாகயிருக்குமாகையால் சந்திக்கமாட்டா. ஆகவே, கொடுக்கப்பட்டுள்ள இரு எதிரிணை விசைகளின் விளைவு வேறு இரு எதிரிணை விசைகளாகும். அதாவது, அவ்விரு எதிரிணை விசைகளுக்கும் விளைவு விசையாக ஒரு தனி விசையைக் காண இயலாது. இத்தகைய சம எதிரிணை விசைகளின் விளைவு பற்றி "சுழலிணைகள" என்னும் அத்தியாயத்தில் விவரமாக ஆராயப் பட்டுள்ளது.

குறிப்பு 2 : $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \ldots, \vec{P}_n$ ஆகிய இணை விசைகளின் விளைவைக் காண, முதலில் ஏதேனுமிரு இணை விசைகளின் ($\vec{P}_1, \vec{P}_2$ என்க) விளைவு $\vec{R}_1$ஐக் காண்க. பின், $\vec{R}_1, \vec{P}_3$ ஆகிய ஆகிய இரு இணை விசைகளின் விளைவு $\vec{R}_2$ஐக் காண்க. இவ்வாறு எல்லா விசைகளையும் இரண்டிரண்டாக இணைத்து இறுதியில் மொத்த விளைவைக் காணலாம்.

எவ்வெண்ணிக்கையிலுமான ஒரு தள இணைவிசைகளின் விளைவு (Resultant of any number of coplanar parallel forces)



படம் 51

$\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \ldots\ldots \vec{P}_n$ என்பன ஒரு பொருளின்மீது $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots A_n$ என்னும் புள்ளிகளில் செயல்படும் n-ஒரு தள இணை விசைகள். இவ்விசைகளுள் சில ஒரு திசையிலும், எஞ்சியன

எதிர்த் திசைகளிலும் செயல்படுவதாகயிருக்கலாம். ஒரு திசையிணை விசைகளின் விளைவு விசையும், எதிர்த் திசையிணை விசைகளின் விளைவு விசையும் சமமாகயிருப்பின் இவ்விரு விளைவு விசைகளும் இரு சம எதிரிணை விசைகளாகயிருப்பதால் ஒரு சுழலிணை (couple)யாக அமையும் ("சுழலிணைகள்"—அத்தியாயம் பார்க்கவும்). எனவே, கொடுக்கப்பட்டுள்ள விசைகளுக்கு ஒரு தனி விளைவு விசை கிடையாது. இங்கு கொடுக்கப்பட்டுள்ள $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \ldots\ldots, \vec{P}_n$ என்னும் விசைகள் ஒரு சுழலிணையாகமாட்டாவென்றும், அவற்றின் விளைவு ஒரு தனி விசை $\vec{R}$ என்றும் கொள்வோம்.

இவ் விசைகளின் தளத்தில் OX, OY என்னும் ஏதேனுமிரு செங்குத்து அச்சுக்களைக் குறித்துக்கொள்க. இவ்வச்சுக்கள் குறித்து $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots, A_n$ ஆகிய புள்ளிகளின் அச்சுத் தூரங்கள் முறையே $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \ldots\ldots, x_n, y_n)$ என்க.

இப்பொழுது A_1, A_2 ஆகிய புள்ளிகளில் செயல்படுகின்ற $\vec{P}_1, \vec{P}_2$ ஆகிய விசைகளின் விளைவு விசை $\vec{R}_1$ எனில், அது A_1, A_2 என்ற நேர்கோட்டில் $\frac{A_1 B_1}{B_1 A_2} = \frac{P_2}{P_1}$ என்னும் விகிதத்திலமையப் பெற்ற B_1 என்னும் புள்ளி வழியே செயல்படும் $(\vec{P}_1 + \vec{P}_2)$ என்னும் விசையாகும்.

$$\therefore B_1 = \left(\frac{P_1 x_1 + P_2 x_2}{P_1 + P_2}, \ \frac{P_1 y_1 + P_2 y_2}{P_1 + P_2}\right)$$

இப்பொழுது B_1, A_3 ஆகிய புள்ளிகளில் செயல்படுகின்ற $\vec{R}_1, \vec{P}_3$ ஆகிய விசைகளின் விளைவு விசை $\vec{R}_2$ என்க. அது, $B_1 A_3$ என்ற நேர் கோட்டில் $\frac{B_1 B_2}{B_2 A_3} = \frac{P_3}{R_1} = \frac{P_3}{P_1 + P_2}$ என்ற விகிதப்படி அமையப்பெற்ற B_2 என்னும் புள்ளி வழியே செயல்படும் $\vec{R}_1 + \vec{P}_3 = (\vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3)$ என்னும் விசையாகும்.

$$\therefore\ B_2 = \left[\frac{(P_1+P_2)\ \dfrac{P_1x_1+P_2x_2}{P_1+P_2} + P_3x_3}{(P_1+P_2)+P_3},\right.$$

$$\left.\frac{(P_1+P_2)\ \dfrac{P_1y_1+P_2y_2}{P_1+P_2} + P_3y_3}{(P_1+P_2)+P_3}\right]$$

$$= \left[\frac{P_1x_1+P_2x_2+P_3x_3}{P_1+P_2+P_3},\ \frac{P_1y_1+P_2y_2+P_3y_3}{P_1+P_2+P_3}\right]$$

இம்முறையைத் தொடர்ந்து பின்பற்றி இறுதியில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள n விசைகளின் விளைவு விசையாகிய $\vec{R}$ இன் அளவு $(P_1+P_2+P_3+\ldots+P_n)$ என்னும் இயற்கணித மொத்தம் என்றும், அது செயல்படும் புள்ளி

$$\left(\frac{P_1x_1+P_2x_2+P_3x_3+\ldots\ldots+P_n x_n}{P_1+P_2+P_3+\ldots\ldots P_n},\right.$$

$$\left.\frac{P_1y_1+P_2y_2+P_3y_3+\ldots\ldots+P_ny_n}{P_1+P_2+P_3+\ldots\ldots P_n}\right)$$

$$= \left(\frac{\sum P_r\,x_r}{\sum P_r},\ \frac{\sum P_r\,y_r}{\sum P_r}\right)$$

என்றும் காணலாம். இங்கு, $\sum P_r = P_1+P_2+P_3+\ldots\ldots P_n \neq 0$ என்பதை நினைவிற் கொள்க. ஏனெனில், $\sum P_r = 0$ எனில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள விசைகளின் விளைவு விசையின் அளவு பூச்சியமாதலால், அவ்விணை விசைகளின் தொகுதி சம நிலையிலிருக்கும்.

இவ்விளைவு செயல்படும் புள்ளியாகிய $A = \left(\dfrac{\sum P_r x_r}{\sum P_r}, \dfrac{\sum P_r y_r}{\sum P_r}\right)$

என்பது கொடுக்கப்பட்டுள்ள இணை விசைகளின் மையம் (Centre of parallel forces) என்றழைக்கப்படுகிறது. இம் மையப் புள்ளியானது கொடுக்கப்பட்டுள்ள விசைகள் செயல்படும் புள்ளிகளைச் சார்ந்துள்ளது என்பதைக் கவனிக்கவும்.

குறிப்பு 3 : A, B என்னும் புள்ளிகளில் செயல்படுகின்ற $\vec{P}$, $\vec{Q}$ என்னும் இரு ஒரு திசையிணை விசைகளின் விளைவு விசை

யாகிய $\vec{R}$ என்பது ABயில் C என்னும் புள்ளியில் செயல்படும் ஒரு திசையிணை விசையெனில்,

$$R=P+Q \text{ என்றும், } \frac{AC}{CB}=\frac{Q}{P} \text{ என்றும்}$$

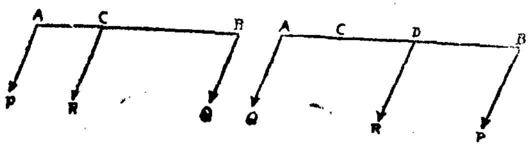
கண்டோம்.

$$\because \quad \frac{P}{CB}=\frac{Q}{AC}=\frac{P+Q}{CB+AC}=\frac{R}{AB}$$

ஆகவே, $\vec{P}$, $\vec{Q}$ என்னும் இரு ஒரு திசையிணை விசைகளின் விளைவு விசை $\vec{R}$ எனில், ஒவ்வொன்றின் அளவும் மற்ற இரு விசைகளுக்குமிடையேயுள்ள தூரத்திற்கு விகித சமத்திலிருக்கும்.

மாதிரி 38 : P, Q என்பன முறையே A, B என்ற புள்ளிகளில் செயல்படுகின்ற இரு ஒரு திசையிணைவிசைகள். இவ்விரு விசைகளும் தங்கள் நிலைகளை ஒன்றுக்கொன்று மாற்றிக்கொண்டால் அவற்றின் விளைவு விசை செயல்படும் புள்ளி AB யில் $\frac{P-Q}{P+Q}$ AB தூரத்திற்கு இடம் பெயருமென்று நிறுவுக.

தீர்வு



படம் 52 (அ) படம் 52 (ஆ)

P, Q என்ற விசைகள் A, Bயில் செயல்படும் போது அவற்றின் விளைவு விசை R ஆனது Cயில் செயல்படுவதாகக் கொள்க.

$$\therefore \quad \frac{AC}{CB}=\frac{Q}{P}$$

அல்லது $$\frac{AC}{AC+CB}=\frac{Q}{P+Q}$$

அதாவது, $$\frac{AC}{AB}=\frac{Q}{P+Q}$$

அல்லது, $AC = \frac{Q}{P+Q} AB$ .... (1)

இப்பொழுது, $\vec{Q}, \vec{P}$ என்ற விசைகள் முறையே A, B என்ற புள்ளிகளில் செயல்படும்போது அவற்றின் விளைவு விசை யாகிய $\vec{R} = (\vec{P} + \vec{Q})$ என்பது D யில் செயல்படுவதாகக் கொள்க.

$$\therefore \frac{AD}{DB} = \frac{P}{Q}$$

அல்லது, $\frac{AD}{AD+DB} = \frac{P}{P+Q}$

அதாவது, $\frac{AD}{AB} = \frac{P}{P+Q}$

$$\therefore AD = \frac{P}{P+Q} AB. \ldots\ldots \quad \ldots (2)$$

$\vec{R}$ இன் இடுபுள்ளியின் இடப் பெயர்ச்சி $= CD$

$$= AD - AC$$

$$= \frac{P}{P+Q} AB - \frac{Q}{P+Q} AB.$$

$$= \frac{P-Q}{P+Q} AB.$$

மாதிரி 39: $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$ என்னும் மூன்று ஒரு திசையிணை விசைகள் $\triangle ABC$ யின் முனைகளில் செயல்படுகின்றன. P, Q, R என்பன $a \cos A : b \cos B : c \cos C$ என்னும் விகிதத்திலிருப்பின். அவ்விசைகளின் விளைவு முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்டமையம் வழியே செல்லுமென்று நிறுவுக.

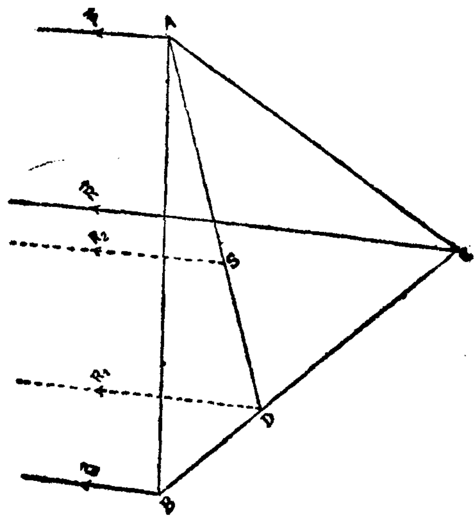
(சென்னை பி.எஸ்ஸி. 1970 ஏப்.)

தீர்வு

B, C வழியே செயல்படும் Q, R என்னும் ஒரு திசையிணை விசைகளின் விளைவு R_1 BC யில் D என்னும் புள்ளி வழியே செயல்படுமெனில், $R_1 = Q + R, \frac{BD}{DC} = \frac{R}{Q}$ ஆகும்.

இப்பொழுது, A, D என்னும் புள்ளிகளின் வழியே செயல் படும் P, R_1 என்னும் ஒரு திசையின விசைகளின் விளைவு R_2 எனில்,

$$R_2 = P + R_1 = P + Q + R \text{ ஆகும்.}$$



படம் 53

இவ்விளைவு விசை R_2 ஆனது AD யில் S என்னும் புள்ளியில் செயல்படுமெனில், $\frac{AS}{SD} = \frac{R_1}{P} = \frac{Q+R}{P}$ ஆகும்.

ஆனல் மூன்று விசைகளின் விளைவு சுற்றுவட்டமையம் வழியே செயல்பட வேண்டுமாயின், முக்கோணத்தின் சுற்று வட்டமையம் S ஆக யிருத்தல் வேண்டும்.

இப்பொழுது, $\frac{Q}{R} = \frac{DC}{BD}$

$$= \frac{\triangle ADC}{\triangle ABD}$$

$$= \frac{\triangle SDC}{\triangle SBD}$$

$$= \frac{\triangle ADC - \triangle SDC}{\triangle ABD - \triangle SBD}$$

$$= \frac{\triangle ASC}{\triangle ASB}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} SA \cdot SC \cdot \sin \angle ASC}{\frac{1}{2} SA \cdot SB \cdot \sin \angle ASB}$$

$$= \frac{\sin 2B}{\sin 2C} \quad (\because SA = SB = SC;\ \angle ASC = 2B;\ \angle ASB = 2C)$$

$$= \frac{2 \sin B \cos B}{2 \sin C \cos C}$$

$$= \frac{\frac{b}{2R} \cos B}{\frac{c}{2R} \cos C}$$

$$= \frac{b \cos B}{c \cos C}$$

இது போல், $\frac{P}{Q} = \frac{a \cos A}{b \cos B}$ என்று காணலாம்.

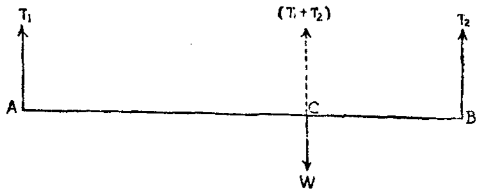
$$\because \quad P : Q : R = a \cos A : b \cos B . c \cos C.$$

மாதிரி 40: AB என்னும் இலேசான நேரான கோலொன்று A, B என்ற இடங்களில் கட்டப்பட்டுள்ள இரு நிலைக்குத்துக் கயிறுகளினால் கிடை நிலையில் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. கோலில், $AC : CB = 3 : 2$ என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்கக்கூடிய C என்னும் புள்ளியிலிருந்து W என்னும் எடை தொங்கவிடப் பட்டுள்ளது. ஒவ்வொரு கயிறும் தாங்கக்கூடிய மீப்பெரு இழு விசை 75 கிராம் எனில் C யிலிருந்து தொங்கவிடக்கூடிய மீப்பெரு எடையைக் காண்க.

தீர்வு

A, B என்ற புள்ளிகளில் கட்டப்பட்டுள்ள கயிறுகளின் மேல் நோக்கிய இழுவிசைகளை முறையே T_1, T_2 என்க. C யில் தொங்கவிடப்பட்டுள்ள எடை W ஆனது நிலைக்குத்தாகக் கீழ் நோக்கிச் செயல்படும். இம்மூன்று விசைகளின் தாக்குதல் களுக்குள்ளான கோல் சமநிலையிலிருப்பதால் மேல் நோக்கிய விசைகளின் விளைவு கீழ் நோக்கிய விசையை ஈடுசெய்ய

வேண்டும். ஆனால், மேல் நோக்கிய விசைகளாகிய T_1, T_2 ஆகிய இரண்டும் ஒரு திசையினை விசைகளாதலின், அவற்றின் விளைவு விசை $(T_1 + T_2)$ ஆகும்.



படம் 54

$$\therefore \quad T_1 + T_2 = W \quad \ldots \quad — \quad (1)$$

மேலும், $\dfrac{AC}{CB} = \dfrac{T_2}{T_1}$

ஆனால் $AC : CB = 3 : 2$ (கொடுக்கப்பட்டுள்ளது)

$$\because \quad \frac{T_2}{T_1} = \frac{3}{2}$$

அல்லது, $\dfrac{T_2}{T_1 + T_2} = \dfrac{3}{2+3}$

அதாவது, $\dfrac{T_2}{W} = \dfrac{3}{5}$, (1) இலிருந்து

$$\because \quad T_2 = \frac{3}{5} W \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

(1) இலிருந்து, $T_1 = W - T_2 = W - \dfrac{3}{5} W = \dfrac{2}{5} W$ (3)

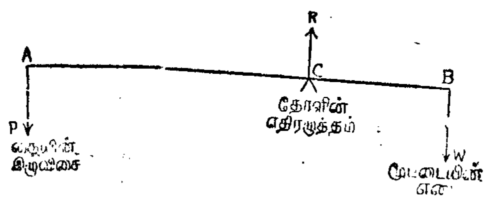
ஆகவே, $T_2 > T_8$ என்று காண்கிறோம்.

T_1, T_2 ஆகிய ஒவ்வொன்றின் மீப்பெரு அளவு 75 கிராம் ஆகையால், W இன் மீப்பெரு அளவு $T_2 = \dfrac{3}{5} W$ என்னும் தொடர்பில் $T_2 = 75$ கிராம் என்று பிரதியிட்டுப் பெறப்படுகிறது.

அதாவது, W இன் மீப்பெரு அளவு $= \frac{5}{3} T_2 = \frac{5}{3} \times 75 =$ 125 கிராம்.

மாதிரி 41 : ஒரு மனிதன் ஒரு குச்சியை அதன் ஒரு முனையில் கட்டப்பட்டுள்ள ஒரு மூட்டையுடன் தன் தோளின் மீது வைத்துச் சுமந்து செல்கிறான். குச்சியின் மேல் தாங்கிப் பிடித்துள்ள அவனது கைக்கும் தோளுக்குமிடையேயுள்ள தூரத்தை மாற்றுவதால் அவனது தோளின் மீதுள்ள அழுத்தம் எவ்வாறு மாறுமென்று காண்க.

தீர்வு



படம் 55

AB என்ற குச்சியின் முனை Bயில் W எடையுள்ள மூட்டை கட்டப்பட்டுள்ளது. இந்த மூட்டையின் எடையானது கீழ் நோக்கிச் செயல்படும். C என்பது தோளின் மீது குச்சி பொருந்துமிடம். A என்பது குச்சியையும் மூட்டையையும் சம நிலையில் வைத்திருக்கும் பொருட்டுக் கையால் குச்சியைப் பிடித்துக் கீழ்நோக்கி இழுக்குமிடம். இவ்வாறு கீழ்நோக்கி இழுக்கும் இழுவிசையை P என்க. P, W என்னும் இவ்விரு கீழ்நோக்கிய விசைகளின் விளைவை குச்சியின் மீது தோளின் மேல்நோக்கிய அழுத்தம் R ஈடு செய்யவேண்டும். ஆகவே, P, W ஆகிய கீழ்நோக்கிய இணைவிசைகளின் விளைவானது R க்கும் சமமாகவும் எதிராகவும் இருக்க வேண்டும். அதாவது P, W ஆகியவற்றின் விளைவு C யில் கீழ்நோக்கிச் செயல்பட வேண்டும்.

அல்லது, W, R ஆகிய இரு எதிரிணை விசைகளின் விளைவு A யில் செயல்படுவதாகவும் கொள்ளலாம்.

$$\because R \cdot CA = W \cdot AB$$

$$R = W \cdot \frac{AB}{CA}$$

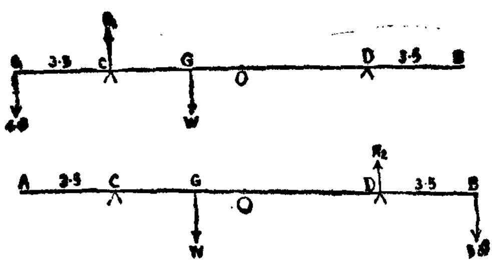
W, AB ஆகியவை கொடுக்கப்பட்டுள்ள அளவுகளாதலின் அவை மாறிலிகளாகும்.

$$\therefore R \propto \frac{1}{CA}$$

ஆகவே, தோளின் மீதுள்ள அழுத்தம் கைக்கும் தோளுக்கு மிடையேயுள்ள தூரத்தின் தலைகீழ் விகிதத்தில் மாறுபடும்.

மாதிரி 42: 16 செ. மீ. நீளமுள்ள ஒரு கோல் 9 செ. மீ. இடைவெளியிலமைந்துள்ள இருமுளைகளின் மேல் அதன் மையம் முளைகளுக்கு நடுவிலிருக்குமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது. கோல்சாயாதவாறு இருமுனைகளிலும் தொங்க விடக்கூடிய மீப்பெருப் பொருண்மைகள் முறையே 4 கிராம், 5 கிராம் ஆகும் கோலின் எடையையும், அதன் எடையானது கோலின் செயல் படுகின்ற புள்ளியையும் காண்க.

தீர்வு



படம் 56 (அ) (ஆ)

AB என்பது 16 செ.மீ. நீளமுள்ள கோல். O என்பது அதன் நடுப்புள்ளி.

$\therefore AO = OB = 8$ செ. மீ.

G என்பது கோலின் புவியீர்ப்புமையம் $\therefore$ கோலின் எடையாகிய W ஆனது C வழியே கீழ்நோக்கிச் செயல்படும்.

C D என்பன கோலைத் தாங்கி நிற்கும் முளைகள்.

$CD = 9$ செ. மீ.

$\therefore AC = DB = 8 - 4{\cdot}5 = 3{\cdot}5$ செ.மீ.

A யில் 4 கிராம் தொங்கவிடப்படும்போது கோல் சாயாமல் சமநிலையிலுள்ளது. எனவே, கீழ்நோக்கிய விசைகளாகிய 4 கிராம், W ஆகியவற்றின் விளைவை, Cயில் கோலின் மீதுள்ள முளையின் மேலழுத்தம் R, ஈடு செய்கிறது.

ஆகவே, 4 கி., W ஆகியவற்றின் விளைவு C-ல் செயல் படும்.

$$\therefore W.CG = 4 \cdot AC = 4 \times 3.5 = 14.$$

இதுபோல், B-ல் 5 கிராம் எடை தொங்கவிடப்படும் போது, W, 5 கிராம் ஆகிய கீழ்நோக்கிய விசைகளின் விளைவை Dயில் கோலின் மீது முனையின் எதிர்முத்தம் ஈடு செய்யுமாகை யால்,

$$W \cdot GD = 5.\ DB = 5 \times 3 \cdot 5 = 17.5.$$

$$\frac{W.CG}{W.GD} = \frac{14}{17.5}$$

$$\frac{CG}{GD} = \frac{28}{35} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{CG}{CG + GD} = \frac{4}{4+5}$$

$$\frac{CG}{CD} = \frac{4}{9}$$

$$CG = \frac{4}{9} \times CD$$

$$= \frac{4}{9} \times 9$$

$$= 4$$

$$\therefore W = \frac{14}{CG} = \frac{14}{4} = 3 \cdot 5$$

ஆகவே, கோலின் எடை = 3.5 கிராம்.
கோலின் எடை செயல்படும் புள்ளி முனை C-லிருந்து 4 செ.மீ. தூரத்திலுள்ளது.

மாதிரி 43 : $2l$ நீளமும் W எடையுமுள்ள ABC என்னும் ஒரு சீரான பலகையானது A, B என்ற தாங்கிகளின் மேல் ஒன்று பலகையின் ஒரு ஓரத்திலும், மற்றது A-லிருந்து a தூரத் திலிருக்குமாறும் ஒப்பு நிலையிலுள்ளது. ஒரு பையன் பலகை யின் மேல் A-லிருந்து C-க்கு நடந்து செல்கிறான். அவன் Cயை அடையும்போது பலகை சரியத் தொடங்குகிறது பையனின் எடையைக் காண்க.

தீர்வு

AC என்பது $2l$ நீளமுள்ள பலகை. A, B என்பன தாங்கிகள். $AB = a$. பலகை சீரானதாகையால், அதன் எடை W ஆனது AC யின் நடுப்புள்ளி G-ல் கீழ்நோக்கிச் செயல்படும்.

படம் 57

$$\therefore\ AG = GC = l.$$

$$GB = a - l;\ BC = 2l - a.$$

பையனின் எடை ω என்க. பையன் C-லிருக்கும் பலகை சரியுந்தருவாயிலிருப்பதால் W, ω ஆகிய கீழ்நோக்கிய விசைகளின் விளைவை B யில் பலகையின் மீது தாங்கியின் எதிரமுத்தம் ஈடுசெய்கிறது. ஆகவே, W, ω ஆகியவற்றின் விளைவு விசை B யில் செயல்படுகிறது.

$$\therefore\quad W.GB = \omega.\ BC$$

அல்லது, $\omega = \dfrac{W \cdot GB}{BC}$

$$= \left(\frac{a - l}{2l - a}\right) W$$

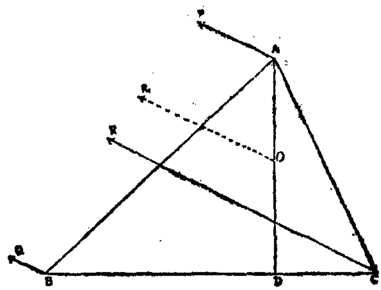
மாதிரி 44: P, Q, R, எனும் மூன்று ஒரு திசையிணை விசைகள் ABC என்ற முக்கோணத்தின் உச்சிகளில் செயல்படுகின்றன. அவற்றின் விளைவு விசை முக்கோணத்தின் செங்குத்துப் புள்ளி வழியே செயல்படின்,

$$P\ (b^2 + c^2 - a^2) = Q\ (c^2 + a^2 - b^2) = R\ (a^2 + b^2 - c^2)$$
என்று காட்டுக.

தீர்வு

P, Q, R, ஆகிய மூன்று விசைகளின் விளைவு விசை முக்கோணத்தின் செங்குத்துப் புள்ளியாகிய O-ல் செயல்படுவதாலும், P என்னும் விசை A-ல் செயல்படுவதாலும், Q, R ஆகியவற்றின் விளைவு விசை AO என்ற நேர்கோட்டிலுள்ள ஒரு புள்ளியின் வழியே செயல்படும். ஆனல், Q, R ஆகிய

வற்றின் விளைவு விசை BC யிலுள்ள ஒரு புள்ளி வழியே செயல்படும்.



படம் 58

ஆகவே, Q,R ஆகிய விசைகளின் விளைவு விசையானது AO-வும், BC யும் வெட்டும்புள்ளியான D வழியே செயல்படும்.

$\therefore Q.\ BD = R.DC.$

அல்லது, $$\frac{Q}{R} = \frac{DC}{BD}$$

$$= \frac{AC \cos C}{AB \cos B}$$

$$= \frac{2\ R \sin B.\ \cos C}{2R \sin C.\ \cos B}$$

$$= \frac{\sin B}{\cos B}.\ \frac{\cos C}{\sin C.}$$

$$= \frac{\tan B}{\tan C}$$

இதுபோல், $\frac{P}{Q} = \frac{\tan A}{\tan B}$ என்று காணலாம்.

$$\therefore \quad \frac{P}{\tan A} = \frac{Q}{\tan B} = \frac{R}{\tan C}$$

அதாவது, $$\frac{P}{\frac{\sin A}{\cos A}} = \frac{Q}{\frac{\sin B}{\cos B}} = \frac{R}{\frac{\sin C}{\cos C}}$$

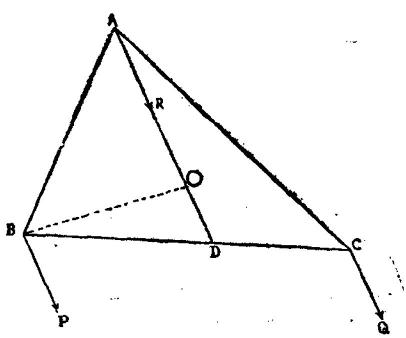
$$\frac{P\cos A}{\sin A}=\frac{Q\cos B}{\sin B}=\frac{R\cos C}{\sin C}$$

$$\frac{P\left(\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)}{a/2R}=\frac{Q\left(\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\right)}{b/2R}=\frac{R\left(\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)}{c/2R}$$

அதாவது, $P(b^2+c^2-a^2) = Q(c^2+a^2-b^2) = R(a^2+b^2-c^2)$

மாதிரி 45 : O என்பது $\triangle ABC$யின் சுற்றுவட்ட மையம். AO வழியாகச் செயல்படும் $\vec{R}$ என்னும் விசையை B, C வழியாக அதற்கு இணையாகச் செயல்படுகின்ற இரு விசைகளாகப் பிரிக்கவும்.

தீர்வு: B,C வழியே $\vec{R}$-க்கு இணையாகச் செயல்படும் $\vec{R}$-ன் கூறுகளை $\vec{P}, \vec{Q}$ என்க.



படம் 59

$\therefore\quad P + Q = R$

மேலும், AO என்பது BC ஐ D-ல் சந்திக்குமானால்,

$P.BD = Q \cdot DC$

அல்லது, $\dfrac{P}{Q} = \dfrac{DC}{BD}$

$$=\frac{\triangle AOC}{\triangle AOB}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}.\,OA.\,OC.\,\sin \angle AOC}{\frac{1}{2}.\,OA.\,OB.\,\sin \angle AOB}$$

$$= \frac{\sin 2B}{\sin 2C}$$

அதாவது, $$\frac{P}{\sin 2B} = \frac{B}{\sin 2C} = \frac{P+Q}{\sin 2B + \sin 2C}$$

$$= \frac{R}{\sin 2B + \sin 2C}$$

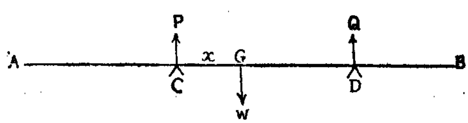
$$\therefore \quad = \frac{R \sin 2B}{\sin 2B + \sin 2C}$$

$$Q = \frac{R \sin 2C}{\sin 2B + \sin 2C}$$

மாதிரி 46: $2l$ நீளமும் W எடையுமுள்ள ஒரு சீரான கோல் d இடைவெளியில் ஒரே மட்டத்திலமைந்துள்ள இரு முளைகளின் மேல் குறுக்காக வைக்கப்பட்டுள்ளது. T ஐ விட அதிகமான அழுத்தத்தை எந்த முளையும் தாங்காதெனில் எந்த முளையிலும் வெளியே நீட்டிக் கொண்டிருக்கும் கோலின் பாகத்தின் நீளம் $l - \frac{d\,(W-T)}{W}$ ஐவிட அதிகமாக இருக்க முடியாதென்று காட்டுக.

தீர்வு:

AB என்பது $2l$ நீளமுள்ள கோல். C, D என்பன ஒரே மட்டத்திலுள்ள இரு முளைகள். $AB = 2l$; $CD = d$. கோலின் எடையாகிய W அதன் நடுப்புள்ளி G வழியே நிலைக்குத்தாகக் கீழ்நோக்கிச் செயல்படும்.



படம் 60

$$\therefore AG = GB = l$$

C, D ஆகிய முளைகளின்மீது கோலின் எதிரழுத்தங்கள் P, Q என்பன மேல் நோக்கிச் செயல்படும். கோல் சமநிலையிலிருப்பதால்,

$P + Q = W \quad \therefore Q = W - P$
$CG = x$ என்க. $\therefore GD = d - x$

P, Q ஆகிய ஒரு திசையிணை விசைகளின் விளைவு G-ல் செயல்படும்.

$$\therefore P.CG = Q.GD.$$
$$P.x = G.(d-x)$$
$$= (W-P)(d-x)$$
$$= Wd - Wx - Pd + Px$$
$$\therefore Wx = d(W-P)$$
$$x = \frac{d(W-P)}{W}$$

P-ன் மதிப்பு உச்சமாகயிருக்கும்போது x-ன் மதிப்பு மீச்சிறிதாகயிருக்கும். ஆனல், x மீச்சிறிதாகயிருக்கும்போது C-க்கு வெளியே நீட்டிக் கொண்டிருக்கும் பாகத்தின் நீளம் மீப்பெரிதாகயிருக்கும்.

இப்பொழுது, C-க்கு வெளியே நீட்டிக் கொண்டிருக்கும் பாகத்தின் நீளம்

$$= AC$$
$$= AG - CG$$
$$= l - x$$
$$= l - \frac{d(W-P)}{W}$$

P-ன் உச்ச மதிப்பு T ஆக இருக்கும்போது இவ் வெளி நீட்சியின் அதிகபட்ச நீளம் $= l - \dfrac{d(W-T)}{W}$ ஆகும்.

பயிற்சி 6

(1) A, B என்னும் புள்ளிகளில் செயல்படும் $\vec{P}, \vec{Q}$ என்னும் ஒரு திசையிணை விசைகளின் விளைவு விசையாகிய $\vec{R}$-ன் அளவு, செயல்படும் புள்ளி C ஆகியவற்றைப் பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து கணக்கிடுக.

(i) $P = 15, Q = 6, AB = 14$
(ii) $P = 12, Q = 8, AB = 20$
(iii) $P = 9, Q = 21, AB = 30$

(2) A, B என்னும் புள்ளிகளில் செயல்படும் $\vec{P}, \vec{Q}$ என்னும் இரு எதிரிணை விசைகளின் விளைவு விசை $\vec{R}$-ன் அளவு, செயல்படும் புள்ளி C ஆகியவற்றைப் பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து காண்க.

(i) $P = 23,\ Q = 69,\ AB = 8$

(ii) $P = 48,\ Q = 18,\ AB = 20$

(iii) $P = 25,\ Q = 22,\ AB = 13$

(3) 10 மீட்டர் நீளமுள்ள ஒரு உத்திரத்தின் இரு முனைகளிலும் இரு ஒரு திசையிணை விசைகள் செயல்படுகின்றன. அவற்றின் விளைவு விசை 25 கி.கி. எடையுள்ளதாயும் உத்திரத்தை 2 : 3 என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளியில் செயல்படுவதாயுமிருந்தால் அவ் விணை விசைகளின் அளவுகளைக் காண்க.

(4) 6 மீட்டர் இடைவெளியில் செயல்படுகின்ற இரு எதிரிணை விசைகள் அவற்றுள் பெரியவிசையிலிருந்து 1 மீட்டர் தூரத்தில் செயல்படும் 96 கி.கி. எடையுள்ள ஓர் இணைவிசைக்கு சமமாயின் அவ்விசைகளின் அளவுகளைக் காண்க.

(5) AB என்னும் ஒரு சீரான கோல் 30 செ.மீ. இடைவெளியிலுள்ள C, D என்னும் இரு தாங்கிகளின் மேல் $AC = 10$ செ.மீ. தூரம் இருக்குமாறு கிடையாக ஒய்வு நிலையிலுள்ளது. C, O ஆகிய தாங்கிகளின் மீதுள்ள அமுத்தங்கள் 1 : 2 என்னும் விகிதத்திலிருப்பின் கோலின் நீளத்தைக் காண்க.

(6) 5 மீட்டர் நீளமுள்ள ஓர் உத்திரம் அதன் ஓரங்கள் இரு முனைகளின் மேல் வைக்கப்பட்டு ஒய்வு நிலையிலுள்ளது. அதன் எடையாகிய 10 கி.கி. அதன் ஒரு முனையிலிருந்து 2 மீட்டர் தூரத்தில் செயல்பட்டால், ஒவ்வொரு முனையின் மீதுமுள்ள அமுத்தத்தைக் காண்க.

(7) 24 மீட்டர் நீளமும், 200கி.கி. எடையுமுள்ள ஒரு உத்திரம் இரு தாங்கிகளின் மேல் வைக்கப்பட்டுள்ளது. அவற்றுள் ஒரு தாங்கி உத்திரத்தின் ஒரு முனையிலிருந்து 5 மீட்டர் தூரத்திலும், மற்றது அடுத்த முனையிலிருந்து 9 மீட்டர் தூரத்திலும் இருந்தால்,

(அ) இரு தாங்கிகளிலும் அழுத்தங்கள் சமமாக யிருக்க 150 கி. கி. எடையொன்று உத்திரத்தின்மேல் எங்கு வைக்கப்படவேண்டும் ?

(ஆ) உத்திரத்தைச் சாய்த்து விடாமல் இரண்டாவது தாங்கியிலிருந்து எவ்வளவு தூரத்தில் 150 கி.கி. எடையை வைக் கலாம் ?

(8) 8 மீட்டர் நீளமும் 48 கி.கி. எடையுமுள்ள ஒரு உத்திரம் அதன் ஒரு முனையிலிருந்து 2 மீட்டர், 5 மீட்டர் தூரங் களில் இருமுனைகளின் மேல் வைக்கப்பட்டுள்ளது. அம் முனை களின் மீதுள்ள அழுத்தங்கள் சம அளவிலிருக்க வேண்டு மாயின் 24 கி.கி. எடையுள்ள ஒரு பொருளை உத்திரத்தின்மேல் எங்கு வைக்கவேண்டும்?

(9) ஒரு மனிதன் தன் தோளின் மீது வைக்கப்பட்டுள்ள 3·5 மீட்டர் நீளமுள்ள ஒரு குச்சியின் ஒரு முனையைத் தன் கை களால் பிடித்துக்கொண்டு அதன் மறுமுனையில் கட்டித் தொங்க விடப்பட்டுள்ள 25 கி.கி. எடையைச் சுமந்து செல்கிறான். குச்சி யின் எடையைப் புறக்கணித்துவிட்டு, அவன் தோளுக்கு முன்னுலுள்ள குச்சியின் பாகம் 75 செ.மீ. நீளமாகயிருக்கும் போது அவன் தோளின் மீதுள்ள அழுத்தத்தைக் காண்க.

(10) 10 மீட்டர் நீளமும், 50 கி. கி. எடையுமுள்ள *AB* என் னும் ஒரு பலகை *C*-ல் ஒரு முனையின் மேலும், *B*-லிருந்து 2 மீட். தூரத்தில் மற்றொரு முனையின் மேலும் வைக்கப்பட்டு ஓய்வு நிலையிலுள்ளது. *A*-லிருந்து 2 மீட்டர் தூரத்தில் பலகை யின் மேல் 70 கி.கி. எடையுள்ள ஒரு மனிதன் நின்றால் முனை களின் மீதுள்ள அழுத்தங்களைக் காண்க.

(11) 20 அடி நீளமும் 180 ராத்தல் எடையுமுள்ள ஒரு *சீரான* பலகை 10 அடி இடைவெளியிலுள்ள இரு முனைகளின் மேல் *சீராக* வைக்கப்பட்டுள்ளது. ஒரு மனிதன் பலகையின் மத்தியிலிருந்து புறப்பட்டு ஒரு முனையை நோக்கி நடந்து செல்கிறான். அவன் பலகையின் முனையை அடையும்போது பலகை கவிழத் தொடங்குகிறது. மனிதனின் எடையைக் காண்க.

(12) 4 மீட்டர் நீளமுள்ள ஒரு கனமான கோல் 1 மீட்டர் இடைவெளியிலுள்ள இரு முனைகளின் மேல் கிடையாக வைக் கப்பட்டுள்ளது. ஒரு முனையில் தொங்கவிடப்படும் 10 கி.கி

எடை அல்லது மறுமுனையில் தொங்கவிடப்படும் 4 கி. கி.எடை அக் கோலை மெதுவாக மேல் நோக்கித் தூக்கச் செய்கிறது. கோலின் எடையையும், அதன் மையத்திலிருந்து முனைகளின் தூரங்களையும் காண்க.

(13) $\vec{P}, \vec{Q}$ என்பன இரு திசையிணை விசைகள். இவற்றுடன் இவற்றின் தளத்தில் b இடைவெளியிலமைந்த இரு இணைகோடுகளில் S அளவுடைய இரு எதிரிணை விசைகள் செயல்படுத்தப்பட்டால் புதிய விளைவு விசை முந்திய விளைவு விசையிலிருந்து $\frac{bS}{P+Q}$ தூரத்தில் செயல்படுமென்று காட்டு.

(14) $\vec{P}, \vec{Q}$ என்பன இரு எதிரிணை விசைகள் $\vec{P}$ ஐ 2 $\vec{P}$ ஆக மாற்றினுல் $\vec{Q}$ வின் செயற் கோடு முந்திய விளைவுக் கோட்டிற்கும் புதிய விளைவுக் கோட்டிற்கும் மத்தியிலமைகிறது. $P : Q = 3 : 4$ என்று காட்டுக.

(15) $\vec{P}, \vec{Q}$ என்பன இரு எதிரிணை விசைகள். $\vec{P}$ ஐ இரட்டிப்பின் $\vec{Q}$ வின் செயற்கோடு $\vec{P}$-க்கும் புதிய விளைவு விசைக்கும் மத்தியிலிருப்பதாகக் காணப்படுகிறது. $P : Q$ என்ற விகிதத்தைக் காண்க.

(16) W என்னும் எடையும் $2a$ என்னும் நீளமுமுள்ள ஒரு சீரான கம்பி அதன் முனைகளில் கட்டப்பட்டுள்ள இரு கயிறுகளால் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. P என்னும் எடை அக் கம்பியின் மத்தியிலிருந்து b தூரத்தில் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. கயிறுகளிரண்டும் இணையாகயிருப்பின் அவற்றின் இழு விசைகளைக் காண்க.

(17) 16 அடி நீளமும் 196 ராத்தல் எடையுமுள்ள ஒரு சீரான பலகையின் ஓர் ஓரத்தில் 28 ராத்தல் பொருண்மையொன்று வைக்கப்பட்டுள்ளது. அப் பலகை 18 அங்குல அகலமுள்ள சுவரின் மேல் குறுக்காக வைக்கப்பட்டுள்ளது. பலகையின் எடையில்லாத முனை பலகை கவிழாதவாறு $7\frac{1}{2}$ அடி முதல் 9 அடி வரை வெளியே நீட்டிக் கொண்டிருக்க முடியுமென்று காட்டு.

(18) ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின் A, B என்ற புள்ளிகளில் செயல்படும் $\vec{P}, \vec{Q}$ என்னும் இரு எதிரிணை விசைகள் $(P > Q)$ ஒன்றுக்கொன்று மாற்றப்படுமேயானுல் AB-ல் அவற்றின் விளைவு விசையின் இடுபுள்ளி $\frac{P+Q}{P-Q} AB$ என்னும் தூரத்திற்கு இடப் பெயர்ச்சி பெறுமென்று காட்டுக.

19. $\vec{P}, \vec{Q}$ என்னுமிரு ஒரு திசை இணைவிசைகள் ஒரு பொருளின் இரு புள்ளிகளில் செயல்படுகின்றன. $\vec{Q}$ ஐ $\frac{\vec{P}}{\vec{Q}}$ என்று மாற்றுவதால் ஏற்படும் விளைவு விசையும், $\vec{P}, \vec{Q}$ விசைகளை மாற்றுவதால் மட்டுமே ஏற்படும் விளைவு விசையும் ஒன்றுதான் என்று காட்டுக.

(20) $\vec{P}, \vec{Q}$ என்னும் இரு ஒரு திசையிணை விசைகளின் விளைவு விசை O வழியாகச் செல்லுகிறது. P, Q ஆகியவை முறையே R, S ஆல் அதிகரிக்கப்பட்ட பின்பும் விளைவு விசை O வழியே தான் செல்லுகிறது. மேலும், P, Q என்பன முறையே Q, R ஆக மாற்றப்பட்டாலும் விளைவு விசை O வழியேதான் செல்லுகிறது. $Q^2 = PR$ என்றும், $S = R - \frac{(Q-R)^2}{P-Q}$ என்றும் காட்டுக.

(21) $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$ என்னும் மூன்று ஒரு திசையிணை விசைகள் $\triangle ABC$-யின் முனைகளில் செயல்படுகின்றன. அவற்றின் விளைவு விசை $\triangle ABC$-யின்

(அ) திணிவு மையத்தின் வழியே செல்லுமானுல் $P = Q = R$ என நிறுவுக.

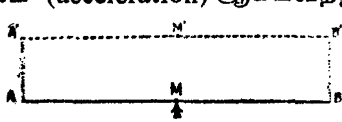
(ஆ) உள்வட்ட மையத்தின் வழியே செல்லுமானுல் $\frac{P}{a} = \frac{Q}{b} = \frac{R}{c}$ என நிறுவுக.

(இ) சுற்று வட்டமையத்தின் வழியே செல்லுமானுல் $\frac{P}{\sin 2A} = \frac{Q}{\sin 2B} = \frac{R}{\sin 2C}$ என்று நிறுக.

(22) $\triangle ABC$-ன் தளத்தில் O என்பது செங்குத்து மையம். AO வழியே செயல்படும் $\vec{R}$ என்னும் விசையை B, C வழியே அதற்கு இணையாகச் செயல்படும் இரு விசைகளாகப் பிரிக்கவும்.

3. திருப்பு திறன்
(MOMENT)

ஒரு துகளின்மீது ஒரு விசை செயல்படுமானல் அத்துகளானது அவ்விசையின் செயற்கோட்டின் வழியாகச் சிறிது தூரம் நகரும். இதுபோல் பல விசைகள் ஒரு துகளின்மீது செயல்படுமானல் அவ்விசைகளின் விளைவு விசையின் செயற்கோட்டின் வழியாக அத்துகள் நகரக்கூடும். அதாவது, ஒன்று அல்லது பல விசைகள் ஒரு துகளின் மீது செயல்படுவதன் விளைவாக விளைவு விசையின் செயற்கோட்டின் மேல் அத்துகள் இடம் பெயருகிற தென்றறிகிறோம். ஆகவே, ஒன்று அல்லது பல விசைகள் ஒரு துகளின்மீது செயல்படுவதால் அத்துகளில் ஏற்படும் இயக்கம் வெறும் 'இடப் பெயர்ச்சி' (translation) யேயாகும். மாருக, ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின்மீது ஒரு விசை செயல்படும்போது அப்பொருளில் இடப்பெயர்ச்சி மட்டுமோ அல்லது ஒரு சுழற்சியும் சேர்ந்தோ ஏற்படலாம்; அல்லது வெறும் சுழற்சி மட்டுமே ஏற்படலாம். ஒரு விசையானது ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின் மீது செயல்படும்போது இடப் பெயர்ச்சி மட்டுமே ஏற்படுமாயின், அப் பொருளின் 'பொருண்மை' (mass), அப்பொருளின் இயக்கத்தில் காணப் படுகின்ற 'முடுக்கம்' (acceleration) ஆகியவற்றின் பெருக்கத்தி



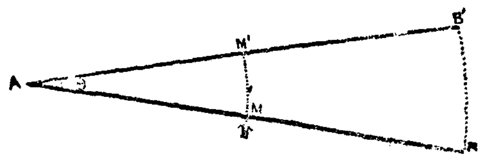
படம் 61.

லிருந்து அவ்விசை அளவிடப்படுகிறது. ஆனல் இடப்பெயர்ச்சி யுடன் சுழற்சியும் சேர்ந்து ஏற்படுமாயின் விசையினை அள விடும் முறை மிகவும் சிக்கல் நிறைந்தாகி விடுகிறது. இவ்வாறு ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளில் இடப்பெயர்ச்சியும் (translation) சுழற்சியும் (rotation) சேர்ந்து ஏற்படுமாயின் விசையினை அள

விடப் பயன்படும் 'திறப்பு திறன்' அல்லது 'சுழல் திறன்' (moment) என்பதுபற்றி இங்கு ஆராய்வோம்.

ஒரு மேசையின் மேல் வைக்கப்பட்டுள்ள *AB* என்னும் குச்சியின் நடுப்புள்ளியில் அக் குச்சிக்குச்செங்குத்துத் திசையில் விரல் நுனியால் தள்ளுவோமானால் அக் குச்சி சிறிது நகர்ந்து முன்னிருந்த நிலைக்கு இணையான நிலையை அடைவதைக் காணலாம். அக் குச்சியிலடங்கியுள்ள துகள்கள் யாவும் விரலின் தள்ளு விசையின் காரணமாக அதன் செயற்கோட்டிற்கு இணையாக நகர்ந்திருப்பதோடு, அவற்றின் இடப்பெயர்ச்சிகளும் சம அளவிலிருக்குமாறு நகர்ந்துள்ளன. இவ்வாறு, விரலின் தள்ளு விசையினால் அக் குச்சியிலேற்பட்டுள்ள இயக்கம் வெறும் 'இடப்பெயர்ச்சியே' யாகும்.

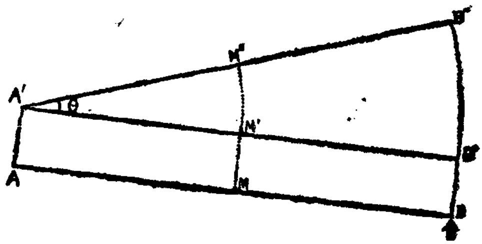
இப்பொழுது அக் குச்சியின் ஒரு முனையாகிய *A* நிலையாக இருக்குமாறு ஒரு விரலால் அழுத்திக்கொண்டு மற்றொரு விரலால் குச்சியின் மத்தியில் முன்போல் தள்ளுவோமானால் குச்சியானது கீழே படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளதுபோல் *A* யை மையமாகக் கொண்டு சற்று சுழன்றிருப்பதைக் காணலாம். இங்கு, குச்சியிலுள்ள ஒவ்வொரு துகளும் *A*யை மையமாகவும், *A*-லிருந்து அதன் தூரத்தை ஆரையாகவும் கொண்ட வட்ட வில்லின் பாதையில் சுழன்றிருப்பதைக் காணலாம். கட்டிறுக்கப் பொருள்களின்மீது செயல்படும் விசைகளினால் ஏற்படும் இத்தகைய இயக்கத்திற்குச் 'சுழற்சி' (Rotation) என்று பெயர். இடப் பெயர்ச்சி, சுழற்சி எதுவுமின்றி நிலையாகயிருக்கும் முனை *A* யானது 'சுழற்சி மையம்' (centre of rotation) என்று அழைக்கப்படுகிறது. $\angle BAB' = \theta$ என்பது சுழற்சிக் கோணம் (angle of rotation) எனப்படும்.



படம் 62

இப்பொழுது குச்சியின் முனை *A*-ல் அழுத்தியிருந்த விரலை எடுத்துவிட்டு முனை *B*-ல் ஒரு விரலால் தள்ளுவோமானால் முனை *A* சிறிது தூரம் இடப்பெயர்ச்சியடைந்தும், முனை

B யானது முனை A யைவிட அதிக அளவில் இடப்பெயர்ச்சி யடைந்துமிருப்பதைக் காணலாம்.



படம் 63

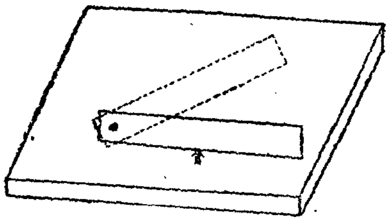
ஆகவே, குச்சியானது முன்னிருந்த நிலைக்கு இணையான நிலையிலில்லாமல் சற்றுத் திரும்பிய நிலையிலிருப்பதைக் காணலாம். இவ்வாறு அக்குச்சி அடைந்துள்ள சற்று திரும்பிய நிலையானது இரு வகை இயக்கங்களின் விளைவாக ஏற்பட்டுள்ளதாகக் கூறலாம். முதலாவதாக, அக் குச்சியில் ஏற்பட்ட இடப் பெயர்ச்சி இயக்கத்தின் விளைவாகக் குச்சியானது முந்திய நிலைக்கு இணையான AB' என்னும் நிலைக்கு இடம் பெயர்ந்து, பின்னர் குச்சியிலேற்பட்ட சுழற்சி இயக்கத்தின் விளைவாக A' ஐ மையமாகக் கொண்டு $A'B''$ என்னும் நிலைக்குச் சுழற்சி யடைந்திருப்பதாகக் கூறலாம்.

ஆகவே, கட்டிறுக்கப் பொருள்களின்மீது செயல்படும் விசைகளின் விளைவாக அப்பொருள்களில் இடப்பெயர்ச்சியோ அல்லது சுழற்சியோ அல்லது இடப்பெயர்ச்சியும் சுழற்சியும் ஒருங்கிணைந்த இயக்கமோ ஏற்படலா மென்றறிகிறோம்.

ஒரு நீளமான தகட்டை ஒரு சமதள மரப்பலகையின் மேல் வைத்து அத் தகட்டின் ஓர் ஓரத்திலுள்ள ஒரு சிறு துவாரத்தின் வழியாக ஒரு சிறு ஆணியால் பலகையிலடித்து. அத் தகடானது அந்த ஆணியை அச்சாகக் கொண்டு பலகையின்மீது தாராள மாகச் சுழலத்தக்கவாறு அமைத்துக் கொள்க.

இப்பொழுது தகட்டின் ஓர் ஓரத்தில் ஒரு விரலின் நுனியால் இலேசாக அழுத்தினால் தகடு அச் சிறு ஆணியை அச்சாகக் கொண்டு இலேசாகச் சுழல்வதைக் காணலாம். விரலின் அழுத்தத்தை அதிகரிக்க, தகடு வேகமாகச் சுழல்வதைக் காண லாம். ஆகவே, தகட்டின் சுழற்சி வேகம் விரலின் அழுத்த

விசையின் அளவைச் சார்ந்துள்ளதென்று தெரிகிறது. இப்பொழுது தகட்டின் விளிம்பின் இடைப்பகுதியில் விரலால் அழுத்துவதற்குப் பதிலாக, நுனியில் அழுத்தினுல் தகடு மிகவும் வேகமாகச் சுழல்வதைக் காணலாம். அதாவது, விரலின் நுனியால் அழுத்துமிடம் சுழற்சி மையத்திலிருந்து தூரமாக விலகிச்



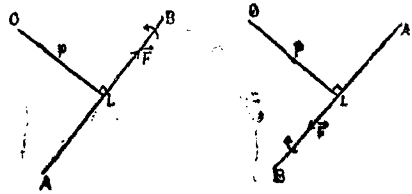
படம் 64

செல்லச் செல்ல, தகட்டின் சுழற்சி வேகம் அதிகரிப்பதைக் காணலாம். எனவே, தகட்டின் சுழற்சி வேகம் சுழற்சியமைத்திலிருந்து விரலின் அழுத்த விசை செயல்படும் இருபுள்ளியின் தூரத்தையும் சார்ந்துள்ளதென்று தெரிகிறது. ஆகவே, ஒரு நிலையான புள்ளியை மையமாகக் கொண்டு சுழலக்கூடிய ஒரு தகட்டின்மீது செயல்படும் விசையின் 'சுழலச் செய்யும் இயல்பு' அவ்விசையின் அளவையும், அந்நிலையான புள்ளியிலிருந்து அவ்விசையின் செயற்கோட்டிற்குள்ள தூரத்தையும் நேர்விகிதத்தில் சார்ந்திருக்குமென்றறிகிறோம். இவ்வாறு, ஒரு நிலையான புள்ளியை மையமாகக் கொண்டு சுழலக்கூடிய ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின் மீது செயல்படும் ஒரு விசையானது அப் பொருளில் ஒரு சுழற்சி இயக்கத்தை உண்டுபண்ணும் இயல்புடையதாகயிருக்கின்றது. இத்தகைய சுழற்சியியக்கத்தை உண்டுபண்ணும் ஒரு விசையின் இயல்பை அளவிடுகின்ற பௌதிகக் கணியத்திற்கு 'சுழல் திறன்' அல்லது 'திருப்பு திறன்' (Moment) என்று பெயர்.

விசையின் திருப்புதிறன் (Moment of a Force)

ஒரு பொருளின்மீது செயல்படுகின்ற ஒரு விசையானது அப்பொருளை ஒரு நிலையான புள்ளியைச் சுழற்சி மையமாகக் கொண்டு சுழலச் செய்யுமாயின், அந்நிலையான புள்ளிபற்றி அவ்விசையின் திருப்புதிறன் என்பது அவ்விசையின் அளவு, அதன் செயற்கோட்டிலிருந்து அப்புள்ளியின் தூரம் ஆகியவற்றின் பெருக்கம் என்று வரையறுக்கப்படுகிறது.

F என்பது AB யைச் செயற்கோடாகக் கொண்ட $\vec{F}$ என்னும் விசையின் அளவு என்றும், O என்பது ஒரு நிலையான புள்ளியென்றும் கொள்க.



(அ) படம் 65 (ஆ)

$OL \perp LB$ வரைக. $OL = p$ எனில் O என்னும் புள்ளி பற்றி விசை $\vec{F}$ இன் திருப்பு திறன் $= F \cdot OL = F.p$ ஆகும்.

ஒரு நிலையான புள்ளியை மையமாகக் கொண்டு சுழலக் கூடிய ஒரு பொருளின் மீது செயல்படும் விசையானது அப் பொருளை இடஞ்சுழியாகத் திருப்பும் இயல்புடையதாயின் அப் புள்ளி பற்றி அவ்விசையின் திருப்புத் திறன் நேரெண்ணளவு டையதாகவும், வலஞ்சுழியாகத் திருப்பும் இயல்புடையதாயின் அப்புள்ளி பற்றி அவ்விசையின் திருப்புத் திறன் எதிரெண்ண ளவுடையதாகவும் கணக்கிடப்படும். படம் 65 (அ)-ல் O பற்றி $\vec{F}$-ன் திருப்பு திறன் $+Fp$ என்றும் படம் 65 (ஆ)-ல் O பற்றி $\vec{F}$-ன் திருப்பு திறன் $-Fp$ என்றும் காணலாம்.

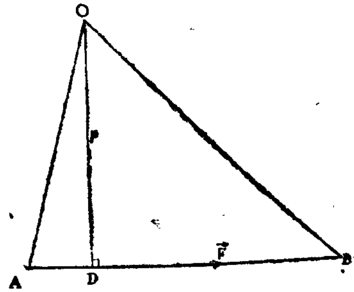
வடிவியல் முறையில் ஒரு புள்ளிபற்றி ஒரு விசையின் திருப்பு திறன் காணல்

$\vec{F}$ என்னும் விசை $\vec{AB}$ என்னும் நேர்கோட்டுத் துண்டத்தினால் அளவிலும் திசையிலும் குறிப்பிடப்படுவதாகக் கொள்க.

$\therefore AB = F$. O என்பது $\vec{F}$-ன் தளத்திலுள்ள ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளி. இப் புள்ளி பற்றி $\vec{F}$-ன் திருப்பு திறன் காண வேண்டும்.

OA, OB ஆகியவற்றைச் சேர்க்கவும். $OD \perp AB$ வரைக. $OD = p$ என்க.

$$O \text{ பற்றி } \vec{F}\text{-ன் திருப்பு திறன் } = F \cdot p$$
$$= AB.OD$$
$$= 2\,(\triangle ABC\text{-ன் பரப்பு})$$
$$= \triangle\, ABC\text{-ன் பரப்பின் இரு மடங்கு.}$$



படம் 166

குறிப்பு : O என்னும் புள்ளிபற்றி $\vec{F}$ என்னும் விசையின் திருப்புதிறன் பூச்சியமானல், $F = O$, அல்லது $P = O$ ஆகும்.

$\vec{F}O$ எனில், F-லிருந்து O-வின் செங்குத்துத்தூரம் பூச்சியமாகும். அதாவது ஒரு விசையின் செயற்கோட்டின் மேலுள்ள ஒரு புள்ளி பற்றி அவ் விசையின் திருப்புதிறன் பூச்சியமாகும். மறுதலையாக, ஒரு புள்ளி பற்றி ஒரு விசையின் திருப்புதிறன் பூச்சியமாகுமெனில், அவ் விசையானது அப் புள்ளி வழியே செல்லுமென்றறிக.

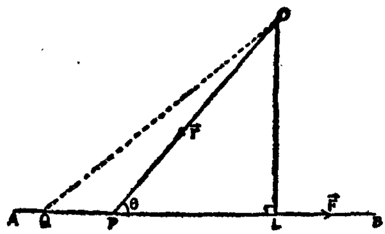
திருப்பு திறனின் அலகுகள் (Units of Moments)

ஒரு புள்ளி பற்றி விசையின் திருப்பு திறன் என்பது அவ் விசையின் அளவு, அதன் செயற்கோட்டிலிருந்து அப் புள்ளியின் தூரம் ஆகியவற்றின் பெருக்கமாகுமென்று கண்டோம். ஈர்ப்பலகு முறையில் விசைகள் கிராம் எடை, ராத்தல் எடை என்ற அலகுகளால் அளவிடப்படுவதாலும், தூரங்கள் முறையே சென்டிமீட்டர், அடி என்ற அலகுகளால் அளவிடப் படுவதாலும் இம்முறையில் திருப்பு திறன்கள் முறையே சென்டிமீட்டர் கிராம் எடை (செ. கி. வி. அலகு), அடி ராத்தல் எடை (அ.ரா.வி. அலகு) என்னும் அலகுகளால் அளவிடப் படுகின்றன. தனியலகு முறையில் விசைகள் டைன், ராத்தல் என்னும் அலகுகளால் அளவிடப்படுவதால் இம்முறையில் திருப்புதிறன்கள் முறையே டைன் சென்டி மீட்டர், அடி ராத்தல் என்னும் அலகுகளால் அளவிடப்படுகின்றன.

மேலும் 1 ஈர்ப்பலகு = g தனியலகுகள் ஆகையால்,

1 செ. மீ. கிராம் எடை = g டைன் செ.மீ, என்றும்,

1 அடி ராத்தல் எடை = g அடி ராத்தலிகள் என்றும் அறிந்து கொள்க.



படம் 67

ஒரு புள்ளி பற்றி ஒருவிசையின் திசையித் திருப்புத்திறன்
(Vector moment of a force about a point)

$\vec{F}$ என்பது AB என்னும் நேர்கோட்டைச் செயற்கோடாகக் கொண்ட ஒரு விசை. O என்பது ABயின் மேலில்லாத ஒரு நிலையான புள்ளி. O பற்றி $\vec{F}$ இன் திசையித் திருப்புத் திறன் காணவேண்டும். $\vec{F}$ இன் அளவு F ஆகும்.

இதை $|\vec{F}|$ (எண்ணளவு F:—Modulus $\vec{F}$) என்று குறிப்பிடலாம்.

$OL \perp AB$ வரைக.

$\therefore$ O பற்றி $\vec{F}$-யின் திருப்புத்திறன் $= F.OL$ ஆகும்.

இப்பொழுது, AB-யில் P என்னும் ஏதாவதொரு புள்ளியைக் குறித்துக் கொள்க. Pயின் திசையிநிலை $\vec{r}$ என்க. அதாவது, $\vec{OP} = \vec{r}$; அல்லது, $OP = r$.

$\therefore$ O பற்றி $\vec{F}$ இன் திருப்பத்திறன் $= F \cdot OL$
$= F \cdot OP \sin\theta$, ($\angle OPL = \theta$ என்று கொள்க)
$= F\, r \sin\theta$

$\vec{n}$ என்பது O வழியே $\vec{r}$; $\vec{F}$ ஆகிய திசையிக்களின் தளத்திற்குச் செங்குத்தான ஒரு அலகு திசையியெனில்,

$$\vec{r} \times \vec{F} = r.F. \sin \theta \cdot \vec{n}$$

என்று நாமறிவோம்.

மேலும், படத்தில் $\vec{r}$ இலிருந்து $\vec{F}$ ஆனது இடஞ்சுழியாக அமைந்திருப்பதால்,

$$\vec{r} \times \vec{F} = F.\, r \sin \theta \cdot \vec{n}$$

என்றும், $$\vec{F} \times \vec{r} = -\, F.r \sin \theta \cdot \vec{n}$$

என்றும் அறிவோம்.

எனினும், $|\vec{r} \times \vec{F}| = F \cdot r \sin \theta.$

ஆகவே, O பற்றி $\vec{F}$ இன் திருப்புத்திறனின் அளவு $= |\vec{r} \times \vec{F}|$ ஆகும். இத்திருப்புத்திறன் அளவும் திசையும் கொண்டதா யிருப்பதால் இது ஒரு திசையியாகும். பொதுவாக, ஒரு புள்ளி பற்றி ஒரு விசையின் திசையித்திருப்புத் திறன் $\vec{M}$ என்னும் திசையியினால் குறிப்பிடப்படுகிறது.

ஆகவே, $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ என்னும் திசையியினால் குறிப்பிடப் படுகிறது.

ஆகவே, $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ என்பது O பற்றி $\vec{F}$ இன் திசையித் திருப்புத் திறனாகும். $\vec{r}$ இலிருந்து $\vec{F}$ இடஞ்சுழியாக அமைந் திருப்பின் திருப்பத் திறனானது நேரெண்ணளவையுடையதாக வும், வலஞ்சுழியாக அமைந்திருப்பின் எதிரெண்ணளவை யுடையதாகவும் கொள்ளப்படுகிறது.

குறிப்பு: O பற்றி $\vec{F}$ இன் திருப்புத்திறன் $\vec{F}$ இன் செயற் கோட்டின் மேலுள்ள P என்னும் புள்ளியின் நிலையைச் சார்ந்த தல்ல.

எவ்வாறெனில், $\vec{F}$ இன் செயற்கோட்டில் Q என்னும் மற்றொரு புள்ளியை எடுத்துக்கொள்க. Q-வின் திசையி நிலையை $\vec{q}$ என்க.

இப்பொழுது, $\vec{M'} = \vec{q} \times \vec{F}$ என்க.

ஆனல், $\vec{q} = \vec{OQ}$

$$= \vec{OP} + \vec{PQ}$$

$$= \vec{r} + \vec{PQ}$$

$$\vec{M'} = (\vec{r} + \vec{PQ}) \times \vec{F}$$

$$= \vec{r} \times \vec{F} + \vec{PQ} \times \vec{F}$$

ஆனல் $\vec{PQ}$ம், $\vec{F}$ம் ஒரே நேர்கோட்டிலமைந்திருப்பதால்

$$\vec{PQ} \times \vec{F} = O.$$

$$\therefore \vec{M^1} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}.$$

மாதிரி : 47 i + 2j − k என்னும் புள்ளி பற்றி 2i − j + 3k என்னும் புள்ளி வழியே செயல்படும் 3i + k என்னும் திசையியினுல் குறிப்பிடப்படுகின்ற விசையின் திருப்புத் திறன் காண்க

தீர்வு: இங்கு $\vec{F} = 3\mathbf{i} + \mathbf{k}$

$$O = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k},$$

$$P = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}.$$

$$\therefore \vec{r} = \vec{OP} = (2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}) - (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k})$$

$$= \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

$$\therefore \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$= (\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) \times (3\mathbf{i} + \mathbf{k})$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -3i + 11j + 9k$$

திருப்புத்திறனின் அளவு = $|\vec{M}|$

$$= |-3i + 11j + 9k|$$
$$= \sqrt{9 + 121 + 81}$$
$$= \sqrt{211}$$

மாதிரி 48 $\vec{F} = 3i + 2j - 4k$ என்னும் விசை (1, −1, 2) என்னும் புள்ளியில் செயல்படுகிறது. (2, −1, 3) என்னும் புள்ளிபற்றி $\vec{F}$ இன் திருப்புத்திறன் காண்க.

தீர்வு

$$\vec{F} = 3i + 2j - 4k$$

$$O = (2, -1, 3) = 2i - j + 3k$$

$$P = (1, -1, 2) = i - j + 2k$$

$$\therefore \vec{r} = \vec{OP} = (i - j + 2k) - (2i - j + 3k)$$
$$= -i - k$$

$$\therefore M = \vec{r} \times \vec{F}$$
$$= (-i - k) \times (3i + 2j - 4k)$$
$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix}$$
$$= 2i - 7j - 2k$$

∴ திருப்புத் திறனின் அளவு = $|\vec{M}|$

$$= |2i - 7j - k|$$
$$= \sqrt{4 + 49 + 4}$$
$$= \sqrt{57}$$

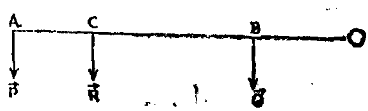
திருப்புத்திறன் தேற்றம்— "வேரினன்"— இன் தேற்றம் (Theorem of Moments—Varignon's Theorem)

ஒரு புள்ளி பற்றி அப்புள்ளியைக் கொண்டுள்ள ஒரு தளத்தின் இரு விசைகளின் திருப்புத் திறன்களின் இயற்கணித மொத்தம் அப்புள்ளி பற்றி அவற்றின் விளைவு விசையின் திருப்புத் திறனுக்குச் சமமாகும்.

வகை (i) விசைகளிரண்டும் ஒரு திசையிணை விசைகள்

$\vec{P}$, $\vec{Q}$ என்பன இரு ஒரு திசையிணை விசைகள் O என்பது அவற்றின் தளத்திலுள்ள ஒரு புள்ளி.

$\vec{R}$ என்பது $\vec{P}$, $\vec{Q}$ ஆகிய விசைகளின் விளைவு விசையெனில், $R = P + Q$ ஆகும்.



படம் 68

மேலும், $\vec{R}$ என்பது $\vec{P}, \vec{Q}$ ஆகிய இணைவிசைகளுக்கு இணையான இணை விசையாகும்.

O விலிருந்து $\vec{P}$, $\vec{Q}$, $\vec{R}$ ஆகிய விசைகளின் செயற்கோடுகளை முறையே A, B, C என்னும் புள்ளிகளில் வெட்டுமாறு ஒரு செங்குத்துக் கோடு வரைக.

$$\because \quad P \cdot AC = Q.CB. \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

இப்பொழுது. O பற்றி $\vec{P}$ யின் திருப்புத்திறன் $= P.\,OA$

O பற்றி $\vec{Q}$ இன் திருப்புத்திறன் $= Q\;OB$

O பற்றி $\vec{R}$ இன் திருப்புத்திறன் $= R.\,OC.$

$\therefore$ $\vec{P}$, $\vec{Q}$ ஆகியவற்றின் திருப்புத்திறன்களின் இயற்கணித மொத்தம்

$$= P \cdot AO + Q \cdot OB$$

$$= P(OC + CA) + Q(OC - CB)$$

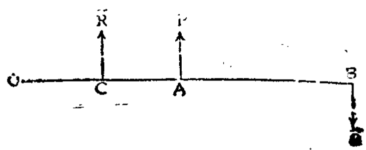
$$= P \cdot OC + Q \cdot OC + P.CA - Q.CB$$

$$= (P + Q)OC + (P.AC - Q.CB)$$

$$= R.OC + O \quad ((1) \text{ இலிருந்து })$$

$$= R.OC$$

$= O$ பற்றி $\vec{R}$ இன் திருப்புத்திறன்.



படம் 69

வகை (ii) விசைகளிரண்டும் எதிரிணையானவை

P, Q என்பன $(P > Q)$ இரு எதிரிணை விசைகள் O என்பது அவற்றின் தளத்திலுள்ள ஒரு புள்ளி. $\vec{R}$ என்பது $\vec{P}, \vec{Q}$ ஆகியவற்றின் விளைவு விசையெனில், $R = P - Q$

ஆகும். மேலும், $\vec{R}$ என்பது $\vec{P}, \vec{Q}$ க்கு இணையான ஒரு விசையாகும்.

O-விலிருந்து $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$ ஆகியவற்றின் செயற்கோடுகளை முறை A, B, C என்னும் புள்ளிகளில் வெட்டுமாறு ஒரு செங்குத்துக்கோடு வரைக.

$$\because P.AC = Q.CB \quad \ldots$$

அல்லது, $P.AC - Q.CB = O$ (2)

O பற்றி $\vec{P}$ யின் திருப்புத் திறன் $= P.\,OA.$

O பற்றி $\vec{Q}$ இன் திருப்புத் திறன் $= -\,Q \cdot OB$

O பறிறி $\vec{R}$ இன் திருப்புத் திறன் $= R.OC.$

∵ O பற்றி $\vec{P}$, $\vec{Q}$ ஆகியவற்றின் திருப்புத்திறன்களின் இயற் கணித மொத்தம்

$$= P.OA + (-Q.OB)$$
$$= P.OA - Q.OB$$
$$= P.(OC + CA) - Q\ (OC + CB)$$
$$= P.OC - Q.OC + P.AC - Q.CB$$
$$= (P-Q)\ OC + (P.AC - Q.CB)$$
$$= R.OC + O$$
$$= R.OC$$

O பற்றி $\vec{R}$ இன் திருப்புத்திறன்.

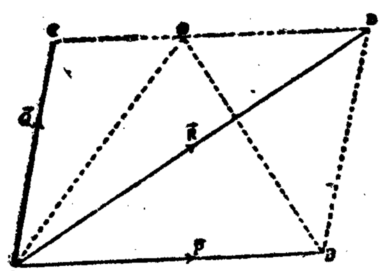
வகை (iii) வெட்டிக் கொள்ளும் செயற்கோடுகளைக் கொண்ட விசைகள்

$\vec{P}$, $\vec{Q}$ ஆகிய இரு விசைகளின் செயற்கோடுகள் A என்னும் புள்ளியில் வெட்டுவதாகக் கொள்க. O என்பது இவ்விசை களின் தளத்திலமைந்துள்ள ஒரு நிலையான புள்ளி.

O விலிருந்து P – இன் செயற்கோட்டிற்கு இணையாக, Q-வின் செயற்கோட்டை Cயில் வெட்டுமாறு ஒரு நேர்கோடு வரைக.

$\vec{AC} = \vec{Q}$ என்று கொள்க.

இதே அளவுத் திட்டப்படி $\vec{AB} = \vec{F}$ இருக்குமாறு AB என்னும் நேர்க்கோட்டுத் துண்டத்தை யெடுத்துக் கொள்க. $A\ B\ D\ C$ என்னுப் இணைகரத்தைப் பூர்த்தி செய்து AD, OA, OB ஆகிய வற்றைச் சேர்க்கவும்.



படம் 70

இணைகர விதியின்படி, $AD = \vec{R}$ ஆகும்.

(அ) O ஆனது AB க்கும், AC க்குமிடையே யிருப்பதாகக் கொள்க.

O பற்றி $\vec{P}$ யின் திருப்புத் திறன் $= 2\triangle OAB$

O பற்றி $\vec{Q}$ வின் திருப்புத் திறன் $= 2\triangle OAC$

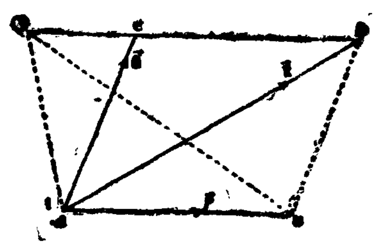
O பற்றி $\vec{R}$ இன் திருப்புத் திறன் $= 2\triangle OAD$

$\therefore$ O பற்றி $\vec{P}, \vec{Q}$ ஆகியவற்றின் திருப்புத்திறன்களின் இயற்கணித மொத்தம்

$$\begin{aligned} &= 2\triangle OAB - 2\triangle OAC \\ &= 2\ (\triangle ABD - \triangle OAC) \\ &= 2\ (\triangle ACD - \triangle OAC) \\ &= 2\triangle OAD \end{aligned}$$

$= O$ பற்றி $\vec{R}$ இன் திருப்புத்திறன்.

(ஆ) O ஆனது $\angle BAC$க்கு வெளியே யிருப்பதாகக் கொள்க



படம் 71

O பற்றி $\vec{P}$ இன் திருப்புத் திறன் $= 2\triangle OAB$

O பற்றி $\vec{Q}$ இன் திருப்புத் திறன் $= 2\triangle OAC$

O பற்றி $\vec{R}$ இன் திருப்புந் திறன் $= 2\triangle OAD$.

$\therefore$ O பற்றி $\vec{P}, \vec{Q}$ ஆகியவற்றின் திருப்புத் திறன்களின் இயற்கணித மொத்தம்.

$$\begin{aligned} &= 2\triangle OAB + 2\triangle DAC \\ &= 2(\triangle ABD + \triangle DAC) \\ &= 2(\triangle ACD + \triangle OAC) \\ &= 2\triangle OAD \end{aligned}$$

$= O$ பற்றி $\vec{R}$ இன் திருப்புத் திறன்.

திறப்புத் திறன்களின் பொதுவிதித் தோற்றம் (Generalisation of the theorem on moments)

மேற்கூறப்பட்ட திருப்புத்திறன் தேற்றத்தின் விதியைத் தொடர்ச்சியாகப் பயன்படுத்தி ஒரு புள்ளி வழியே செயல்படும் பல ஒருதள விசைகளின் திருப்புத்திறன் பற்றிய விரிவுபடுத்தப் பட்ட பொதுமை விதித் தேற்றத்தைப் பின்வருமாறு பெறலாம்.

ஒரு பொருளின்மீது செயல்படும் பல ஒருதள விசைகளின் அத் தளத்திலுள்ள ஏதேனுமொரு புள்ளி பற்றிய திருப்புத் திறன்களின் இயற்கணிம மொத்தமானது அவ்விசைகளின் விளைவு விசையின் அப்புள்ளி பற்றிய திருப்புத்திறனுக்குச் சம மாகும்.

$\vec{P_1}$, $\vec{P_2}$, $\vec{P_3}$,......,$\vec{Pn}$ ஆகிய n ஒருதள விசைகள் ஒரு பொருளின்மீது செயல்படுவதாகக் கொள்க. இவற்றுள் சில இணையாகவும் இருக்கலாம். O என்பது இவ்விசைகளின் தளத் திலுள்ள ஏதேனுமொரு புள்ளி,

ஏதேனுமிரு விசைகளை ($\vec{P_1}$, $\vec{P_2}$ என்க)த் தெரிவு செய்து கொள்க. அவற்றுன் விளைவு விசை $\vec{R_1}$ ஐக் காண்க. திருப்புத்திறன் தேற்றப்படி,

O பற்றி $\vec{P_1}$, $\vec{P_2}$, ஆகிய விசைகளின் திறப்புத்திறன்களின் இயற்கணித மொத்தம் = O பற்றி $\vec{R_1}$, இன் திருப்புத் திறன் ஆகும்.

இப்பொழுது, $\vec{R_1}$, $\vec{R_3}$ ஆகிய இரு விசைகளின் விளைவு விசை $\vec{R_2}$ என்க.

O பற்றி $\vec{R_1}$, $\vec{P_3}$ ஆகியவற்றின் திருப்புத்திறன்களின் இயற் கணித மொத்தம் = O பற்றி $\vec{R_2}$ இன் திருப்புத்திறன்.

அதாவது, O பற்றி $\vec{P_1}$, $\vec{P_2}$, $\vec{P_3}$ ஆகிய விசைகளின் திருப் புத் திறன்களின் இயற்கணித மொத்தம் = O பற்றி அவற்றின் விளைவு விசை R^2 இன் திருப்புத்திறனாகும்.

இம்முறையைத் தொடர்ந்து ஏனைய விசைகளுக்கும் பயன் படுத்தினல் இறுதியில் O பற்றி எல்லா விசைகளின் திருப்புத் திறன்களின் இயற்கணித மொந்தமானது அதே புள்ளி பற்றி விளைவு விசையின் திருப்புத்திறனுக்குச் சமமாகுமென்று காண லாம்.

குறிப்பு: திருப்புத்திறன் காணும் புள்ளி O ஆனது கொடுக் கப்பட்டுள்ள விசைகளின் விளைவு விசையின் செயற்கோட்டி லமைந்திருப்பின், O பற்றி விளைவு விசையின் திருப்புத்திறன் பூச்சியமாகும். எனவே, O பற்றி கொடுக்கப்பட்டுள்ள விசை களின் திருப்புத்திறன்களின் இயற்கணித மொத்தம் பூச்சிய மாகும்.

இதுபோல், பலதள விசைகளின் செயற்பாடுகளுக்குட் பட்ட ஒரு பொருள் சமநிலையிலிருப்பின், அவ்விசைகளின் விளைவு விசை பூச்சியமாகும். எனவே, தங்களின் செயற்பாடு களினுல் ஒரு பொருளைச் சமநிலையில் வைத்திருக்கும் பல ஒரு தள விசைகளின் தளத்திலுள்ள ஏதேனுமொரு புள்ளி பற்றி அவ் விசைகளின் திருப்புத்திறன்களின் இயற்கணித மொத்தம் பூச்சியமாகும். ஆனல், O என்னும் புள்ளி பற்றி இடஞ்சுழி யாகத் திருப்புமியல்புடைய விசைகளின் திருப்புத்திறன்கள் நேரெண்ணளவையுடையனவென்றும், வலஞ்சுழியாகத் திருப்பு மியல்புடைய விசைகளின் திருப்புத்திறன்கள் எதிரெண்ணள வையுடையன வென்றும் கண்டோம். எனவே, ஒரு பொருளின் மீது செயல்பட்டு அப்பொருளைச் சமநிலையில் வைத்திருக்கும் பல ஒருதள விசைகளின் தளத்திலுள்ள ஏதேனுமொரு புள்ளி பற்றி அவ்விசைகளின் இடஞ்சுழித் திருப்புத்திறன்களின் மொத்தம் வலஞ்சுழித் திருப்புத்திறன்களின் மொத்தத்திற்குச் சமமாகும்.

மறுதலையாக, ஒரு பொருளின்மீது செயல்படும் பல ஒருதள விசைகளின் தளத்திலுள்ள ஏதேனுமொரு புள்ளி பற்றி அவ் விசைகளின் திருப்புத் திறன்களின் இயற்கணித மொத்தம் பூச்சியமாயின் அப்புள்ளியானது அவ்விசைகளின் விளைவு விசையின் செயற்கோட்டிலமைந்திருக்க வேண்டும்; அல்லது அவ்விசைகளின் விளைவு விசை பூச்சியமாயிருக்க வேண்டும்; அதாவது அப்பொருள் சமநிலைபெற வேண்டும்.

(Vector components of Moment)

ஒரு பொருளின் மீது செயல்படும் P_1, P_2, P_3, ..., Fn என்றும் n ஒருதள விசைகளின் விளைவு விசை F என்க. இவ்

விசைகளின் தளத்திலிள்ள O என்னும் புள்ளி பற்றி இவ்விளைவு விசையின் திருப்புத்திறனை M என்க. Fஇன் செயற்கோட்டில் P என்னும் ஏதேனுமொரு புள்ளியை எடுத்து OPஐச் சேர்க்கவும். அப்பொருளிலுள்ள ஏதேனுமொரு புள்ளியை ஆதியாகக் கொண்டு (i, j, k)ஐத் திசையி அலகுகளாகக் கொண்ட செங்குத்துத் திசையி அச்சுத் தொகுதியை எடுத்துக் கொள்க. இவ் வச்சுக்களில், F, M ஆகியவற்றின் குத்துப் பிரிவுகள் முறையே (X, Y, Z), (M_x, M_y, M_z) எனில்,

$$\vec{F} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k},$$
$$\vec{M} = M_x\mathbf{i} + M_y\mathbf{j} + M_z\mathbf{k},$$

ஆகும்.

இப்பொழுது, $\vec{OP} = r$ எனில்,

$$\vec{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

ஆகும்.

$$\therefore M = r \times F$$
$$= (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \quad (X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k})$$
$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & z & y \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$$
$$= (yZ - zY)\mathbf{i} + (zX - xZ)\mathbf{j} + (xY - yX)\mathbf{k}$$
$$= M_x\mathbf{i} + M_y\mathbf{j} + M_z\mathbf{k}$$

ஆகவே, திருப்புத்திறன் Mஇன் திசையிக்குத் துப்பிரிவுகள் $Mx = (yZ - zY)$, $My = (zX - xZ,)$ $Mz = (xY - yX)$ ஆகும். மேலும்,

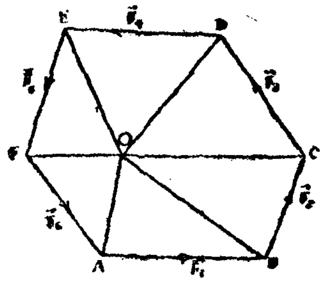
$$\vec{M} = (yZ - zY)\mathbf{i} + (zX - xZ)\mathbf{j} + (xY - yx)\mathbf{k}$$

என்றும் காண்கிறோம்.

மாதிரி 49 ஒரு பொருளின் மீது செயல்படும் n ஒருதள விசைகள் அதே தளத்திலுள்ள n பக்கங்களைக் கொண்ட ஒரு மூடிய பல்கோணத்தின் ஒரு முகவரிசையிலெடுக்கப்பட்ட பக்கங்களால் அளவிலும் திசையிலும் குறிப்பிடப்படின், அதே தளத்திலுள்ள ஏதேனுமொரு புள்ளி பற்றி அவ்விசைகளின் திருப்புத்திறன்களின் இயற்கணித மொத்தம் அப்பலகோணத்

தின் திசையிப் பரப்பின் இரு மடங்குக்குச் சமமென்று காட்டுக.

தீர்வு $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}, \vec{F_4}, \vec{F_5}, \vec{F_6}$ ஆகிய விசைகள் $A\,B\,C\,D\,E\,F\,A$ என்ற மூடிய பல கோணத்தின் $\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{CD}, \vec{DE}, \vec{EF}, \vec{FA}$ ஆகிய பக்கங்களால் குறிப்பிடப்படுகின்றன. O என்பது பல் கோணத்தின் தளத்திலுள்ள ஏதேனுமொரு புள்ளி.



படம் 72

A, B, C, D, E, F ஆகிய முனைகளின் திசையி நிலைகள் முறையே a, b, c, d, e, f என்றும், O-வின் திசையிநிலை $\vec{r}$ என்றும் கொள்க.

$$\therefore\ \vec{AB} = (\vec{b} - \vec{a});\ \vec{OA} = (\vec{a} - \vec{r})$$

O பற்றி $\vec{F_1}$ இன் திருப்புத்திறன் $= \vec{OA} \times \vec{F_1}$

$$= \vec{OA} \times \vec{AB}$$

$$= 2(\vec{a} - \vec{r}) \times (\vec{OB} - \vec{OA})$$

$$= 2(\vec{a} - \vec{r}) \times (\vec{b} - \vec{a})$$

$= 2\triangle OAB$ திசையிப்பரப்பு.

இதுபோல், O பற்றி $\vec{F^2}$ இன் திருப்புத்திறன் $= 2\ \triangle OBC$,

O பற்றி $\vec{F_3}$ இன் திருப்புத்திறன் $= 2\ \triangle OCD$,

O பற்றி $\vec{F_4}$ இன் திருப்புத்திறன் $= 2\ \triangle ODE$,

$$O \text{ பற்றி } \vec{F_5} \text{ இன் திருப்புத்திறன் } = 2\,\triangle DEF,$$

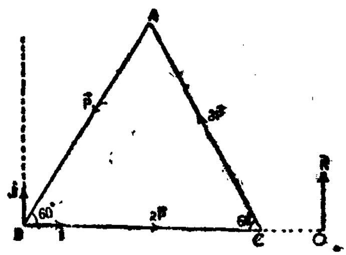
$$O \text{ பற்றி } \vec{F_6} \text{ இன் திருப்புத்திறன் } = 2\,\triangle OFA.$$

$\therefore$ O பற்றி எல்லா விசைகளின் திருப்புத்திறன்களின் மொத்தம்

$$= 2\,(\triangle OAB + \triangle GBC + \triangle OCD + \triangle OBE + \triangle OEF + \triangle OFA)$$

2 (பல்கோணம் $A\ B\ C\ D\ E\ F\ A$யின் திசையிப் பரப்பு).

மாதிரி 50 ABC என்னும் சமபக்க முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் AB, BC, CA வழியாக முறையே P, $2P$, $3P$ என்னும் விசைகள் செயல்படுடன்றன. அவற்றின் விளைவு விசையையும், அதன் செயற்கோடு BCஐ வெட்டும் புள்ளியையும் காண்க.



படம் 73

தீர்வு: BC திசையிலும், B வழியே BCக்குச் செங்குத்துத் திசையிலும் முறையே **i**, **j** என்னும் திசையி அலகுகளை எடுத்துக் கொள்க. மூன்று விசைகளையும் இத்திசைகளில் விசைப் பிரிப்புச் செய்க.

BC திசையில் $\vec{P}$, $\vec{2P}$, $\vec{3P}$ ஆகிய விசைகளின் குத்துப் பிரிவுகளாவன:

$$-P\cos 60°,\ 2P,\ -3P\cos 60°$$

$$= -\frac{P}{2},\ 2P - \frac{3P}{2}$$

BCக்குச் செங்குத்துத் திசையில் இவற்றின் குத்துப் பிரிவுகளாவன:

$$-P\sin 60°,\ O,\ 3P\sin 60°$$

$$= P\frac{\sqrt{3}}{2},\ O,\ 3P\ \frac{\sqrt{3}}{2}$$

i இன் திசையில் குத்துப் பிரிவுகளின் மொத்தம்

$$= -\frac{P}{2} + 2P - \frac{3P}{2} = O.$$

j இன் தசையில் குத்துப் பிரிவுகளின் மொத்தம்

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}P + O + 3\frac{\sqrt{3}}{2}P = \sqrt{3P}.$$

இவ்விசைகள் யாவும் (**i** – **j**) தளத்திலேயே அமைந்திருப்பதால் **k** இன் திசையில் இவற்றின் குத்துப்பிரிவுகள் பூச்சியமாகும்.

$\vec{R}$ என்பது இம் மூன்று விசைகளின் விளைவு விசையெனில்,

$$\vec{R} = \sqrt{3}P\,\mathbf{j} \quad \text{ஆகும்.}$$

ஆகவே, விளைவி விசைகளின் அளவு $= \sqrt{3}\ \vec{P}$; அது BCக்குச் செங்குத்துத் திசையில் செயல்படும். இவ்வளைவு விசை BCயை Oவில் வெட்டுவதாகக் கொள்க.

$BO = x$ என்க.

O பற்றி இம்மூன்று விசைகளின் திருப்புத்திறன் காண்க.

B ஆதியாகையாலும், $BO = x$ என்பதாலும் O-வின் திசையிநிலை $x\,\mathbf{i}$ ஆகும்.

அதாவது, $\vec{BO} = x\,\mathbf{i}.$

$$BC = a \quad \therefore\ \vec{BC} = a\,\mathbf{i}$$

$$\therefore\ \vec{CO} = \vec{BO} - \vec{BC} = (a-x)\mathbf{i}$$

இப்பொழுது, **i**, **j**, **k** திசைகளில் $\vec{P}$ யின் குத்துப் பிரிவுகள்

$$-\frac{P}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}P,\ O \ \text{ஆகும்.}$$

இதுபோல், $2\vec{P} = 2P\,\mathbf{i},$

$$\vec{3P} = -\frac{3}{2} P\mathbf{i} + 3\frac{\sqrt{3}}{2} P\mathbf{j}$$

ஆகும். இப்பொழுது P என்பது $\vec{F}$ என்னும் விசையின் செயற் கோட்டின் மேலுள்ள ஒரு புள்ளியெனில், O என்னும் புள்ளி பற்றி $\vec{F}$ இன் திருப்புத்திறன் $= \vec{OP} \times \vec{F}$ என்று நாமறிவோம்.

இங்கு B என்பது F என்னும் விசையின் செயற்கோட்டின் மேலுள்ள ஒரு புள்ளியாகும்.

$$\therefore O \text{ பற்றி } P \text{ இன் திருப்புத்திறன்} = OB \times \vec{P}$$

$$= -x\mathbf{i}\left(-\frac{P}{2}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}P\mathbf{j}\right)$$

$$\frac{P}{2}x(\mathbf{i}\times\mathbf{i}) + \frac{\sqrt{3}}{2}Px(\mathbf{i}\times\mathbf{j})$$

$$O + \frac{\sqrt{3}}{2}Px\mathbf{k}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}Px\ k$$

$\vec{2P}$ என்னும் விசை O வழியே செல்வதில், O பற்றி அதன் திருப்புத்திறன் பூச்சியமாகும்.

$\vec{3P}$ விசை செயல்படும் CA திசையில் C என்பது ஒரு புள்ளி.

$$\therefore O \text{ பற்றி } \vec{3P} \text{ விசையின் திருப்புத்திறன்} = \vec{OC} \times \vec{3P}$$

$$= -(x-a)\mathbf{i} \times \left(-3\frac{P}{2}\mathbf{i} + 3\frac{\sqrt{3}}{2}P\mathbf{j}\right)$$

$$= \frac{3P}{2}(x-a)(\mathbf{i}\times\mathbf{i}) - \frac{3\sqrt{}}{2}P(x-a)(\mathbf{i}\times\mathbf{j})$$

$$= -\frac{3\sqrt{}}{2}3P(x-a)\mathbf{k}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2}P(3a-2x)\mathbf{k}.$$

ஆனால், O என்னும் புள்ளி மூன்று விசைகளின் விளைவு விசையின் செயற்கோட்டிலிருப்பதால் O பற்றி விளைவு விசை

யின் திருப்புத்திறன் பூச்சியமாகும். எனவே, O பற்றி இம் மூன்று விசைகளின் மொத்தத் திறன் பூச்சியமாக வேண்டும்.

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2} P(3a-2x)\mathbf{k} = O$$

அல்லது, $3a - 2x = O$

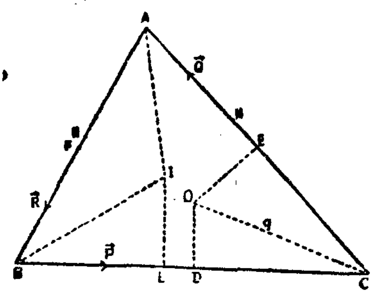
$$x = \frac{3a}{2}$$

அதாவது, $BO = \frac{3}{2} BC.$

மாதிரி 51 : $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$ என்னும் விசைகள் ABC என்னும் முக்கோணத்தின் ஒருமுக வரிசையிலெடுக்கப்பட்ட பக்கங் களின் வழியே செயல்படுகின்றன. அவற்றின் விளைவு உள் வட்ட, சுற்றுவட்ட மையங்களின் வழியே செல்லுகிறது.

$$\frac{P}{\cos B - \cos C} = \frac{Q}{\cos C - \cos A} = \frac{R}{\cos A - \cos B}$$

என்று நிறுவுக.



படம் 74

தீர்வு

O என்பது $\triangle ABC$ யின் சுற்று வட்ட மையம்.

I என்பது உள் வட்ட மையம்.

$OA = OB = OC = q$ என்க.

$GD \perp BC, GE \perp CA, OF \perp AB$ வரைக.

$\because D, E, F$ என்பன முறையே BC, CA, AB ஆகிய பக்கங் களின் நடுப்புள்ளிகளாகும்.

$IL \perp BC$, $IM \perp CA$, $IN \perp AB$ வரைக.

$\therefore IL = IM = IN =$ உள்வட்ட ஆரை $= r$ என்க.

$\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$, என்னும் விசைகள் முறையே BC, CA, AB ஆகிய பக்கங்களின் வழியே செயல்படுகின்றன. இம்மூன்று விசைகளின் விளைவு O, I வழியே செல்கிறதென்று கொடுக்கப்பட்டுள்ளதால், O, I ஆகிய புள்ளிகள் ஒவ்வொன்றையும் பற்றி இம்மூன்று விசைகளின் திருப்புத் திறன்களின் மொத்தம் பூச்சியமாக வேண்டும்.

$\vec{n}$ என்பது $\triangle ABC$யின் தளத்திற்குச் செங்குத்தான திசையி அலகு என்று கொள்க.

O பற்றி திருப்புத்திறன் காண்க.

D என்பது $\vec{P}$ யின் செயற்கோட்டிலுள்ள ஒரு புள்ளி.

$\therefore \vec{P}$ யின் திருப்புத்திறன் $= \vec{OD} \times \vec{P}$

இதுபோல், $\vec{Q}$ வின் திருப்புத் திறன் $= \vec{OE} \times \vec{Q}$

$\vec{R}$ இன் திருப்புத் திறன் $= \vec{OF} \times \vec{R}$

$$\therefore \vec{OD} \times \vec{P} + \vec{OE} \times \vec{Q} + \vec{OF} \times \vec{R} = \vec{O}$$

ஆனால், $\vec{OD} \times \vec{P} = OD.\ P.\sin 90^\circ \therefore n$ $(\because \vec{a} \times \vec{b} = ab \sin \theta.\ \vec{n})$

$$= OD.\ P.\vec{n}$$

$$= P.\ OC \sin \angle OCD.\ \vec{n}$$

$$= P.q \sin (90^\circ - \angle COD).\ \vec{n}$$

$$= Pq \sin (90^\circ - A).\ \vec{n}$$

$$= Pq \cos A.\ \vec{n}$$

இதுபோல், $\overleftarrow{OE} \times \vec{Q} = Qq \cos B.\vec{n}$

$$\vec{OF} \times \vec{R} = Rq \cos C\,.\vec{n}$$

$$\therefore (Pq \cos A + Qq \cos B + Rq \cos C)\,.\vec{n} = O$$

அதாவது, $P\cos A + Q \cos B + R \cos C = O$

இப்பொழுது I பற்றி திருப்புத்திறன் காண்க

I பற்றி $\vec{P}$ யின் திருப்புத் திறன் $= \vec{IL} \times \vec{P}$

$$= IL.\,P.\,\sin\ 90^\circ\ \vec{n}$$

$$= rP\,.\vec{n}$$

I பற்றி $\vec{Q}$ வின் திருப்புத்திறன் $= rQ\,.\vec{n}$

I பற்றி $\vec{R}$ இன் திருப்புத்திறன் $= rR\,.\vec{n}$

$\because$ I பற்றி இம்மூன்று விசைகளின் மொத்தத்திருப்புத்திறன்

$$= r\,(P + Q + R)\,.\vec{n}$$

விளைவு விசை I வழியே செல்வதால், $r\,(P + Q + R)\,\vec{n} = O$

$$\because P + Q + R = O$$

குறுக்குப் பெருக்கல் விதியின்படி, (1), (2) ஆகிய சமன்பாடுகளிலிருந்து,

$$\frac{P}{\cos B - \cos C} = \frac{Q}{\cos C - \cos A} = \frac{R}{\cos A - \cos B}$$

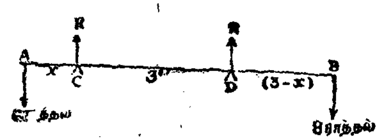
என்று காணலாம்.

மாதிரி 25 6 அடி நீளமுள்ள இலேசான கோலொன்று அதன் முனைகளில் முறையே ராத்தல், 8 ராத்தல் எடைகளுடன் 3 அடி இடை வெளியிலுள்ள இரு முளைகளின் மேல் கிடைநிலையில் ஓய்விலுள்ளது. முளைகளின் மேலுள்ள எதிர்விசைகள் சமமாகயிருக்க வேண்டுமெனில் முளைகளின் மேல் அக்கோல் எவ்வாறு வைக்கப்படவேணடும் ?

சென்னை. பி எஸ்ஸி. 1975 ஏப்.

தீர்வு

AB என்பது 6 அடி நீளமுள்ள இலேசான கோல், Aயில் 6 ராத்தல் எடையும் Bயில் 8 ராத்தல் எடையும் கீழ் நோக்கிச் செயல்படுகின்றன.



படம் 75

C,D என்பன 3 அடி இடைவெளியிலமைந்துள்ள இரு முனைகள். கோலின் அழுத்தத்தினால் இம்முனைகளிலேற்படும் எதிர்விசைகள் C, D வழியே மேல் நோக்கிச் செயல்படும். இவ்வெதிர் விசைகளிரண்டும் சமமென கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இச் சம எதிர்விசைகளை R என்க.

கோல் சமநிலையிலிருப்பதால், நிலைக்குத்தாக மேல் நோக்கிய விசைகளின் மொத்தம் நிலைக்குத்தாகக் கீழ் நோக்கியு விசைகளின் மொத்தத்திற்குச் சமமாகும்.

$$R + R = 6 + 8$$

$$2R = 14$$

அல்லது, $R = 7$ ராத்தல் எடை.

$AC = x$ என்க. $\because DB = (3-x)$ ஆகும்.

A பற்றி திருப்புத்திறன் காண்க.

கோல் சம நிலையிலிருப்பதால், A பற்றி எல்லா விசைகளின் திருப்புத்திறன்களின் இயற்கணித மொத்தம் பூச்சியமாக வேண்டும்.

$$R \times x + R \times (3 + x) - 8 \times 6 = O$$

$$2Rx + 3R - 48 = O$$

$R = 7$ ஆதலின், $14x + 21 - 48 = O$

$$14x = 27$$

$$x = \frac{27}{14} \text{ அடி.}$$

$$BD = 3 - x = 3 - \frac{27}{14} = \frac{15}{14} \text{ அடி.}$$

ஆகவே, C,D ஆகிய மூலைகள் முறையே A,B ஆகிய மூலைகளி லிருந்து $\frac{27}{14}$ அடி. $\frac{15}{14}$ அடி தூரங்களிலிருக்குமாறு கோலை வைக்க வேண்டும்.

மாதிரி 53 ஒரு கோணத்தின் BC, CA, AB ஆகிய பக்கங் களின் நீளங்கள் முறையே 5, 4, 3 அலகுகள். A பற்றி ஒரு விசையின் திருப்புத் திறன் பூச்சியமாகும். B, C ஆகியவை பற்றி அவ்விசையின் திருப்புத்திறன்கள் முறையே 9, 16 அளவு களிடையதாகவும், எதிரடையாளங்கள் கொண்டவையாகவு மிருக்கின்றன. அவ்விசையின் அளவையும் செயற்கோட்டை யும் காண்க.

தீர்வு

$\triangle ABC$ யின் பக்கங்கள் 5, 4, 3 அலகுகளுடையனவாகை யால் அது A ஐச் செங்கோணமாகக் கொண்ட ஒரு முக்கோண மாகும்.

A பற்றி விசையின் விளைவு பூச்சியமாதலால் அவ்விசை யின் செயற்கோடு A வழியே செல்லும் B,C ஆகியவைபற்றி அவ்விசையின் திருப்புதிறன்கள் எதிரடையாளங்கள் கொண் டிருப்பதால், அவ்விசையின் செயற்கோடு B,C க்கு இடையே அமைந்திருக்கும்.

அவ்விசையை $\vec{R}$ என்றும், அதன் செயற்கோடு AB யுடன் θ கோணச் சாய்விலமைந்துள்ளதாகவும் கொள்க. அச் செயற் கோடு BC யை D யில் வெட்டட்டும்.

B,C ஆகிய புள்ளிகளிலிருந்து $\vec{R}$ இன் செயற்கோட்டிற்கு BE, CF என்னும் செங்குத்துக் கோடுகள் வரைக.

B பற்றி $\vec{R}$ இன் திருப்புத்திறன் $= -R \times BE$

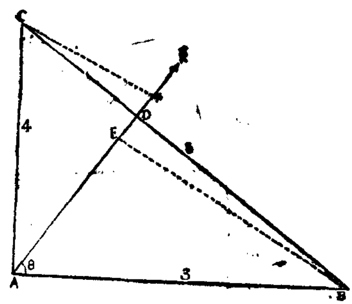
$$= -R \cdot AB \sin\theta$$
$$= -R \cdot 3 \sin\theta$$
$$= -3R\sin\theta$$

C பற்றி $\vec{R}$ இன் திருப்புத்திறன் $= R \times CF$

$= R \times AC \sin (go^\circ - \theta)$

$= R. 4 \cos \theta$

$= 4 R \cos \theta$.



படம் 76

B,C பற்றிய திருப்புத்திறன்களின் அளவுகள் முறையே 9, 16 ஆகும். இத்திருப்புத்திறன்கள் எதிரடையாளங்களுடனிருப்ப தால் B யைப் பற்றிய திருப்புத்திறன் -9 என்றும், C ஐப் பற்றிய திருப்புத்திறன் 16 என்று கொள்க.

$$\therefore -3R \sin \theta = -9; \; 4R \cos\theta = 16$$

அதாவது, $R \sin \theta = 3, R \cos \theta = 4$

$$\therefore R = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ அலகுகள்.}$$

$$\sin \theta = \frac{3}{R} = \frac{3}{5}$$

ஆனல் $\sin C = \frac{3}{5}$ ஆதலால், $\theta = C$ ஆகும்.

அதாவது, $AD \perp BC$.

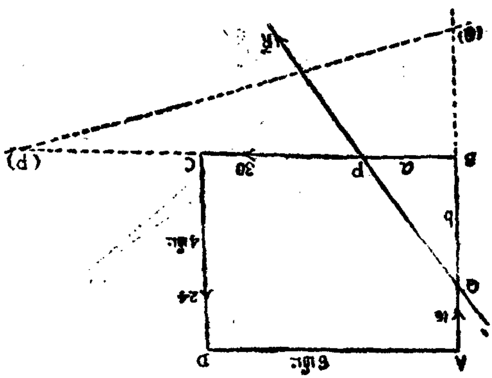
ஆகவே, விசையின் அளவு 5 அலகுகள்; அதன் செயற்கோடு A யிலிருந்து BCக்கு வரையப்படும் செங்குத்துக்கோடாகும்.

மாதிரி 54 $ABCD$ என்னும் செவ்வகத்தில் AB,BC ஆகிய பக்கங்களின் நீளங்கள் முறையே 4 மீட்டர், 6 மீட்டர்களாகும். AB, BC, CD வழியே 16 கி.கி., 30 கி.கி., 24 கி.கி. எடைகளுக்குச் சமமான விசைகள் செயல்படுகின்றன. விளைவு விசையின் அளவையும், செயற்கோட்டையும் காண்க.

தீர்வு

மூன்று விசைகளையும் BC, BA ஆகிய திசைகளில் விசைப் பிரிப்புச் செய்க.

X = BC திசையில் பிரித்தபகுதிகளின் மொத்தம் = 30.



படம் 77

Y = BA திசையில் பிரித்த பகுதிகளின் மொத்தம்

$= -16 + 24 = 8.$

$\vec{R}$ என்பது மூன்று விசைகளின் விளைவு எனில்,

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$$
$$= \sqrt{30^2 + 8^2}$$
$$= \sqrt{964}$$
$$= 2\sqrt{241} \text{ கி. கி. எடை.}$$

$\vec{R}$ இன் செயற்கோடு BCஐ Pயிலும், BAஐ Qவிலும் வெட்டுவதாகக் கொள்க.

$BP = a$. $BQ = b$ என்க.

P பற்றி மூன்று விசைகளின் மொத்தத் திருப்புத்திறன்

$$= 30\,(O) + 24\,(PC) + 16\,(BP)$$
$$= 24\,(6 - a) + 16\,(a)$$

$$= 144 - 8a$$

Pயானது விளைவு விசையின் செயற்கோட்டிலிருப்பதால்,

$$144 - 8a = O$$

அல்லது, $$a = 18$$

இதுபோல், Q பற்றி மூன்று விசைகளின் மொத்தத் திருப்புத் திறன் பூச்சியமாகும்.

$$\therefore 16\,(O) + 30\,(BQ)\,24\,(AD) = O$$

$$30\,b + 24\,(6)\,O$$

$$30\,b = -144$$

அல்லது, $$b = -\frac{24}{5}$$

ஆகவே, விளைவு செயற்கோடு BC ஐ Bயிலிருந்து BC வழியே 18 மீட்டர் தூரத்தில் (P) என்னும் புள்ளியிலும், ABஐ Bயுலிருந்து AB வழியே 4·8 மீட்டர் தூரத்தில் (Q) என்னும் புள்ளியிலும் வெட்டுகிறது.

மாதிரி 55: $2l$ நீளமும் W எடையுமுள்ள ஒரு நேரான, சீரான PQ என்னும் கோல் l இடைத்தூரத்தில் ஒரே மட்டத்தி லமைந்த R, S என்னும் இருமுனைகளின் மேல் ஓய்வு நிலையி லிருக்கிறது. pW, qW என்னும் எடைகள் முறையே P, Qவில் தொங்கவிடப்பட்டால் R, S ஆகிய முனைகளில் எதிர்முத்தங்கள் சமமாயிருக்கும்போது,

$$PR = \frac{l}{2}\left(\frac{1 + 3q - p}{1 + q + p}\right)$$

என்று காட்டுக.

தீர்வு :

$$PQ = 2l,\ RS = l$$

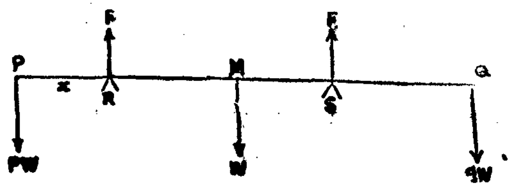
M என்பது PQவின் நடுப்புள்ளி.

$$\therefore PM = MQ = l$$

P, Q, M ஆகியவற்றில் முறையே pW, qW, W என்னும் எடைகள் நிலைக்குத்தாகக் கீழ்நோக்கிச் செயல்படுகின்றன.

R, S ஆகிய முளைகளில் மேல்நோக்கிச் செயல்படும் எதிரழுத்தங்களை F என்று கொள்க.

கோல் சமநிலையிலிருப்பதால், மேல்நோக்கிய விசைகளின் மொத்தம் கீழ்நோக்கிய விசைகளின் மொத்தத்திற்குச் சமமாகும்.



படம் 78

$$\therefore 2F = pW + W = W(p + q + 1)$$

அல்லது, $F = \frac{W}{2}\ (p + q + 1)$

$P R = x$ என்க.

Pயைப் பற்றிய திருப்புத்திறன் காண்க.

$$F.(PR) + F(PS) = W(PM) + qW(PQ)$$

$$Fx + F(x+l) = W \cdot l + qW \cdot 2l$$

$$2Fx = Wl + 2qWl - Fl$$

$$= Wl + 2qWl - \frac{Wl}{2}(p+q+1)$$

$$= \frac{Wl}{2}[2 + 4q - p - q - 1]$$

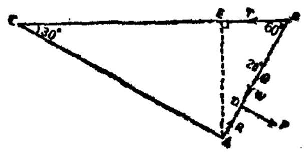
$$= \frac{Wl}{2}[1 + 3q - p]$$

$$\therefore x = \frac{\frac{Wl}{2}(1 + 3q - p)}{2F}$$

$$= \frac{\frac{Wl}{2}(1 + 3q - p)}{W(p + q + 1)}$$

$$= \frac{l}{2}\left(\frac{1 + 3q - p}{p + q + 1}\right)$$

மாதிரி 56: 20 அடி நீளமுள்ள கம்பம் ஒன்று கிடைமட்டத்திலுள்ள தரையில் நிலைக்குத்தாக நிறுத்தப்பட்டுள்ளது. அதன் உச்சி ஒரு கயிற்றால் கட்டப்பட்டுக் கிடைமட்டத்திற்கு 30° சரிவில் தரையிலுள்ள ஒரு முளையில் 30 ராத்தல் எடைக்குச் சமமான இழுவிசையுடன் இழுத்துக் கட்டப்பட்டுள்ளது. கம்பம்



படம் 79

நிலைக்குத்தாக நிற்க வேண்டுமாயின் தரைக்குமேல் 4 அடி உயரத்தில் கம்பத்தின்மீது செலுத்தப்பட வேண்டிய கிடைவிசையைக் காண்க.

தீர்வு :

AC என்னும் தரையின் மேல் $AB = 20$ அடி நீளக்கம்பம் நிலைக்குத்தாக நிறுத்தப்பட்டுள்ளது.

BC என்பது கம்பத்தின் உச்சியைத் தரையிலுள்ள C என்னும் முளையுடன் இழுத்துக் கட்டப்பட்டுள்ள கயிறு.

T = கயிற்றின் இழுவிசை = 30 ராத் எடை. கம்பத்தின் எடை W ஆனது அதன் நடுப்புள்ளி G வழியே நிலைக்குத்தாகக் கீழ்நோக்கிச் செயல்படும். கம்பத்தின் அடியிலிருந்து 4 அடி உயரத்திலுள்ள D என்றும் புள்ளியில் P என்னும் விசை கிடைத்திசையில் செயல்படுத்தப்பட்டுள்ளது.

$\angle ACB = 30°$

கம்பம் பின்வரும் நான்கு விசைகளினால் சமநிலையிலுள்ளது.

(அ) BC வழியே கயிற்றின் இழுவிசை T

(ஆ) GA வழியே கம்பத்தின் எடை W

(இ) Aயில் AG வழியே தரையின் எதிர்விசை தாக்கம் R

(ஈ) Dயில் கிடைவிசை P.

கம்பம் சமநிலையிலிருப்பதால் இந்நான்கு விசைகளின் எந்தப் புள்ளி பற்றிய மொத்தத் திருப்புத் திறனும் பூச்சியமாக வேண்டும்.

A யில் திருப்புத்திறன் காண்க. $AE \perp BC$ எனில்,

$$T.\,AE = P.\,AD$$

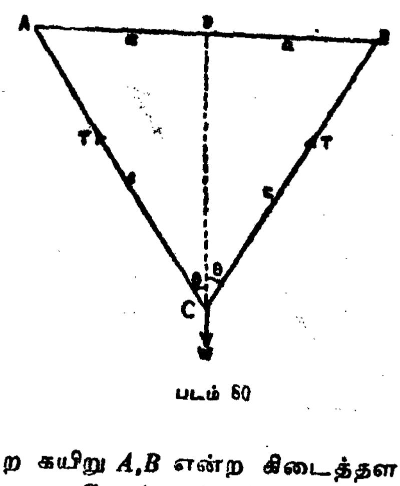
$$30.\,AB \sin 60^\circ = P.\,4$$

$$30.\,20\,\frac{\sqrt{3}}{2} = 4\,P$$

அல்லது, $P = 75\sqrt{3}$ ராத் எடை.

மாதிரி 57 $2c$ நீளமுள்ள கனமில்லாத கயிறு ஒன்று ஒரே கிடைக்கோட்டின் மேலுள்ள இருபுள்ளிகளில் கட்டப்பட்டுள்ளது. W எடையுள்ள ஒருவழவழப்பான வளையம் அக்கயிற்றில் தாராளமாக நழுவிச் செல்லும் வகையில் கோர்க்கப்பட்டுள்ளது. கயிறு கட்டப்பட்டுள்ள இருபுள்ளிகளும் $2a$ இடைவெளியிலிருந்தால், சமநிலையில் இவற்றின் இழுவிசை

$\frac{1}{2}\,\frac{cW}{\sqrt{c^2 - a^2}}$ என்று காட்டுக.



படம் 60

தீர்வு

ACB என்ற கயிறு A, B என்ற கிடைத்தளப் புள்ளிகளில் கட்டப்பட்டுள்ளது. C என்னும் வளையம் கயிற்றில் கோர்க்கப்பட்டுத் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. சமநிலையில் அது கயிற்றின் நடுப்புள்ளியில் சீரான நிலையில் தொங்கிக் கொண்டிருக்கும். ஆகவே, அதன் எடையாகிய W என்பது C வழியே நிலைக்குத்தாகக் கீழ்நோக்கிச் செயல்படும். வளையம் தாராளமாக நழுவி செல்லும் வகையில் கயிற்றில் கோர்க்கப்பட்டுள்ளதால், வளையத்தின் இருபக்கமும் கயிற்றின் பகுதிகள் சமநீளமுள்ளவையாகவும், சம இழுவிசை கொண்டவையாகவுமிருக்கும்.

CA,CB திசைகளில் செயல்படும் இச் சம இழுவிசைகளை T என்று குறிப்பிடுக. மேலும், *C* வழியே செல்லும் நிலைக்குத் கோடு *AB* யின் நடுப்புள்ளி வழியே செல்லும்.

$$\therefore AD = DB = c;$$

$$AC = CB = a.$$

$$\therefore CD = \sqrt{c^2 - a^2}$$

C D வழியே மூன்று விசைகளையும் விசைப் பிரிப்புச் செய்க.

$\angle ACD = \angle BCD$ θ என்க.

$$\therefore T\cos\theta + T\cos\theta = W$$

$$2\,T.\cos\theta = W$$

$$2\,T.\frac{DC}{AC} = W$$

$$T = \frac{1}{2}W.\frac{AC}{CD}$$

$$= \frac{1}{2}W\frac{c}{\sqrt{c^2 - a^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{c\ w}{\sqrt{c^2 - a^2}}.$$

மாதிரி 58 *AB,BC* என்பன முறையே *a,b* நீளங்களும், *wa, wb* எடைகளுமுள்ள இரு சீரான கோல்கள். கோணம் *ABC* ஒரு செங்கோணமாயிருக்குமாறு அவைகள் *B* யில் விறைப்பாக இணைக்கப்பட்டுள்ளன. *A*யில் கட்டப்பட்டுள்ள ஒரு கயிற்றின் மூலம் இச்சட்டம் தொங்கவிடப்பட்டால், நிலைக்குத்துடன் *AB* யின் சரிவு $\tan^{-1}\left(\frac{b^2}{a^2+2ab}\right)$ என்று காட்டுக.

தீர்வு

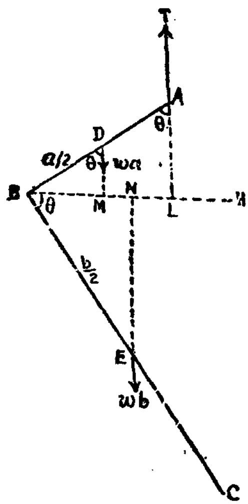
AB,BC என்ற கோல்கள் *B*யில் கட்டிறுக்கமாகப்பிணைக்கப் பட்டுள்ளன. $\angle ABC = 90°$.

$$AB = a, \quad BC = b.$$

D.E என்பன இக்கோல்களின் நடுப்புள்ளிகள் $\therefore AD = DB = \frac{a}{2}$

$$BE = EC = \frac{b}{2}.$$

AB யின் எடையாகிய *wa* என்பது *D*யிலும், *BC*யின் எடையாகிய *wb* என்பது *E* யிலும்நிலைக் குத்தாகக் கீழ்நோக்கிச் செயல்படுகின்றன. *A* யில் கட்டப்பட்டுள்ள கயிற்றில் இழுவிசை *T* ஆனது மேல் நோக்கிச் செயல்படும்.



படம் 81

B வழியே *BH* என்னும் கிடைக்கோடு வரைக. *A*. *D*, *E*, யில் வரையப்படும் நிலைக்குத்துக் கோடுகள் *B* வழிக் கிடைக் கோட்டை முறையே *L*, *M*, *N* என்ற புள்ளிகளில் வெட்டட்டும் $\angle BAL = \theta$ என்க.

சட்டம் சமநிலையிலிருப்பதால், மேல்நோக்கிய விசைகளின் மொத்தம் = கீழ்நோக்கிய விசைகளின் மொத்தம்.

$$\therefore T = wa + wb = w(a+b)$$

இப்பொழுது *B* பற்றிய திருப்புத்திறன் சமன்பாடு காண்க.

$$T.\ BL - wa.\ BM + wb \cdot BN$$

$$T.\ AB \sin\theta = wa.\ BD \sin\theta + wb.\ BE \cos\theta.$$

$$T.a \sin = wa.\ \frac{a}{2} \sin\theta + wb. \frac{b}{2} \cos\theta$$

$$= (a+b)\, a \sin\theta = w.\ \frac{a^2}{2} \sin\theta + W \frac{b^2}{2} \cos\theta$$

$$w\,(a+b)\;\; a\sin\theta \;-\; w\,\frac{a^2}{2}\,\sin\theta + w\,\frac{b^2}{2}\cos\theta.$$

$$\sin\theta\left(a^2 + ab - \frac{a^2}{2}\right) + \frac{b^2}{2}\cos\theta,$$

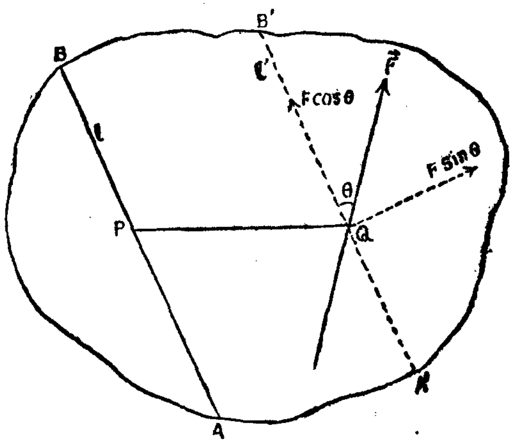
$$\sin\theta\left(\frac{a^2 + 2ab}{2}\right) = \frac{b^2}{2}\cos\theta$$

அல்லது, $\tan\theta = \dfrac{b^2}{a^2 2ab}$

அல்லது, $\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{b^2}{a^2+2ab}\right)$

ஒருநேர்கோடு பற்றி ஒருவிசையின் திருப்புத் திறன் (Moment of a Force about a line)

ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருள் ஒரு நிலையான நேர்கோட்டைச் சுழலச் சாகக் கொண்டு தாராளமாகச் சுழலக்கூடியவாறு அமைந்துள்ளதெனக் கொள்க. அப்பொருளின் மீது செயல் படுத்தப்படும் ஒரு விசையின் செயற்கோடானது அச்சுழலச்சின் மீது படிந்தாலும், அல்லது அச்சுழலச்சுக்கு இணையாக



படம் 82

யிருந்தாலும் அல்லது அச்சுழலச்சைச் சந்திக்கக்கூடியதா யிருந்தாலும் அவ்விசையினுல் அப்பொருளை அச்சுழலச்சின் மீது சுழலச் செய்ய முடியாது. மாருக, அவ்விசையின் செயற் கோடு அச்சுழலச்சை வெட்டாமல் அதற்குச் சரிவாகயிருக்கு

மானல் அவ்விசையால் அப்பொருளை அவ்வச்சின் மீது சுழலச் செய்யமுடியும்.

ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருள் l என்னும் சுழலச்சைப்பற்றித் தாராளமாகச் சுழலக்கூடியதென்று கொள்வோம். அப்பொருளின் மீது செயல்படுத்தப்பட்டுள்ள $\vec{F}$ என்னும் விசையின் செயற்கோடு l ஐ வெட்டவுமில்லை; l க்கு இணையாகவுமில்லையென்று கொள்க.

l என்னும் சுழலச்சுக்கோடு, F இன் செயற்கோடு ஆகிய இரு வெட்டாக் கோடுகளுக்குமிடையேயுள்ள மிகக் குறுகிய தூரம் (Shortest distance) PQ என்க.

Q வழியே lக்கு இணையாக l^1 என்னும் நேர்கோடு வரைக. $\vec{F}$ க்கும் l^1 க்குமிடையேயுள்ள கோணம் θ எனில், l^1 வழியாகவும், l^1 க்குச் செங்குத்தாகவும் $\vec{F}$இன் குத்துப்பிரிவுகள் முறையே $F\cos\theta$, $F\sin\theta$ ஆகும். l^1 வழியாகச் செயல்படும் $F\cos\theta$ எனும் குத்துப்பிரிவு lக்கு இணையாக இருப்பதால் பொருளில் சுழற்சியை ஏற்படுத்த முடியாது. ஆகவே, $F\sin\theta$ எனும் குத்துப்பிரிவினால் மட்டுமே அப் பொருளில் சுழற்சியை ஏற்படுத்தமுடியும்.

இப்பொழுது l பற்றி $\vec{F}$ இன் திருப்புத்திறன் என்பது lக்கும் $\vec{F}$க்குமிடையேயுள்ள மிகக் குறுகிய தூரம், lக்குச் செங்குத்துத் திசையில் $\vec{F}$ இன் குத்துப் பிரிவு ஆகியவற்றின் பெருக்கமாகுமென்று வரையறுக்கப்படுகிறது.

அதாவது, l பற்றி $\vec{F}$ இன் திருப்புத்திறன் $= PQ \times \sin\theta$ ஆகும்.

குறிப்பு: l ம், $\vec{F}$ இன் செயற்கோடும் வெட்டிக் கொள்ளுமானால், $PQ = O$ ஆகும். ∴ திருப்புத் திறன் பூச்சியமாகும்.

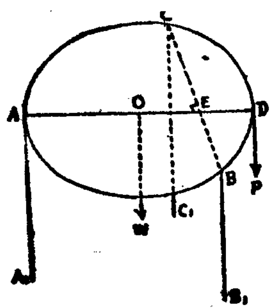
$\vec{F}$ இன் செயற்கோடு l இன் மீது படிந்திருந்தாலும் அல்லது l க்கு இணையாகயிருந்தாலும், $\theta = O$ ஆகுமாகையால் திருப்புத் திறன் பூச்சியமாகும்.

மாதிரி 59: ஒரு வட்டமான மேசை அதன் ஓரத்தின் ஒரு சமபக்கமும் முக்கோணத்தின் முனைகளாக அமையக்கூடிய மூன்று புள்ளிகளில் இணைக்கப்பட்டுள்ள நிலைக்குத்து கால்களில் மேல் சீராக நிற்கின்றது. மேசையின் எடை கால்களுடன் W எனில் மேசை கவிழாதவாறு கால்களுள் ஒன்றிற்கு விட்டத்தின் வழி நேர் எதிர் ஓரத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியில் தொங்கவிடக் கூடிய மிகப் பெரிய எடையைக் காண்க.

தீர்வு:

A, B, C என்பன வட்டமான மேசையின் ஓரத்தில் கால்கள் பொருத்தப்பட்டுள்ள இடங்கள். $A\ B\ C$ ஒரு சமபக்க முக்கோணமாகும்.

O என்பது மேசையின் மையம். இதன் வழியே மேசையின் எடையாகிய W கீழ்நோக்கிச் செயல்படும்.



படம் 83

AD என்பது A வழியே செல்லும் விட்டம். Dயில் P என்னும் எடை கட்டித் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. Pயின் மதிப்பு உச்சமாகயிருக்கும்போது மேசையானது கவிழும் தருவாயில் சமநிலையிலிருக்கும். அதாவது, மேசையானது BCஐச் சுழலச்சாகக்கொண்டு சுழலக்கூடிய நிலையிலிருக்கும்.

$A\ B\ C$ ஒரு சமபக்க முக்கோணமாகையாலும், மேசையானது மூன்று கால்களின் மேலும் சமச்சீராக நிற்பதாலும் மேசையின் மையம் $\triangle\ ABC$யின் திணிவு மையமாகும். $\therefore\ AD \perp BC$ ஆகும்.

மேலும், O ஆனது முக்கோணத்தின் நிலைக்குத்து மையமாகவுமிருக்கும். தவிர, Oவிலிருந்து BCக்கு வரையப்படும் செங்

குத்துக்கோடு முக்கோணத்தின் சுற்று வட்டத்தை Dயில் சந்திக்கிறது. ஆகவே, $OE = ED$ ஆகும். இப்பொழுது, BC பற்றித் திருப்புத்திறன் காண்க.

$$P \cdot ED = W \cdot OE$$

$$\therefore \quad P = W.$$

ஆகவே, Dயில் தொங்கவிடக்கூடிய மிகப் பெரிய எடை மேசையின் எடைக்குச் சமமாகும்.

பயிற்சி 7

(1) 5 அடி நீளமுள்ள ஒரு இலேசான கோல் அதன் இரு முனைகளும் இரு தாங்கிகளின் மேலிருக்குமாறு கிடைநிலையில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. ஒரு முனையிலிருந்து 2 அடி தூரத்தில் 10 ராத்தல் எடையுள்ள பொருள் ஒன்று தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. ஒவ்வொரு தாங்கியிலுமுள்ள எதிர்விசைத் தாக்கத்தைக் காண்க. ஒரு தாங்கி மற்றதைப் போல் $\frac{1}{2}$ பாக எடையை மட்டுமே தாங்கவேண்டுமெனில் அப்பொருள் அக்கோலில் எங்கு தொங்கவிடப்படவேண்டுமென்று காண்க.

(2) $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ என்னும் புள்ளி பற்றி $-2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ என்னும் புள்ளி வழியே செயல்படுகின்ற $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ என்னும் விசையின் திருப்புத்திறன் காண்க.

(3) $\vec{P} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{k}$ என்னும் விசை $2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ என்ற திசையி நிலையையுடைய A என்னும் புள்ளி வழியே செயல்படுகிறது. $\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ என்னும் திசையி நிலையுடைய B என்னும் புள்ளி பற்றி $\vec{P}$ யின் திருப்புத்திறன் காண்க.

(4) $\vec{F} = 3\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$ என்னும் விசை $A = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$ என்னும் புள்ளியின் வழியே செயல்படுகிறது. $6\mathbf{i} - 7\mathbf{k}$ என்ற திசையி நிலையையுடைய B என்னும் புள்ளி பற்றி $\vec{F}$ இன் திருப்புத்திறன் காண்க.

(5) $\vec{P}, 2\vec{P}, 4\vec{P}$ என்னும் விசைகள் ABC என்னும் சமபக்க முக்கோணத்தின் AB, BC, CA ஆகிய பக்கங்களின் வழியாகச்

செயல்படுகின்றன. அவற்றின் விளைவு விசையின் அளவு, திசை ஆகியவற்றையும், அது BC யை வெட்டும் புள்ளியையும் காண்க.

(6) PQR என்பது 30° அடிக்கோணங்களுடைய இரு சம பக்கமுக் கோணம். $P, P, \sqrt{3}P$ அளவுகளுள்ள விசைகள் முறையே PQ, PR, QR ஆகிய பக்கங்களின் வழியே செயல் படுகின்றன. விளைவு விசை QR ஐ இரு சமபாகங்களாகப் பிரிக்குமென்றும். மற்ற இருபக்கங்களுள் ஒன்றிற்கு இணையாக யிருக்குமென்றும் நிறுவுக.

(7) $\triangle ABC$யின் BC, CA, AB ஆகிய பக்கங்களின் வழியே செயல்படுகின்ற $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$ என்னும் விசைகளின் விளைவு விசை முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்ட மையத்தின் வழியே செயல் படுகிறது.

$$P \cos A + Q\cos B + R\cos C = O$$

என்று காட்டுக.

(8) $\triangle ABC$ யின் BC, CA, AB ஆகிய பககங்களின் வழியே செயல்படுகின்ற $\vec{P}. \vec{Q}, \vec{R}$ என்னும் விசைகளின் விளைவு விசை யானது, முக்கோணத்தின் செங்குத்து மையம் வழியே செயல் படுகிறதெனில்,

$$P\,\mathrm{see}\,A + Q\,\mathrm{see}B + R\,\mathrm{see}\,C = O$$

என்று காட்டுக.

(9) $\triangle ABC$ யின் BC, CA, AB ஆகிய பக்கங்களின் வழியே செயல்படுகின்ற $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$ என்னும் விசைகளின் விளைவு விசை யானது முக்கோணத்தின் உள்வட்டமையம், திணிவு மையம் ஆகியவற்றின் வழியே செயல்படுகிறதெனில்,

$$\frac{P}{a(b-c)} = \frac{Q}{b(c-a)} = \frac{R}{c(a-b)}$$

என்று காட்டுக.

(10) $\triangle ABC$யின் BC, CA, AB ஆகிய பக்கங்களின் வழியே செயல்படும் $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$ என்னும் விசைகளின் விளைவு விசை யானது எப்பொழுதும் முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்டத்தைத் தொடுமென்ருல் $aP+bQ+cR = O$ என்று காட்டுக.

(11) $\triangle ABC$ BC, CA, AB ஆகிய பக்கங்களின் வழியே செயல்படுகின்ற $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$ என்னும் விசைகளின் விளைவு விசை எப்பொழுதும் உள் வட்டத்தைத் தொடுகிறதென்றால்,

$$\frac{\cos^2 \frac{A}{2}}{P} + \frac{\cos^2 \frac{B}{2}}{Q} + \frac{\cos^2 \frac{C}{2}}{R} = O$$

என்று காட்டுக;

(12) 2 மீட்டர் நீளம், 4 கி.கி. எடையுள்ள ஒருகோலின் இரு முனைகளிலும் முறையே 5 கி. கி., 7 கி. கி. எடைகள் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளன. அது கிடை மட்டத்தில் சமநிலையிலிருக்கவேண்டுமாயின் எந்த இடத்தில் கயிற்றில் கட்டப்பட்டுத் தொங்கவிடப்படவேண்டும்?

(13) 50 செ.மீ. நீளமுள்ள ஒரு நேரான, சீரான கோலின் ஒரு முனையில் 40 கிராம் எடை தொங்கவிடப்பட்டால், அம் முனையிலிருந்து 15 செ. மீ. தூரத்தில் ஒரு கயிற்றினால் கிடை மட்டத்தில் நிறுத்தமுடிகிறது. கோலின் எடையைக் காண்க.

(14) 6 மீட்டர் நீளமுள்ள ஒரு நேரான, சீரான கோலின் ஒரு முனையிலிருந்து 1மீட்., 2மீட்., 3மீட்., 4மீட்., 5மீட். ஆகிய தூரங்களில் முறையே 1, கி.கி 2 கி.கி., 3 கி. கி., 4 கி.கி., 5கி.கி. எடைகள் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளன. கோலின் எடை 6 கி.கி. எனில் அதைக் கிடைமட்டத்தில் தாங்கக் கூடிய இடம் எது என்று காண்க.

(15) 1 மீட்டர் நீளமும், 100 கிராம் எடையுமுள்ள ஒரு சீரான கோல் ஒரு மேசையின் மேல் 20 செ.மீ. நீளம் மேசையின் விளிம்புக்கு வெளியே நீட்டிக் கொண்டிருக்குமாறு வைக்கப் பட்டுள்ளது. கோல் கவிழ்ந்து விடாமல், அதன் வெளிமுனையில் தொங்கவிடக்கூடிய மிகப்பெரிய எடையாது ?

(16) 7 மீட்டர் நீளமுள்ள ஒரு இலேசான கோல் அதன் இரு முனைகளும் இரு தாங்கிகளின் மேலிருக்குமாறு வைக்கப் பட்டுள்ளது. 112 கிராம் எடையுள்ள பொருளொன்று அக் கோலில் கட்டித் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. அப்பொருள் தொங்கவிடப்பட்டுள்ள இடம் அதன் ஒரு முனையைவிட இன்னொரு முனைக்கு 1 மீட்டர் அருகிலிருந்தால் ஒவ்வொரு தாங்கியின் மீதுமுள்ள அழுத்தம் யாது ?

(17) இரு மனிதர்கள் 5 அடி நீளமுள்ள ஒரு இலேசான கோலில் 120 ராத்தல் எடையுள்ள கல்லைக் கட்டித் தொங்க விட்டு, கோலின் முனைகளைத் தங்கள் தோள்களில் வைத்துச் சுமந்து செல்கிறார்கள். ஒருவன் மற்றவனைப்போல் இருமடங்கு எடையைச் சுமக்கவேண்டுமெனில், அக்கல்லைக் கோலின் எந்த இடத்தில் கட்டவேண்டுமென்று காண்க.

(18) 6 அடி நீளமும், 10 ராத்தல் எடையுமுள்ள ஒரு கோலில் 50 ராத்தல் எடையைக் கட்டித் தொங்கவிட்டுக் கொண்டு அக் கோலின் இருமுனைகளையும் தங்கள் தோள்களில் வைத்து ஒரு மனிதனும் ஒரு பையனும் சுமந்து செல்கிறார்கள். பையனின் சுமையைப் போல் மனிதன் இருமடங்கு சுமையைத் தாங்கவேண்டுமாயின், அந்த எடையானதுகோலின் எந்த இடத்தில் கட்டப்படவேண்டும் ?

(19) கொடுக்கப்பட்டுள்ள நீளமுள்ள ஒரு கயிற்றின் ஒரு முனையை h உயரமுள்ள ஒரு தூணில் கட்டி அதன் மறுமுனையைப் பிடித்துத் தரையிலிருக்கும் ஒரு மனிதன் ஒரு குறிப்பிட்ட விசையுடன் இழுக்கிறான். அத்தூணைச் சாய்க்கும் அளவிற்கு அவ்விசையின் இயல்பு மீப்பெரிதாயிருக்க வேண்டுமாயின் கயிற்றைத் தூணின் எந்த இடத்தில் கட்டவேண்டும்?

(20) ABC என்னும் இருசம பக்க முக்கோணத்தில் $A = 120°$; AB, AC, BC வழியே முறையே $1, 1, \sqrt{3}$ கி.கி. எடையளவுகளுள்ள விசைகள் செயல்படுகின்றன. அவற்றின் விளைவு விசை BCயை இருசம பக்கங்களாகப் பிரிக்குமென்றும் மற்ற இரு பக்கங்களுள் ஒன்றிற்கு இணையாகயிருக்குமென்றும் காட்டுக.

(21) ABC என்னும் சதுரத்தின் AB, BC, CA ஆகிய பக்கங்களின் வழியே முறையே $3P, 7P, 5P$ அளவுகளுள்ள விசைகள் செயல்படுகின்றன. அவற்றின் விளைவு விசையின் அளவையும், அது BCயைச் சந்திக்கும் புள்ளியையும் காண்க.

(22) $ABCD$ என்னும் சதுரத்தின் AB, BC, CD, DA ஆகிய பக்கங்களின் வழியே முறையே 1, 3, 6, 8 அளகளுள்ள விசைகள் செயல்படுகின்றன. சதுரத்தின் பக்கம் 5 அலகு நீளமெனில் அவற்றின் விளைவு விசையின் செயற்கோடு AB, BC ஆகிய பக்கங்களை வெட்டும் புள்ளிகளைக் காண்க.

(23) A, B, C என்னும் புள்ளிகள் பற்றி ஒருதள விசைத் தொகுதியின் திருப்புத்திறன்களின் இயற்கணித மொத்தம் முறையே 1, 6,—3 ஆகும். அவ்விசைத் தொகுதியானது

$\frac{BA^1}{A^1C} = 2$, $\frac{CB^1}{B^1A} = 3$, $\frac{BC^1}{AC^1} = 6$ என்னும் விகிதங்களில்

முறையே BC, CA, AB யைப் பிரிக்கின்ற $A' B' C'$ என்னும் புள்ளிகளின் வழியே செயல்படுகின்ற ஒரு தனி விசைக்குச் சமம் என்று காட்டு.

(24) ABC என்பது $AB = AC = 4$ அடி என்ற அளவுகளிலுள்ள ஒரு இருசம பக்க நேர்கோணம். A, B, C ஆகிய புள்ளிகள் பற்றி ஒரு விசையின் திருப்புத்திறன்கள் முறையே 8, 8, 10 அடி ராத்தல் அலகுகள் என்ருல், அவ்விசையின் அளவு, செயற்கோடு ஆகியவற்றைக் காண்க.

(25) ABC என்பது Aயில் நேர்க்கோணத்தைக் கொண்ட ஒரு நேர்கோண முக்கோணம். $AB = 4$ மீட்டர்; $AC = 3$ மீட்டர்; முக்கோணத்தின் தளத்தில் செயல்படும் ஒரு விசையின் A, B பற்றிய திருப்புத்திறன்கள் முறையே 8,—8 எனில், அவ்விசையின் செயற்கோடு ABயை Aயிலிருந்து 2 மீட்டர் தூரத்தில் வெட்டுமென்று காட்டு.

(26) A,B ஆகிய இரு புள்ளிகள் பற்றி ஒரு விசையின் திருப்புத் திறன்கள் முறையே M_2, M_1 ஆகும். C என்பது BAயில் ஒரு புள்ளி. $AC : CB\ K_1 : K_2$ எனில் C பற்றி அவ்

விசையின் திருப்புத்திறன் $\frac{M_1K_2 + M_2K_;}{K_1 + K^2}$ என்று காட்டுக.

(27) $ABCD$ ஒன்னும் சதுரத்தில் AB, DC, AC, BD வழியே முறையே 2, 10, 6, 6 கிலோகிராம் எடை விசைகள் செயல்படுகின்றன. விளைவு விசையையும், ABயுடன் அதன் சாய்வையும் காண்க.

(28) $ABCD$ என்னும் செவ்வகத்தில் $CD : AC = 3 : 5$; AB AC, DB வழியே முறையே 3 கி.கி., 5 கி.கி: 5 கி‘கி., எடை விசைகள் செயல்படுகின்றன. அவற்றின் விளைவு விசை ABக்கு இணையாகச் செயல்படுமென்று காட்டு. அதன் அளவையும் நிலையையும் காண்க.

(29) 1 மீட்டர் நீளப் பக்கங்களைக் கொண்ட $ABCD$ என்னும் சதுரத்தில் AB, BC, CD, DA ஆகியவற்றின் வழியே

முறையே 1 கி. கி., 2 கி.கி., 4 கி.கி., 3 கி.கி., எடைகளுள்ள விசைகள் செயல்படுகின்றன. அவற்றின் விளைவு சதுரத்தின் ஒரு மூலை விட்டத்திற்கு இணையாகச் செயல்படுமென்று காட்டு. அவ்விளைவு விசை ADயை எந்த இடத்தில் வெட்டுமென்று காண்.

(30) $ABCD$ என்னும் சதுரத்தின் ஒரு முக வரிசையிலெடுக்கப்பட்ட பக்கங்களின் வழியாக முறையே 2 கி. கி., 3கி. கி. 4 கி. கி., 5 கி. கி., எடை விசைகள் செயல்படுகின்றன. அவற்றின் விளைவு விசையை முழுமையாக நிர்ணயிக்கவும்.

(31) $ABCD$ என்னும் சதுரத்தில் Aயின்மேல் வைக்கப்பட்ட ஒரு துகளின்மீது AB, AC, AD வழியே முறையே 3கி.கி., 6.கி.கி. 4 கி.கி., எடை விசைகள் செயல்படுகின்றன. a என்பது சதுரத்தின் பக்கமெனில், விளைவு விசையின் செயற்கோடு BCயின் நீட்சியை Cயிலிருந்து $\frac{a}{3}$ $(\sqrt{2} - 1)$ தூரத்தில் வெட்டுமென்று காட்டுக.

(32) $ABCD$ என்னும் சாய்சதுரத்தின் AB, BC, DC, DA ஆகிய பக்கங்களின் வழியே முறையே $2\vec{P}$, $3\vec{P}$, $\vec{P}$, $5\vec{P}$ என்னும் விசைகளும், மூலைவிட்டம் BDயின் வழியே $3\vec{P}$ என்னும் விசையும் செயல்படுகின்றன. இவ்விசைகளின் விளைவு விசையைக் காண்க.

(33) 9 கி.கி. எடையுள்ள ஒரு சீரான வட்டப் பலகையின் விளிம்பில் சம தூரங்களில் பொருத்தப்பட்ட மூன்று கால்களுடன் கூடிய ஒரு வட்ட மேசையின் மேல் அதன் இரு கால்களுக்கும் நடுவில் மேசையின் ஓரத்தில் வைக்கப்படும் 12 கி.கி. எடை அம்மேசையைச் சாய்க்கக் கூடியதாயிருக்கிறது ஒவ்வொரு காலின் எடையைக் காண்க.

(34) ஒரு சதுர மேசை அதன் பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகளில் பொருத்தப்பட்ட நான்கு கால்களில் நிற்கிறது. கால்களுடன் மேசையின் எடை சதுரத்தின் மையத்தின் வழியே செயல்படுவதாகக் கொண்டு மேசை சரிந்து விழாதவாறு அதன் மூலைகளுள் ஒன்றில் வைக்கப்படக்கூடிய மிகப் பெரிய எடையைக் காண்க.

(35) மூலைகளில் கால்களைக் கொண்ட ஒரு சதுர மேசையின் ஒரு கால் முறிந்து விட்டது. மீதமுள்ள மூன்று கால்களின் மீதுள்ள அழுத்தங்கள் சமமாயிருக்குமாறு மேசையின் எடைக்குச் சமமான எடையை மேசையின்மேல் எந்த இடத்தில் வைக்க வேண்டும் ?

(36) S என்பது $\triangle ABC$ யின் சுற்று வட்ட மையம். BC, CA BA வழியே செயல்படும் P, Q, R என்னும் விசைகள் SA, SB, SC வழியே செயல்படும் P', Q', R' என்னும் விசைகளுடன் சமநிலையிலிருக்கின்றன.

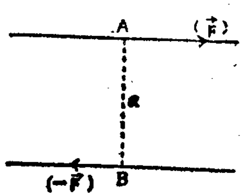
$$\frac{PP^1}{a} + \frac{QQ^1}{b} + \frac{RR^1}{c} = 0$$

என்று காட்டுக.

4. சுழலிணைகள்

(COUPLES)

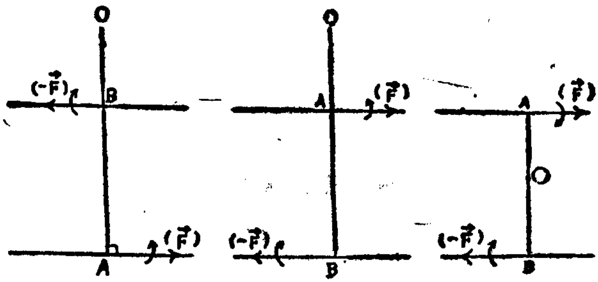
தனித்தனிச் செயற்கோடுகளையுடைய இரண்டு சம எதிரிணை விசைகள் சேர்ந்தது ஒரு சுழலிணை (couple) எனப் படும். அதாவது, இருஇணை கோடுகளில் எதிரெதிர்த் திசை களில் செயல்படுகின்ற $\vec{F}$, $-\vec{F}$ என்னும் இரு சம அளவுகளு டைய விசைகள் சேர்த்தது ஒரு சுழலிணையாகும். இச் சம எதிரிணை விசைகளின் திசையிக் கூட்டல் பூச்சியமாகுமாகை யால் அவற்றை ஒரு தனி விளைவு விசையாகச் சுருக்க முடி யாது. இவ்விரு சம எதிரிணை விசைகளின் செயற்கோடுகளுக் கிடையேயுள்ள செங்குத்துக் கோடு அச் சுழலிணையின் புயம் (arm) எனப்படும்.



படம் 84.

ஒரு சுழலிணையின் இருசம எதிரிணை விசைகளின் விளைவு விசை பூச்சியமாவதால் அச்சுழலிணையை அதற்குச் சமமான ஒரு தனி விசையாக மாற்ற இயலாது. மேலும் ஒரு சுழலிணை யின் தளத்திலுள்ள ஏதேனுமொரு புள்ளி பற்றி அதன் இரு சம எதிரிணை விசைகளின் திருப்புத்திறன்களின் இயற்கணித மொத்தப் பூச்சியமாகாது; மாறாக ஒரு மாறிலியாகயிருக்கு மென்பதைப் பின்வரும் தேற்றத்தின் மூலம் அறிந்து கொள்ள லாம்.

தேற்றம் ஒரு சுழலிணையின் தளத்திலுள்ள ஏதேனுமொரு புள்ளி பற்றி அதன் விசைகளின் திருப்புத்திறன்களின் இயற் கணித மொத்தம் ஒரு மாறிலியாகும்.



படம் 85 (அ) படம் 85 (ஆ) படம் 85 (இ)

சுழலிணையின் இரு எதிரிணை விசைகளை $\vec{F}, -\vec{F}$ என்க. F என்பது அவ்விசைகளின் பொதுவான அளவு. O என்பது அச்சுழலிணையின் தளத்ளிலுள்ள ஏதேனுமொரு புள்ளி. Oவி லிருந்து அவ்விரு விசைகளின் செயற்கோடுகளுக்கும் செங்குத் தாக ஒரு நேர்கோடு வரைக. இச்செங்குத்துக் கோடு $\vec{F}$ ஐ A யிலும் $-\vec{F}$ ஐBயிலும் வெட்டட்டும்.

படம் (85அ) இல்,

O பற்றி இரு விசைகளின் திருப்புத் திறன்களின் இயற் கணித மொத்தம்.

$$= F\cdot OA - F.OB$$
$$= F.(OA - OB)$$
$$= F.\ AB.$$

படம் (85ஆ) இல்,

O பற்றி இரு சம எதிரிணை விசைகளின் திருப்புத்திறன் களின் இயற்கணித மொத்தம்

$$= F.\ OA - FOB$$
$$= F.\ (OA - OB)$$
$$= F.\ (-AB)$$
$$= -F\cdot AB$$

படம் (86இ) இல்,

O பற்றி இரு சம எதிரிணை விசைகளின் திருப்புத்திறன் களின் இயற்கணித மொத்தம்

$$= F.OA - F.OB$$

$$= F.OA - F.OB$$

$$= F(AO + OB)$$

$$= F.AB.$$

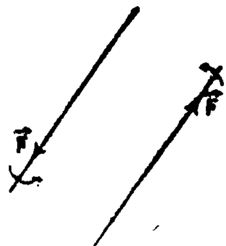
ஆகவே, ஒரு சுழலிணையின் தளத்திலுள்ள ஏதேனுமொரு புள்ளி பற்றி அச்சுழலிணையின் இரு சம எதிரிணை விசைகளின் திருப்புத்திறன்களின் இயற்கணித மொத்தம் அளவில் மாறிலி யென்று காண்கிறோம். மேலும், இம் மாறிலியானது சுழலிணை யின் சமவிசைகளின் பொது அளவு, அவ்விருவிசைகளின் செயற்கோடுகளுக்கிடையேயுள்ள செங்குத்துத் தூரம் ஆகிய வற்றின் பெருக்கம் என்றும் காண்கிறோம். இம்மாறிலியானது அச்சுழலிணையின் திருப்புத்திறன் ஒன்றழைக்கப்படுகிறது.

சுழலிணையின் திருப்புத்திறன் (Moment of a couple)

ஒரு சுழலிணையின் திருப்புத்திறன் என்புது அதன் விசை களுள் ஒன்றின் அளவு, அதன் புயம் ஆகியவற்றின் பெருக்க மாகும்.

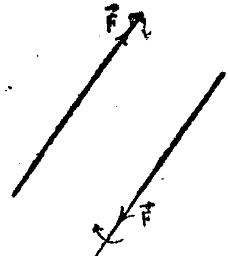
மேற்கண்ட தேற்றத்தில் குறிப்பிடப்பட்டுள்ள சுழலிணை யின் திருப்புத்திறன் *F. AB* ஆகும். பொதுவாக, ஒரு சுழலி ணையை அதன் விசை, புயம் ஆகியவற்றால் குறிப்பிடுவது வழக்கம். அதன்படி, மேற்கண்ட சுழலிணையை (F, AB) என்று குறிப்பிடலாம். ஒரு சுழலிணையின் விசையின் அளவோ அல்லது புயமோ பூச்சியமாகாதாகையால் அதன் திருப்புத் திறன் ஒரு போதும் பூச்சியமாகாது. ஒரு பொருளின் மீது செயல் படும் ஒரு சுழலிணையின் இயல்பு அப்பொருளை இடஞ்சுழியாக (anticlockwise) ச் சுழலச் செய்யுமியல்புடையதாயின் அதன் திருப்புத்திறன் நேரடையாளமுடையதாகவும், வலஞ்சுழியாகச் சுழலச் செய்யுமியல்புடையதாயின் அதன் திருப்புத்திறன் எதிரடையாளமுடையதாகவும் கொள்ளப்படுகிறது.

இடஞ்சுழித்திருப்புத்திறனை "நேர்த்திருப்புத்திறன்" என்னும், வலஞ்சுழித் திருப்புத்திறனை "எதிர்த்திருப்புத்திறன்" என்றும் குறிப்பிடுவதுண்டு.



நேர்த்திருப்புத்திறன்

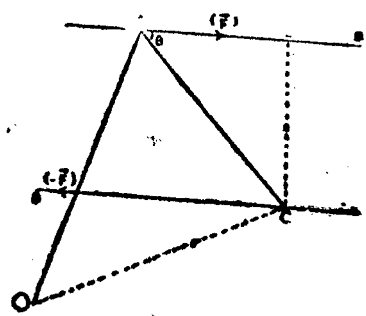
படம் 86 (அ)



எதிர்த்திருப்புத்திறன்

படம் 86 (ஆ)

$AB.CD$ எனுனும் இரு இணைகோடுகளின் வழியே செயல்படும் $\vec{F}, -\vec{F}$ என்னும் சம எதிரிணை விசைகளாலான ஒரு சுழலிணையைக் கருதுக.



படம் 87

O என்பன் சுழலிணையின் தளத்திலமைந்துள்ள ஏதேனுமொரு புள்ளி. A,C என்பன முறையே $\vec{F}, -\vec{F}$ ஆகியவிசைகளின் செயற்கோடுகளின் மேலுள்ள ஏதேனுமிருபுள்ளிகள். OA, OC ஆகியவற்றைச் சேர்க்கவும்,

திசையி முறைப்படி,

O பற்றி விசை $\vec{F}$ இன் திருப்புத் திறன் $= \vec{OA} \times \vec{F}$

O பற்றி விசை $-\vec{F}$ இன் திருப்புத்திறன் $= \vec{OC} \times -\vec{F}$.
∵ O பற்றி இருவிசைகளின் திருப்புத்திறன்களின் திசையிக் கூட்டல்.

$$= \vec{OA} \times \vec{F} + \vec{OC} \times -\vec{F}$$

$$= \vec{OA} \times \vec{F} - \vec{OC} \times \vec{F}$$

$$= (\vec{OA} - \vec{OC}) \times \vec{F}$$

$$= \vec{CA} \times \vec{F}$$

இரு விசைகளின் திருப்புத்திறன்களின் இந்த மொத்தமானது Oஐச் சார்ந்திராமல் CA மட்டுமே சார்ந்துள்ளதைக் கவனிக்கவும், ஆகவே, இது ஒரு மாறிலியாகும். மேலும், இம் மாறிலியானது இருவிசைகளின் செயற்கோடுகளின் மேலுள்ள ஏதேனுமிருபுள்ளிகளைச் சேர்க்கும நேர்கோட்டுத்துண்டம் அச்சுழலிணையின் விசை ஆகியவற்றின் திசையில் பெருக்கமாகும்,

இப்பொழுது $CL \perp AB$ வரைந்து, $\angle CAB = \theta$ என்று குறிப்பிடுக. சுழலிணையின் தளத்திற்குச் செங்குத்துத் திசையிலுள்ள திசையி அலகு $\vec{n}$ என்று குறிப்பிட்டால்,

$$CA \times \vec{F} = CA \cdot F \sin\theta \, \vec{n} \text{ ஆகும்.}$$

$$= F \cdot CA \sin\theta \, \vec{n}$$

$$= F . CL \cdot \vec{n}$$

= (சுழலிணையின் ஒரு விசையின் அளவு) (புயம்). n

= (சுழலிணையின் ஒரு விசையின் அளவு) (புயம்) . $\vec{n}$
இதுவே அச்சுழலிணையின் திருப்புத் திறன் என்றழைக்கப் படுகிறது, ஆகவே, ஒரு சுழலிணையின் திசையித் திருப்புத்திறன் என்பது அதன் விசைகளின் செயற்கோடுகளின் மேலுள்ள

ஏதேனுமிரு புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நேர்கோட்டுத்துண்டம். அதன் விசைகளுள் ஒன்று ஆகியவற்றின் திசையில் பெருக்க மாகும். ஒரு சுழலிணையின் திருப்புத்திறன் என்பது அதன் சம விசைகளுள் ஒன்றின் அளவு, அதன் புயம் ஆகியவற்றின் பெருக்கத்தை அளவாகக் கொண்டு, அதன் தளத்திற்குச் செங்குத்தான ஒரு திசையியாகும்.

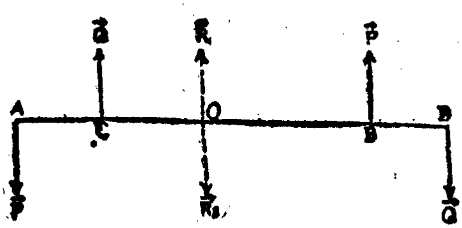
ஒரு சுழலிணையின் வளத்திற்குச் செங்குத்தான எந்த நேர் கோடும் அச்சுழலிணையின் அச்சு எனப்படும். ஒரு சுழலிணை யின் திசையித் திருப்புத்திறன் அதன் தளத்திற்குச் செங்குத் தாகயிருக்குமாதலின் அதன் அச்சு அதன் திசையித் திருப்புத் திறனுக்கு இணையாகயிருக்கும்.

தேற்றம் ஒரே தளத்தில் செயல்படுகின்ற சம, எதிர்த் திருப்புத்திறன்களைக் கொண்ட இரு ஒருதளச் சுழலிணைகள். ஒன்றையொன்று ஈடு செய்யும்.

$(P, \vec{p}), (Q, \vec{q})$ என்பன சம, எதிர்த்திருப்புத்திறன்களைக் கொண்ட இரு ஒருதளச் சுழலிணைகள். அவற்றின் திருப்புத் திறன்களின் அளவுகள் சமமாகயிருப்பதால்,

$$Pp = Qq$$

ஆகும்.



படம் 88

இச்சுழலிணைகளின் விசைகளின் செயற்கோடுகளை $A, B; C, D$ என்னும் புள்ளிகளில் வெட்டுமாறு ஒரு செங்குத்துக் கோடு வரைக.

$(P, AB), (Q, CD)$ என்பன முறையே (P,p), $((Q, q)$ என்னும் சுழலிணைகளைக் குறிப்பிடுவதாகக் கொள்க.

திருப்புத் திறன்கள் சமமாக யிருப்பதால்,

$$P \cdot AB = Q.CD \qquad \ldots\ldots(1)$$

இப்பொழுது, B, C வழியே செயல்படும் P, Q ஆகிய ஒரு திசையிணை விசைகளின் விளைவு R_1 எனில்,

$$R_1 = P + Q$$

ஆகும். இது B, C ஆகிய புள்ளிகளில் செயல்படும் P, Q ஆகிய விசைகளுக்கு இணையாக அவற்றின் திசையில் செயல்படும். இது BCயில் O என்னும் புள்ளி வழியே செயல்படுவதாயின்,

$$P.OB = Q.CO \qquad \ldots\ldots(2)$$

ஆகும். (1) இலிருந்து (2) ஐக் கழிக்கவும்.

$$P\,(AB-OB) = Q\,(CD-CO)$$

அதாவது, $P \cdot OA = Q \cdot OD$

அல்லது, $\dfrac{OA}{OD} = \dfrac{Q}{P}$

ஆனால், A, B ஆகிய புள்ளிகளில் செயல்படுகின்ற P, Q என்னும் விசைகளின் விளைவு R_2 எனில்,

$$\vec{R_2} = P + Q$$

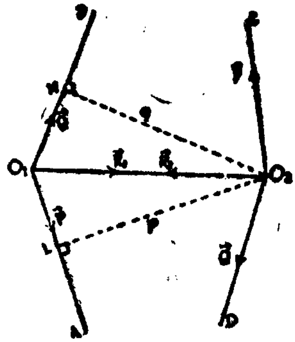
ஆகும். தவிர, R_2 ஆனது ADயை $Q:P$ என்றும் விகிதத்தில் பிரிக்கின்ற புள்ளி வழியே A, D ஆகிய புள்ளிகளில் செயல்படும் விசைகளுக்கு இணையாகச் செயல்படும்.

ஆனல, ADஐ $Q:P$ என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்கின்ற புள்ளி O என்று சமன்பாடு (3) இலிருந்து அறிந்து கொள்ளலாம். ஆகவே, R_2 ஆனது O வழியே R_1க்கு எதிராகச் செயல்படும். $(P + Q)$ அளவுடைய விசை யென்று காண்கிறோம்.

ஆகவே, கொடுக்கப்பட்டுள்ள இரு சுழலிணைகளின் நான்கு விசைகளின் விளைவு O வழியே செயல்படும் $\vec{R_1}, \vec{R_2}$ என்னும் இரு சம எதிர்விசைகளென்று அறிகிறோம். இவ்விரு சம எதிர் விசைகளும் ஒன்றையொன்று விளைவு நீக்கம் செய்து விடுமாதலின், இரு சுழலிணைகளும் ஒன்றையொன்று ஈடு செய்கின்றனவென்று அறிந்து கொள்ளலாம்.

$(\vec{P}, p)$ சுழலிணையின் ஒரு விசையும், $(\vec{Q}, q)$ சுழலிணையின் ஒரு விசையும் O_1 என்னும் புள்ளியில் சந்திக்கப்படும். இவ்விரு சுழலிணைகளின் மற்ற இரு விசைகளும் O_2 என்னும் புள்ளியில் சந்திக்கட்டும்.

$(\vec{P}, p)$ இன் செயற்கோடுகளை O_1A O_2C என்னும், $(\vec{Q}, q)$ இன் செயற்கோடுகளை O_1B, O_2D என்னும் குறிப்பிடுக.



படம் 89

O_1 இல் சந்திக்கின்ற P, Q ஆகிய விசைகளின் செயற்கோடுகளுக்கு O_2 — இலிருந்து முறையே O_2L, O_2M என்னும் செங்குத்துக்கள் வரைக.

$$\therefore O_2L = P; \quad O_2M = q$$

O_2 பற்றி O_2 வழி $\vec{P}$யின் திருப்புத்திறன் $= P.O_2L = Pp.$

O_2 பற்றி O_2 வழி $\vec{Q}$ வின் திருப்புத்திறன் $= -Q.O_2M$
$= -Qq.$

இத்திருப்புத் திறன்களின் இயற்கணித மொத்தம்

$$= Pp - Qq = O$$

ஏனெனில், இரு சுழலிணைகளின் திருப்புத்திறன்களும் சம அளவுடையன. அதாவது, O_2 பற்றி O_1 வழியே செயல்படும் $\vec{P}, \vec{Q}$ ஆகிய விசைகளின் திருப்புத்திறன்களின் இயற்கணித மொத்தம் பூச்சியமாகும். எனவே, O_1 இல் சந்திக்கின்ற P, Q ஆகிய விசைகளின் விளைவு விசை O_2 வழியே செல்லுமென்று அறிகிறேம். மேலும், இவ்விளைவு விசையானது O_1 வழியே O_1 இலிருந்து வெளிநோக்கிச் செயல்படுசமன்று இணைகர விதியின் மூலம் காணலாம். ஆகவே, O_1 வழியே செயல்படும் $\vec{P}, \vec{Q}$ ஆகிய விசைகளின் விளைவு விசையாகிய R_1 என்பது O_1O_2 வழியே செயல்படும்.

தவிர, $R_1 = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \angle AOB}$

இதுபோல், O_1 வழியே செயல்படும் P, Q ஆகிய விசைகளின் விளைவு விசை R_2 எனில்,

$$R_2 = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \angle COD.}$$

என்றும், அது O_1O_2 வழியே செயல்படுமென்றும் காணலாம்.

ஆனால், $O_2C \parallel O_1A$; $O_2D \parallel O_1B$.

$$\therefore \angle COD = \angle AOB$$

$$\therefore R_1 = R_2$$

ஆகவே, இரு சுழலிணைகளின் நான்கு விசைகளும் சேர்ந்து முறையே O_1O_2, O_2O_1 வழியே செயல்படுகின்ற $\vec{R_1}, \vec{R_2}$ என்னும் இரு சம எதிர் விசைகளுக்குச் சமமாகிறது. இவ்விரு சம விசைகளும் ஒன்றையொன்று ஈடு செய்யுமாகையால், கொடுக்கப்பட்டுள்ள இரு சம எதிர்ச்சுழலிணைகளும் ஒன்றையொன்று ஈடுசெய்து கொள்ளுமென்றறிக.

குறிப்பு: இரு சம எதிர்ச் சுழலிணைகளால் தாக்கப்படும் ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருள் சமநிலையிலிருக்கும்.

ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின் மீது சம விளைவுகளையேற்படுத்துகின்ற சுழதிணைகள் யாவும் "சமச் சுழலிணைகள்" எனப்படும்.

தேற்றம் திருப்புத் திறன்கள் சமமாகவும், ஒரே அடையாளமுடையதாகவுமுள்ள இரு ஒரு தளச் சுழலிணைகள் சமச் சுழலிணைகளாகும்.

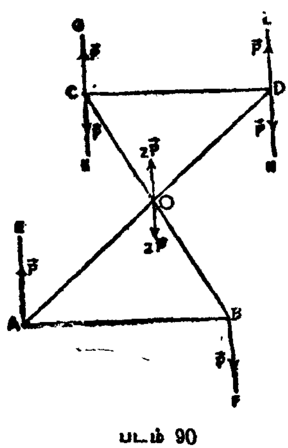
ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின் மீது செயல்படுகின்ற $\vec{(P, q)}$ (Q, q) என்னும் ஒரு தளச் சுழலிணைகளின் திருப்புத்திறன்கள் சமமாகவும், ஒரே அடையாளமுடையதாகவுருருப்பதாகக் கொள்க.

அதாவது, $Pp = Qq$

அதே தளத்தில் இச் சுழலிணைகளின் திருப்புத்திறனுக்குச் சமமாகவும் எதிராாவுமுள்ள திருப்புத்திறனைக் கொண்ட (R, r) என்னும் சுழலிணையைச் செயல்படுத்துக.

முந்திய தேற்றத்தின்படி, $\overrightarrow{(P, p)}$, $\overrightarrow{(R, r)}$ என்பன சம எதிர்த் திருப்புத்திறன்களைக் கொண்ட இரு ஒருதளச் சுழலிணைகளாதலின் அவை ஒன்றையொன்று ஈடுசெய்து விடும். எனவே, அப் பொருளின்மீது $\overrightarrow{(Q, q)}$ என்னும் சுழலிணையின் விளைவை மிஞ்சி நிற்கும். அதாவது, அப்பொருளின் சுழலும் இயல்பு சுழலிணை (P,p) யின் திருப்புத் திறனாகும்.

மாறாக, $\overrightarrow{(Q,q)}$, $\overrightarrow{(R,r)}$ ஆகிய சுழலிணைகள் சம எதிர்த்திருப்புத் திறன்களைக் கொண்ட இரு ஒரு தளச் சுழலிணைகளாதலின், அப்பொருளின்மீது ஈடுசெய்து விடுமென்று கொள்வோமானால், அப்பொருளின் மீது (P,q) என்ற சுழலிணையின் விளைவே மிஞ்சி நிற்கும். எனவே, அப்பொருளின் சுழலும் இயல்பு சுழலிணை (P,q) யின் திருப்புத் திறனாகும். ஆனால் $\overrightarrow{(Q, q)}$, $\overrightarrow{(P, p)}$ ஆகிய சுழலிணைகளின் திருப்புத் திறன்கள் சமமாதலின், அப்பொருளின்மீது அவ்விரு சுழலிணைகளால் உண்டாக்கப்படுகின்ற விளைவுகளும் சமமாகும். எனவே, இரு சுழலிணைகளும் சமமாகும்.



படம் 90

தேற்றம்: ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின்மீது செயல்படும் ஒரு சுழலிணையை அதன்தளத்திற்கு இணையான மற்றொரு தளத்தில் அதன் புயத்திற்கு இணையான புயத்தையும், அதே அளவும் போக்குமுடைய திருப்புத்திறனையும் கொண்ட சுழலிணையாக மாற்றுவதால் அதன் விளைவில் எவ்வித மாறுதலும் ஏற்படாது.

ஒரு பொருளின்மீது ஏதேனுமொரு தளத்தில் செயல்படுகின்ற ஒரு சுழலிணையை $(\vec{P}, AB)$ என்க.

$AB = p$ எனில் இதன் திருப்புத் திறன் Pp ஆகும்.

இத்தளத்திற்கு இணையான மற்றொரு தளத்தில் ABக்கு இணையாகவும் சமமாகவும் CD என்னும் நேர்கோட்டுத் துண்டத்தை யெடுத்துக் கொள்க.

C, D ஆகிய புள்ளிகள் ஒவ்வொன்றின் வழியாகவும் விசை $\vec{P}$க்கு இணையான திசையில் P அளவு கொண்ட இரு சம எதிர் விசைகளைச் செயல்படுத்துக.

AB, CD என்னும் இணைகோடுகள் ஒரே தளத்திலிருப்பதாகக் கொள்ளலாம். ஆகவே, AD, BC ஆகியவை ஒரு புள்ளியில் வெட்டும். இப்புள்ளியை O என்று குறிப்பிடுக.

CD ஆனது ABக்குச் சமமாகவும், இணையாகவும் இருப்பதால், $ABCD$ ஒரு இணைகரமாகும். $\because$ ADயும் BCயும் ஒன்றையொன்று இரு சமபாகங்களாக வெட்டும்.

AE, DL வழியே செயல்படுகின்ற $\vec{P}\,\vec{P}$ என்னும் இரு ஒரு திசையிணை விசைகளின் விளைவு விசை ADயின் நடுப்புள்ளியாகிய O வழியாக, அவை செயல்படும் திசையிலேயே செயல்படும் $2\vec{P}$ என்னும் விசையாகும். இதுபோல், BF, CK வழியே செயல்படும் $\vec{P}, \vec{P}$ என்னும் இரு ஒரு திசையிணை விசைகளின் விளைவு விசை $B\,C$யின் நடுப்புள்ளியாகிய O வழியாக, அவை செயல்படும் திசையிலேயே செயல்படும் $2\vec{P}$ என்னும் விசையாகும். இவ்விரு விளைவு விசைகளும் சமமாகவும், எதிராகவும் இருப்பதால் அவை ஒன்றையொன்று ஈடு செய்துவிடும்.

ஆகவே, எஞ்சியிருப்பவை CG, DH வழியே செயல் $\vec{P}, \vec{P}$, என்னும் சம எதிரிணை விசைகளேயாகும். இவை $(\vec{P}, \vec{CD})$ என்னும் சுழலிணையாக அமையும் இச்சுழலிணையின் திருப்புத் திறன் $P.CD = P.AB = Pp$ ஆகும். இத்திருப்புத்திறன் கொடுக்கப்பட்டுள்ள சுழலிணையின் திருப்புத் திறனுக்குச் சமமாகவும்

ஒரே அடையாளமுடையதாகவுமிருப்பதால், இரு சுழலிணைகளும் அப்பொருளில் சம விளைவையே ஏற்படுத்தும்.

ஆகவே. ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின்மீது செயல்படும். ஒரு சுழலிணையை அதன் தளத்திற்கு இணையான தளத்தில் அதன் திருப்புத்திறனைப் போன்ற அளவும் போக்குமுடைய திருப்புத்திறனுடன் அப்பொருளின் மீது செயல்படுகின்ற வேறு ஒரு சுழலிணையாக அதே விளைவுடன் மாற்றலாமென அறிகிறோம். ஆனால் சம அளவும், ஒரே போக்குமுடைய ஒருதளச் சுழலிணைகள் யாவும் சமமென்று நாமறிவோம், ஆகவே, ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின் மீதுசெயல்படும் எந்தச் சுழலிணையையும் அதே தளத்தில் அல்லது அதற்கு இணையான தளத்தில் அதன் திருப்புத்திறனைப் போன்ற அளவும் போக்குமுடைய திருப்புத்திறனுடன் அப்பொருளின் மீது செயல்படும் வேறுஒரு சுழலிணையாக அதே விளைவுடன் கூடியதாக மாற்ற முடியுமென்பது தெளிவாகிறது.

சுழலிணைகளின் தொகுப்பு (Composition of couples)

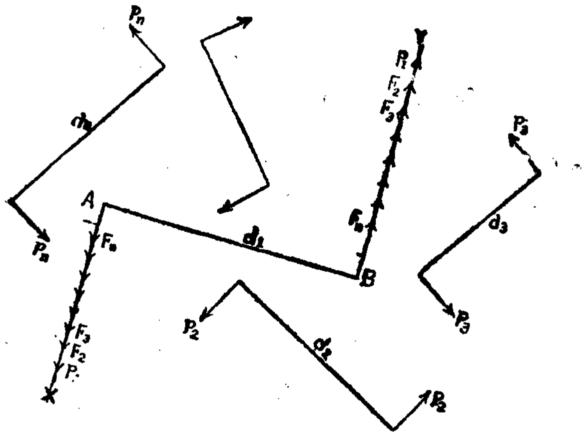
தேற்றம் ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின் மீது செயல்படும் எவ்வெண்ணிக்கையிலுமான ஒரு தளச்சுழலிணைகளின் விளைவு அதே தளத்தில் அவற்றின் திருப்புத்திறன்களின் இயற்கணித மொத்தத்திற்குச் சமமான திருப்புத்திறனுடன் செயல்படும் ஒரு தனிச் சுழலிணைக்குச் சமமாகும்,

$(\vec{P_1}, d_1), (\vec{P_2}, d_2), \ldots \ldots, (\vec{P_n}, d_n)$ என்னும் ஒருதளச் சுழலிணைகள் ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின் மீது செயல்படுவதாகக் கொள்க. (P_1, d_1) என்ற சுழலிணையின் புயம் AB என்னும் அதன் சம எதிரிணை விசைகள் AX, BY வழியே செயல்படுகின்றனவென்றும் கொள்க.

எந்த ஒரு சுழலிணைக்குப் பதிலாகவும் அதன் விளைவு மாறாமல் அதன் தளத்திலேயே அதற்குச் சமமான மற்றொரு சுழலிணையைச் செயல்படச் செய்யலாமாகையால். $(\vec{P_2}, d_2)$ என்னும் சுழலிணையை AB ஐப் புயமாக கொண்ட $(\vec{F_2}, AB)$ என்னும் சமச்சுழலிணையாக மாற்றுக. இச்சமச் சுழலிணையின் AX, BY ஆகிய திசைகளில் செயல்படட்டும். இப்புதிய சுழலிணை $(\vec{F_2}, AB)$ யின் திருப்புத்திறன் $(\vec{P_2} d_2)$ என்ற சுழலிணைக்குச் சமமாகுமாகையால், $F_2 . AB = P_2 . d_2$

அல்லது, $F_2 = \frac{P_2 d_2}{AB}$

இதுபோல், சுழலிணை (P_3, d_3) யை AB ஐப் புயமாகக் கொண்ட (F_3, AB) என்னும் சமச் சுழலிணையால் அதன் சம எதிரிணை விசைகள் AX BY, வழியே செயல்படுமாறு மாற்றுக.



படம் . 91

$$\therefore F_3 . AB = P_3 d_3$$

அல்லது, $F_3 = \frac{P_3 d_3}{AB}$

இதுபோல், $(\vec{P_4}, \vec{d_4}), \ldots\ldots, (\vec{P_n}, \vec{d_m})$ ஆகிய சுழலிணைகள் யாவற்றையும் $(F_4, AB), \ldots\ldots, (F_n, AB)$ என்னும் சமச்சுழலிணைகளால் மேற்கண்டவாறு மாற்றுக.

இப்பொழுது, AX வழியே செயல்படுகின்ற $P_1 F_2 F_3, \ldots\ldots, F_n$ ஆகிய விசைகள் யாவும் $R = (P_1 + F_2 + F_3 + \ldots\ldots + F_n)$ என்னும் தனி விசையாக AX வழியே செயல்படும். இதுபோல், BY வழியே செயல்படும் எல்லாவிசைகளும் ஒன்று சேர்ந்து $R = (P_1 + F_2 + F_3 + \ldots\ldots F_n)$ என்னும் தனி விசையாக BY வழியே செயல்படும்.

இவ்விரு விளைவு விசைகளும் சமமாகவும் எதிரிணையாகவும் இருப்பதால், இவை $(\vec{R, AB})$ என்னும் சுழலிணையாக அமையும், ஆகவே, கொடுக்கப்பட்டுள்ள சுழலிணைகளின் விளைவு AB ஐப் புயமாகக் கொண்ட $(\vec{R, AB})$ என்னும் தனிச் சுழலிணையாகும். இவ்விளைவுச் சுழலிணையின் திருப்புத்திறன் ⋯ $R. AB$

$$= (P_1 + F_2 + F_3 + \ldots\ldots + F_n).\ AB$$

$$= P_1 \cdot AB + F_2\ AB + F_3\ AB + \ldots\ldots F_n\ AB.$$

$$P_1 d_1 + \frac{P_2\ d_2}{AB} AB + \frac{P_3 d_3}{AB} AB + \ldots\ldots + \frac{P_n d_n}{AB} AB$$

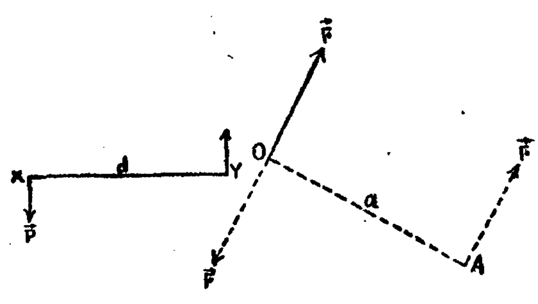
$$P_1 d_1 + P_2 d_2 + P_3 d_3 + \ldots\ldots + P_n d_n$$

= கொடுக்கப்பட்டுள்ள சுழலிணைகளின் மொத்தத் திருப்புத்திறன்.

குறிப்பு: பல்வேறு சுழலிணைகளின் திருப்புத்திறன்களின் இயற்கணித மொத்தம் காணும்போது அவற்றின் போக்குகளுக்கேற்ப நேர் அல்லது எதிர் அடையாளங்களுடன் கணக்கிட வேண்டுமென்பதை மனதிற் கொள்க.

குறிப்பு: கொடுக்கப்பட்டுள்ள சுழலிணைகள் பல்வேறு இணைத் தளங்களிலிருப்பின், முதலில் அத்தளங்களுக்கு இணையான ஒரு பொதுத் தளத்திற்கு அச்சுழலிணைகள் யாவற்றையும் மாற்றிப் பின்னர் மேற்கூறப்பட்ட முறையில் அவற்றின் விளைவுச்சுழலிணையைக் காணவேண்டும்.

தேற்றம் ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின்மீது ஒரே தளத்தில் செயல்படுகின்ற ஒரு விசையும் ஒரு சுழலிணையும் சேர்ந்து அவ் விசைக்குச் சமமாகவும் இணையாகவும்முள்ள ஒரு தனி விசைக்குச் சமமாகும்.



படம் 92

ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளில் O என்னும் புள்ளியல் $\vec{F}$ என்னும் ஒரு விசையும், அதன் தளத்திலேயே XY ஐப் புயமாகக் கொண்டு $(\vec{P}, d)$ என்னும் சுழலிணையும் செயல்படுவதாகக்

கொள்க. $(\vec{P}, d)$ என்ற சுழலிணையை $(\vec{F}, a)$ என்னும் மற்றொரு சமச்சுழலிணையாக, அதன் ஒரு விசை O வழியே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விசை $\vec{F}$ இன் திசைக்கு எதிராகச் செயல்படுமாறும், அதன் புயம் OA யில் அமையுமாறும், மற்றொரு விசை A வழியே, கொடுக்கப்பட்டுள்ள விசைக்கு இணையாக செயல்படுமாறும் மாற்றுக.

$$\therefore \; F.a = P.d$$

அதாவது, $$F.OA = P.d$$

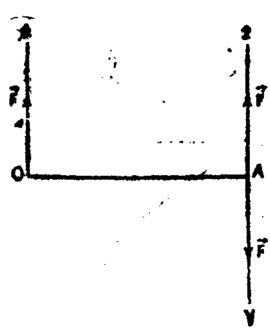
அல்லது, $$OA = \frac{P.d}{F}$$

இப்பொழுது Oவில் செயல்படுகின்ற $\vec{F}, \vec{F}$ என்னும் இரு சம எதிர் விசைகளும் ஒன்றையொன்று ஈடுசெய்து விடுமாகையால் மிஞ்சுவது A வழியே, கொடுக்கப்பட்டுள்ள விசைக்கு இணையாக சம விசையாகும். இதுவே, கொடுக்கப்பட்டுள்ள விசை சுழலிணை ஆகியவற்றின் விளைவு ஆகும்.

குறிப்பு : ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின்மீது ஒரு தனி விசையும், ஒரு சுழலிணையும் ஒரே தளத்தில் செயல்படின் அவை சமநிலை பெற முடியாதென்பதை இதன் மூலம் உணர்க.

மறுதலை தேற்றம்:

ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின் ஏதேனுமொரு புள்ளியில் செயல்படுகின்ற ஒரு விசையானது, அப்பொருளின் வேறு ஏதேனுமொரு புள்ளியில் செயல்படுகின்ற ஒரு சம இணை விசையுடன் சேர்ந்த ஒரு சுழலிணைக்குச்சமமாகும்.



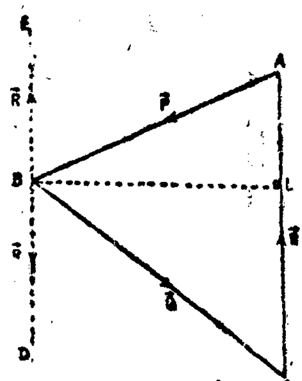
படம் 93

$\vec{F}$ என்னும் விசை ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளில் O என்னும் புள்ளியில் OX என்னும் திசையில் செயல்படுவதாகக் கொள்க. A என்பது அப்பொருளில் வேறு ஏதேனுமொரு புள்ளி.

$\vec{F}$ இன் செயற்கோடாகிய OXக்கு இணையாக Aயில் AY, AZ வழியே $\vec{F}$, $\vec{F}$ என்னும் இரு சம எதிர் விசைகளைச் செயல் படுத்துக.

இவ்விரு சம எதிர் விசைகளும் ஒன்றையொன்று ஈடு செய்து விடுமாகையால் விசைகளின் விளைவில் எவ்விதமாறு தலுமேற்படாது. ஆகவே, கொடுக்கப்பட்டுள்ள $\vec{F}$ என்னும் விசையானது முறையே OX, AY, AZ வழியே செயல்படுகின்ற $\vec{F}$, $\vec{F}$, $\vec{F}$ என்னும் மூன்று விசைகளுக்குச் சமமாகும். ஆனால், OX வழியே செயல்படும் $\vec{F}$ என்னும் விசையும், AY வழியே செயல்படும் $\vec{F}$ என்னும் விசையும் சமமாகவும் எதிரிணையாக வுமிருப்பதால் அவை ஒரு சுழலிணையாக அமையும். மிஞ்சுவது AZ வழியே செயல்படும் ஒரு தனி விசையாகும்.

எனவே, O வழியே செயல்படுகின்ற கொடுக்கப்பட்டுள்ள $\vec{F}$ என்னும் விசையானது, பொருளின் வேறொரு புள்ளியாகிய Aயில் AZ வழியே செயல்படும் $\vec{F}$ என்னும் சமஇணை விசை யுடன் $(\vec{F}, OA)$ என்னும் சுழலிணைக்குச் சமமாகும்.



படம் 94

தேற்றம்: ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின்மீது செயல்படு கின்ற மூன்று ஒருதள விசைகள் அளவு, திசை, செயற்கோடு கள் ஆகியவற்றால் ஒரு முக்கோணத்தின் ஒரு முக வரிசையி

லெடுக்கப்பட்ட பக்கங்களினுல் குறிப்பிடப்பட்டால், அவை அம்முக்கோணத்தின் இரு மடங்கு பரப்பினுல் குறிப்பிடப்படும் திறன் கொண்ட ஒரு சுழலிணைக்குச் சமமாகும்.

ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின்மீது செயல்படும் $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$ என்னும் மூன்று விசைகள் அளவு, திசை, செயற்கோடுகள் ஆகியவற்ருல் $\triangle ABC$யின் AB, BC, CA என்ற பக்கங்களால் குறிப்பிடப்படுகின்றன. அதாவது,

$\vec{AB} = \vec{P}$; $\vec{BC} = \vec{Q}$; $\vec{CA} = \vec{R}$. Bயில் ACக்கு இணையாக வரையப்பட்டுள்ள BD, BE ஆகிய நேர்கோடுகளின் வழியே $\vec{R}, \vec{R}$ என்னும் இரு சம எதிர் விசைகளைச் செயல்படுத்துக. இச் சம எதிர் விசைகள் ஒன்றையொன்று ஈடு செய்யுமாகையால் விசைகளின் விளைவில் எவ்வித மாறுதலும் ஏற்படாது.

Bயில் AB, BC, BE வழியே செயல்படுகின்ற $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$ என்னும் விசைகள $\triangle ABC$ யின் ஒரு வரிசையிலெடுக்கப்பட்ட AB, BC, CA என்னும் பக்கங்களால் அளவிலும், திசையிலும் குறிப்பிடப்படுவதால், விசை முக்கோண விதியின்படி இம் மூன்று விசைகளும் சமநிலையிலிருக்கும். எஞ்சியிருப்பவை BD வழியே செயல்படும் $\vec{R}$ என்னும் விசையும், CA வழியே செயல்படும் $\vec{R}$ என்னும் விசையாகும். இவ்விரு விசைகளும் சமமாகவும், இணையாகவும் எதிராகவுமிருப்பதால் அவை ஒரு சுழலிணையாக அமையும்.

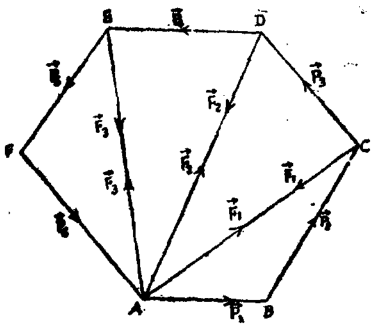
$BL \perp CA$ எனில், இச்சுழலிணையின் திருப்புத்திறன் $R.BL$ ஆகும்.

ஆனுல் $R.BL = CA.\ BL = 2\triangle ABC$.

ஆகவே, கொடுக்கப்பட்டுள்ள மூன்று விசைகளின் விளைவு அம்முக்கோணத்தின் இரு மடங்கு பரப்பினுல் குறிப்பிடப்படுகின்ற திருப்புத் திறன் கொண்ட $(\vec{R}, BL)$ என்னும் சுழலிணையாகும்.

இத் தேற்றத்தை எவ்வெண்ணிக்கையுமுடைய விசைகளுக்குப்பின் வருமாறு விரிவுபடுத்தலாம்.

ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின் மீது செயல்படும் எவ்வெண்ணிக்கையுமுடைய ஒருதளவிசைகள் அளவு, திசை, செயற்கோடுகள் ஆகியவற்ருல் ஒரு முடிய பல கோணத்தின் ஒருமுக வரிசையிலெடுக்கப்பட்ட பக்கங்களால் குறிப்பிடப்படின், அவ்விசைகள் அப்பல கோணத்தின் இரு மடங்கு பரப்பினுல் குறிப்பிடப்படுகின்ற திருப்புத்திறன் கொண்ட ஒருசுழலிணைக்கு சமமாகும்.



படம் 95

$P_1 P_3 P_8$ ...... என்பன ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின் மீது செயல்படும் பல ஒரு தள விசைகள்.

ABCDEFA என்பது ஒரு முடிய பலகோணம்.

$\vec{AB} = \vec{P_1}\ \vec{BC} = \vec{P_2};\ldots, \vec{Fs} = \vec{P_9}.$

AC, AD, AE ஆகியவற்றைச் சேர்க்கவும். இவற்றின் வழியாக முறையே $\vec{F_1}, \vec{F_1}; \vec{F_2}, \vec{F_2}; \vec{F_3}, \vec{F_3}$ என்னும் விசைகளை எதிர் எதிராகச் செயல்படுத்தவும். இச் சம எதிர் விசைகள் ஒன்றையொன்று ஈடுசெய்து விடுமாகையால் விசைகளின் விளைவில் எவ்விதமாறுதலும் ஏற்படாது. முந்திய தேற்றத்தை *ABC, ACD, ADE, AEF* ஆசிய முக்கோணங்களுக்குப் பயன்படுத்தவும்.

AB, BC, CA வழியே செயல்படும் $\vec{P_1}, \vec{P_2}, \vec{F_1}$ ஆகிய விசைகள்

$= 2\triangle ABC$ திருப்புத்திறன் கொண்ட ஒரு சுழலிணை

AC, CD, DA வழியே செயல்படும் $\vec{F_1}$, $\vec{P_3}$, $\vec{F_2}$ ஆகிய விசைகள்

$= 2\triangle ACD$ திருப்புத்திறன் கொண்ட ஒரு சுழலிணை

AD, DE, EA வழியே செயய்படும் $\vec{F_2}$, $\vec{P_4}$, $\vec{F_3}$ ஆகிய விசைகள்

$= 2\triangle ADE$ திருப்புத்திறன் கொண்ட ஒரு சுழலிணை.

AE, EF, FA வழியே செயல்படும் $\vec{F_3}$, $\vec{P_5}$, $\vec{P_6}$ ஆகிய விசைகள்

$= 2\triangle AEF$ திருப்புத்திறன் கொணட ஒரு சுழலிணை.

ஆகவே, எல்லா விசைகளின் மொத்த விளைவு

= இச்சுழலிணைகளின் மொத்தம்

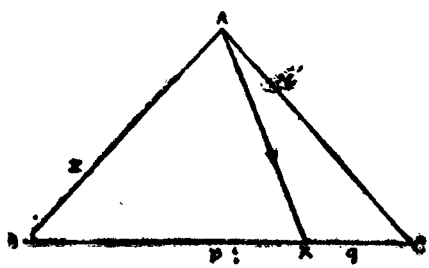
$= 2\,(\triangle ABC + \triangle ACD + \triangle ADE + \triangle AEF)$ திருப் புத்திறன்

கொண்ட ஒரு தனிச் சுழலிணை

$= 2 \times$ பலகோணம் $ABCDEF$ என்ற திருப்புத்திறன்

கொண்ட ஒரு தனிச் சுழலிணை.

மாதிரி 60 X, Y, Z என்பன $\triangle ABC$ யின் BC, CA, AB ஆகிய பக்கங்களை $BX : XC = CY : YA = AZ : ZB = p : q$ என்னும் விகிதங்களில் பிரிக்கும் புள்ளிகள். $\triangle$ என்பது $\triangle ABC$ யின்



படம் 96

பரப்பைக் குறிப்பிடுமெனில், $\vec{AX}$, $\vec{BY}$, $\vec{CZ}$ ஆகியவற்றால் குறிப் பிடப்படுகின்ற விசைகள் $2\dfrac{q-p}{q+p}\triangle$ திருப்புத் திறன் கொண்ட சுழலிணையாகச் சுருக்கப்படுமென்று காட்டுக.

தீர்வு

$BX : XC = p:q$

$\triangle ABC$ யில் (λ, μ) தேற்றத்தின்படி,

$$q.\vec{AB} + p\,\vec{AC} = (p+q)\,\vec{AX}$$

$$\because AX = \frac{q.\vec{AB} + p.\vec{AC}}{p+q}$$

இதுபோல், $AY = \dfrac{q.\vec{BC} + p.\vec{BA}}{p+q}$

$$AZ = \frac{q\cdot\vec{CA} + P.\vec{CB}}{p+q.}$$

$$\because AX + BY + CZ = \frac{1}{p+q}[(q.\vec{AB} + p.\vec{AC}) + (q.\vec{BC} + p.\vec{BA}) + (q\vec{CA} + p\vec{CB})]$$

$$= \frac{1}{q+p}[q.\vec{AB} - p.\vec{CA} + q.\vec{BC} - p.\vec{AB} + p.\vec{CA} - p.\vec{BC}]$$

$$= \frac{1}{p+q}[(q-p)\vec{AB} + (q-p)\vec{BC} + (q-p)\vec{CA}]$$

$$= \frac{q-p}{p+q}[\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA}]$$

$= \dfrac{q-p}{p+q}[2\triangle ABC$ திருப்புத்திறன் கொண்ட சுழலிணை.

$= 2\,\dfrac{q-p}{q+p}\triangle$ திருப்புத் திறன் கொண்ட சுழலிணை.

மாதிரி 61 $OABC$ என்பது ஒரு நான் முகத்திண்மம் (tetrahedron) OBC, OCA, OAB என்னும் பரப்புக்களினுல் குறிப்பிடப்படுகின்ற சுழலிணைகளின் விளைவு $\triangle ABC$ யின் பரப்பினுல் குறிப்பிடப்படும் ஒரு சுழலிணையாக இருக்குமென்று காட்டுக

(சென்னை பி. எஸ்ஸி. 2961 ஏப்)

தீர்வு

$2\triangle\ OBC$ ஆல் குறிப்பிடப்படும் சுழலிணை $\vec{OB}, \vec{BC}, \vec{CO}$ ஆகிய மூன்று விசைகளுக்கும் சமமாகும்.

$2\ \triangle OCA$ ஆல் குறிப்பீடப்பிடும் சுழலிணை $\vec{OC}, \vec{CA}, \vec{AO}$ ஆகிய விசைகளுக்குச் சமமாகும்,

$2\ \triangle OAB$ ஆல் குறிப்பிடப்படும் சுழலிணை $\vec{OA}, \vec{AB},$ ஆகிய விசைகளுக்குச் சமமாகும்.

ஆகிய $2\triangle OBC,\ 2\triangle OCA,\ 2\triangle OAB$ ஆல் குறிப்பிடப்படுகின்ற மூன்று சுழலிணைகளின் மொத்த விளைவு $= (\vec{OB} + \vec{BC} + \vec{CA}) + (\vec{OC} + \vec{CA} + \vec{AO} + \vec{OA} + \vec{AB} + \vec{BO})$

$$= [\vec{OB} + \vec{BO}) + (\vec{CO} + \vec{OC}) + (\vec{AO} + \vec{OA}) + (\vec{BC} + \vec{CA} + \vec{AB})]$$

$$= [\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA}]$$

$= 2\ \triangle ABC$ ஆல் குறிப்பிடப்படும் சுழலிணை.

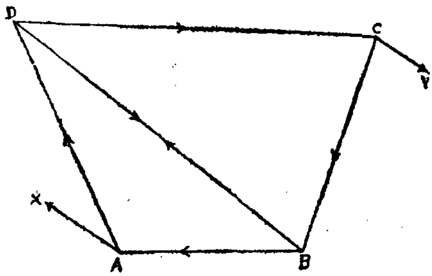
$\therefore\ \triangle\ OBC,\ \triangle\ OCA,\ \triangle OAB$ ஆல் குறிப்பிடப்படும் மூன்று சுழலிணைகளின் விளைவு $= \triangle\ ABC$ ஆல் குறிப்பிடப்படும் ஒரு சுழலிணை.

மாதிரி 62: $ABCD$ என்னும் நாற்கரத்தில் $BA,\ AD,\ CB,\ DC$ ஆகிய பக்கங்களால் நான்கு விசைகள் முழுமையாகக் குறிப்பிடப்படுகின்றன. இவ்விசைகள் மூலைவிட்டம் ACயின் முனைகள் வழியாக மற்ற மூலைவிட்டத்திங்குச் சமமாகவும் இணையாகவுமுள்ள விசைகளைக் கொண்ட ஒரு சுழலிணைக்குச் சமமென்று நிறுவுக.

தீர்வு

நாற்கரம் $ABCD$யில் $\vec{BA}, \vec{AD}, \vec{CB}, \vec{DC},$ என்பன நான்கு விசைகளைக் குறிப்பிடுகின்றன. BDயைச் சேர்க்கவும். BD

வழியாக $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{DB}$ என்பவற்றால் முழுமையாகக் குறிப்பிடப்படு கின்ற இருசம எதிர் விசைகளைச் செயல்படுத்துக.



படம் 97

$\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DB}$ என்னும் விசைகள் $\triangle BAD$ யின் பக்கங்களால் முழுமையாக குறிப்பிடப்படுமதால் அவை $\overrightarrow{DB}$யை ஒரு விசையாகவும் A வழியே BDக்கு இணையான திசையில் $\overrightarrow{DB}$க்குச் சமமாகவும் எதிராகவும் AX வழியே செயல்படுகின்ற விசையை மற்றொரு விசையாகவும் கொண்ட ஒரு சுழலிணைக்குச் சமமாகும்.

இதுபோல், $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{CB}$ ஆகிய விசைகள் $\triangle BDC$ யின் பக்கங்களால் முழுமையாகக் குறிப்பிடப்படுவதால் அவை $\overrightarrow{DB}$யை ஒரு விசையாகவும் C வழியே DBக்கு இணையான திசையில் $\overrightarrow{BD}$க்குச் சமமாகவும் எதிராகவும் CY வழியே செயல்படுகின்ற விசையை மற்றொரு விசையாகவும் கொண்ட ஒரு சுழலிணைக்குச் சமமாகும்.

இவ்விரு சுழலிணைகளின் $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{BD}$ ஆகிய விசைகள் ஒன்றையொன்று விளைவு நீக்கம் செய்து விடுமாகையால் இரு சுழலிணைகளும் சேர்ந்து AX வழியே செயல்படும் $\overrightarrow{DB}$ என்னும் விசை, CY வழியே செயல்படும் $\overrightarrow{BD}$ என்னும் விசை ஆகியவற்றைக் கொண்ட ஒரு தனிச் சுழலிணைக்குச் சமமாகும்.

தேற்றம்: கொடுக்கப்பட்டுள்ள இரு ஒரு தள விசைகளின் தளத்திலுள்ள ஏதேனுமொரு புள்ளி பற்றி அவ்விசைகளின் திருப்புத் திறன்களின் இயற்கணித மொத்தம் பூச்சியமல்லாத ஒரு மாறிலியாயின் அவ்விசைகள் ஒரு சுழலிணையாக அமையும்.

வகை (i) கொடுக்கப்பட்டுள்ள இரு விசைகளும் இணை யல்லவென்று கொள்க.

விசைகளின் செயற்கோடுகள் இணையாகயில்லாமையால் அவை ஒரு புள்ளியில் வெட்டும். அவ்வெட்டுப் புள்ளி பற்றி அவ்விரு விசைகளின் திருப்புத்திறன்கள் பூச்சியமாகையால் அவற்றின் இயற்கணித மொத்தத் திருப்புத்திறன் பூச்சியமாகும். இது தேற்றத்தில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள கொள்கைக்கு முரண் பாடாகயிருப்பதால் விசைகளிரண்டும் ஒன்றையொன்று வெட் டிக்கொள்ள முடியாது. அதாவது, கொடுக்கப்பட்டுள்ள விசை களிரண்டும் இணையாகயிருக்கவேண்டும்.

வகை (ii) கொடுக்கப்பட்டுள்ள விசைகளிரண்டும் இணை யாகயிருந்தும் சுழலிணையாக அமையவில்லையென்று கொள்க.

எனவே, இரு இணை விசைகளுக்கும் சமமான ஒரு விளைவு விசையைக் காணமுடியும். இவ்விளைவு விசையின் மேலுள்ள எந்தப் புள்ளி பற்றியும் அதன் திருந்புத்திறன் பூச்சியமாகும். அதாவது, அவ்விரு விளைவு விசையின் செயற்கோட்டின் மேலுள்ள எந்தப் புள்ளி பற்றியும் அவ்விரு விசைகளின் திருப்புத்திறன்களின் இயற்கணித மொத்தம் பூச்சியமாகும். இதுவும் கொடுக்கப்பட்டுள்ள கொள்கைக்கு முரணானதாகை யால் அவ்விரு விசைகளும் ஒரு சுழலிணையாக அமைய வேண்டு மென அறிந்து கொள்ளலாம்.

மாதிரி 63: D, E, F என்பன a பக்கமுள்ள ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தின் BC, CA, AB ஆகிய பக்கங்களை $5:1$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளிகள் D, E, F ஆகிய புள்ளிகளில் பக்கங்களுக்குச் செங்குத்து வழியாக வெளிபுறம் நோக்கி Pக்குச் சமமான மூன்று விசைகள் செயல்படுகின்றன. அவை Pa திருப்புத்திறன் கொண்ட ஒரு சுழலிணைக்குச் சமமென்று காட்டுக.

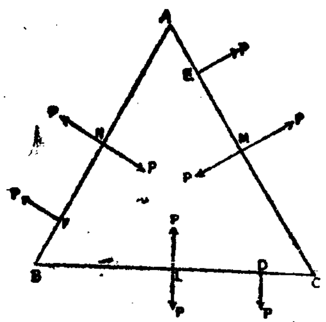
தீர்வு

$$BD : DC = 5:1$$

$$\therefore DC = \frac{1}{6} BC = \frac{1}{6}a.$$

L, M, N என்பன முறையே BC, CA, AB ஆகிய பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகள்.

L, M, N வழியே பக்கங்களுக்குச் செங்குத்தாக Pக்குச் சமமான எதிர்விசைகளைச் செயல்படுத்துக. இச் சம எதிர் விசைகள் ஒன்றையொன்று ஈடுசெய்து கொள்ளும்.



படம் 98

L,D ஆகிய புள்ளிகளில் செயல்படுகின்ற இரு சம எதிரிணை விசைகளும் $P.LD$ திருப்புத்திறன் கொண்ட ஒரு சுழலிணையாக அமையும். இதுபோல் M, E ஆகிய புள்ளிகளில் செயல்படுகின்ற இரு சம எதிரிணை விசைகள் (P, ME) என்ற சுழலிணையாகவும், N,F என்ற புள்ளிகளில் செயல்படுன்ற இருசம எதிரிணை விசைகள் (P, NF) என்ற சுழலிணையாகவும் அமையும். இம் மூன்று சுழலிணைகளும் சேர்ந்து அவற்றின் மொத்தத் திருப்புத் திறனுக்குச் சமமான திருப்புத் திறன் கொண்ட ஒரு தனிச் சுழலிணையாக அமையும். இத்தனிச் சுழலிணையின் திருப்புத் திறன்

$$= P.LD + P.ME + P.NF$$

ஆனல் $LD = LC - DC = \frac{x}{2} - \frac{x}{6} = \frac{x}{3}$. இதுபோல் $ME =$

$$NF = \frac{a}{6}$$

$\therefore$ தனிச் சுழலிணையின் திருப்புத்திறன் $= P.\frac{a}{3} + P.\frac{a}{3} + P.\frac{a}{3}$

$$= Pa.$$

இவை தவிர எஞ்சி நிற்கும விசைகளாகிய L, M, N ஆகிய நடுப்புள்ளிகளின் வழியே பக்கங்களுக்குச் செங்குத்தாக

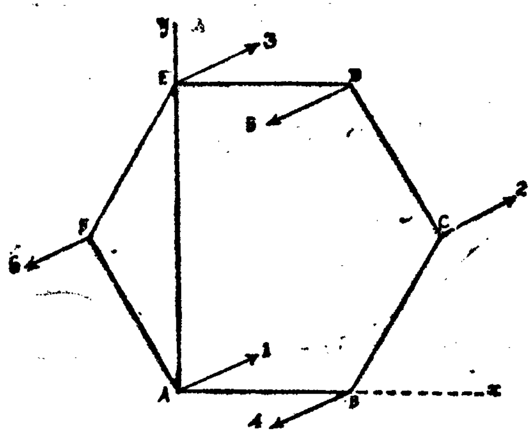
வெளிப்புறம் நோக்கிச் செயல்படுகின்ற மூன்று சம விசைகளும் செங்குத்து முக்கோண விதியின்படி சம நிலையிலிருக்கும்.

எனவே, கொடுக்கப்பட்டுள்ள மூன்று விசைகளும் *Pa* திருப்புத்திறன் கொண்ட ஒரு சுழலிணைக்குச் சமமாகும்.

மாதிரி 64: ஓர் ஒழுங்கு அறுகோணம் *ABCDEF* இன் *A, C, E* ஆகிய முனைகளில் முறையே 1, 2, 3 ராத்தல் எடை விசைகள் இணையாகவும், *B, D. F* ஆகிய முனைகளில் முறையே 4, 5, 6 ராத்தல் எடை விசைகள் முதல் மூன்று விசைகளுக்கு இணையான திசைகளில் எதிர்ப்போக்குடனும் செயல்படுகின்றன. அலற்றின் விளைவு விசையின் இடு புள்ளியைக் காண்க.

தீர்வு

ABCDEF என்னும் அறுகோணத்தில் *A,C,E* வழியே 1, 2, 3 ராத். எடையளவுகள் கொண்ட மூன்று ஒரு திசையிணை விசைகளும், *B, D, F* வழியே 4, 5, 6 ராத்தல் எடையளவுகள் கொண்ட மூன்று எதிரிணை விசைகளும் செயல்படுகின்றன. *AE* ஐச் சேர்க்கவும். *AE* ஆனது *AB* க்குச் செங்குத்தாக யிருக்கும்.



படம் 99

AB, AE ஆகியவற்றை முறையே *x,y* அச்சுக்களாக எடுத்துக் கொள்ளவும். அறுகோணத்தின் பக்கம் *a* என்று கொள்க.

$$\therefore A = (O,O),\ B = (a, 0),\ C = \left(\frac{3a}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$$

$$D = (a, \sqrt{3}a),\quad E = (O, \sqrt{3}a),\ F = \left(-\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$$

A, C, E இல் செயல்படும் விசைகளின் விளைவின் அளவு $1 + 2 + 3 = 6$ ராத். எடை

B, D, F இல் செயல்படும் விசைகளின் விளைவின் அளவு $4 + 5 + 6 = 15$ ராத். எடை.

இவ்விரு விளைவு விசைகளின் விளைவின் அளவு $= 15 - 6 = 9$ ராத். எடை.

இவ்விளைவு விசையானது *B, D, F* இல் செயல்படும் இணை விசைகளுக்கு இணையாகச் செயல்படும்.

இவ் விளைவு விசையின் இடுபுள்ளி = இணைவிசைகளின் மையம்

$$= \left[\frac{\sum Pr\, Xr}{\sum P_r}, \frac{\sum Pr\, y_r}{\sum P_r}\right]$$

$= (\bar{x}, \bar{y})$ என்க.

$$\therefore \bar{x} = \frac{1(O) - 4(a) + 2\left(\frac{3a}{2}\right) - 5(a) + 3(O) - 6\left(-\frac{a}{2}\right)}{1 - 4 + 2 - 5 + 3 - 5}$$

$$= \frac{O - 4a + 3a - 5a + O\ 3a}{}$$

$$= \frac{-3a}{-9}$$

$$= \frac{a}{3}.$$

$$\bar{y} = \frac{1(O) - 4(O) + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right) - 5(\sqrt{3}a) + 3(\sqrt{a}) - 6\left(\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)}{1 - 4 + 2 - 5 + 3 - 6}$$

$$= \frac{O - O + \sqrt{3}a - 5\sqrt{3}a + 3\sqrt{3}a - 3\sqrt{3}a}{-9}$$

$$= \frac{-4\sqrt{3}a}{-9}$$

$$\frac{4\sqrt{3}a}{9}$$

ஆகவே, விளைவு விசையின் இடுபுள்ளி $= \left(\frac{a}{3}, \frac{4\sqrt{3}a}{3}\right)$

மாதிரி 65: $ABCD$ என்பது α கோணமும், l பக்கமும் கொண்ட ஒரு சாய்சதுரம். $CEFD$ என்பது CD யின் மேல் வெளிப்புறமாக வரையப்பட்ட ஒரு சதுரம். AB, BC, DA, DF, FE, EC ஆகிய பக்கங்களின் வழியே $\vec{P}$ என்னும் சமவிசைகள் செயல்படுகின்றன. $C\ D$ வழியாக $2\ \vec{P}$ என்னும் விசை செயல் படுகிறது. இவ்விசைத் தொகுதி $2l\ P\ (\sin\alpha - 1)$ திருப்புத் திறன் கொண்ட ஒரு சுழலிணையாகச் சுருங்குமென்று காட்டுக.

தீர்வு

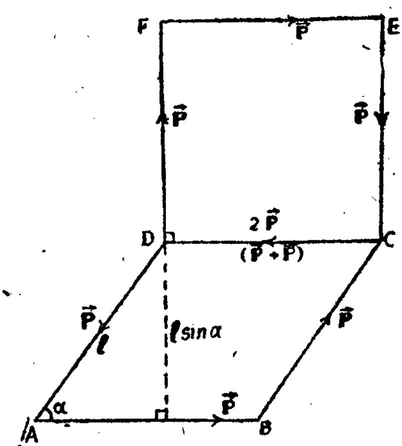
சாய் சதுரம் $ABCD$ யின் பக்கம் l.

$\angle\ AB = BC = CD = DA = l.$

மேலும், $CEFD$ ஒரு சதுரமாகையால்,

$CE = EF = FD = CD = l.$

சாய் சதுரத்தின் எதிர்ப்பக்கங்களுக்கிடையேயுள்ள தூரம் $= l \sin\alpha$.



படம் 100

CD வழியே செயல்படும் $2\vec{P}$ என்னும் விசையை $\vec{P}, \vec{P}$ என்னும் இருவிசைகளாகப் பிரிக்கலாம். CD, EF வழியே செயல்படும் P, P என்னும் சமஎதிரிணைவிசைகள் ஒரு சுழலிணை யாகும்; அதன் திருப்புத்திறன் $= -\ Pl$.

DF, EC வழியே செயல்படும் P, P விசைகள் ஒரு சுழலிணை யாகும்;

இச் சுழலிணையின் திருப்புத்திறன் $- Pl$,

AB, CD வழியே செயல்படும் விசைகள் ஒரு சுழலிணையாகும் ;

இச் சுழலிணையின் திருப்புத்திறன் $= Pl \sin \alpha$.

DA, BC வழியே செயல்படும் விசைகள் ஒரு சுழலிணையாகும் ;

இச் சுழலிணையின் திருப்புத்திறன் $= Pl \sin \alpha$.

இந்நான்கு சுழலிணைகளும் சேர்ந்து ஒரு தனிச் சுழலிணைக்குச் சமமாகும்.

$$\text{இத்தனிச் சுழலிணையின் திருப்புத்திறன்} = -Pl + Pl + Pl \sin\alpha + Pl \sin \alpha = 2\, l\, P\, (\sin\alpha - 1)$$

மாதிரி 66: ஓர் ஒழுங்கு அறுகோணத்தின் ஒரு முகவொழுங்கி வெடுக்கப்பட்ட பக்கங்களின் வழியே a, b, c, d, e, f என்னும் விசைகள் செயல்படுத்தப்படுகின்றன.

$$d + e = a + b; \quad a + f = c + d$$

என்றால் அவைகள் ஒரு தனிச் சுழலிணைக்குச் சமமாகுமென்று காட்டுக. இச் சுழலிணையின் திருப்புத் திறனை a, b, c, d யின் சார்பில் கணக்கிடுக.

தீர்வு

ஒழுங்கு அறுகோணத்தின் மையம் **O** என்க. O விலிருந்து ஒவ்வொரு பக்கத்தின் செங்குத்துத் தூரமும் p என்று கொள்க. கொடுக்கப்பட்டுள்ள விசைகள் யாவும் ஒரு தனிச் சுழலிணை யாகச் சுருங்கவேண்டுமாயின் அவற்றின் தளத்திலுள்ள எந்த புள்ளியையும் பற்றி அவ்விசைகளின் திருப்புத்திறன்களின் இயற்கணித மொத்தம் ஒரு மாறிலியாகவும், அத்தனிச் சுழலிணையின் திருப்புத்திறனுக்குச் சமமாகவுமிருக்கும்.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள விசைகள் யாவும் G திருப்புத்திறன் கொண்ட ஒரு தனிச் சுழலிணைக்குச் சமம் என்று கொள்க.

O, A, B ஆகிய புள்ளிகள் பற்றி எல்லாவிசைகளின் திருப் புத்திறன்களின் மொத்தங்கள் காண்க. இம் மொத்தத் திருப்புத்திறன்கள் ஒவ்வொன்றும் G க்குச் சமமாகும்.

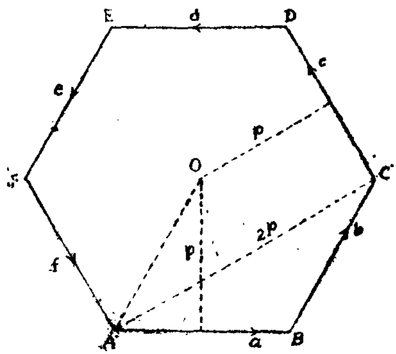
O ஐப் பற்றி திருப்புத்திறன்களின் மொத்தம்

$$ap + bp + ep + dp + ep + fp = G$$

அதாவது, $(a + b + c + d + e + f)\,p = G$ ... ... (1)

A ஐப் பற்றி திருப்புத்திறன்களின் மொற்தம்:

$$(b + e)\,p + (c + d)\,2p = G \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$



படம் 101

B ஐப்பற்றி திருப்புத்திறன்களின் மொத்தம் :

$$(c + f)\,p + (d + e)\,2p = G \quad \dots \quad \dots \quad (3)$$

(1)—(2) : $a + f = c + d.$

(1)—(3) : $(a + b = d + e,$

இப்பொழுது, F ஐப்பற்றி விசைகளின் திருப்புத்திறன்களின் மொத்தம் காண்க.

$$G = (a + d)\,p + (b + c)\,2p$$
$$= (a + 2b + 2c + d)\,p.$$

ஆகவே, $a + f = c + d,\ d + e = a + b$ எனில் O, A, B ஆகிய புள்ளிகள் பற்றி கொடுக்கப்பட்டுள்ள விசைகளின் திருப்புத் திறன்களின் மொத்தம் G என்னும் மாறிலியாகயிருப்பதால், கொடுக்கப்படுள்ள விசைகள் யாவும் G திருப்புத்திறன் கொண்ட ஒரு தனிச் சுழலிணைக்குச் சமமாகுமென்று காண்கிறோம்.

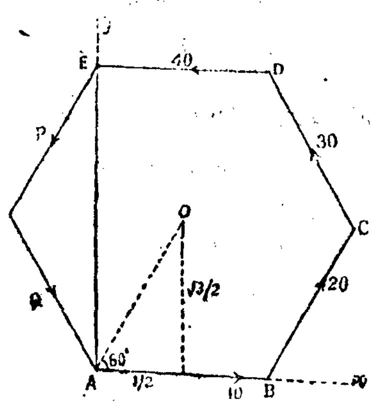
இத்தனிச் சுழலிணையின் திருப்புதிறன் $= (a+2b+2c+d)\,p.$

மாதிரி 67 ஒரு மீட்டர் பக்கமுள்ள ஒரு ஒழுங்கு அறு கோணத்தின் AB, BC, CD, DE, EF, FA ஆகிய பக்கங்களின் வழியே ஆறு ஒரு தள விசைகள் ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின் மீது செயல்படுகின்றன. இத்திசைகளில் அவற்றின் அளவுகள் முறையே 10 கி. கி., 20 கி. கி., 30 கி. கி., P, Q ஆகும். இத்தொகுதி ஒரு தனிச் சுழலிணையாகச் சுருங்குமெனில் P, Q ஐக் காண்க. அத்தனிச் சுழலிணையின் திருப்புத்திறன் $75\sqrt{3}$ மீட்டர் கி கி. என்றுகாட்டுக.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்டுள்ள விசைகளை AB திசையிலும், ABக்குச் செங்குத்துத் திசையிலும் விசைப்பிரிப்புச் செய்க.

$ABCDEF$ என்பது ஒழுங்கு அறு கோணமாகையால், A வழியே ABக்கு வரையப்படும் செங்குத்து Eவழியாகச் செல்லும். X, Y என்பன முறையே AB, AE வழியே பிரிக்கப்பட்ட குத்துப் பிரிவுகளின் மொத்தங்கள் என்று கொள்க.



படம் 102

$$X = 10 + 20\cos 60^\circ - 30\cos 60^\circ - 40$$
$$- P\cos 60^\circ + Q\cos 60^\circ$$
$$= 10 + 10 - 15 - 40 - \frac{P}{2} + \frac{Q}{2}$$
$$= \tfrac{1}{2}(Q - P) - 35.$$
$$Y = O + 20\sin 60^\circ + 30\sin 60^\circ + O - P\sin 60^\circ - Q\sin 60^\circ$$

$$= 20\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 30\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - P\frac{\sqrt{3}}{2} - Q\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= (50 - P - Q)\frac{\sqrt{3}}{2}$$

கொடுக்கப்பட்டுள்ள விசைகள் ஒரு தனிச்சுழலிணையாகச் சுருங்கவேண்டுமாயின் அவற்றிற்கு ஒரு தனி விளைவு விசை இருக்கக் கூடாது

$$\therefore \quad X = O, \quad Y = O.$$

$$\therefore \quad Q - P = 70$$

$$Q + P = 50$$

$$\therefore \quad P = -10, Q = 60,$$

அதாவது P என்பது FE வழியே செயல்படும் 10 கி. கி. எடையுள்ள விசை.

Q என்பது FA வழியே செயல்படும் 60 கி. கி. எடையுள்ள விசை இப்பொது, அறு கோணத்தின் மையம் O என்க.

$\therefore$ Oக்கும் பக்கங்களுக்கு முள்ள தூரம் $= \frac{1}{2}\tan 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

O ஐப் பற்றி விசைகளின் திருப்புத்திறன்களின் மொத்தம்

$$= 10\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 20\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 30\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 40\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

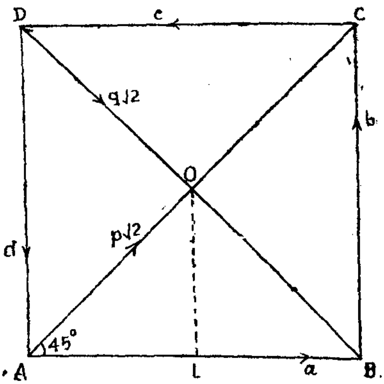
$$- 10\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 60\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 75\sqrt{3} \text{ மீட்டர் கி. கி.}$$

மாதிரி 68 $ABCD$ என்பது 2 அலகு நீளமுள்ள பக்கங்களைக் கொண்ட ஒரு சதுரம். BA, BC, ED, DA என்ற ஒரு முக வரிசையிலெடுக்கப்பட்ட பக்கங்களின் மீது a, b, c. d, என்னும் அளவுகள் கொண்ட விசைகள் செயல்படுகின்றன. மூலைவிட்டங்கள் AC, DB வழியே முறையே $p\sqrt{2}$, $q\sqrt{2}$ என்னும் அளவுகளுள்ள விசைகள் செயல்படுகின்றன. $p + q = c - a$, $p - q = c - b$ எனில், அவ்விசைகள் $a + b + c + d$ திருப்புத்திறன் கொண்ட ஒரு சிழலிணைக்குச் சமமென்று காட்டுக.

தீர்வு

AC, BD ஆகிய மூலை விட்டங்களின் வெட்டும்புள்ளயை O என்க. பக்கங்களின் நீளம் 2 அலகு ஆதலால், ஒவ்வொரு

பக்கத்திலிருந்தும் O வின் செங்குத்துத்தூரம் 1 அலகு ஆகும். AB வழியே இவ்விசைகளின் பிரித்த பகுதிகளின் மொத்தம் X எனில், $X = a - c + p\sqrt{2}\cos 45^\circ + q\sqrt{2}\cos 45^\circ$



படம் 103

$= a - c + p + q.$

AB க்குச் செங்குத்துத் திசையில் விசைகளின் பிரித்த பகுதிகளின் மொத்தம் Y எனில்,

$$Y = b - d + p\sqrt{2}\sin 45^\circ - q\sqrt{2}\sin 45^\circ$$

$$= b - d + p - q.$$

இவ்விசைகள் ஒரு தனிச் சுழலிணையாகச் சுருங்க வேண்டுமாயின் $X = O,\ Y = O$ ஆகவேண்டும்.

$$\therefore\ p + q = c - a,$$

$$p - q = d - b.$$

அல்லது, $p + q = c - a,\ \ p - q = d - b$ எனில், விசைகள் யாவும் ஒரு தனிச் சுழலிணையாகச் சுருங்கும்.

Oஐப் பற்றி இவ்விசைகளின் மொத்தத் திருப்புத்திறன்

$$= a(1) + b(1) + c(1)\ d(1) + p\sqrt{2}\,(0) + q\sqrt{2}\,(0)$$

$$= a + b + c + d$$

ஆகவே, தனிச் சுழலிணையின் திருப்புத்திறன் $= (a + b + c + d)$

மாதிரி 69 $\triangle ABC$ யின் தளத்தில் செயல்படும் ஒரு விசைத் தொகுதி Aயில் கோணம் BACயின் உள்ளிரு சமவெட்டி வழியே செயல்படும் ஒரு தனி விசைக்கும், G திருப்புத்திறன் கொண்ட ஒரு சுழலிணைக்கும் ாகிறது. அத்தொகுதியின் மசம

B, C ஆகிய புள்ளிகள் பற்றிய திருப்புத்திறன்கள் முறையே G_2, G_3 எனில்,

$$(b+c)G_1 = bG_2 + cG_3$$

என்று நிறுவுக.

தீர்வு : $\angle BAC$ யின் உள்ளிருசம வெட்டி வழியே செயல்படும் தனிவிசையை R என்க:

முக்கோணத்தின் தொகுதியானது விசை Rம், G, திருப்புத் திறன் கொண்ட சுழலிணையும் சேர்ந்த தொகுதிக்குச் சமமென்று கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$\therefore$ G_2 = Bஐப் பற்றி முக்கோணத்திலுள்ள விசைத் தொகுதியின் திருப்புத்திறன்

= Bஐப் பற்றி Rஇன் திருப்புத்திறன் $+ G_1$

= $-R \times B$யிலிருந்து சமவெட்டியின் தூரம் $+ G_1$

$$= R.AB \sin \frac{A}{2} + G_1$$

அதாவது, $G_2 - G_1 = -R.AB \sin \frac{A}{2}$

இதுபோல், $G_3 - G_1 = R.AC \sin \frac{A}{2}$.

$$\therefore \frac{G_2 - G_1}{G_3 - G_1} = -\frac{AB}{AC} = -\frac{c}{b}$$

அல்லது, $b(G_2 - G_1) = -c(G_3 - G_1)$

$$bG_2 + cG_3 = (b+c)G_1.$$

மயிற்சி 8

(1) $ABCD$ என்பது 3 அடி நீளப்பக்கங்கள் கொண்ட ஒரு சதுரம். $2, 4\sqrt{2}, 2, 4\sqrt{2}, 8$ ராத்தல் எடைகளுள்ள விசைகள் முறையே AB, BD, CD, AC, CB வழியே செயல்படுகின்றன. அவற்றின் விளைவு 6 அடி ராத்தல் திருப்புத்திறன் கொண்ட ஒரு சுழலிணை யென்று காட்டுக.

(2) $ABCD$ என்னும் சதுரத்தின் AB, CD ஆகிய பக்கங்களின் வழியே ஒவ்வொன்றும் 8 கி.கி. எடையுள்ள விசைகளும்

செயல்படுகின்றன. சதுரத்தின் பக்கம் 4 மீட்டர் எனில் சம நிலை விளைவிக்கும் சுழலிணையின் திருப்புதிறன் காண்க.

(3) $ABCD$ என்பது ஒரு நாற்கரம். $AB = 5$ மீட்டர். $BC = DC = DB = 4$ மீட்டர், $AD =$ மீட்டர்; 10 கி. கி., 8 கி.கி., 6 கி.கி. எடைகளுள்ள விசைகள் முறையே AB, BC, CD, DA வழியே செயல்படுகின்றன. அவை ஒரு சுழலிணைக்குச் சமமென்று காட்டுக. அச்சுழலிணையின் திருப்புத்திறன் காண்க.

(4) 2 மீட்டர் பக்கமுள்ள ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தின AB, BC, AC ஆகிய பக்கங்களின் வழியே முறையே 2 கி.கி., 4 கி. கி., எடைகளுள்ள விசைகள் செயல்படுன்றன. இத் தொகுதியானது B வழியே CA யின் திசையில் செயல்படும் $2\sqrt{2}$ கி. கி. எடையுள்ள விசையுடன் $4\sqrt{3}$ மீட்டர் கி. கி. திருப் புத்திறன் கொண்ட ஒரு சுழலிணைக்குச் சமம என்று காட்டுக.

(5) $ABCD$ என்பது ஒரு சதுரம். ஒவ்வொன்றும் 2 ராத்தல் எடையுள்ள விசைகள் AB, CD வழியேயும், ஒவ்வொன்றும் 5 ராத்தல் எடையுள்ள விசைகள் AD, CB வழியேயும் செயல் படுகின்றன. சதுரத்தின் பக்கம் 3 அடி எனில், இவ்விசை களுடன் சம நிலை பெறும் சுழலிணையின் திருப்புத்திறன் காண்க. (சென்னை பி,எஸ்ஸி. 1965 செப்.)

(6) $ABCD$ என்னும் நாற்கரத்தின் பக்கங்கள் வழியே முறையே $p.\ \vec{AB}$, $q\cdot \vec{BC}$, $r.\vec{CD}$, $s.\vec{DA}$ என்னும் விசைகள் செயல்படுகின்றன. O என்பது மூலை விட்டங்களின் வெட்டுப் புள்ளி. இத்தொகுதியாது ஒரு சுழலிணைக்குச் சமமென்று தரப்பட்டால்,

$$\frac{AO}{OC}=\frac{q-r}{s-p} \text{ என்றும், } \frac{BO}{OD}=\frac{r-s}{p-q} \text{ என்றும் காட்டுக.}$$

(7) $ABCD$ என்னும் செல்வகத்தில் $AB = CD = a, BC = DA = b$; AD BC வழியே $\vec{P}$, $\vec{P}$ என்னும் விசைகளும், AB CD வழியே $\vec{Q}$, $\vec{Q}$ என்னும் விசைகளும் செயல்படுகின்றன. A யில் செயல்படும் $\vec{P}$, $\vec{Q}$ ஆகிய விசைகளின் விளைவு விசைக்கு

மிடையே புள்ள செங்குத்துத்தூரம் $\frac{Pa-Qb}{\sqrt{P^2+Q^2}}$ என்று நிறுவுக.

(8) $\vec{P}, \vec{Q}$ என்பன இரு ஒரு திசையிணைவிசைகள். அவற்று டன் G எனும் திருப்புத்திறன் கொண்ட ஒரு சுழலிணை சேர்க்கப் பட்டால், அவ்விசைகளின் விளைவு விசை $\frac{G}{P+Q}$ தூரத்திற்கு இடம் பெயருமென்று காட்டுக.

(9) $A; B$ என்னும் நிலையான புள்ளிகளில் செயல்படும் இரு சம எதிரிணை விசைகள் G திருப்புததிறன் கொண்ட ஒரு சுழலிணையாக அமைகிறது. அவற்றின் செயற்கோடுகள் ஒரு நேர் கோணத்திற்குத் திருப்பப்பட்டால் அவை H திருப்புத் திறன் கொண்ட ஒரு சுழலிணையாக அமைகிறது. இரண்டு ABக்குச் செங்குத்தாகச் செயல்படும் போது அவை $\sqrt{G^2+H^2}$ திருப்புத்திறன் கொண்ட ஒரு சுழலிணையாக அமையுமென்று காட்டு.

(10) ABC என்பது a நீளப் பக்கங்களுடைய ஒரு சம பக்க முக்கோணம், D, F, E என்பன முறையே BC, CA, AB ஆகிய பக்கங்களை $2:1$ என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்கின்றன. $\vec{P}$ க்குச் சமமான மூன்று விசைகள் $D, E. F$ என்ற புள்ளிகளில் பக்கங் களுக்குச் செங்குத்தாகவும் வெளிப்புறமாகவும் செயல் படுகின்றன. $P\frac{a}{2}$ திருப்புத்திறன் கொண்ட ஒரு சுழலிணைக்கு அவை சமமென்று காட்டுக.

(11) ABC என்பது a நீளப் பக்கங்களுடைய ஒரு சமபக்க முக்கோணம். D, E, F என்பன முறையே BC, CA, AB ஆகிய பக்கங்களை $n:1$ என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளிகள் $\vec{P}$க்குச் சமமான மூன்று விசைகள் D, E, F என்ற புள்ளிகளில் பக்கங் களுக்குச் செங்குத்தாகவும், முக்கோணத்திற்கு வெளிப்புறமாக வும் செயல்படுகின்றன. அவ்விசைகள் யாவும் $\frac{3(n-1)}{2(n+1)}P\,a$ திருப்புத்திறன் கொண்ட சுழலிணைக்குச் சமமென்று காட்டுக

(12) X, Y, Z என்பன $\triangle ABC$ யின் BC, CA, AB ஆகிய பக்கங்களை $1+\lambda : 1-\lambda$ என்னும் ஓரே விகிதத்தில் ஒருமுகப்.

போக்கில் பிரிக்கும் புள்ளிகள் $\triangle ABC$ யின் பரப்பு $\triangle$ எனில், AX BY, CZ ஆகியவற்றால் குறிப்பிடப்படுகின்ற விசைகள் $2\lambda\triangle$ திருப்புத்திறன் கொண்ட சுழலிணைக்குச் சமமாகுமென்று நிறுவுக.

(13) ABC என்பது ஒரு முக்கோணம் $A'B'C'$ என்பது முறையே A, B, C வழியே செல்கின்ற $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ என்னும் பக்கங்களைக் கொண்ட மற்றொரு முக்கோணம். Ka, Kb, Kc என்பன முறையே A',B',C' வழியே BC,CA, AB க்கு இணையாக செயல்படும் விசைகள் $\triangle A'B'C'$ இன் பரப்பு $\triangle$ எனில், அவ் விசைகள் $2K\triangle$ திருப்புத்திறன் கொண்ட ஒரு சுழலிணைக்குச் சமமென்று காட்டுக.

(14) Ka, Kb, Kc என்பன $\triangle ABC$ யின் வெளிவட்ட மையங்களான I_1, I_2, I_3 ஆகியவற்றின் வழியே முறையே BC CA, AB ஆகிய பக்கங்களுக்கு இணையாகச் செயல்படும் விசைகள் R என்பது $\triangle ABC$ யின் சுற்றுவட்ட ஆரையெனில், அவ் விசைகள் $2K(a+b+c)R$ திருப்புத்திறன் கொண்ட ஒரு சுழலிணைக்குச் சமமென்று காட்டுக.

(15) ABC,PQR என்பனஒரே தளத்திலுள்ளவெவ்வேறுஅளவுகள் கொண்ட இரண்டு சமபக்க முக்கோணங்கள் $\vec{AP}$, $\vec{BQ}$, $\vec{CR}$ என்னும் விசைகள் முறையே A,B,C ஆகிய புள்ளிகளில்செயல் படுகின்றன. அவை ஒரு சுழலிணைக்குச் சமமென்று காட்டுக.

(16) $A\ B\ C\ D\ E\ F$ என்பது a நீளப் பக்கமுடைய ஒரு ஒழுங்கு அறுகோணம். $\vec{P}$, $4\vec{P}$, $3\vec{P}$, $2\vec{P}$, $7\vec{P}$, $6\vec{P}$, ஆகிய விசைகள் முறையே AB, BC, DC, ED, EF, AF வழியே செயல்படுகின்றன. இந்த ஆறு விசைகளும் $\frac{\sqrt{3}}{2}$ Pa திருப்புத் திறன் கொண்ட ஒரு சுழலிணைக்குச் சமமென்று காட்டுக.

(17) $ABCDEF$ என்பது ஒரு ஒழுங்கு அறுகோணம் $\vec{P}$, $2\vec{P}$, $3\vec{P}$, $5\vec{P}$, $6\vec{P}$ என்னும் விசைகள் முறையே AB, BC, DC, EF, AF வழியே செயல்படுகின்றன. இவ்விசைகளுடன் சேர்ந்து ஒரு சுழலிணையாக அமையும்வண்ணம் ED வழியே விசையை நிர்ணயிக்க முடியுமென்று காட்டுக. அச்சுழலிணையின் திருப்புத் திறன் காண்க.

(18) $ABCD$ என்னும் நாற்கரத்தின் ஒரு முகவரிசையி லெடுக்கப்பட்ட AB, BC, CD, DA வழியாக நான்கு விசைகள் அவை செயல்படும் பக்கங்களைப் போல் முறையே p, q, r, s மடங்கு அளவுகளுடன் செயல்படுகின்றன. O என்பது மூலை விட்டங்களின் வெட்டுப்புள்ளியெனில், $(s-p)\ OA = (q-r)\ OC$, $(p-q)\ OB = (r-s)\ OD$ என்றால் அவை ஒரு சுழலிணைக்குச் சமமென்று காட்டுக.

(19) $ABCD$ என்னும் சதுரத்தில் $\vec{P}, 2\vec{P}, -\vec{P}, 2\vec{P}$ என்னும் விசைகள் முறையே AB, BC, CD, DA ஆகிய பக்கங்களின் வழியாகச் செயல்படுகின்றன. BD, CA ஆகிய ஒவ்வொன்றின் வழியாகவும் $P\sqrt{2}$ என்னும் விசைசெயல்படுகிறது. இவ்விசைகள் $2P.AB$ திருப்புத்திறன் கொண்ட ஒரு சுழலிணையாக ஒடுங்குமென்று காட்டுக.

(20) $\triangle$ பரப்புடைய ABC என்னும் முக்கோணத்தின் முனைகளில் முறையே $\lambda \cdot BC$, $\lambda . CA$, $\lambda . AB$ அளவுகளுள்ள விசைகள் செயல்படுகின்றன. அவற்றின் செயற்கோடுகள் சந்திக்கும் பக்கங்களுடன் ϕ என்னும் கோணத்தையுண்டு பண்ணுகின்றன. அவ்விசைகள் $4\lambda\triangle \cos\phi$ திருப்புத்திறன் கொண்ட ஒரு சுழலிணைக்குச் சமமென்று காட்டுக.

5. ஒருதள விசைகள்
(COPLANAR FORCES)

ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின்மீது செயல்படும் எவ்வெண்ணிக்கையிலுமான விசைகளின் செயற்கோடுகள் ஒரே தளத்திலிருப்பின் அவை ஒரு தளவிசைகள் அல்லது சமதளவிசைகள் (coplanar forces) என்றழைக்கப்படுகின்றன. இத்தகைய ஒருதள விசைகளின் விளைவுகளின் தன்மைகள் பற்றி ஆராய்வோம்.

தேற்றம் : ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின் மீது செயல்படும் எந்த விசைத் தொகுதியையும் ஒரு தனி விசையாக, அல்லது ஒரு தனிச் திழலிணையாகச் சுருக்க முடியும்.

இணைகர விதியின்படி, ஒன்றையொன்று வெட்டிக்கொள்ளும் செயற்கோடுகளையுடைய இரு விசைகளின் தொகுப்பு ஒரு தனி விசையென்று கண்டோம். மேலும், ஒரு சுழலிணையாக அமையாத இரு இணைவிசைகளின் தொகுப்பு எந்த இரு விசைகளின் தொகுப்பு ஒருதனி விசையென்றும் கண்டோம். ஆகவே, சுழலிணையாக அமையாத எந்த இரு விசைகளையும் ஒரு தனி விசையாகத் தொகுக்க முடியுமென்று அறிகிறோம்.

ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின்மீது செயல்படும் ஒருதள விசைகளுள் சுழலிணையாக அமையாத ஏதேனுமிரு விசைகளைத் தெரிவு செய்து அவற்றை $\vec{R_1}$ என்னும் ஒரு தனி விளைவு விசையாகத் தொகுக்கவும். பின், எஞ்சியுள்ள விசைகளுள் $\vec{R_1}$ உடன் சுழலிணையாக அமையாத ஏதேனுமொரு விசையைத் தெரிவு செய்து $\vec{R_1}$ உடன் சேர்த்து $\vec{R_2}$ என்னும் தனி விளைவு விசையைக் காண்க. பின் எஞ்சியுள்ள விசைகளுள் $\vec{R_2}$ உடன்

சுழலிணையாக அமையாத ஏதேனுமொரு விசையைத் தெரிவு செய்து $\vec{R_2}$ உடன் சேர்த்து $\vec{R_3}$ என்னும் தனி விளைவு விசையைக் காண்க. இம்முறையைத் தொடர்ந்து செய்துவர, இறுதியில் ஒரு தனி விசை அல்லது ஒரு தனிச்சுழலிணை மிஞ்சியிருப்பதைக் காணலாம். இத்தனி விசை அல்லது ஒரு தனிச் சுழலிணையே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விசைத் தொகுதியின் விளைவு ஆகும்.

தேற்றம் : ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின்மீது செயல்படும் ஒருதள விசைகளின் தொகுதி ஒரு சுழலிணையாகச் சுருக்கப்படுமாயின், அவற்றின் தளத்திலுள்ள ஏதேனுமொரு புள்ளி பற்றி அவ்விசைகளின் திருப்புத் திறன்களின் இயற்கணித மொத்தம் ஒரு மாறிலியாகவும், அச்சுழலிசையின் திருப்புத்திறனுக்குச் சமமாகவும்மிருக்கும்.

$\vec{P_1}$, $\vec{P_2}$, $\vec{P_3}$, …. …, $\vec{P_n}$ என்பன ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின்மீது செயல்படுகின்ற n ஒருதள விசைகள் என்று கொள்க. O என்பது அத்வளத்திலுள்ள ஏதேனுமொரு புள்ளி.

$\vec{P_1}$ என்னும் விசையானது O வழியே $\vec{P_1}$ க்கு இணையான ஒரு சம விசையுடன் ஒரு சுழலிணைக்குச் சமமாகும்.

$\vec{P_2}$ என்னும் விசையானது O வழியே $\vec{P_2}$ க்கு இணையான ஒரு சம விசையுடன் ஒரு சுழலிணைக்குச் சமமாகும்.

$\vec{P_3}$ என்னும் விசையானது O வழியே $\vec{P_3}$க்கு இணையான ஒரு சம விசையுடன் ஒரு சுழலிணைக்குச் சமமாகும்.

இதுபோல் ஒவ்வொரு விசையும் O வழியே செயல்படும் ஒரு சம இணைவிசையுடன் ஒரு சுழலிணைக்குச் சமமாகும்.

ஆகவே, கொடுக்கப்பட்டுள்ள n விசைகளும் O வழியே செயல்படும் n விசைகளுடன் n சுழலிணைகளுக்குச் சமமாகுமென்றறிகிறோம். ஆனால் இந்த n சுழலிணைகளின் விளைவு ஒரு தனிச்சுழலிணையாகும். ஆகவே, கொடுக்கப்பட்டுள்ள n விசைகளும் O வழியே செயல்படும், n விசைகளுடன் ஒரு

சுழலிணை சேர்ந்த தொகுதிக்குச்சமமாகும். ஆனால் O என்ற புள்ளி பற்றி இந்த n விசைகளின் திருப்புத்திறன்களும் பூச்யமாகுமாகையால், O என்னும் ஏதேனு மொரு புள்ளி பற்றி கொடுக்கப்பட்டுள்ள விசைகளின் திருப்புத்திறன்களின் இயற்கணித மொத்தமானது அவ்விளைவுச் சுழலிணையின் திருப்புதிறனுக்குச் சமமாகும். அவ்விளைவுச் சுழலிணையாது கொடுக்கப்பட்டுள்ள விசைத்தொகுதிக்கு நிலையானதாயிருக்குமாகையால் அதன் திருப்புத்திறன் ஒரு மாறிலியாகும.

ஏதேனுமொரு புள்ளியைப்பற்றி ஒரு விசைத் தொகுதியின் திருப்புத்திறன்.

ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின் மீது செயல்படும் ஒரு தளவிசைத் தொகுதியின் தளத்தில் Ox, Oy என்னும் நேர்குத்து அச்சுக்களை எடுத்துக்கொள்க. G என்பது O என்ற ஆதியைப் பற்றி அவ்விசைத் தொகுதியின் திருப்புத்திறன் என்று கொள்க. $P(x_1, y_1)$ என்பது அத்தளத்திலுள்ள ஏதேனு மொருபுள்ளி. இப்புள்ளியைப் பற்றி அவ்விசைத் தொகுதியின் திருப்புத்திறன் காண்போம்.

Ox திசையில் இத்தொகுதியைச் சேர்ந்த விசைகளின் பிரித்த பகுதிகளின் மொத்தம் X என்றும் Oy திசையில் பிரித்த பகுதிகளின் மொத்த Y என்றும் கொள்க.

$P(x_1, y)$ என்ற புள்ளியைப்பற்றி கொடுக்கப்பட்டுள்ள விசைகளின் திருப்புத்திறன்களின் மொத்தம் G' என்க.

$\because$ $G' = G + (x_1, y_1)$ என்ற புள்ளியை X, Y ஆகிய விசைகளின் திருப்புத்திறன்களின் இயற்கணித மொத்தம்

$$= G + Xy_1 - Yx_1.$$

X, Y ஆகியவற்றை விளைவு விசை R இன் பிரித்த பகுதிகளாகக் கருது Rx, Ry என்று குறிப்பிட்டால்,

$$G' = G - x_1 Ry + y_1 Rx.$$

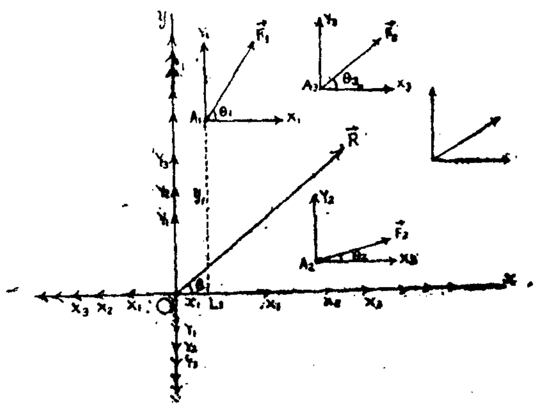
ஆகும்.

தேற்றம் ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின் மேல் செயல்படும் ஒரு தள விசைகள் ஏதேனு மொரு குறிப்பிட்ட புள்ளி வழிச் செயல்படும் ஒரு தனி விசைக்கும் ஒரு சுழலிணைக்கும் சமம்.

$F_1, F_2, F_3, \ldots$ என்பன ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின் மேல் $A_1, A_2, A_3 \ldots$ ஆகிய புள்ளிகளில் செயல்படும் ஒரு தள

விசைகள். O என்பது அப்பொருளில் அத்தளத்திலுள்ள ஏதேனுமொரு புள்ளி.

O ஐ ஆதியாகக் கொண்டு அதே தளத்தில் Ox, Oy என்னும் செங்குத்து அச்சுக்களைக்குறித்துக் கொள்க. இவ்வச்சுக்களைக் குறிப்பீடாகக் கொண்டு A_1, A_2, A_3,... ஆகிய புள்ளிகளின் அச்சுத்தூரங்கள் முறைபே (x_1,y_1), (x_2,y_2), $x_3,y_3)$.............. என்க.



படம் 104

θ_1 θ_2 θ_3 ... என்பன Ox திசைக்கும் $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$, $\vec{F_3}$, ... ஆகிய விசைகளின் திசைகளுக்கு முள்ள சாய்வுக்கோணங்களெனில், இவ்விசைகளின் Ox திசை வழிக் கூறுகள் முறையே $F_1 \cos \theta_1$, $F_2 \cos \theta_2$, $F_3 \cos \theta_3$ ... என்றும் Oy திசை வழிக்கூறுகளை முறையே X_1, X_2, X_3 ... என்றும், Oy வழிக்கூறுகளை முறையே Y_1, Y_2, Y_3 ... என்றும் குறிப்பிடுக.

$\because$ $X_1 = F_1 \cos_1$; $X_2 \cos \theta_2$; $X_3 = F_3 \cos \theta_3$;...

$Y_1 = F_1 \sin \theta_1$; $Y_2 = F_2 \sin \theta_2$; $Y_3 = F_3 \sin \theta_3$; ... இப்பொழுது O வழியே Ox, Ox' திசைகளில் முறையே X_1, X_1 என்னும் சம எதிர்த்திசைகளையும் Oy, Oy' திசைகளில் Y_1, Y_1 என்னும் சம எதிர்த்திசைகளையும் செயல்படுத்துக. இவ்விசைகள் ஒன்றை யொன்று ஈடு செய்து விடு மாகையால் பொருளில் எவ்வித விளைவையும் ஏற்படுத்தமாட்டா,

இப்பொழுது A_1 இல் செயல்படும் Y_1 என்னும் விசைக் கூறும், O-வின் Oy' வழியே செயல்படும் Y_1. $OL_1 = Y_1 x_1$

$= x_1 Y_1$ என்னும் திருப்புத்திறன் கொண்ட சுழலிணையாக அமையும்.

இதுபோல், A_1 இல் செயல்படும் X_1 என்னும் விசைக் கூறும், O வில் Ox^1 வழியே செயல்படும் X_1 என்னும் விசையும் இருசம எதிரிணை விசைகளாதலின், அவை $- X_1 \cdot A_1 L_1 = - X_1 y_1 = - y_1 X_1$ என்னும் திருப்புத்திறன் கொண்ட ஒரு சுழலிணையாக அமையும்,

இவ்விரு சுழலிணைகளையும் $(x_1 Y_1 - y_1 X_1)$ திருப்புத்திறன் கொண்ட ஒரே சுழலிணையாகத் தொகுக்காலம். ஆகவே, O-வில் செயல்படுத்தபட்ட நான்கு விசைகளுள் எஞ்சியிருப்பவை Ox வழியே செயல்படு X_1 விசையும், Oy வழியே செயல்படு Y_1 விசையுமாகும். அதாவது, A_1 இல் செயல்படும் $\vec{F_1}$ என்னும் விசையானது $(x_1 Y_1 - y_1 X_1)$ திருப்புத்திறன் கொண்ட ஒரு சுழலிணைக்கும், Ox, Oy, வழியே செயல்படும் X_1 Y_1 என்னும் விசைகளுக்கும் சமமாகும்.

இதுபோல். A_2 இல் செயல்படும் $\vec{F_2}$ என்னும் விசையானது $(x_2 Y_2 - y_2 X_2)$ திருப்புத்திறன் கொண்ட ஒரு சுழலிணைக்கும், Ox, Oy வழியே செயல்படும் X_2 Y_2 என்னும் விசைகளுக்கும் சமமாகும்.

A_3 இல் செயல்படும் $\vec{F_3}$ என்னும் விசையானது $(x_3 Y_3 - y_3 X_3)$ திருப்புத் திறன் கொண்ட ஒரு சுழலிணைக்கும், ox, oy வழியே செயல்படும் X_3 Y_3 என்னும் விசைகளுக்கும் சமமாகும்.

இவ்வாறு, அப்பொருளின் மேல் செயல்படும் ஒவ்வொரு விசையும் ஒரு சுழலிணைக்கும், ox, oy வழியே செயல்படும் அதன் கூறுகளுக்கும் சமமாகுமென்று காண்கிறோம்.

ஆகவே, அப்பொருளின் மேல் செயல்படும் $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}, \ldots$ எனனும் விசைகள் முறையே $(x_1Y_1 - y_1X_1)$, $(X_2Y_2 - x_2y)$, $(x_3Y_3 - X_3y_3)$, ... திருப்புத்திறன்களைக் கொண்ட சுழலிணைகளுக்கும், OX செயல்படும் $X_1, X_2, X_3, \ldots \ldots$ என்ற விசைகளுக்கும், Oy வழியே செயல்படும் $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots \ldots$ என்ற விசைகளுக்கும் சமமாகும்.

இச் சுழலிணைகள் யாவும்.

$\sum (x_1 Y_1 - y_1 X_1) = (x_1 Y_1 - z_1 X_1) + (x_2 Y_2 - y_2 X_2) + (x_3 Y_3 - y_3 X 2) + (x_3 Y_3 - y_3) + \ldots \ldots = G$ என்க

என்னும் திருப்புத்திறன் கொண்ட ஒருதனிச் சுழலிணையாகச் சுருங்குமென்று நாமறிவோம்.

OX வழியே செயல்படும் $X_1, X_2, X_3, \ldots\ldots$ ஆகிய விசைகள் யாவும் $\sum X_1 = X_1 + X_2 + X_3 + \ldots\ldots = X$ (என்க) என்னும் ஒரு தனி விசையாகவும், Oy வழியே செயல்படும் $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots\ldots$ ஆகிய விசைகள் யாவும் $\sum Y_1 = Y_1 + Y_2 + Y_3 \ldots\ldots\ldots = Y$ (என்க) என்னும் ஒரு தனி விசையாகவும் சுருங்கும்.

மேலும், X, Y என்னும் இவ்விரு தனி விசைகளையும் R என்னும் ஒரு தனி விசையாகத் தொகுக்கலாம். Ox திசையுடன் R இன் சாய்வு θ எனில்,

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}, \tan\theta = \frac{Y}{X}$$

ஆகும். மேலும் R ஆனது O வழியே செல்லுமென்பது நாம் அறிந்ததே

ஆகவே, அக்கட்டிறுக்கப் பொருளின் மேல் செயல்படும் ஒரு தளவிசைகள் யாவும் O வழியே செயல்படும் $\sqrt{X^2 + Y^2}$ என்ற அளவும் Ox திசையுடன் $\tan^{-1}\left(\frac{Y}{X}\right)$ என்ற சாய்வும் கொண்ட R என்னும் ஒரு தனி விசைக்கும்,

$G = \sum (x_1 Y_1 - y_1 X_1)$ என்னும் திருப்புத்திறன் கொண்ட ஒரு தனிச் சுழலிணைக்கும் சமமாகும்.

குறிப்பு 1 $R \neq O ; G \neq O.$

G என்னும் திருப்புத்திறன் கொண்ட அவ்விளைவுச் சுழலிணையை $\frac{G}{R}$ என்னும் புயம் கொண்ட மற்றொரு சுழலிணையாக, அதன் விசையானது விசை R ஐ விளைவு நீக்கம் செய்யும் வண்ணம் அதற்குச் சமமாகவும் எதிராகவும் இருக்குமாறு மாற்றுக.

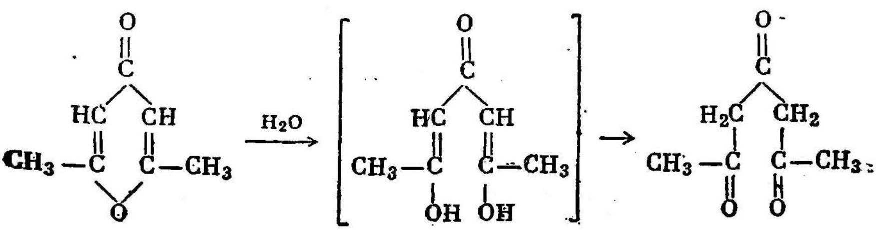
இப்புதிய சுழலிணையின் திருப்புத் திறன் $R.\frac{G}{R} = G$

ஆகவே, விளைவில் எவ்வித மாறுதலு மேற்படாது.

இம்பொழுது O வில் செயல்படுகின்ற R, R என்னும் சம எதிர்விசைகளிரண்டும் ஒன்றையொன்று ஈடுசெய்து விடுமாகை

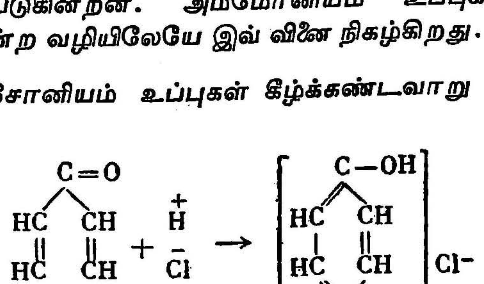
கரணிகளான ஹைட்ராக்சில் அம்மீன் அல்லது ஃபினைல் ஹைட்ரசீன் ஆகியவற்றினுல் அத் தொகுதி இருப்பதை உறுதிப்படுத்த முடியவில்லை. மேலும், இச் சேர்மத்தை ஒடுக்குவது மிகக்கடினம். பெல்லேடியத்தின் முன்னிலையில் γ-பைரோனை ஹைட்ரஜனுடன் ஹைட்ரஜனேற்றத்திற்கு உள்படுத்தினுல் டெட்ரா ஹைட்ரோ பைரோன் (tetrahydropyrone) உண்டாகிறது. காமா பைரோன் சில அரோமாடிக் பண்புகளைப் பெற்றிருக்கிறது: ஃபெர்ரிக் குளோரைடின் முன்னிலையில் புரோமினுடன் வினைபட்டு ஒரு கூடுதல் வினைபொருளான பெர் புரோமைடு உண்டாகிறது. இது நீராவியால் காய்ச்சி வடிக்கப்பட்டு 3-புரோமோ மற்றும் 3, 5-டைபுரோமோ பைரோனைக் கொடுக்கிறது.

γ-பைரோன் வளையம் காரங்களுடன் எளிதில் வினைபட்டு அதிலுள்ள ஆக்சிஜன் பிணைப்புப் பிளக்கப்படுகிறது. எடுத்துக் காட்டாக, 2,6-டைமெத்தில் பைரோன் காரத்துடன் வினைபட்டு ஒரு டிரை கீட்டோன், ஹெப்டேன் டிரைஒன் உண்டாகிறது:



γ-பைரோன்களின் மிக முக்கியமான தனிப்பட்டப் பண்பு அவை வீரிய அமிலங்களுடன் வினைப்பட்டு ஆக்சோனியம் வகையைச் சேர்ந்த (பைராக்சோனியம் உப்புகள்) உப்புகளை உண்டாக்குவதாகும். ஒரு ஹைட்ரஜன் அயனி பல்வேறு ஆக்சிஜனைப் பெற்றுள்ள சேர்மங்களுடன், ஆக்சிஜன் அணுவின் தனித்த எலெக்ட்ரான் இணையின் வழியாக இணைந்து ஆக்சோனியம் உப்புகள் உண்டாக்கப்படுகின்றன. அம்மோனியம் உப்புகள் உண்டாவதைப் போன்ற வழியிலேயே இவ் வினை நிகழ்கிறது.

பைராக்சோனியம் உப்புகள் கீழ்க்கண்டவாறு உண்டாக்கப் படுகின்றன:



கொண்ட ஒரு சுழலிணைக்கும் சமம் என்று கண்டோம். இவற்றுள் $G = O$ ஆகயிருப்பதால் அச் சுழலிணை மறைந்து விடுகிறது. ஆகவே, கொடுக்கப்பட்டுள்ள விசைகள் யாவும் O வழியே செயல்படும் ஒரு தனி விசைக்குச் சமமாகிறது. ஆகவே, கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஒருதள விசைகள் யாவும் கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஒரு புள்ளி வழியே செயல்படும் ஒரு தனி விசைக்குச் சமமாகவேண்டுமானுல், அப்புள்ளியைப் பற்றி அவ்விசைகளின் திருப்புத்திறன்களின் மொத்தம் பூச்சிய மாகவும், அப்புள்ளி வழியே செல்லும் இரு செங்குத்துத் திசை களில் அவற்றின் குத்துப்பிரிவுகளின் மொத்தங்கள் தனித் தனியே பூச்சியமாகாமலும் இருக்கவேண்டும்.

குறிப்பு 3 : $R = O, G \pm O. \quad \therefore X = O, Y = O.$

தனி விசை பூச்சியமாவதால் எஞ்சியிருப்பது சுழலிணை யொன்றே. ஆகவே, ஒரு பொருளின் மேல் செயல்படும் ஒரு தளவிசைகள் யாவும் ஒரு தனிச்சுழலிணையாகச் சுருங்கவேண்டு மானுல், அத் தளத்திலுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியைப் பற்றியும் அவ்விசைகளின் திருப்புத்திறன்களின் மொத்தம் மாறிலியாக யிருப்பதோடு, அப்புள்ளி வழிச் செங்குத்துத் திசைகளில் அவற்றின் பிரித்த பகுதிகளின் மொத்தங்கள் தனித்தனியே பூச்சியமாக வேண்டும்.

குறிப்பு 4 $R = O, G = O. \therefore X = O, Y = O.$

கொடுக்கபபட்டுள்ள பொருளின் மேல் செயல்படும் ஒரு தள விசைகளின் விளைவாகிய தனிவிசை, தனிச் சுழலிணை யிரண்டுமே மறைந்து விடுவதால் அப்பொருள் சமநிலையி லிருக்கும். ஆகவே, ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின்மேல் செயல் படும் ஒரு தள விசைகள் சமநிலையிலிருக்க வேண்டுமானுல் அத்தளத்திலுள்ள ஏதேனுமொரு புள்ளி வழியே செல்லும் இரு செங்குத்துத் திசைகளில் அவ்விசைகளின் குத்துப்பிரிவுகளின் மொத்தங்கள் தனித்தனியே பூச்சியமாக வேண்டுமென்பதோடு அவற்றின் தளத்தின் மேலுள்ள எந்தப் புள்ளியைப் பற்றியும் அவற்றின் திருப்புத் திறன்களின் இயற்கணித மொத்தம் பூச்சிய மாக வேண்டும்.

ஆகவே, $X=O$, $Y=O$, $G=O$ என்பன ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின்மீது செயல்படுகின்ற ஒருதள விசைகளின் சமநிலைச் சமன்பாடுகள் (Equations of Equilibrium) என்றழைக்கப்படு கின்றன.

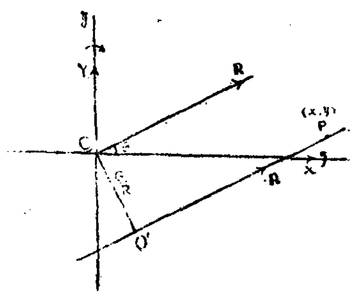
விளைவு விசை சமன்பாடு (Equation of the Resultants)

ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின்மேல் செயல்படும் ஒரு தள தனி விசைகள் அத்தளத்திலுள்ள ஏதேனுமொரு புள்ளி வழியே (O வழியே) செயல்படும் R என்னும் ஒரு தனி விசைக்கும், G திருப்புத்திறன் கொண்ட ஒரு சுழலிணைக்கும் சமம் என்று கண்டோம். இத்தனி விசை R-ம், சுழலிணை G-ம் சேர்ந்து O-விலிருந்து $\frac{G}{R}$ என்னும் தூரத்திலுள்ள O' என்னும் புள்ளி வழியே Rக்கு இணையான ஒரு சம விசைக்குச் சமமென்று கண்டோம். இச்சம விசை R தான் கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஒருதள விசைகளின் விளைவு விசையாகும்.

இப்பொழுது Oஐ ஆதியாகவும், ox, oy என்னும் ஏதேமிரு செங்குத்துக் கோடுகளைக் குறியீட்டச்சிக்களாகவும் கொண்டு, மேற்கண்ட விளைவு விசை R இன் செயற்கோட்டின் மேலுள்ள ஏதேனுமொரு புள்ளியின் அச்சுத் தூரங்களை (x, y) என்க.

O' வழியே செல்லும் R என்னும் விளைவு விசையானது O வழியே செல்லும் R என்னும் விசை, G திருப்புத்திறன் கொண்ட சுழலிணை ஆகியவற்றின் விளைவு விசையாகையால்.

ஆனால், (x,y) என்னும் புள்ளி O' வழிச் செல்லும் R இன் மேலமைந்திருப்பதால், இப்புள்ளி பற்றி O' வழிச் செல்லும் R இன் திருப்புத்திறன் பூச்சியமாகும்.



படம் 106

O வழிச் செல்லும் Rஇன் குத்துப் பிரிவுகள் X, Y ஆதலின் (x, y)ஐப் பற்றி R இன் திருப்புத்திறனானது (x, y)ஐப் பற்றி X,Y ஆகியவற்றின் திருப்புத் திறன்களின் மொத்தமாகும்.

அதாவது, $Xy - Yx$ ஆகும்.

ஆகவே, (x,y) ஐப் பற்றி O வழி Rஇன் திருப்புத்திறன் + $G = O$ என்னும் தொடர்பிலிருந்து,

$$Xy - Yx + G = O$$

அல்லது, $Xy - Yx = G$

என்னும் சமன்பாட்டைப் பெறுகிறோம். இதுவே, விளைவு விசையின் சமன்பாடு ஆகும்.

விளைவு விசைச் சமன்பாட்டை மற்றொரு முறையில் பின் வருமாறு பெறலாம்.

மாற்று முறை

O வழியே செயல்படும் R இன் குத்துப் பிரிவுகள் Ox திசையில் X என்றும், OY திசையில் Y என்றும் கண்டோம்.

R இன் திசைக்கும், Ox இன் திசைக்கு மிடையேயுள்ள கோணம் θ எனில்,

$$R\cos\theta = X, \quad R\sin\theta = Y$$

ஆகும். அதாவது, $\cos\theta = \frac{X}{R}$, $\sin\theta = \frac{Y}{R}$.

இப்பொழுது, O' வழியேசெல்லும் தனிவிளைவு விசையாகிய R,இன் செயற் கோட்டில் $P\ (x,y)$ என்னும் ஏதேனு மொரு புள்ளியை எடுத்துக் கொள்க.

இப்பொழுது, $p = O$ விலிருந்து இச்செயற்கோட்டிற்குள்ள செங்குத்துத் தூரம்

$$= OO'$$

$$= \frac{G}{R}$$

$\alpha = OO'$க்கும் Oxக்கு மிடையேயுள்ள கோணம

$= \angle xOO'$

$= -(90^\circ - \theta)$ ($\because \angle xOO'$ வலஞ்சுழியாக அமைந்தது

$\because O'$ வழி விளைவுச் செயற் கோட்டின் சமன்பாடு வருமாறு)

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p.$$

$$x\cos\{-(90^\circ-\theta)\} + y\sin\{-(90^\circ-\theta)\} = \frac{G}{R}$$

$$x\cos(90^\circ-\theta) - y\sin(90^\circ-\theta) = \frac{G}{R}$$

$$x \sin \theta - y \cos \theta = \frac{G}{R}$$

$$x \left(\frac{Y}{R}\right) - y \left(\frac{X}{R}\right) = \frac{G}{R}$$

அல்லது, $x Y - y X = G.$

நிலையில் சம நிலை (Astatic Equilibrium)

$F_1, F_2, F_3, \ldots$ ஆகிய ஒரு தள விசைகள் ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின் மேல் செயல்படின், அவை அதேதளத்திலுள்ள O என்னும் ஏதேனு மொருபுள்ளி வழியே செயல்படும் R என்னும் விசையுடன் G திருப்புத்திறன் கொண்ட ஒரு சுழலிணைக்குச் சமமாகுமென்று கண்டோம். O வழியே செல்லும் Ox, Oy என்னும் ஏதேனுமிரு செங்குத்து அச்சுக்களை யெடுத்துக் கொள்க. Ox திசையுடன் இவ்விசைகளின் செயற்கோடுகளின் சாய்வுகள் முறையே $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots$ எனில்,

$$X = \sum X_1 = F_1 \cos \theta_1 + F_2 \cos \theta_2 + F_3 \cos \theta_3 + \ldots$$

$$Y = \sum Y_1 = F_1 \sin \theta_1 + F_2 \sin \theta_2 + F_3 \sin \theta_2 + \ldots$$

என்றும், O-ஐப்சுற்றி அவ்விசைகளின் திருப்புத்திறன்களின் மொத்தம்

$$G = \sum (x_1 Y_1 - y_1 X_1) \text{ என்றும் கண்டோம்,}$$

அதாவது, $X = \sum F_1 \cos \theta_1,\ Y = \sum F_1 \sin \theta_1,$

$$G = (x_1 F_1 \sin \theta_1 - y_1 F_1 \cos \theta_1)$$
$$= \sum F_1 (x_1 \sin \theta - y_1 \cos \theta_1)$$

இவ்விசைகள் சமநிலையிலிருப்பதாகக் கொள்க.

$$\because X = O, \quad Y = O; G = O.$$

இப்பொழுது எல்லா விசைகளும் அவற்றின் இடுபுள்ளிகளைப் பற்றி α கோணத்தில் ஒரே போக்கில் திருப்பப்பட்டால்,

$\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots \ldots$ என்ற கோணங்கள் யாவும் முறையே $\theta_1 + \alpha, \theta_2 + \alpha, \theta_3 + \alpha, \ldots \ldots$ என்று மாறும்,

$\therefore X, Y, G,$ என்பன முறையே X', Y', G' என்று மாறுவதாகக் கொண்டால்.

$$X' = \sum F_1 \cos (\theta_1 + \alpha)$$
$$= \sum F_1 (\cos \theta_1 \cos \alpha - \sin \theta_1 \sin \alpha)$$

$$= \cos\alpha . (\sum F_{1} \cos\theta_1) - \sin\alpha (\sum F_1 \sin\theta_1)$$

$$= \cos\alpha (X) - \sin\alpha (Y)$$

$$= X\cos\alpha - Y\sin\alpha.$$

$$Y' = \sum F_1 \sin(\theta_1 + \alpha)$$

$$= \sum F_1 (\sin\theta_1 \cos\alpha + \cos\theta_1 \sin\alpha)$$

$$= \cos\alpha (\sum F_1 \sin\theta_1) + \sin\alpha (\sum F_1 \cos_1)$$

$$= \cos\alpha (Y) + \sin\alpha (X)$$

$$= X\sin\alpha + Y\cos\alpha$$

$$G' = \sum F_1 [x_1 \sin(\theta_1 + \alpha) - y_1 \cos(\theta_1 + \alpha)]$$

$$= \sum F_1 x_1 (\sin\theta_1 \cos\theta_1 \sin\alpha) - \sum F_1 y_1 (\cos\theta_1 \cos\alpha - \sin\theta_1 \sin\alpha)$$

$$= \cos\alpha . \sum F_1 (x_1 \sin\theta_1 - y_1 \cos_1) + \sin\alpha \sum F_4 (x_1 \cos\theta_1 + y_1 \sin\theta_1)$$

ஆனல், $\sum F_1 (x_1 \sin\theta_1 - y_1 \cos\theta_1 = G$ ஆகும்.

$\sum F_1 (x_1 \cos\theta_1 + y_8 \sin\theta_1) = V$ என்க.

$$\therefore G' = \cos\alpha . (G) + \sin\alpha (V)$$

$$= G\cos\alpha + N\sin\alpha.$$

ஆனல் $X = O, Y = O, G = O$ ஆகையால்,

$X' = O, Y' = O, G' = V \sin\alpha$ ஆகும்.

ஆகவே, $R' = \sqrt{X'^2 + Y'^2} = O.$

எனவே, கொடுக்கப்பட்டுள்ள விசைகளை ∝ கோணத்திற்குத் திருப்புவதால், அவை $G' = V \sin\alpha$ என்னும் திருப்புத் திறன் கொண்ட ஒரு சுழலிணையாகச் சுருங்குகிறது. அதாவது, தங்களின் தாக்குதல்களினல் ஒரு பொருளைச் சமநிலையில் வைத்திருக்கின்ற பல ஒரு தள விசைகள் ஒவ்வொன்றையும் θ கோணத்திற்கு ஒரே போக்கில் திருப்பிச் செயல்படச் செய்தால் அப்பொருள் சம நிலையிலேயே யிருக்குமென்று கூறமுடியாது. மாருக, அவ்விசைகள் யாவும் ஒரு சுழலிணைக்குச் சமமாகிறது. ஆனல், இவ்வாறு திருப்பப்பட்ட நிலையிலும் அவ்விசைகள் சமநிலையிலிருப்பின், அத்தகைய சமநிலைக்கு "நிலையில் சமநிலை (Astatic Equilibrium) என்று பெயர்.

ஆகவே, அவ்விசைகள் யாவும் நிலையில் சம நிலை பெறுவதற்கான நிபந்தனை $G' = O.$

அதாவது, $V \sin \alpha = O$

அதாவது, $\sum F_1 (x_1 \cos \theta_1 + y_1 \sin \theta_1) = O$

$$\sum [x_1 (F_1 \cos \theta_1) + y_1 (F_1 \sin \theta_1] = O.$$

$$\sum (x_1 X_1 + y_1 Y_1) = O.$$

நிலையில் மையம் (Astatic centre)

ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின் மேல் செயல்படும் ஒரு தள விசைகள் ஒவ்வொன்றும் α கோணத்திற்கு ஒரே போக்கில் திருப்பட்டால், அவற்றின் விளைவு எப்பொழுதும் அப்பொருளி லுள்ள ஒரு நிலையான புள்ளியின் வழியே செல்லும். இந்நிலை யான புள்ளிக்கு "நிலையில் மையம" astatic centre) என்று பெயர்.

இப்பொழுது, $X = \sum F_1 \cos \theta_1$, $Y = \sum \sin \theta_1$.

$$G = \sum F_1 (x_1 \sin \theta_1 - y_1 \cos \theta_1$$

விளைவு விசையின் சமன்பாடு, $G - x Y + y X = O$ ஆகும்.

ஒவ்வொரு விசையும் α கோணத்திற்குத் திருப்பப்பட்டால்,

$$X' = X \cos \alpha - Y \sin \alpha,$$

$$Y' = X \cos \alpha + Y \sin \alpha,$$

$$G' = G \cos \alpha + V \sin \alpha. \; V = \sum F_1 (x_1 \cos\theta_1 + y_1 \sin \theta_1$$

ஆகும். புதிய தொகுதியின் வுளைவு வுசையின் சமன்பாடு

$$G' - x Y' - y X' = O$$

ஆகும். அதாவது, $G \cos \alpha + V \sin \alpha - x (X \sin \alpha + Y \cos \alpha)$

$$+ y (X \cos \alpha - Y \cos \alpha) = O$$

அல்லது. $\cos \alpha (G - x Y + y X) + \sin \alpha (\Delta - x X - y Y) = O.$
α இன் மதிப்பு என்னவாகயிருந்த போதிலும், இச்செயற்கோடு

$G - x Y + y X = O$, $V - x X - yY = O$ என்பன்வற்றின் வெட்டுப்புள்ளி வழியே செல்லும.

குறுக்குப் பெருக்கல் மூலம் வெட்டுப் புள்ளி காண்க.

$$xY - yX - G = O$$

$$xX + yY - V = O$$

$$\therefore \frac{x}{VX + GY} = \frac{y}{VY - DX} = \frac{1}{X^2 + Y^2}$$

அல்லது $x = \frac{VX+GY}{X^2+Y^2}, y = \frac{VY-GX}{X^2+Y^2}$

X, Y, G, V ஆகியவை α ஐச்சாராமலிருப்பதால் இவ்வச்சுத் தூரங்கள் நிலையானவை, அதாவது, விளைவு வுசையானது,

$$\left[\frac{VX+GY}{X^2+Y^2}, \quad \frac{VY-GX}{X^2+Y^2}\right]$$

என்னும் நிலையான புள்ளி வழியே எப்போதும் செல்லும். இந்நிலையான புள்ளியே " நிலையில் மையமாகும்"

தேற்றம் : ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின் மேல் செயல்படும் ஒரு தள விசைத் தொகுதியின் தளத்தில் ஒரே நேர் கோட்டிலமையாத எவையேனும் மூன்று புள்ளிகளைப்பற்றி அவ்விசைகளின் திருப்புதிறன்களின் இயற்கணித மொத்தங்கள் வெவ்வேருகயிருப்பின் அவ்விசையானது ஒரு தனி விளைவு விசையாகச் சுருங்கும்.

ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின்மேல் செயல்படும் ஒருதள விசைகள் ஒரு தனி விளைவு விசையாகவோ, அல்லது ஒருதனிச் சுழலிணையாகவோ சுருங்குமென்று கண்டோம். இப்பொழுது, கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஒருதள விசைகள் ஒரு தனிச் சுழலிணை யாகச் சுருங்குவதாகக் கொள்வோம். எனவே, அத்தளத்தி லுள்ள ஏதேனுமொரு புள்ளி பற்றி அவ்விசைகளின் திருப்புத் திறன்களின் மொத்தம் அச்சுழலிணையின் திருப்புத்திறனுக்குச் சமமாகும். மேலும், அத்தளத்திலுள்ள எந்தப் புள்ளியைப் பற்றியும் இச்சுழலிணையின் திருப்புத்திறன் ஒரு மாறிலியாகும். ஆகவே, கொடுக்கப்பட்டுள்ள மூன்று புள்ளிகளைப் பற்றிய திருப்புத்திறன்களும் வெவ்வேருகயிருக்க முடியாது. எனவே, கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஒருதள விசைகள் ஒருதனிச் சுழலிணை யாகச் சுருங்க முடியாது; எனவே ஒரு தனி விசையாகத்தான் சுருங்க முடியும்.

மறுதலையாக, ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின் மேல் செயல் படும் ஒருதள விசைகள் ஒரு தனி விசையாகச் சுருங்குமெனில் அவற்றின் தளத்தில் ஒரே நேர்கோட்டிலமையாத எவையேனும் மூன்று புள்ளிகளைப் பற்றி அவ் விசைகளின் திருப்புத்திறன் களின் இயற்கணித மொத்தங்கள் வெவ்வேருகயிருக்கும்.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஒருதள விசைகள் யாவும் R என்னும் ஒரு தனி விசையாகச் சுருங்குவதாகக் கொள்க. இதன் செயற் கோடு நிலையானதாகையால், அதே தளத்தில் ஒரே நேர்கோட்டி

லில்லாத எவையேனும் மூன்று புள்ளிகளிலிருந்து அதன் செங்குத்துத் தூரங்கள் வெவ்வேருகயிருக்கும். ஆகவே, அம்மூன்று புள்ளிகளைப் பற்றி கொடுக்கப்பட்டுள்ள விசைகளின் திருப்புத் திறன்களின் மொத்தங்கள் வெவ்வேருகயிருக்கும்.

தேற்றம்: ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின்மேல் செயல்படும் ஒருதள விசைத் தொகுதியின் தளத்தில் ஒரே நேர்கோட்டிலமையாத எவையேனும் மூன்று புள்ளிகளைப் பற்றி அவ்விசைகளின் திருப்புத்திறன்களின் இயற்கணித மொத்தங்கள் சமமாகயிருப்பின், அத்தொகுதி ஒரு தனிச் சுழலிணையாகச் சுருங்கும்.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஒருதள விசைத் தொகுதியானது ஒரு தனி விசையாகவோ அல்லது ஒரு தனிச் சுழலிணையாகவோ சுருங்குமென்று அறிந்ததே. இப்பொழுது, கொடுக்கப்பட்டுள்ள விசைகள் யாவும் R என்னும் தனி விசையாகச் சுருங்குவதாகக் கொள்வோம்.

A, B, C என்பன அதே தளத்தில் ஒரே நேர்கோட்டிலில்லாத மூன்று புள்ளிகளென்றும். $p_1, p_2\ p_3$, என்பன R இன் செயற்கோட்டிற்கும் அம்மூன்று புள்ளிகட்குமுள்ள செங்குத்துத் தூரங்கள் என்றும் கொள்க.

$\therefore A, B, C$ ஐப் பற்றி R இன் திருப்புத் திறன்கள் முறையே Rp_1, Rp_2, Rp_3 ஆகும். இத்திருப்புத் திறன்கள் சமமெனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளதால்,

$$Rp_1 = Rp_2 = Rp_3.$$

ஆகும். $\therefore R(p_1 - p_2) = O$ ஆகும்.

ஆனல், $p_1 \neq p_2$ ஆகையால் $R = O$ ஆகும்.

அதாவது, கொடுக்கப்பட்டுள்ள் விசைகள் ஒரு தனி விசையாகச் சுருங்க முடியாது. எனவே, அவை ஒரு தனிச் சுழலிணையாகச் சுருங்கும்.

மறுதலையாக, ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின்மேல் செயல்படும் ஒருதள விசைகள் ஒரு தனிச் சுழலிணையாகச் சுருங்குமெனில், அவற்றின் தளத்தில் ஒரு நேர்கோட்டிலில்லாத எவையேனும் மூன்று புள்ளிகள் பற்றி அவற்றின் திருப்புத்திறன்களின் இயற்கணித மொத்தங்கள சமமாகும்.

ஒரு சுழலிணையின் தளத்திலுள்ள எப்புள்ளியைப் பற்றிய திருப்புத்திறன் மாறிலியாகயிருக்குமென்பதிலிருந்து இம்மறுதலையின் உண்மை தெற்றென விளங்கும்.

தேற்றம்: ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின் மேல் செயல்படும் ஒருதள விசைகளின் தளத்தில் ஒரு நேர்கோட்டிலமையாத மூன்று புள்ளிகளுள் ஒவ்வொன்றையும் பற்றி அவ்விசைகளின் திருப்புத்திறன்களின் இயற்கணித மொத்தம் பூச்சியமானல் அவை சமநிலையிலிருக்கும்.

ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின்மேல் செயல்படும் ஒரு தள விசைகளின் தளத்தில் A, B, C என்னும் ஒரே நேர்கோட்டிலில்லாத மூன்று புள்ளிகளை எடுத்துக் கொள்க. இப்புள்ளிகள் ஒவ்வொன்றையும் பற்றி அவ்விசைகளின் திருப்புத்திறன்களின் மொத்தம் பூச்சியமென்க. ஆனல் ஒரு தளவிசைகளின் தளத்திலுள்ள ஏதேனுமொரு புள்ளியைப் பற்றி அவ்விசைகளின் திருப்புத்திறன்களின் மொத்தம் பூச்சியமானல் அவ்விசைகள் ஒரு சுழலிணையாகச் சுருங்கமுடியாதென்று கண்டோம். இங்கு A,B,C என்ற மூன்று புள்ளிகள் பற்றிய திருப்புத்திறன்களின் மொத்தங்கள் தனித் தனியே பூச்சியமாவதால் அவ்விசைகள் ஒரு சுழலிணையாகச் சுருங்க முடியாது. எனவே, அவை ஒரு தனி விசையாகச் சுருக்கலாம். இத்தனி விசையை R என்க. A என்னும் புள்ளியைப் பற்றி கொடுக்கப்பட்டுள்ள விசைகளின் திருப்புத்திறன்களின் மொத்தம் பூச்சியமாவதால் Aயைப் பற்றி R இன் திருப்புத்திறன் பூச்சியமாகும். ஆகவே, Aயானது Rஇன் செயற்கோட்டின் மேலிருக்கும். இதுபோல், B;C ஆகிய புள்ளிகள் பற்றியும் விசைகளின் திருப்புத்திறன்களின் மொத்தங்கள் தனித்தனியே பூச்சியமாவதால் B,C ஆகிய புள்ளிகளும் R இன் செயற்கோட்டின் மேலிருக்கும். ஆனல் A, B, C என்பது ஒரே நேர்கோட்டிலில்லாத புள்ளிகளாதலின் அவை மூன்றின் வழியாகவும் R இன் செயற்கோடு செல்ல முடியாது. எனவே $R=O$ ஆக வேண்டும். ஆகவே, கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஒருதள விசைகள் சமநிலையிலிருக்கும்.

தேற்றம்: ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின் மீது செயல்படும் ஒருதள விசைகளின் தளத்திலுள்ள ஏதேனும் இரு புள்ளிகள் பற்றி அவ் விசைகளின் திருப்புத்திறன்களின் இயற்கணித மொத்தங்களும் அவ்விரு புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நேர்கோட்டிற்குச் செங்குத்தாயில்லாத ஏதேனுமொரு கொடுக்கப்பட்டுள்ள திசையில் அவ்விசைகளின் பிரிந்த பகுதிகளின் மொத்தமும் தனித்தனியே பூச்சியமானல், அவ்விசைகள் சமநிலையிலிருக்கும்.

A, B என்பன ஒரு பொருளின் மேல் செயல்படும் ஒருதள விசைகளின் தளத்திலுள்ள இரு புள்ளிகள். இப்புள்ளிகள்

ஒவ்வொன்றையும் பற்றி அவ்விசைகளின் திருப்புத்திறன்களின் மொத்தம் பூச்சியமெனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளதால் அவ்விசைகள் ஒரு சுழலிணையாகச் சுருங்க முடியாது; ஒரு தனி விசையாகத் தான் சுருங்க முடியும். அத்தனி விசையை R என்க.

$\therefore$ A யைப் பற்றி R இன் திருப்புத்திறன் பூச்சியமாகும். ஆகவே. R ஆனது A வழியே செல்லும். இதுபோல், R ஆனது B வழியேயும் செல்லுமாகையால், R இன் செயற்கோடு AB ஆகும்.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள நேர்கோடு ABக்குச் செங்குத்தாகயில்லாததால் ABயுடன் அதன் சாய்வுக் கோணம் θ என்க.

இத்திசையிஒ R இன் பிரித்த பகுதி = அதே திசையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள விசைகளின் பிரித்த பகுதிகளின் மொத்தம் = O என்று கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

அதாவது, $R \cos = O \quad \therefore \theta = 90^\circ$ அல்லது $R = O$.

ஆனல் $\theta \neq 90^\circ$ ஆகையால், $R = O$.

ஆகவே, கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஒருதள விசைகள் யாவும் சமநிலையிலிருக்கும்.

மாதிரி 70: ஒரு சமதள விசைத் தொகுதியின் தளத்தில் ஒரே நேர்கோட்டிலில்லாத ஏதேனும் மூன்று புள்ளிகளைப் பற்றி அவ்விசைகளின் திருப்புத்திறன்களின் இயற்கணித மொத்தங்கள் சமமாகவும், ஒரே அடையாளமுடையனவாகவுமிருப்பின் அவ்விசைகள் ஒரே சுழலிணையாகச் சுருங்குமென்று நிறுவுக.

தீர்வு:

O, A, B என்பன கொடுக்கப்பட்டுள்ள விசைகளின் தளத்தில் ஒரே நேர்கோட்டிலில்லாத மூன்று புள்ளிகள்.

Oஐ ஆதியாகவும் OA ஐ x அச்சாகவும் O வழியே OAக்குச் செங்குத்துக்கோட்டை y - அச்சாகவும் கொண்டு A, B ஆகியவற்றின் அச்சுத் தூரங்களை முறையே (a,o), (b,c) என்று குறிப்பிடுக.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள விசைகள் ஒரு சுழலிணையாகச் சுருங்குமென்று கொள்க.

ox, oy திசையில் விசைகளின் பிரித்த பகுதிகளின் மொத்தங்கள் முறையே Y, X என்றும், Oஐப் பற்றி விசைகளின் மொத்தத் திருப்புத் திறன் G என்றும் கொள்க.

$\therefore$ (x,y) என்னும் ஏதேனுமொரு புள்ளியைப் பற்றி மொத்தத் திருப்புத் திறன் $= G - xY + y\,yX$ ஆகும்.

$\therefore$ $A\ (a,o)$ ஐப் பற்றி மொத்தத் திருப்புத்திறன்

$$= G - aY + (o)X = G - aY.$$

$B\ (b,c)$ ஐப் பற்றி மொத்தத்திறன் $G - by + cX$

O ஐப்பற்றி மொத்தத் திருப்புத்திறன் $= G$.

இம் மூன்று திருப்புதிறன்களும் சமமாதலின்,

$$G = G - aY = G - bY + cX$$

$$\therefore \quad aY = O, \quad bY - cX = O$$

$$\therefore \quad Y = O, \quad X = O$$

$$\therefore \quad R = O.$$

ஆனால் $G \neq O$ ஆகையால், கொடுக்கப்பட்டுள்ள விசைகள் ஒரு தனிச் சுழலிணையாகச் சுருங்கும்.

மாதிரி 71 ஒரு தளத்தில் செயல்படுகின்ற ஒரு மாறுகின்ற விசைத் தொகுதியானது அதன் தளத்திலுள்ள இரு நிலையான புள்ளிகளைப் பற்றி மாறிலித் திருப்புத்திறன்களைக் கொண்டிருப்பின், அவற்றின் விளைவு விசை மற்றொரு நிலையான புள்ளி வழியே செல்லுமென்றும், அவ்விளைவு விசையின் மீச்சிறு மதிப்பு அதன் இரு மாறிலித் திருப்புத்திறன்களின் வித்தியாசத்தை அவ்விரு புள்ளிகளுக் கிடையேயுள்ள தூரத்தில் வகுத்துப் பெறும் மதிப்புக்குச் சமமென்றும் நிறுவுக.

தீர்வு:

இரு நிலையான புள்ளிகளை O, A என்று குறிப்பிடுக. Oஐ ஆதியாகவும், OAஐ x அச்சாகவும், O வழியே $O\,A$க்குச் செங்குத்துக்கோட்டை y அச்சாகவும் எடுத்துக் கொள்க.

Aயின் அச்சுத் தூரங்களை (a,o) என்று குறிப்பிடுக. O ஐப் பற்றிய மொத்தத் திருப்புத்திறன் G' என்றும் கொண்டால்,

$$G' = G - aY + (0)\,X = C - aY \text{ ஆகும்.}$$

அல்லது, $Y = \dfrac{G - G'}{a}$.

மேலும் G, G' ஆகியவை மாறிலிகளாதலின் Y ஒரு மாறிலியாகும்.

விளைவுச் சமன்பாடு : $xY - yX = G$ ஆகும்.

அதாவது, $(xY - G) - yX = O$

X இன் எல்லா மதிப்புக்களுககும் $xY - G = O$, $y = O$ என்ற நேர்கோடுகளின் வெட்டுப் புள்ளியாகிய $\left(-\frac{G}{Y}, O\right)$ வழியே செல்லும் நேர்கோட்டை இச்சமன்பாடு குறிப்பிடுகிறது.

G, Y என்பன மாறிலிகளாதலால், $\left(\frac{G}{Y}, O\right)$ என்பது ஒரு நிலையான புள்ளியாகும். எனவே, X இன் எல்லா மதிப்புக்களுக்கும் விளைவு விசையானது $\left(\frac{G}{Y}, O\right)$ என்னும் நிலையான புள்ளி வழியே செல்லும்.

$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ ஆகையாலும், Y ஒரு மாறிலியாகையாலும், $X = O$ ஆகயிருக்கும் போது R இன் மதிப்பு மீச்சிறிதாகயிருக்கும்.

$\therefore$ R இன் மீச் சிறு மதிப்பு $= \sqrt{O + Y^2} = Y = \dfrac{G - G'}{a}$

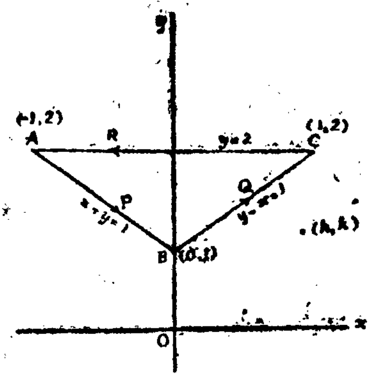
$= \dfrac{\text{மாறிலித் திருப்புத்திறன்களின் வித்தியாசம்}}{\text{இருபுள்ளிகளுக்கிடையேயுள்ள தூரம்}}$

மாதிரி 72 $x + y = 1$, $y - x = 1$, $y = 2$ ஆகிய நேர்கோடுகளாலுண்டாகும் ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் மீது முறையே P, Q, R, என்னும் விசைகள் செயல்படுகின்றன அவற்றின் விளைவு விசையின் செயற்கோட்டின் சமன்பாட்டை காண்க.

தீர்வு

சமன்பாடுகளைத் தீர்த்து முக்கோணத்தின் முனைகளின் அச்சுத் தூரங்கள் $(-1, 2)$, $(O, 1)$, $(1, 2)$ என்று பெறலாம்.

AB, *BC*, *CA* என்ற பக்கங்களின் சமன்பாடுகளின் முறையே $x + y = 1, y - x = 1, y = 2$ என்று கொள்க.



படம் 107

இவற்றின் வழியே செயல்படும் விசைகள் முறையே *P*, *Q*, *R* ஆகும்.

(h, k) என்பது இவற்றின் விளைவு விசையின் செயற்கோட்டிலுள்ள ஒரு புள்ளி என்க.

$\therefore (h, k)$ ஐப்பற்றி விளைவு விசையின் திருப்புத் திறன் பூச்சியமாகும்.

p, q, r என்பன (h, k) இலிருந்து மூன்று பக்கங்களுக்குமுள்ள செங்குத்துத் தூரங்களெனில்,

$$p = \frac{h+k-1}{\sqrt{2}}, q = \frac{k-h-1}{\sqrt{2}}, r - \frac{k-2}{\sqrt{1}} = k-2 \text{ ஆகும்.}$$

(h, k) ஐப் பற்றி மொத்ததிருப்புத்திறன் $= O$.

$\therefore Pp + Qq + Rr = O.$

$$P\,\frac{(h+k-1)}{\sqrt{2}} - Q.\frac{(k-h-1)}{\sqrt{2}} + R\,(k-2) = O$$

அதாவது, $P\,(h+k-) - Q\,(k-h-) + R\,(k-2)\sqrt{_2} = O.$

$$h(P+Q) + k\,(P-Q+\sqrt{_2}\,R) = P-Q+\sqrt{_2}\,R.$$

ஆகவே, $x\,(P+Q)+y\,(P-Q+\sqrt{_2}R) = P-Q+2\sqrt{_2}R,$ என்பது விளைவுச் சமன்பாடு ஆகும்.

மாதிரி 73: கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஒருசம தள விசைத் தொகுதியின் (—2, 0), (0, 3), (2, 4) ஆகிய புள்ளிகளைப்பற்றிய

திருப்புத்திறன்கள் முறையே 6, 3,—2 ஆகும். விளைவு விசையின் அளவையும், செயக்கோட்டுச் சமன்பாட்டையும் காண்க.
(சென்னை பி. எஸ்ஸி. 1968 ஏப்.)

தீர்வு

விசைகளின் தளத்தில் O என்னும் ஏதேனுமொரு புள்ளி வழியே Ox, Oy என்னும் செங்குத்து அச்சுக்களை எடுத்துக் கொள்க.

எனவே, கொடுக்கப்பட்டுள்ள விசைத் தொகுதியை O வழியே செல்லும் R என்னும் ஒரு தனி விசைக்கும், O ஐப் பற்றிய திருப்புத்திறன். G கொண்ட ஒரு சுழலிணைக்கும் சமமென்று கொள்ளலாம்.

$\therefore$ $P(x,y)$ என்னும் ஏதேனுமொரு புள்ளியைப் பற்றிய அவ்விசைத் தொகுதியின் திருப்புத்திறன் G' எனில்,

$$G' = G - xY + yX$$

ஆகும்.

இங்கு $(-2,O)$ பற்றிய திருப்புத்திறன் 6 ஆகும்.

$$\therefore 6 = G - (-2)\,Y + (O)\,X$$

அல்லது, $G + 2Y. = 6$

$(O, 3)$ பற்றிய திருப்புத்திறன் 3 ஆகும்.

$$\therefore \quad 3 = G - O + 3X$$

அல்லது, $G + 3X = 3$ ... ... (2)

$(2, 4)$ பற்றிய திருப்புத்திறன் -2 ஆகும்.

$$\therefore \quad -2 = G - 2Y + 4X$$

அல்லது, $G - 2Y + 4X = -2$ ... ... (3)

(1), (2) ஆகிய சமன்பாடுகளிலிருந்து,

$$3X - 2Y = -5.$$

$\therefore$ $X = 1$, $Y = 3$, $G = O$ என்று காணலாம்.

விளைவு விசை $R = \sqrt{^2 + Y^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}.$

விளைவு விசையின் சமன்பாடு :

$$G - xY + yX = O$$

அதாவது, $O - x(3) + y(1) = O$

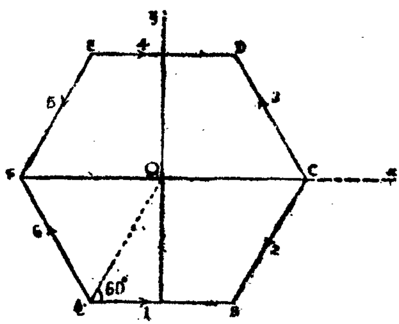
அல்துல, $y = 3x.$

மாதிரி 74 *ABCDEF* என்பது *O* ஐ மையமாகக் கொண்ட ஓர் ஒழுங்கு அறு கோணம். *AB*, *CB*, *CD*, *ED*, *EF*, *AF* வழியே முறையே 1, 2, 3, 4, 5, 6 அளவுகளுள்ள விசைகள் செயல்படுகின்றன. இத்தொகுதியை *O*-வில் செயல்படும் ஒரு விசையுடன் ஒரு சுழலிணையாகச் சுருக்குக. அத்தனி விளைவு விசை செல்லக் கூடிய *AB*யிலுள்ள புள்ளியைக் காண்க.

தீர்வு

ஒழுங்கு அறுகோணத்தின் பக்கம் *a* என்க. *O* விலிருந்து ஒவ்வொரு பக்கத்திற்குமுள்ள செங்குத்துத்தூரம் $= \frac{a}{2}\tan 60°$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}a.$



படம் 108

OC ஐ *x*-அச்சாகவும், *O* வழியே *OC*க்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டை *y*-அச்சாகவும் எடுத்துக்கொள்க.

Ox, *Oy* வழியே விசைகளின் குத்துப்பிரிவுகளின் மொத்தங்களாகிய *X*, *Y* ஆகிய வற்றைக் கணக்கிடுக.

$X = Ox$ வழியே குத்துப் பிரிவு மொத்தம்

$= 1 - 2\cos 60° - 3\cos 60° + 4 - 5\cos 60° - 6\cos 60°$

$= 1 - 1 - \frac{3}{2} + 4 - \frac{5}{2} - 3$

$= -3.$

$Y = Oy$ வழியே குத்துப் பிரிவு மொத்தம்

$= 1(O) - 2\sin 60° + 3\sin 60° - 4(O) - 5\sin 60° + 6\sin 60°$

$= O - 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + O - 5\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= \sqrt{3}.$

$\therefore O$ வழியே செயல்படும் விளைவு விசை $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$

$= \sqrt{9 + 3}$

$= \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$ அலகுகள்.

இவ்விளைவு விசைக்கும் Oxக்கு முள்ள கோணம் θ எனின்,

$$\tan\theta = \frac{Y}{X} = \frac{\sqrt{3}}{-\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = \tan 150°.$$

$$\theta = 150°$$

O ஐப்பற்றி எல்லா விசைகளின் திருப்புத்திறன்களின் மொத்தம்.

$$= 1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right) - 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right) + 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right) - 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right) + 5\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right) - 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$$

$$= -3\frac{\sqrt{2}}{2}a. = G.$$

எனவே, கொடுக்கப்பட்டுள்ள விசைத்தொதியானது $2\sqrt{3}$ அலகு அளவும், OCயுடன் 150° சாய்வும் கொண்ட R என்னும் ஒரு தனி விசைக்கும் $-3\frac{\sqrt{3}}{2}a$ திருப்புத்திறன் கொண்ட ஒரு சுழலிணைக்கும் சமமாகும்.

இவ்விரண்டையும் ஒரு தனி விசையாகச்சுருக்கினல் அதன் சமன் பாடு வருமாறு :

$$G - xY + yX = O$$

அதாவது, $-3\frac{\sqrt{3}}{2}a - x\sqrt{3} + y(-3) = O.$

அதாவது, $-3\sqrt{3}a - 2\sqrt{3}x - 6y = O$

அல்லது, $2x + 2\sqrt{3}y + 3a = O$

இச்செயற்கோடு ABஐச் சந்திக்கும் புள்ளியைக் காண இச்சமன் பாட்டையும், ABயின் சமன்பாட்டையும் தீர்க்கவும்.

*AB*யானது *Ox*க்குக் கீழே $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ தூரத்தில் இருப்பதால் அதன் சமன்பாடு $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}a$ ஆகும்.

இம் மதிப்பை விளைவுச் சமன்பாட்டில் பிரதியிடவும்

$$2x + 2\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a\right) + 3a = 0.$$

$$2x - 3a + 3a = 0$$

அல்லது. $x = 0.$

ஆகவே, தனி விளைவு விசையானது *AB*யின் நடுப்புள்ளி வழியே செல்கிறது.

(1) *ABCDEF* என்பது 4 அடி நீளப் பக்கங்களுடைய ஒரு ஒழுங்கு அறுகோணம். *CD*, *DE*, *EF*, *FA* வழியே 2, 3, 4, 5 ராத்தல் எடைகளுள்ள விசைகள் செயல்படுகின்றன. இவ் விசைத் தொகுதியை *A* வழியே செயல்படும் ஒரு விசையுடன் ஒரு சுழலிணைக்குச் சுருக்குக.

(2) a நீளப் பக்கங்களுடைய *ABCDEF* என்னும் ஒழுங்கு அறுகோணத்தில் *AB*, *BC*, *CD*, *DE* வழியே முறையே 2, 5, 4, 8 கி. கி. எடைகளுள்ள விசைகள் செயல்படுகின்றன. அவற்றின் விளைவு விசையின் அளவையும் அது *AB*யை வெட்டும் புள்ளியையும் காண்க.

(3) a அலகுப் பக்கமுடைய ஒரு ஒழுங்கு அறுகோணத்தில் *AB*, *CB*, *CD*, *DE*, *EF*, *AF* ஆகிய பக்கங்களின் வழியே முறையே 1,2,3,6,5,4 கி.கி. எடைகளுள்ள விசைகள் செயல்படுகின்றன. இவ்விசைகள் ஒரு சுழலிணைக்குச்சமமென்று காட்டி, அதன் திருப்புத்திறன் காண்க.

(4) *ABCDEF* என்பது ஒரு ஒழுங்கு அறுகோணம். *AC*,*AF*,*DE*,*EC* வழியே முறையே 10, $10\sqrt{3}$, $20\sqrt{3}$, 40 கி.கி. எடைகளுள்ள விசைகள் செயல்படுகின்றன. இவ்விசைகள் சம நிலையிலிருக்கு மென்று காட்டுக.

(5) ஒரு ஒழுங்கு அறுகோணத்தின் ஒரு முகவரிசையிலெடுக்கப்பட்ட பக்கங்களின் வழியே F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6 என்னும் விசைகள் செயல்படுகின்றன. அவைகள் சம நிலையிலிருக்க வேண்டுமாயின்,

(i) $F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 + F_6 = O$ ஆகவும்,

(ii) $F_1 - F_4 = F_3 - F_6 = F_5 - F_2$ ஆகவுமிருக்க வென்று காட்டுக (மதுரை பி ஸெஸ். 1970 ஏப்.,

(6) a அலகுப் பக்கங்கள் கொண்ட ஓர் ஒழுங்கு அறு கோணத்தின் ஒருமுக வரிசையிலெடுக்கப்பட்ட பக்கங்களின் வழியாக a, $2a$, $3a$, $4a$, $5a$, $6a$ அளவுகளுள்ள விசைகள் செயல்படுகின்றன. விளைவு விசையின் அளவு, திசை ஆகிய வற்றைக் காண்க.

(7) $ABCDEF$ என்பது a அலகுப் பக்கங்களுடைய ஒரு ஒழுங்கு அறு கோணம். BA, BC, CD, DE வழியே முறையே 4, 2, 3, 5, கி. கி. எடைகளுள்ள விசைகள் செயல்படுகின்றன. அறுகோணத்தின் மையத்தின் வழியே AB, BD ஆகியவற்றின் இணையான கோடுகளை அச்சுக்களாகக் கொண்டு இவ்விசை களுக்கு ஒரு விளைவு விசையுண்டென்று காட்டுக. அவ்விளைவு விசையின் அளவு, செயற்கோட்டுச் சமன்பாடு ஆகியவற்றைக் காண்க.

(8) ABC என்னும் நேர்கோட்டை B யானது 1 : 2 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கிறது. அக்கோட்டின் தளத்தில் செயல் படுகின்ற ஒருதள விசைகளின் A, B, C பற்றிய திருப்புத்திறன் களின் மொத்தங்கள் முறையே G_1, G_2, G_3 ஆகும்.

$2G_1 - 3G_2 + 3G_3 = O$ என்று நிறுவுக.

(9) ஒரு சமதள விசைத் தொகுதியின் தளத்திள்ளவு செங்குத்து அச்சுக்களைக் குறித்து (3;1), (—1, 1), (2, 4) அச்சுத் தூரங்கள் கொண்ட புள்ளிகள் பற்றி அவ்விசைகளின் திருப்புத் திறன்களின் இயற்கணித மொத்தங்கள் முறையே 10, — 4, 12 எனில் விளைவு விசையின் அளவு, அதன் செயற்கோட்டின் சமன்பாடு ஆகியவற்றைக் காண்க.

(10) ஒரு சமதள விசைத் தொகுதியின் தளத்திலுள்ள செங்குத்து அச்சுக்களைக் குறித்து $(1, O)$, $(O, 2)$, $(2, 3)$ என்னும் புள்ளிகள் பற்றி அவ்விசைகளின் திருப்புத்திறன்களின் மொத் தங்கள் முறையே G_1, G_2; G_3 எனில், விளைவு விசை x அச்சுடன் கொண்டுள்ள கோணம் $\tan^{-1}\left(\dfrac{G_1 - 3G_2 + 2G_3}{2G_1 - G_2 - G_3}\right)$ என்று காட்டுக.

(11) ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின் மேல் செயல்படும் சம நிலையிலில்லாத ஒரு தள விசைகளின் தளத்தில் ஒரே நேர் கோட்டிலில்லாத A, B, C என்னும் புள்ளிகள் பற்றி அவ்விசைத் தொகுதியின் திருப்புத்திறன்கள் முறையே G_1, G_2, G_3 எனில், $G_1 BC + G_2 . CA + G_3 AB = O$ என்று காட்டுக.

(12) $ABCD$ என்பது a நீளப்பக்கங்களையுடைய ஒரு சதுரம் AB, BC, CD, AD வழியே முறையே 2, 3, 6, 5, கி. கி. எடைகளுள்ள விசைகள் செயல்படுகின்றன. அவை $4\sqrt{5}$ கி.கி. எடையுள்ள விசையாகச் சுருங்குமென்றும் AB, ADயை அச்சுகளாகக் கொண்டு அதன் சமன்பாடு $8x + 4y = 9a$ என்றும் காட்டுக.

(13) $ABCD$ என்பது 6 அங்குலப் பக்கங்களுடைய ஒரு சதுரம். AB, BC, AC, AD, BD வழியே முறையே 4, 2, 2, 6, 3 ராத்தல் எடைகளுள்ள விசைகள் செயல்படுகின்றன. விளைவு விசையின் அளவையும் செயற்கோட்டையும் காண்க.

(14) $ABCD$ என்னும் சதுரத்தின் பக்கம் 4 மீட்டர். AB, BC CD, DA, BD வழியே முறையே 1, 3, 5, 7, $8\sqrt{2}$ கி.கி. எடைகளுள்ள விசைகள் செயல்படுகின்றன. அவற்றின் விளைவு விசையின் அளவையும் செயற்கோட்டையும் காண்க,

(15) $ABCD$ என்னும் சதுரத்தின் பக்கம் a. $B.C.D$ வழியே ABக்கு முறையே 0°, 30°, 60° சாய்வுகளில் Pக்குச் சமமான விசைகள் செயல்படுகின்றன. அவை, A வழியே AB க்கு 30° சாய்வில் செயல்படும் $P(\sqrt{3} + 1)$ அளவுடைய ஒரு விசையுடன் $DCBA$ யின் போக்கில் $\frac{\sqrt{3}}{2} Pa$ திருப்புத்திறன் கொண்ட சுழலிணைக்குச் சமமென்று காட்டுக.

(16) 3 மீட்டர் நீளப் பக்களுடைய $ABCD$ என்னும் சதுரத்தில் AB, BC, CD, DA வழியே முறையே 3, 4, 2, 1, கி.கி. எடைகளுள்ள விசைகள் செயல்படுகின்றன. இத்தொகுதியை Aயில் செயல்படும் ஒரு தனி விசையுடன் ஒருதனிச் சுழலிணையாகச் சுருக்குக.

(17) $ABCD$ என்னும் செவ்வகத்தில் $AB = 15''$; $AD = 8''$; DA, AB, DB, AC, CB, CD வழியே செயல்படும் 22, 10, 51, 34, 40, 15, ராத்தல் எடைகளுள்ள விசைகளின் விளைவு விசையின்

செயற்கோடு AB, AD யை அச்சுகளாகக் கொண்ட $x + y = 12$ என்னும் சமன்பாடு என்று காட்டுக.

(18) $PQRS$ என்னும் சதுரத்தின் பக்கம் 4 அடி. PQ, QR, RS, SP வழியே முறையே 1, 2, 3, 4 ராத்தல் எடைகளுள்ள விசைகள் செயல்படுகின்றன. அவை CA வழியே செயல்படும் $2\sqrt{2}$ ராத்தல் எடையுள்ள ஒரு விசைக்கும் 20 அடி ராத்தல் திருப்புத்திறன் கொண்ட ஒரு சுழலிணைக்குச் சமமென்று காட்டுக.

(19) $y = x$, $y = 2x + 1 = 0$ என்னும் நேர்கோடுகளின் வழியே x, y ஆகியவை அதிகரிக்கும் போக்கில் மூன்று சம விசைகள் செயல்படுகின்றன: விளைவுச் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(20) ABC என்பது ஒரு சமபக்க முக்கோணம். D, E, F என்பன முறையே BC, CA, AB ஆகிய பக்கங்களின் நடுப் புள்ளிகள் BC, CA, AB வழியே முறையே P, $2P$, $3P$ என்னும் விசைகளும், FE, ED, DF வழியே முறையே $4P$, $5P$, $6P$ என்னும் விசைகளும் செயல்படுகின்றன. அவற்றின் விளைவுச் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(21) ABC என்ற சமபக்க முக்கோணத்தில் BC, CA, AB வழியே முறையே 2, 3, 4 அலகு அளவுகள் கொண்ட விசைகள் செயல்படுகின்றன. அவற்றின் விளைவு விசையின் அளவையும், அது ஏதேனும் ஒரு பக்கத்தைச் சந்திக்கும் புள்ளியையும் காண்க.

(22) Ox, Oy ஆகிய அச்சுக்களைக் குறித்து $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2)$ (x_3, y_3) (x_4, y_4) என்ற புள்ளிகளைப் பற்றி ஒரு தளவிசைத் தொகுதியொன்றின் திருப்புத்திறன்கள் முறையே G_1, G_2, G_3, G_4 ஆகும்.

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & G_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & G_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & G_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & G_4 \end{vmatrix} = G$$

என்று காட்டுக.

(23) ஒருதள விசைத் தொகுதியொன்று G திருப்புத்திறன் கொண்ட ஒரு சுழலிணையாகச் சுருங்குகிறது. வெவ்வொரு விசையும் அதன் இரு புள்ளியைச் சுற்றி 90° திருப்பப்பட்டால் அது

H திருப்புத்திறன் கொண்ட சுழலிணையாகச் சுருங்குகிறது. ஒவ்வொரு விசையும் α கோணத்தில் திருப்பப்பட்டால் அத் தொகுதியானது $G \cos\alpha + H \sin\alpha$ திருப்புத்திறன் கொண்ட சுழலிணையாகச் சுருங்குமென்று காட்டுக.

(24) x அச்சின் வழியே P என்னும் விசை, y அச்சின் வழியே Q என்னும் விசை, xy தளத்தில் G திருப்புதிறன் கொண்ட சுழலிணை ஆகிய இம்மூன்றின் விளைவு விசை $Qx - Py - G = O$ என்னும் நேர்கோட்டின் வழியே செயல்படுமென்று காட்டுக.

(25) ஒரு சமதள விசைத் தொகுதியைச் சேர்ந்த ஒவ்வொரு விசையும் அதன் இடுபுள்ளியாகிய (x,y)ஐச் சுற்றி $90°$ கோணத்தில் திருப்பப்படுகிறது.

$P = \sum X = x$ அச்சு வழியே விசைகளின் பிரித்த பகுதிகளின் மொத்தம்,

$Q = \sum Y = y$ அச்சு வழியே விசைகளின் பிரித்த பகுதிகளின் மொத்தம்,

$M = \sum(xX + yY)$

எனில், திருப்பப்பட்ட விளைவு விசைச் சயற்கோட்டின் செமன்பாடு $Px + Qy = M$ என்று காட்டுக.

மூன்று ஒருதள விசைகளின் சமநிலை
(Equilibrium of three coplanar forces)

தேற்றம் ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின்மேல் செயல்படும் மூன்று விசைகள் சமநிலையிலிருப்பின் அவை ஒரே தளத்திலமைவதோடு, இணையாகவோ அல்லது ஒரு புள்ளியில் சந்திப்பவையாகவோயிருக்கவேணடும்.

ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின்மேல் செயல்படும் $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$, என்னும் மூன்று விசைகள் சமநிலையிலிருப்பதாகக் கொள்க.

எனவே $\vec{P}, \vec{Q}$ ஆகிய இருவிசைகளின் விளைவுவிசையை மூன்றுவது விசையாகிய $\vec{R}$ விளைவு நீக்கம் செய்யவேண்டும். $\vec{P}, \vec{Q}$ ஆகியவற்றின் விளைவுவிசையும் $\vec{R}$-ம் ஒரே தளத்திலமைந்

தாலொழிய இது சாத்தியமாகமுடியாது. எனவே, மூன்று விசைகளும் ஒரே தளத்திலமையவேண்டும்.

(அ) இப்பொழுது மூன்றுவிசைகளும் இணையல்லவென்று கொள்க.

$\vec{P}$, $\vec{Q}$ என்னும் இருவிசைகளும் O என்னும் புள்ளியில் வெட்டிக் கொள்வதாகக் கொள்க. இவற்றின் விளைவு விசை $\vec{R}$, எனில், அது O வழியே இவற்றிற்கிடையே செயல்படும் ஒரு விசையாகும். ஆனல், $\vec{P}$, $\vec{Q}$, $\vec{R}$ என்பன சமநிலையிலிருப்பதால், $\vec{R}$ ஆனது $\vec{R}$-ஐ விளைவு நீக்கம் செய்யவேண்டும். ஆகவே $\vec{R}$ ஆனது $\vec{R}$-க்குச் சமமாகவும் எதிராகவும் இருக்கவேண்டும். ஆகவே, $\vec{R}$-ம், $\vec{R}$-ம் O வழியே எதிர்த்திசைகளில் செயல்படும் சமவிசைகளாகும். அதாவது, P, Q, R ஆகியவை O என்னும் புள்ளியில் சந்திக்கும் மூன்று விசைகளாகும்.

(ஆ) மூன்று விசைகளும் P Q என்பன இணைவிசைகள் என்று கொள்க.

இணையாகவுள்ள $\vec{P}$, $\vec{Q}$ என்னும் இருவிசைகளும் ஒரு சுழலிணையாக அமையமுடியாது. ஏனெனில், ஒரு சுழலிணையும் ஒரு விசையும் சேர்ந்து சமநிலை பெறமுடியாது. ஆகவே, $\vec{P}$, $\vec{Q}$ ஆகிய இரு இணைவிசைகளுக்கும் அவற்றிற்கு இணையான ஒரு விளைவுவிசையுண்டு. அவ்விளைவு விசையை $\vec{R}$ என்க. $\vec{P}$, $\vec{Q}$, $\vec{R}$ ஆகிய மூன்று விசைகளும் சமநிலையில் இருப்பதால் $\vec{R}$-ஐ, $\vec{R}$ விளைவு நீக்கம் செய்யவேண்டும். ஆகவே, $\vec{R}$ ஆனது $\vec{R}$-க்குச் சமமாகவும், எதிராகவுமிருக்கவேண்டும். ஆனல் $\vec{R}$ ஆனது $\vec{P}$, $\vec{Q}$ ஆகிய விசைகளுக்கு இணையாகயிருப்பதால், $\vec{R}$-ம் அவைகட்கு இணையாகயிருக்கும். அதாவது, மூன்று விசைகளும் இணையாகயிருக்கும்.

சமநிலையிலிருக்கும் மூன்று ஒருதளவிசைகள் பற்றிய கணக்குகளைத் தீர்க்க பின்வரும் திரிகோணச் சூத்திரங்கள் பெரிதும் உதவியாகயிருக்கும்

திரிகோணத் தோற்றம்

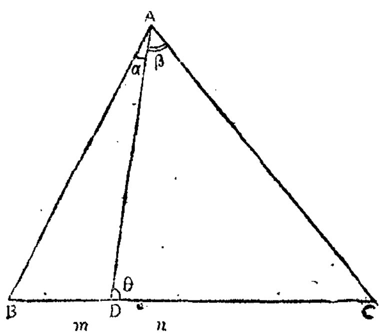
$\triangle ABC$யில் BCஐ $BD:DC=m:n$ என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்கும் D என்னும் புள்ளியானது Aயுடன் சேர்க்கப்பட்டு $\angle ADC=\theta$, $\angle BAD=\alpha$, $\angle DAC=\beta$ என்று குறிப்பிடப்படின்

(i) $(m+n)\cot\theta = m\cot\alpha - n\cot\beta$.

(ii) $(m+n)\cot\theta = n\cot B - m\cot C$.

ஆகும்.

நிறுவல்



படம் 109

(i) $\frac{m}{n}=\frac{BD}{DC}$

$$=\frac{\triangle BAD}{\triangle DAC}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}AB.\,AD.\,\sin\alpha}{\frac{1}{2}AD.\,AC.\,\sin\beta}$$

$$=\frac{AB\sin\alpha}{AC\sin\beta}$$

$$=\frac{2R\sin C.\,\sin\alpha}{2R\sin B.\,\sin\beta}$$ (R என்பது சுற்றுவட்ட ஆரை)

$$=\frac{\sin C.\,\sin\alpha}{\sin B.\,\sin\beta}$$ (ஆனால் $B=\theta-\alpha;\ C=180^\circ-(\theta+\beta)$)

$$=\frac{\sin(180^\circ-\overline{\theta+\beta})\sin\alpha}{\sin(\theta-\alpha).\sin\beta}$$

$$=\frac{\sin(\theta+\beta).\sin\alpha}{\sin(\theta-\alpha).\sin\beta}$$

$$=\frac{\sin\alpha(\sin\theta\cos\beta+\cos\theta\sin\beta)}{\sin\beta(\sin\theta\cos\alpha-\cos\theta\sin\alpha)}$$

$$=\frac{\dfrac{\sin\theta\cos\beta}{\sin\beta}+\dfrac{\cos\theta\sin\beta}{\sin\beta}}{\dfrac{\sin\theta\cos\alpha}{\sin\alpha}-\dfrac{\cos\theta\sin\alpha}{\sin\alpha}}$$

$$=\frac{\sin\theta\cot\beta+\cos\theta}{\sin\theta\cot\alpha-\cos\theta}$$

$$=\frac{\cot\beta+\cot\theta}{\cot\alpha-\cot\theta}$$

$\therefore\ n(\cot\beta+\cot\theta)=m(\cot\alpha-\cot\theta)$

அல்லது, $(m+n)\cot\theta=m\cot\alpha-n\cot\beta.$

(ii) $\dfrac{m}{n}=\dfrac{\sin C.\sin\alpha}{\sin B\ \sin\beta}$ (ஆனால் $\alpha=\theta-\beta;\ \beta=180^\circ-\theta-C$)

$$=\frac{\sin C\sin(\theta-B)}{\sin B\sin(180^\circ-\overline{\theta+C})}$$

$$=\frac{\sin C.\sin(\theta-B)}{\sin B\ \sin(\theta+C)}$$

$$=\frac{\sin C.(\sin\theta\cos B-\cos\theta\sin B)}{\sin B\ (\sin\theta\cos C+\cos\theta\sin C)}$$

$$=\frac{\dfrac{\sin\theta\cos B}{\sin B}-\dfrac{\cos\theta\sin B}{\sin B}}{\dfrac{\sin\theta\cos C}{\sin C}+\dfrac{\cos\theta\sin C}{\sin C}}$$

$$=\frac{\sin\theta\cot B-\cos\theta}{\sin\theta\cot C+\cos\theta}$$

$$=\frac{\cot B-\cot\theta}{\cot C+\cot\theta}$$

$\therefore\ m(\cot C+\cot\theta)=n(\cot B-\cot\theta)$

அல்லது $(m+n) \cot \theta = n \cot B - m \cot C$.

மேற்கண்ட சூத்திரங்களைப் பயன்படுத்தி, சமநிலையிலிருக்கும் மூன்று ஒருதளவிசைகள் பற்றிய கணக்குகளைத் தீர்க்கும் முறையைப் பின்வரும் மாதிரிக் கணக்குகளின் மூலம் அறிந்து கொள்ளலாம். ஒரு துகளின்மீது அல்லது ஒரு புள்ளியில் செயல்பட்டுச் சமநிலையிலிருக்கும் பல ஓருதளவிசைகள் பற்றிய கணக்குகளைத் தீர்க்க முயலுகையில், முதற்கண் அத்துகளின்மீது அல்லது அப்புள்ளியில் செயல்படும் அவ்விசைகளின் திசைகளைச் சரியாகக் குறிப்பிட்டு அவ்விசைத் தொகுதியின் சரியான படத்தை வரைய வேண்டியது மிகவும் அவசியமாகும். கொடுக்கப்பட்டுள்ள விசைகளைத் தவிர வேறு சில விசைகளும் அவ்விசைத் தொகுதியுடன் சேர்ந்து அத்துகளைச் சமநிலையில் வைத்திருக்கலாம். இத்தகைய விசைகளையும் படத்தில் குறிப்பிடவேண்டியது மிகவும் அவசியமாகும் எனவே, சமநிலை கணக்குகளில் கொடுக்கப்படாத எத்தகைய விசைகள் சமநிலைக்குக் காரணமாயிருக்கின்றனவென்று நாமறிந்து கொள்ளவேண்டியது மிகவும் அவசியமாகும். இத்தகைய விசைகளுள் நாம் கருத்திற் கொள்ள வேண்டிய சில முக்கியமான விசைகள் பற்றிய விவரங்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

(1) எடை (Weight)

கொடுக்கப்பட்டுள்ள துகள் அல்லது பொருளின் எடை நிலைக்குத்தாகக் கீழ்நோக்கிச் செயல்படும். இதை $\downarrow$ என்ற அம்புக்குறியின் மூலம் குறிப்பிடலாம். அதாவது, ஒரு பொருளின் எடை W நிலைக்குத்தாகக் கீழ்நோக்கிச் செயல்படுகிறது என்பதை "$W\downarrow$" என்ற குறியீட்டின் மூலம் குறிப்பிடலாம். "இலேசானதுகள்" அல்லது "இலேசான பொருள்" என்று குறிப்பிடப்பட்டிருந்தால் அத்துகள் அல்லது பொருள் எடையற்றது என்று கொள்ளவேண்டும்.

(2) இழுவிசை (Tension)

ஒரு துகள் அல்லது பொருள் ஒரு இலேசான நீளியல்பற்ற இழை (light inextensible string)யினுல் (அல்லது கயிற்றினுல்), விறைப்பாகக் கட்டியிழுக்கப்பட்டிருந்தால், அவ்விழையில் (அல்லது கயிற்றில்) ஒரு இழுவிசை செயல்படுமென்பதைக் கருத்திற் கொள்ளவேண்டும். இவ்விசை எப்பொழுதும் இழையின் வழியே (அல்லது கயிற்றின் வழியே) அப்பொருளிலிருந்து வெளிப்புறம் நோக்கிச் செயல்படுமென்பதையும் கவனத்தி

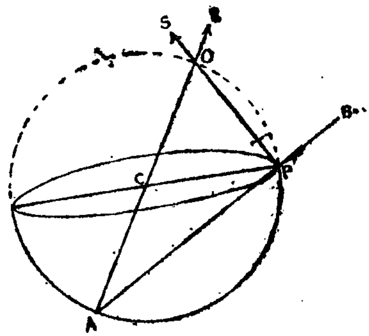
விருத்தவேண்டும். அவ்விழை ஒரே சீரானதாகயிருப்பின் அவ் விழையின் எல்லாப் புள்ளிகளிலும் இழுவிசை ஒரே அளவு டையதாகயிருக்கும். இழையானது ஒரு முளையின் வழியாகவோ அல்லது ஒரு வளையத்தின் வழியாகவோ சென்றால், அவ்விழை யின் நீளம் முழுவதிலும் இழுவிசை ஒரே அளவுடையதாக யிருக்கும். ஆனால் அது ஒரு துகளில் அல்லது பொருளில் அல்லது வளையத்தில் அல்லது முளையில் முடிச்சிடப்பட்டிருந் தால், முடிச்சின் இருபுறமுமுள்ள இழையின் பாகங்களில் செயல்படுகின்ற இழுவிசைகள் அவற்றின் நிலைகளுக்கேற்ப மாறுபட்டிருக்கும். முடிச்சின் இருபுறமுமுள்ள இழையின் பாகங்கள் சமச்சீரான நிலைகளில் (Symmetric positions) இருப்பின் அவற்றின் இழுவிசைகள் சவமாகயிருக்கலாம்.

(3) நேர்குத் தெதிர்விசை (Normal Reaction)

ஒரு துகள் ஒரு வழவழப்பான தளத்தின்மீது தொடுகை (contact)யிலிருந்தால், அத்துகளின் அழுத்தம் காரணமாக அத் தளத்திலிருந்து அத்துகளின் வழியே ஒரு எதிர்விசை அத்தளத் திற்கு நேர்குத்துத்திசையில் செயல்படும். இவ்வெதிர்விசைதான் "நேர்குத்தெதிர் விசை" அல்லது "நேர்குத்தெதிர் அழுத்தம்" (Normal Reaction) என்றழைக்கப்படுகிறது. உதாரணமாக, ஒரு நீண்ட கோலின் ஒரு நுனி ஒரு சுவரில் தொட்டுக் கொண் டிருந்தால், அக்கோலின் அழுத்தம் காரணமாக, சுவரின் மேலுள்ள தொடுபுள்ளிவழியே சுவரின் தளத்திற்கு நேர்குத்தாக "நேர்குத்தெதிர் விசை" செயல்படும். இங்கு கோலின் அழுத்த மானது அது சுவரைத் தொடுகின்ற தொடுபுள்ளி வழியே சுவரின்மீது செயல்படுவதாகக் கொள்கிறோம். எனவே, சுவரின் எதிர் விசையும் இத்தொடுபுள்ளிவழியே சுவரின் தளத்திற்குச் செங்குத்தாகச் செயல்படுகிறது.

ஒரு பொருள் ஒரு தளத்தைத் தொட்டுக் கொண்டிருந்தால் அத்தளத்தின் நேர்குத்தெதிர் விசையானது அப்பொருளுக்குத் தளத்திற்குமுள்ள பொதுவான தொடுபுள்ளி வழியே தளம் திற்குச் செங்குத்துத் திசையில் செயல்படும். ஒரு கோளம் (Sphere) ஒரு சாய்தளத்தின்மேல் சமநிலையிலிருந்தால் சாய் தளத்தின் நேர்குத்தெதிர் விசை தொடுபுள்ளி வழியே சாய் தளத்திற்குச் செங்குத்தாகச் செயல்படும். ஆனால் தொடுபுள்ளி வழியே சாய்தளத்திற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக்கோடு கோளத்தின் மையத்தின் வழியே செல்லுமாகையால் இங்கு நேர்குத்தெதிர் விசையானது கோளத்தின் தொடுபுள்ளிவழி ஆரை வழியாகச் செயல்படும்.

ஒரு வழவழப்பான கோல் ஒரு வளையத்தைத் தொட்டுக் கொண்டிருந்தால், அவையிரண்டின் தொடுகைப் பகுதி ஒரு புள்ளியாகும். அக்கோலானது வளையத்தின் தளத்திற்குச் செங்குத்தாகயிருந்தால், வளையத்தின் தொடுபுள்ளி வழி ஆரை யானது கோலுக்கும், வளையத்திற்கும் தொடுபுள்ளி வழியே நேர்குத்தாகயிருக்குமாகையால், நேர்குத்தெதிர் விசையானது இவ்வாரையின்வழியே செயல்படும். இவ்வெதிர் விசையின் திசையானது தொடுகையின் தன்மையைப் பொறுத்திருக்கும். கோலானது வளையத்தின் உட்புறமாக வளையத்தைத் தாங்கிக் கொண்டிருந்தால், கோலின்மேல் வளையத்தின் எதிர்விசை தொடுபுள்ளிவழியே வளையத்தின் மையத்தை நோக்கிச் செயல் படும். மாறாக, வளையத்தின்மேல் கோல் அழுத்திக் கொண் டிருந்தால் கோலின்மேல் விளையத்தின் எதிர்விசையானது தொடுபுள்ளிவழியே வளையத்தின் ஆரைவழியே வெளிப்புற மாகச் செயல்படும்.



படம் 110

AB என்னும் ஒரு கோல் அதன் ஒரு முனை *A*யானது ஒரு அரைக்கோளக் கிண்ணத்தின் உட்புறமாகத் தொட்டுக் கொண்டிருக்க, ஒருபகுதி சற்று வெளியே நீட்டிக்கொண்டிருக்கு மாறு ஒய்வுநிலையிலிருப்பதாகக் கொள்வோம். கிண்ணத்தின் விளிம்பில் கோலின் தொடுபுள்ளியை *P* என்று குறிப்பிடுக. முனை *A*யானது, கிண்ணத்தின் உட்பரப்பைத் தொட்டுக் கொண்டிருப்பதால், *A*யில் கிண்ணத்தின் எதிர்விசை கிண்ணத் திற்கு நேர்குத்தாக அதாவது *A*வழி ஆரைவழியாகச் செயல் படும். *P*யில் எதிர்விசையானது கோலுக்குச் செங்குத்தாகச் செயல்படும். இவ்விரு எதிர்விசைகளும் *O* என்னும் சந்திப்ப தாகக் கொள்க. $\angle APO = 90^\circ$ ஆகையால், *AO* என்பது முழுக் கோளத்தின் ஒருவிட்டமாகும்.

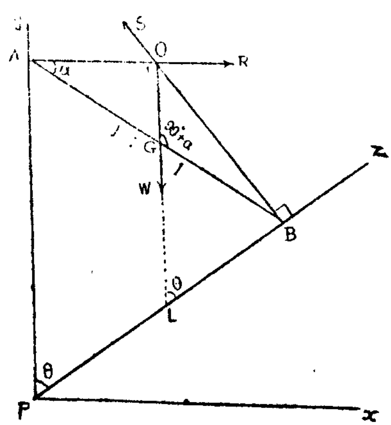
பிணையல்களில் செயல்படும் எதிர்விசைகள் (Reactions at hinges)

இரண்டு பொருட்கள் ஏதோ ஒருமுறையில் விறைப்பாகப் பிணைக்கப்பட்டிருந்தால், அப்பிணையலைச் சுற்றித் தாராளமாக நகரக்கூடியதாயிருக்கும். இப்பிணையலில் செயல்படும் எதிர் விசையின் அளவு, திசை ஆகியவை தெரியாமலிருக்கும். ஆகவே, இவ்வெதிர்விசையை X, Y என்னும் கிடை, நிலைக் குத்துக் கூறுகளாகப் பிரித்து, அவற்றின்மூலம் அவ்வெதிர் விசையின் அளவு, திசை ஆகியவற்றைக் கணக்கிடவேண்டும்; அல்லது, அப்பிணையல் புள்ளியைப்பற்றி திருப்புத்திறன்களைக் கணக்கிடுவதன்மூலம் அவ்வெதிர்விசையைக் கணக்கீட்டிலிருந்து நீக்கிவிடலாம்.

மாதிரி 75 ஒரு சீரானகோல் அதன் ஒரு முனை ஒரு வழவழப்பான நிலைக்குத்துச் சுவரின்மீதும், மறுமுனை அச்சுவருக்கு θ கோணத்தில் சாய்ந்துள்ள ஒரு வழவழப்பான சாய்தளத்தின் மீதும் படிந்துள்ள நிலையில் சமநிலையிலுள்ளது. கிடைத்தளத்துடன் கோலின் சாய்வு α எனில், $\tan \alpha = \frac{1}{2} \tan \theta$ என்று காட்டுக.

தீர்வு

PY என்பது நிலைக்குத்துச்சுவர். PZ என்பது சுவருடன் θ கோணத்தில் சாய்ந்துள்ள ஒரு சாய்தளம். AB என்னும்



படம் 111

கோல் சுவரையும், சாய்தளத்தையும் முறையே A, B என்னும் புள்ளிகளில் தொட்டுக்கொண்டு சம நிலையிலுள்ளது.

கோல் சீரானதாகையால், அதன் எடை W ஆனது ABயின் நடுப்புள்ளியாகிய G வழியே நிலைக்குத்தாகக் கீழ்நோக்கிச் செயல்படும். Aயில் கோலின்மீது சுவரின் எதிர்விசை R ஆனது சுவருக்குச் செங்குத்தாகச் செயல்படும். Bயில் கோலின்மீது சாய்தளத்தின் எதிர்விசை S ஆனது சாய்தளத்திற்குச் செங்குத் தாகச் செயல்படும். ஆகவே, இத்தொகுதியில் செயல்படுகின்ற மூன்று விசைகளும் வருமாறு :

(அ) ABயின் நடுப்புள்ளி G வழியே கோலின் எடை $W\downarrow$

(ஆ) Aயில் சுவருக்குச் செங்குத்தாகச் சுவரின் எதிர்விசை R.

(இ) Bயில் சாய்தளத்திற்குச் செங்குத்தாகச் சாய்தளத்தின் எதிர்விசை S.

இம்மூன்று விசைகளும் சமநிலையிலிருப்பதால், இவை மூன்றும் ஒரே புள்ளியில் (O-வில்) சந்திக்கும்.

$\triangle AOB$யில், $AG : GB = 1 : 1$ அதாவது, $m : n = 1 : 1$.

$\angle OAG =$ கிடைத்தளத்துடன் கோலின் சாய்வு $= \alpha$.

$\angle AOG = 90°$.

$\angle AGO = (90° - \alpha)$.

$\angle OGB = 180° - \angle AGO = 180° - (90° - \alpha)(90 + \alpha)$.

$\angle APB =$ சுவருக்கும் சாய்தளத்திற்குமிடையேயுள்ள கோணம் $= \theta$.

OG ஆனது PBயை Lஇல் சந்தித்தால், $\angle OLB = \theta$.

$\therefore \angle GOB = (90° - \theta)$.

$\triangle AOB$யில் திரிகோணச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துக.

$$(1+1) \cot \angle OGB = 1 \cot \angle AOG - 1 \cot \angle GOB.$$

$$2 \cot (90° + \alpha) = \cot 90° - \cot (90° - \theta).$$

$$-2 \tan \alpha = 0 - \tan \theta.$$

அல்லது, $\tan \alpha = \frac{1}{2} \tan \theta$.

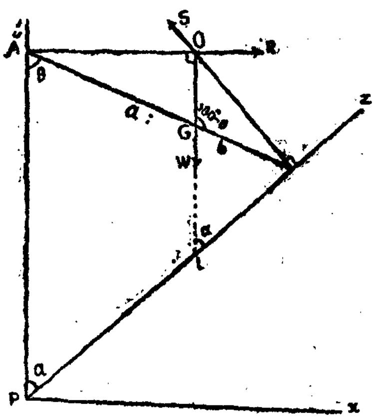
மாதிரி 76 : $(a+b)$ நீளமுள்ள ஒரு கோலின் ஈர்ப்பு மையம் (centre of gravity) அதை $a : b$ என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்கிறது. அதன் ஒருமுனை ஒரு வழவழப்பான சுவரின் மீதும்,

மறுமுனை அச்சுவருக்கு ∝ கோணத்தில் சாய்ந்துள்ள ஒரு வழ வழப்பான சாய்தளத்தின் மீதும் படிந்துள்ள நிலையில் அது சமநிலையிலிருக்கிறது. கோலானது நிலைக்குத்துடன் θ கோணத் தில் சாய்ந்துள்ள தெனில், $\tan\alpha \tan\theta = \dfrac{a+b}{b}$

என்று நிறுவுக.

தீர்வு

PZ என்னும் சாய்தளம் *PY* என்னும் நிலைக்குத்துச் சுவருடன் ∝ கோணத்தில் சாய்ந்துள்ளது *AB* என்னும் கோல் சுவருடன் θ கோணத்தில் சாய்ந்த நிலையில் சுவரையும், சாய்தளத்தையும்



படம் 112

முறையே *A*, *B* என்னும் புள்ளிகளில் தொட்டுக் கொண்டு சம நிலையில் உள்ளது.

G என்பது கோலின் ஈர்ப்புமையம் என்றால், *AG* : *GB* = *a*:*b*

A யில் சுவரின் எதிர்விசை *R* ஆனது சுவருக்குச் செங்குத் தாகச் செயல்படும். *B*யில் சாய்தளத்தின் எதிர்விசை *S* ஆனது சாய்தளத்திற்குச் செங்குத்தாகச் செயல்படும்

G யில் கோலின் எடை *W* ஆனது நிலைக்குத்தாகக் கீழ் நோக்கிச் செயல்படும்.

கோல் சமநிலையிலிருப்பதால், *R*, *S*, *W* ஆகிய இம்மூன்று விசைகளும் ஒரு புள்ளியில் (*O*-வில்) சந்திக்கும்.

$\triangle AOB$ யில் $AG : GB = a : b$.

$\angle AOG = 90^\circ$; $\angle GOB = (90^\circ - \alpha)$

$\angle OGA = \angle GAO = \theta$; $\because \angle OGB = 180^\circ - \angle OGA$
$= (180 - \theta)$

திரிகோணச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துக.

$$(a+b) \cot \angle OGB = a \cot \angle AOG - b \cot \angle GOB$$

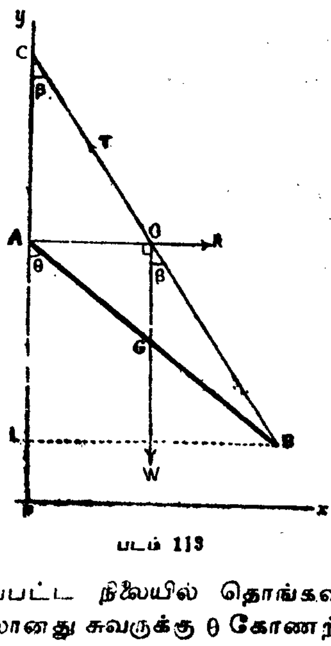
$$(a+b) \cot (180^\circ - \theta) = a \cot 90^\circ - b \cot (90^\circ - \alpha)$$

$$-(a+b) \cot \theta = O - b \tan \alpha$$

$$(a+b) \frac{1}{\tan \theta} = b \tan \alpha$$

அல்லது, $\tan \alpha . \tan \theta = \dfrac{a+b}{b}$

மாதிரி 77 : a நீளமுள்ள AB என்னும் ஒரு சீரான கோல் அதன் ஒரு முனை A யானது ஒரு வழவழப்பான நிலைக்குத்துச் சுவரின்மீது படிந்தும், மறுமுனை B யானது l நீளமுள்ள ஒரு நூலினால் கட்டப்பட்டு, சுவரில் Aக்கு நேர்மேலேயுள்ள ஒரு



படம் 113

புள்ளியில் கட்டப்பட்ட நிலையில் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. சமநிலையில் கோலானது சுவருக்கு θ கோணத்தில் சாய்ந்துள்ளதெனில் $\cos^2 \theta = \dfrac{l^2 - a^2}{3a^2}$ என்று காட்டுக. மேலும், சமநிலை

சாத்தியத்திற்கான l, a ஆகியவற்றின் எல்லை மதிப்புக்களைக் காண்க.

தீர்வு

AB என்னும் கோலின் ஒரு முனை A யானது PY என்னும் நிலைக்குத்துச் சுவரின் மீது படிந்துள்ளது. அதன் மறு முனை B சுவரிலுள்ள C என்னும் புள்ளியுடன் ஒரு நூலின் மூலம் இணைக்கப்பட்டுள்ளது.

A யில் சுவரின் எதிர்விசை R சுவருக்குச் செங்குத்தாகச் செயல்படும். நூலின் இழுவிசை T ஆனது BC வழியே செயல் படும்.

கோலின் எடை W ஆனது அதன் நடுப்புள்ளி G வழியே நிலைக்குத்தாகக் கீழ்நோக்கிச் செயல்படும்.

கோல் சம நிலையில் தொங்கிக் கொண்டிருப்பதால் இம் மூன்று விசைகளும் ஒரு புள்ளியில் (O-வில்) சந்திக்கும்.

AB = கோலின் நீளம் = a

BC = நூலின் நீளம் = l

$\angle BAL$ = சுவருடன் கோலின் சாய்வு = θ.

$\angle BCA$ = சுவருடன் நூலின் சாய்வு = β என்க.

$\because \angle GOB = \beta$.

$\angle AOG = 90°$;

$\angle AGO = \angle GAL = \theta \therefore \angle OGB = (180° - \theta)$

$BL \perp PA$ எனில், $BL = BC \sin \beta = AB \sin \theta$.

அதாவது, $l \sin \beta = a \sin \theta$.

$$\therefore \sin \beta = \frac{a \sin \theta}{l}$$

$$\therefore \operatorname{cosec} \beta = \frac{l}{a \sin \theta} = \text{அல்லது } \operatorname{cosec}^2 \beta = \frac{l^2}{a^2 \sin^2}.$$

கோல் சீரானதாகையால் அதன் புவியீர்ப்பு மையம் G ஆனது அதன் நடுப்புள்ளியாகயிருக்கும்.

அதாவது, $AG : GB\ 1 : 1$.

$\triangle AOB$ க்குத் திரிகோணச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துக

$$(1+1) \cot \angle OGB = 1 \cdot \cot \angle AOG - 1 \cdot \cot \angle GOB$$

$$2 \cot (180° - \theta) = \cot 90° - \cot \beta$$

$$-2 \cot \theta = - \cot \beta.$$

அல்லது, $2 \cot\theta = \cot\beta$

$\therefore 4\cot^2\theta = \cot^2\beta$

அதாவது, $\dfrac{4\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \operatorname{cosec}^2\beta - 1$

$= \dfrac{l^2}{a^2\sin^2\theta} - 1$

$= \dfrac{l^2 - a^2\sin^2\theta}{a^2\sin^2\theta}$

$\therefore 4a^2\cos^2\theta = l^2 - a^2\sin^2\theta$

$= l^2 - a^2(1+\cos^2\theta)$

$= l^2 - a^2 + a^2\cos\theta.$

$\therefore 3a^2\cos^2\theta = l^2 - a^2$

அல்லது, $\cos^2\theta = \left(\dfrac{l^2 - a^2}{3a^2}\right)$

சமநிலை சாத்தியமாக வேண்டுமாயின் θ மெய்யாகயிருத்தல் வேண்டும்.

$\therefore \cos^2\theta > O;\quad \cos^2\theta < 1$

$\therefore l^2 - a^2 > a;\quad l^2 - a^2 < 3a^2$

அல்லது, $l > a;\quad l^2 < 4a^2$

அதாவது, $l > a,\ l < 2a.$

அதாவது, $a < l < 2a.$

மாதிரி 78 : ஒரு கிடைக்கோட்டில் சந்திக்கின்ற வழவழப்பான இரு சாய்தளங்கள் கிடைத்தளத்துடன் α, β கோணங்களில் சாய்ந்துள்ளன. கனமான, சீரான கோலொன்று அதன் இரு முனைகளும் இவ்விரு சாய்தளங்களின்மேல் படிந்த நிலையில் சமநிலையில் இருக்கின்றது. நிலைக்குத்துடன் கோலின் சாய்வையும், சாய்தளங்களின் எதிர்விசைகளையும் காண்க.

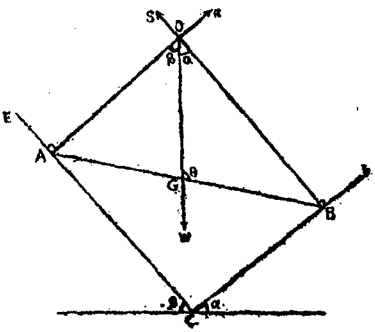
தீர்வு :

$X'eX$ என்பது கிடைத்தளம். CD, CE என்னும் சாய்தளங்கள் கிடைத்தளத்துடன் முறையே α, β கோணங்களில் C வழியே ஒரு கிடைக் கோட்டில் சந்திக்குமாறு அமைந்

துள்ளன. AB என்ற கோலின் இருமுனைக்கும் இருசாய்தளங்களையும் தொட்ட சமநிலையிலிருக்கின்றன.

கோல் சீரானதாகையால் அதன் எடை W அதன் நடுப்புள்ளி G வழியே நிலைக்குத்தாகக் கீழ் நோக்கிச் செயல்படுகின்றது.

A, B ஆகிய புள்ளிகளில் சாய்தளங்களின் எதிர்விசைகள் சாய்தளங்களுக்குச் செங்குத்தாகச் செயல்படும். ஆகவே பின்வரும் மூன்று விசைகள் செயல்படுகின்றன.



படம் 114

(அ) ABயின் நடுப்புள்ளி Gயில் கோலின் எடை $W\downarrow$.

(ஆ) Aயில் சாய்தளம் CEக்குச் செங்குத்தாக அதன் எதிர்விசை R,

(இ) Bயில் சாய்தளம் CDக்குச் செங்குத்தாக அதன் எதிர்விசை S

கோல் சமநிலையிலிருப்பதால், இம்மூன்று விசைகளும் O என்னும் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும்.

$\angle OGB = \theta$ என்க.

$\angle AOG = \beta$ என்றும் $\angle GOB = \alpha$ என்றும் எளிதில் காணலாம்.

$AG : GB = 1 : 1$.

$\triangle AOB$யில் திரிகோணச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துக.

$$(1+1) \cot \angle OGB = 1 \cot \angle AOG - 1 \cot \angle GOB.$$

$$2 \cot \theta = \cot \beta - \cot \alpha.$$

$$\therefore \cot \theta = \tfrac{1}{2} (\cot \beta - \cot \alpha).$$

∴ நிலைக்குத்துடன் கோலின் சாய்வு$\theta = \cot^{-1}\frac{1}{2}(\cot\beta - \cot\alpha)$.

R, S ஆகிய எதிர்விசைகளைக் காண Oவில் செயல்படும் W, R, S என்னும் மூன்று விசைகளுக்கும் இலாமியின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்துக.

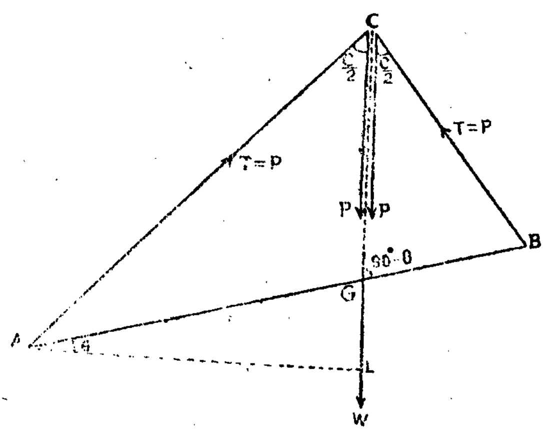
$$\frac{R}{\sin\angle SOW} = \frac{S}{\sin\angle WOR} = \frac{W}{\sin\angle ROS}$$

$$\frac{R}{\sin(180^\circ - \alpha)} = \frac{S}{\sin(180^\circ - \beta)} = \frac{W}{\sin(\alpha+\beta)}$$

அதாவது, $\frac{R}{\sin\alpha} = \frac{S}{\sin\beta} = \frac{W}{\sin(\alpha+\beta)}$

$$\therefore\ R = \frac{W\sin\alpha}{\sin(a+b)};\quad S = \frac{W\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

மாதிரி 79: C என்னும் வழவழப்பான முளைவழியே செல்லும் ACP, BCP என்னும் இரு கயிறுகளின் ஒரே பக்க



படம் 115

முள்ள முனைகளில் P, P என்னும் சம எடைகள் கட்டித் தொங்க விடப்பட்டுள்ளன. அவற்றின் மறுமுனைகளில் W எடையுள்ள AB என்னும் கனமான உத்திரம் கட்டித் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. அதன் ஈர்ப்பு மையம் Aயிலிருந்து a அடிதூரத்திலும், Bயிலிருந்து b அடிதூரத்திலுமுள்ளது. ABயானது கிடைத்தளத்துடன

$$\tan^{-1}\left\{\frac{a-b}{a+b}\tan\left(\sin^{-1}\frac{W}{2P}\right)\right\}$$

கோணத்தில் சாய்ந்திருக்குமென்று காட்டுக.

தீர்வு

G என்பது உத்திரம் ABயின் ஈர்ப்பு மையம்.

$\therefore AG : GB = a : b$ உத்திரத்தின் எடை W ஆனது G வழியே நிலைக்குத்தாகக் கீழ்நோக்கிச் செயல்படும். ACP, BCP என்னும் கயிறுகள் C என்னும் முளைவழியே செல்கின்றன. இக் கயிறுகளின் A, B என்னும் முனைகள் உத்திரத்தின் இரு நுனிகளிலும் கட்டப்பட்டுள்ளன. கயிறுகளின் மறுமுனைகளில் P என்னும் சம எடைகள் கட்டித் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளன.

இத்தொகுதியில் செயல்படும் மூன்று விசைகள் பின்வருமாறு :

(i) AC வழியே கயிற்றின் இழுவிசை $T = P$.

(ii) BC வழியே கயிற்றின் இழுவிசை $T = P$.

(iii) G வழியே உத்திரத்தின் எடை $W\downarrow$.

உத்திரம் சமநிலையிலிருப்பதால், இம்மூன்று விசைகளும் ஒரு புள்ளியுல் (Cயில்) சந்திக்கவேண்டும். $\therefore CG$ என்பது நிலைக்குத்தாகும்.

இரு கயிறுகளிலும் இழுவிசைகள் சமமாயிருப்பதால், அவை நிலைக்குத்துடன் சமகோணங்களில் சாய்திருக்கும்.

$$\therefore \angle ACG = \angle GCB = \frac{C}{2}$$

மூன்று விசைகளையும் CG வழியே விசைப் பிரிப்புச் செய்க.

$$T\cos\frac{C}{2} + T\cos\frac{C}{2} = W$$

$$2T\cos\frac{C}{2} = W$$

அல்லது, $$\cos\frac{C}{2} = \frac{W}{2P}$$

கிடைத்தளத்துடன் உத்திரத்தின் சாய்வு θ என்று கொள்க.

$$\therefore \angle CGB = (90^\circ - \theta)$$

$\triangle ABC$யில் திரிகோணச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துக.

$$(a+b)\cot\angle CGB = a\cot\angle ACG - b\cot\angle GCB$$

$$(a+b)\cot(90^\circ-\theta) = a\cot\frac{C}{2} - b\cot\frac{C}{2}$$

$$(a+b)\tan\theta = (a-b)\cot\frac{C}{2}$$

$$\therefore\ \tan = \frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}$$

$$= \frac{a-b}{a+b}\tan\left(90^\circ-\frac{C}{2}\right)$$

ஆனல், $\cos\frac{C}{2} = \frac{W}{2P}$

அதாவது, $\sin\left(90^\circ-\frac{C}{2}\right) = \frac{W}{2P}$

$$\therefore\ 90^\circ-\frac{C}{2} = \sin^{1}\left(\frac{W}{2P}\right)$$

$$\therefore\ \tan\theta = \frac{a-b}{a+b}\tan\left(\sin^{1}\frac{W}{2P}\right)$$

அல்லது, $\theta = \tan^{-1}\left\{\frac{a-b}{a+b}\tan\left(\sin^{-1}\frac{W}{2P}\right)\right\}$

மாதிரி 80 : ஈர்ப்பு மையத்திஞல் $a: b$ என்னும் விகிதத்தில் இரு பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்படுகின்ற கோல் ஒன்று ஒரு வழ வழப்பான உள்ளீடற்ற கோளத்திஞுள் (hollow sphere) வைக் கப்பட்டுள்ளது. சம நிலையில் கிடைத்தளத்துடன் கோலின் சாய்வு θ ஆகவும், கோளத்தின் மையத்தில் கோல் தாங்கும் கோணம் 2α ஆகவுமிருப்பின், $\tan\theta = \frac{b-a}{b+a}\tan\alpha$ என்று காட்டுக.

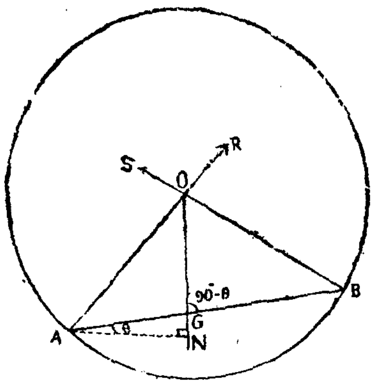
தீர்வு :

O என்பது கோளத்தின் மையம் AB என்பது கோளத் திஞுள் சமநிலையிலிருக்கும் கோலின் நிலை. G என்பது கோலின் ஈர்ப்பு மையம்.

$$\therefore\ AG : GB = a : b.$$

கோலின் எடையாகிய W என்பது G வழியே நிலைக்குத் தாகக் கீழ் நோக்கிச் செயல்படும். Aயில் கோளத்தின் எதிர்

விசையாகிய R என்பது AO என்னும் ஆரை வழியே செயல் படும். Bயில் கோளத்தின் எதிர்விசையாகிய S என்பது BO என்னும் ஆரைவழியே செயல்படும்.



படம் 116

கோல் சமநிலையிலிருப்பதால் இம்மூன்று விசைகளும் ஒரே புள்ளியில் (அதாவது கோளமையம் O-வில்) சந்திக்கும்.

கிடைத்தளத்துடன் கோலின் சாய்வு = θ என்க.

$$\therefore \angle OGB = (90^\circ - \theta)$$

$\angle AOB = 2\alpha$; $OA = OB$ ஆகையால் $\angle OAG = \angle OBG = (90^\circ - \alpha)$ $\triangle AOB$யில், $(m+n)\cot\theta = n\cot B - m\cot C$ என்னும் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துக.

$$(a+b)\cot\angle OGB = b\cot\angle OAG - a\cot\angle OBG$$

அதாவது, $(a+b)\cot(90^\circ-\theta) = b\cot(90^\circ-\alpha) - a\cot(90^\circ-\alpha)$

$$(a+b)\tan\theta = (b-a)\tan\alpha$$

அல்லது, $\tan\theta = \dfrac{b-a}{b+a}\tan\alpha$

வடிவியல் முறை Geometrical Method)

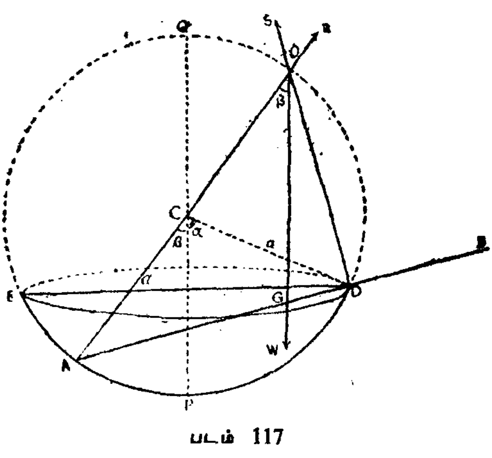
கொடுக்கப்பட்டுள்ள விசைகளின் செயற்கோடுகளை அவற்றின் திசைகளுடன் சரியாகக் குறிப்பிடுவதன்மூலம் கிடைக்கும் வடிவியல் படத்திலிருந்து வடிவியல் முறைகளைப் பயன்படுத்தியும், இலாமியின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தியும் ஒரு புள்ளி வழிச்செயல்படும் மூன்று ஒருதள விசைகளின் சம

நிலைபற்றிய கணக்குகளைத் தீர்க்கலாம். பின்வரும் மாதிரிக் கணக்குகளைக் கவனிக்கவும்.

மாதிரி 81 : a ஆரையுடைய ஒரு கோளத்தின் பகுதியாலுண்டான ஒரு கிண்ணம் அதன் அச்சு நிலைக்குத்தாகயிருக்குமாறு ஒரு கிடைத்தளத்தின்மேல் வைக்கப்பட்டுள்ளது. வழவழப்பான சீரான கோலொன்று அதன் ஒரு முனை கிண்ணத்தினுள்ளும், ஒரு பகுதி விளிம்பிற்கு வெளியே சற்று நீட்டிக் கொண்டிருக்குமாறு ஒய்வு நிலையில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. விளிம்பின் மேலுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளி வழியேயும் செல்லும் கோளத்தின் ஆரையானது நிலைக்குத்து அச்சுடன் α கோணத்தையும், கோலின் கீழ் முனை வழியே செல்லும் ஆரை நிலைக்குத்து அச்சுடன் β கோணத்தையும் உண்டுபணினால் கோலின் நீளம் $4\,a \sin \beta . \sec \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ என்று காட்டுக.

தீர்வு :

EPD என்னும் உள்ளீடற்ற கோளப்பகுதியாலான கிண்ணம் அதன் அச்சு PQ நிலைக்குத்தாக யிருக்குமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது. எனவே, அதன் விளிம்பு ED கிடைத்தளத்திலிருக்கும். C என்பது கோளத்தின் மையம்; a என்பது அதன் ஆரை.



படம் 117

AB என்பது ஒரு சீரான கோல். அதன் ஈர்ப்பு மையம் G ஆனது அதன் நடுப்புள்ளியிலிருக்கும். எனவே கோலின் எடையாகிய W என்பது G வழியே நிலைக்குத்தாகக் கீழ் நோக்கிச் செயல்படும்.

கோலின் முனை A யானது கிண்ணத்தினுள்ளிருக்குமாறும், DB என்னும் பகுதி விளிம்புக்கு வெளியே நீட்டிக்கொண் டிருக்குமாறும் வைக்கப்பட்டுள்ளது. கோலானது கிண்ணத் தின் விளிம்புடன் D என்னும் புள்ளியில் தொடுகையிலுள்ளது. எனவே, Dயில் விளிம்பின் எதிர்விசையாகிய S என்பது கோலுக்குச் செங்குத்தாகச் செயல்படும்.

Aயில் கிண்ணத்தின் எதிர்விசையாகிய R என்பது AC என் னும் ஆரை வழியே செயல்படும்.

கோல் சம நிலையிலிருப்பதால், R, S, W என்னும் மூன்று விசைகளும் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும். இப்புள்ளியை O என்று குறிப்பிடுக.

$\angle ADO = 90°$ என்பதாலும், AO என்பது கோளத்தின் மையத்தின் வழியே செல்வதாலும், AO என்பது கோளத்தின் வட்டமாகும். அதாவது O ஆனது. கோளத்தின் மேலுள்ள ஒரு புள்ளியாகும்.

$\angle ACP = \beta$ என்னும், $\angle DCP = \alpha$ என்றும் கொடுக்கப் பட்டுள்ளன. $\triangle ACD$யில், $CA = CD$.

$$\because \angle CAD = \angle CDA = \tfrac{1}{2}[180° - (\alpha + \beta)] = 90° - \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)$$

$$\angle AOG = \angle ACP = \beta.$$

$$AO = \text{விட்டம்} = 2a.$$

$$\angle AGO = 180° - \beta - \angle CAD.$$

$$= 180 - \beta - [90° - \tfrac{1}{2}(A\alpha\beta)]$$

$$= 90° - \beta + \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)$$

$$= 90° + \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta).$$

$$\triangle AOG\text{யில்}, \quad \frac{AG}{\sin \angle AOG} = \frac{AO}{\sin \angle AGO}$$

$$\frac{AG}{\sin \beta} = \frac{2a}{\sin\{90° + \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)\}}$$

$$= \frac{2a}{\cos \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)}$$

$$= 2a \sec \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta).$$

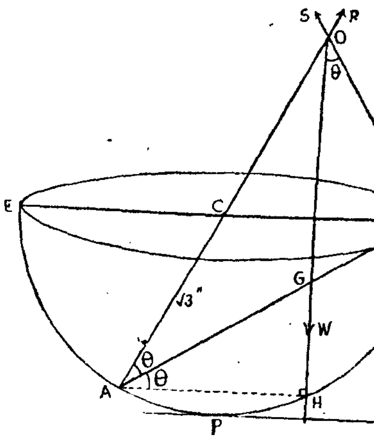
$$\therefore AG = 2a \sin\beta \;\; \sec \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

$\therefore$ கோலின் நீளம் $AE = 2AG = 4a \sin \beta \sec \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)$.

மாதிரி 82 : விளிம்பு கிடைத்தளத்திலிருக்குமாறு நிலையாக வுள்ள ஒரு அரைக்கோளக் கிண்ணத்தின் வழவழப்பான உட்

புறத்தில் ஒரு முனையும், விளிம்பில் தாங்கப்பட்டு வெளியே நீட்டிக் கொண்டும் சமநிலையிலிருக்குமாறு 4 அங்குலக் கோலொன்று வைக்கப்படுகிறது. கிண்ணத்தின் ஆரை $\sqrt{3}$ அங், எனெனில், கோலின் கால்பாகம் வெளியே இருக்கும் எனக்காட்டு.

(பி.எஸ்ஸி. சென்னை 1962 சேப்., மதுரை 1972 ஏப்.)



படம் 118

தீர்வு

EPD என்னும் அரைக்கோளக் கிண்ணம் அதன் விளிம்பு கிடைத்தளத்திலிருக்குமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது. *AB* என்னும் கோல் விளிம்பை *D*யில் தொட்டுக்கொண்டும், அதன் முனை *A*யானது கிண்ணத்திலிருக்குமாறும் சாய்ந்த நிலையில் வைகக்கப் பட்டுள்ளது. கோலின் *DB* என்னும் பகுதி விளிம்பிற்கு வெளியே நீட்டிக் கொண்டிருக்கிறது. கோலின் ஈர்ப்பு மையம் *G* ஆனது அதன் நடுப்புள்ளியிலுள்ளது.

$AB = 4''; \quad \therefore AG = 2''.$

கோலின் எடையாகிய *W* ஆனது *G* வழியே ↓ செயல்படும்.

*A*யில் கிண்ணத்தின் எதிர் விசையாகிய *R* ஆனது *AC* வழியே செயல்படும்,

*D*யில் விளிம்பின் எதிர் விசையாகிய *S* ஆனது *AB*க்குச் செங்குத்தாக செயல்படும்.

கோல் சமநிலையில் இருப்பதால், இம் மூன்று விசைகளும் ஒரு புள்ளியில் (O-வில்) சந்திக்கும். O என்பது AC என்னும் ஆரையிலிருப்பதாலும், $AD\angle O = 90°$ என்பதாலும் AO என்பது கோளத்தின் விட்டமாகும்.

$\therefore AO = 2\sqrt{3}''$,

A வழியே AH கிடைக்கோடு OGஐ Hஇல் வெட்டுமாறு வரைக.

$\therefore \angle AHO = 90°$. ஆனால், AO விட்டமாகையால் H ஆனது கிண்ணத்தின் மேலிருக்கும்.

$\angle GAH = \theta$ என்க.

$\therefore \angle OGD = 90° - \theta$: $\angle GOD = \theta$.

$\angle CAD = \angle CDG = 90° - \angle OGD = 90° - (90° - \theta) = \theta$.

$\therefore \angle OAH = 2\theta$.

$\triangle AOH$இல், $AH = AO \cos 2\theta = 2\sqrt{3} \cos 2\theta$,

$\triangle AGH$இல், $AH = AG \cos \theta = 2 \cos \theta$

$\therefore 2\sqrt{3} \cos 2\theta = 2 \cos \theta$

$\sqrt{3}\,(2\cos^2\theta - 1) = \cos\theta$.

$3\sqrt{3}\cos^2\theta - \cos\theta - \sqrt{3} = 0$

$$\therefore \cos\theta = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{4\sqrt{3}} = \frac{1 \pm 5}{4\sqrt{3}} = \frac{6}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\therefore \theta = 30°$.

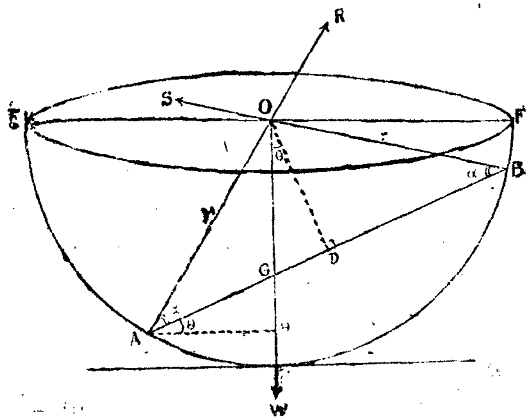
$AD = AO\cos\theta = 2\sqrt{3}.\ \cos 30° = 2\sqrt{3}.\ \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$.

$\therefore$ வெளியே நீட்டிக் கொண்டிருக்கும் பகுதியின் நீளம் $= 4'' - 3'' = 1'' =$ கோலின் நீளத்தில் $\frac{1}{4}$ பாகம்.

மாதிரி 83 : l நீளமுள் ஒரு கோல் r ஆரையுள்ள $(r > \frac{1}{2}l)$ ஒரு வழவழப்பான அரைக்கோளக் கிண்ணத்தினுள் ஓய்வு நிலையிலுள்ளது. கோலின் புவியீர்ப்பு மையம் அதை முச்சமக் கூறிடுகிறது. கோலானது கிடைத்தளத்துடன் $\tan^{-1}\dfrac{1}{3\sqrt{4r^2 - l^2}}$ கோணத்திலிருக்கு மென்று காட்டு. கோலின் முனைகளிலுள்ள எதிர் விசைகளையும் காண்க.

தீர்வு

BFP என்னும் அரைக்கோளக் கிண்ணத்தினுள் *AB* என்னும் கோல் கிடைத்தளத்துடன் θ என்னும் கோணத்தில் சாய்ந்து நிலையில் ஒருவிலுள்ளது. *O* என்பது கோளத்தின் மையம்.



படம் 119

$\therefore OA = OB = r.$

$\therefore \angle OAB = \angle OBA = \alpha$ என்க.

கோலின் புவியீர்ப்பு மையம் *G* எனில், $AG : GB = 1:2$.

கோலின் எடை *W* ஆனது *G* வழியே ↓ செயல்படும். *A*யில் கிண்ணத்தின் எதிர்விசையாகிய *R* என்பது *AO* வழியே செயல்படும். *B*வில் கிண்ணத்தின் எதிர்விசையாகிய *S* என்பது *BO* வழியே செயல்படும்

கோல் சமநிலையிலிருப்பதால் *R, S, W* ஆகியவை ஒரு புள்ளியில் சந்திக்க வேண்டும். ஆனால் *R, S* ஆகியவை *O* வழியே செல்வதால், *W*-ம் *O* வழியே செல்லும். அதாவது *OG* என்பது நிலைக்குத்துக் கோடாகும். $AH \perp OG$ வரைக.

$\angle GAH$ = கிடைத்தளத்துடன் கோலின் சாய்வு = θ என்க.

$\therefore OGB = (90° - \theta)$

$AG : GB = 1 ; 2$ என்பதாலும், $AB = l$ என்பதாலும், $AG = \frac{1}{3}l$, $GB = \frac{2}{3}l$.

$\triangle OBE$யில் $(m+n) \cot \theta = n \cot B - m \cot C$ என்னும் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துக.

$$(1+2)\cot\angle OOB = 2\cot\angle OAB - 1\cot\angle OBA$$

$$3\cot(90^\circ - \theta) = 2\cot\alpha - \cot\alpha$$

$$3\tan\theta = \cot\alpha. \qquad = \qquad \ldots \qquad (1)$$

$$\angle SOR = \angle AOB = (180^\circ - 2\alpha)$$

$$\angle AOG = 90^\circ - (\theta+\alpha)$$

$$\therefore \angle WOR = 180 - \angle AOG = 180^\circ - 90^\circ + (\theta+\alpha) = 90 + (\theta - \alpha)$$

$$\angle GOB = 180^\circ - \alpha - (90^\circ - \theta) = 90^\circ + (\theta - \alpha)$$

$$\therefore \angle SOW = 180^\circ - \angle GOB = 180^\circ - 90^\circ - (\theta - \alpha) = 90^\circ - (0 - \alpha)$$

இப்பொழுது O வில் செயல்படும் $R, S. W$ ஆகிய விசைகளுக்கு இலாமியின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்துக.

$$\frac{R}{\sin\angle SOW} = \frac{S}{\sin\angle WOR} = \frac{W}{\sin\angle SOR}$$

$$\frac{R}{\sin[90^\circ - (\theta - \alpha)]} = \frac{S}{\sin[90^\circ + (\theta+\alpha)]} = \frac{W}{\sin(180^\circ - 2\alpha)}$$

$$\frac{R}{\cos(\theta - \alpha)} = \frac{S}{\cos(\theta+\alpha)} = \frac{W}{\sin 2\alpha}$$

$$\because \quad R = \frac{W\cos(\theta - \alpha)}{\sin 2\alpha},$$

$$S = \frac{W\cos(\theta+\alpha)}{\sin 2\alpha}$$

இப்பொழுது, OD AB வரைக. AOB ஒரு இரு சம பக்க முக்கோணமாதலின் D ஆனது ABயின் நடுப்புள்ளியாகும்.

$$\because \; AD = DB = \tfrac{1}{2}l.$$

$$OD^2 = OA^2 - AD^2$$

$$= r^2 - \frac{l^2}{4}$$

$$= \frac{4r^2 - l^2}{4}$$

$$\because \; OD = \frac{\sqrt{4r^2 - l^2}}{2}$$

$\triangle AOD$ யிலிருந்து, $\cot\alpha = \dfrac{AD}{OD} = \dfrac{\frac{1}{2}l}{\dfrac{\sqrt{4r^2 - l^2}}{2}}$

$$= \frac{l}{\sqrt{4r^2 - l^2}}$$

$\therefore$ (1) இலிருந்து, $\tan\theta = \frac{1}{3}\cot\alpha = \dfrac{l}{3\sqrt{4r^2 - l^2}}$

அல்லது, $\theta = \tan^{1}\dfrac{l}{3\sqrt{4r^2 - l^2}}$

மேலும் $\cos(\theta - \alpha) = \cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha$

$$= \sin\alpha(\cos\theta.\cot\alpha + \sin\theta)$$

$$= \sin\alpha(\cos\theta.\, 3\tan\theta + \sin\theta)$$

$$= \sin\alpha(3\sin\theta + \sin\theta)$$

$$= 4\sin\theta\sin\alpha$$

இதுபோல், $\cos(\theta+\alpha) = \cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha$

$$= \sin\alpha(\cos\theta.\cot\alpha - \sin\theta)$$

$$= \sin\alpha(\cos\theta.\, 3\tan\alpha - \sin\theta)$$

$$= \sin\alpha(3\sin\theta - \sin\theta)$$

$$= 2\sin\theta\sin\alpha.$$

ஆனல் $\tan\theta = \dfrac{\cot\alpha}{3}$ ஆகையால், $\sin\theta = \dfrac{\cot\alpha}{\sqrt{9+\cot^2\alpha}}$

$$\therefore \cot(\theta - \alpha) = 4\frac{\cot\alpha}{\sqrt{9+\cot^2\alpha}}\sin\alpha$$

$$= \frac{4\cos\alpha}{\sqrt{9+\cot^2\alpha}}$$

$$\cos(\theta+\alpha) = 2\frac{\cot\alpha}{\sqrt{9+\cot^2\alpha}}\sin\alpha = \frac{2\cos\alpha}{\sqrt{9+\cot^2\alpha}}$$

$$\therefore R = \frac{W\cos(\theta-\alpha)}{\sin 2\alpha}$$

$$= \frac{W}{2\sin\alpha\cos\alpha}\frac{4\cos\alpha}{\sqrt{9+\cot^2\alpha}}$$

$$= \frac{2W}{\sin\alpha\sqrt{9+\cot^2\alpha}}$$

$$= \frac{2W}{\sqrt{9\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}}$$

$= \dfrac{2W}{\sqrt{9 - 8\cos^2\alpha}}$, ஆனல் $\cos\alpha = \dfrac{AD}{AO} = \dfrac{\frac{1}{2}l}{r} = \dfrac{l}{2r}$

$$= \frac{2W}{\sqrt{9-8\frac{l^2}{4r^2}}}$$

$$= \frac{2Wr}{\sqrt{9r^2-2l^2}}$$

$$S = \frac{W\cos(\theta+\alpha)}{\sin 2\alpha}$$

$$= \frac{W}{2\sin\alpha\cos\alpha} \cdot \frac{2\cos\alpha}{\sqrt{9+\cot^2\alpha}}$$

$$= \frac{W}{\sin\alpha\sqrt{9+\cot^2\alpha}}$$

$$= \frac{W}{\sqrt{9\sin^2\alpha+\cot^2\alpha}}$$

$$= \frac{W}{\sqrt{9-8\cos^2\alpha}}$$

$$= \frac{Wr}{\sqrt{9r^2-2l^2}}$$

மாதிரி 84 : a விட்டமுள்ள ஒரு வழவழப்பான அரைக் கோளக் கிண்ணம் அதன் ஓரம் ஒரு வழவழப்பான நிலைக் குத்துச் சுவரைத் தொட்டுக் கொண்டிருக்குமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது. ஒரு கனமான சீரானகோல் அதன் ஒருமுனை கிண்ணத்தின் உட்புறத்திலும், மறுமுனை சுவரின்மீதும் தொட்டுக் கொண்டிருக்குமாறு கிடைத்தளத்துடன் 60° சாய்வில் சமநிலையிலுள்ளது. கோலின் நீளம் $\left(a + \frac{a}{\sqrt{13}}\right)$ என்று காட்டுக.

தீர்வு :

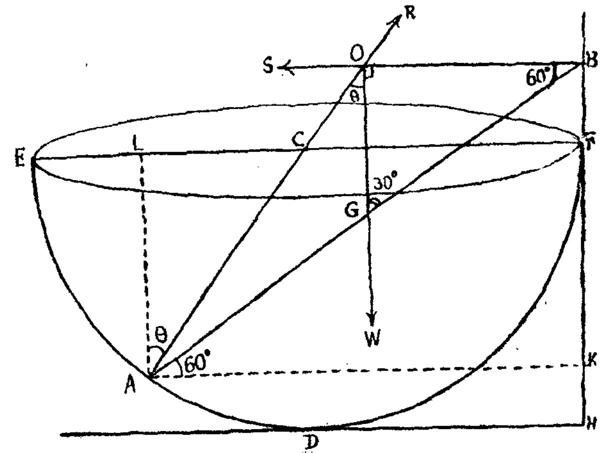
Cஐ மையமாகக் கொண்ட ஒரு அரைக் கோளக்கிண்ணம், அதன் ஓரம் ஒரு நிலைக்குத்துச் சுவரை F என்னும் புள்ளியில் தொட்டுக் கொண்டிருக்குமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது. AB என்னும் ஒரு கோல் அதன் ஒருமுனை Aயானது கிண்ணத்தினுள்ளும் மறுமுனை Bயானது சுவரின் மீதும் தொட்டுக் கொண்டிருக்குமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது.

கோலின் எடையை அதுநடுப்புள்ளி வழியே $O\rightarrow$ செயல்படும்.

Aயில் கிண்ணத்தின் எதிர்விசையாகிய R AC வழியே செயல்படும்.

Bயில் சுவரின் எதிர்விசையாகிய S சுவருக்குச் செங்குத்தாகச் செய்யப்படும்.

கோல் சமநிலையிலிருப்பதால் இம் மூன்று விசைகளும் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும். இப் புள்ளியை O என்க.



படம் 120

Aயிலிருந்து AK என்னும் கிடைக்கோடு சுவரை Kயில் சந்திக்குமாறு வரைக.

$\angle BAK =$ கிடைத்தளத்துடன் கோலின் சாய்வு $= 60°$.

$\therefore \angle OGB = 30°$.

$\angle GOB = 90°$.

$AL \perp EF$ வரைக. $\angle LAC = \theta$ என்க. $\therefore \angle AOG = \theta$.

$\triangle AOB$யில் திரிகோணச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துக.

$$(1+1) \cot \angle OGB = 1 \cot \angle AOG - 1 \cot \angle GOB$$

$$2 \cot 30° = \cot \theta - \cot 90°$$

$$2\sqrt{3} = \cot \theta$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{13}}.$$

இப்பொழுது, $LF = LC + CP$

$$= AC \sin \theta + \frac{a}{2}$$

$$=\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{13}}+\frac{a}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{\sqrt{13}}+a\right)$$

$$\therefore\ AK=LF=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{\sqrt{13}}+a\right)$$

ஆனால் $\triangle\ ARB$யிலிருந்து, $AB=AK$. see 60

$$=2\ AK$$

$$=\left(\frac{a}{\sqrt{13}}+a\right)$$

அதாவது, கோலின் நீளம் $=\left(a+\frac{a}{\sqrt{13}}\right)$

மாதிரி 85 : ஒரு சீரானகோல் ஒரு நிலையான வழவழப்பான கோளத்தின் மேல் அதன் ஒரு முனை கோளத்தைத் தொட்டுக் கொண்டிருக்கும் ஒரு வழவழப்பான நிலைக்குத்துச் சுவரை அழுத்திக் கொண்டிருக்குமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது. கோலின் நீளம் l; கோளத்தின் ஆரை a: சமநிலையில் நிலைக்குத்துடன் கோலின் சாய்வு θஎனில்,

$$a=2l\sin\frac{\theta}{2}\cos^{2}\frac{\theta}{3}$$

என்று நிறுவுக. (மதுரை பி.எஸ்ஸ். 1971 செப்.)

தீர்வு

C ஐ மையமாகக் கொண்ட ஒரு கோளம் ஒரு சுவரை Dயில் தொட்டுக்கொண்டிருக்கிறது.

AB என்னும் ஒரு கோல் சுவரை Aயிலும் கோளத்தை Pயிலும் அழுத்திக்கொண்டு சமநிலையிலுள்ளது.

கோல் சீரானதாகையால் அதன் எடை W அதன் நடுப்புள்ளி G வழியே ↓ செயல்படும்.

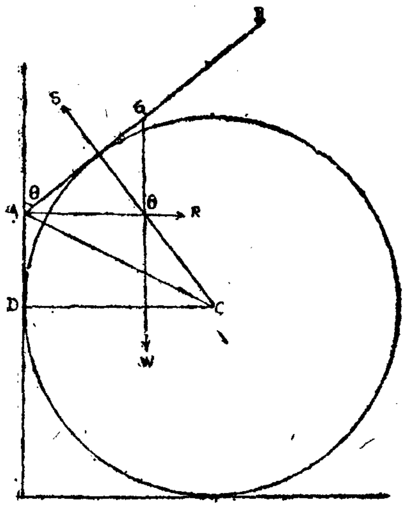
Aயில் சுவரின் எதிரமுத்தம் R சுவருக்குச் செங்குத்தாகச் செயல்படும்.

Pயில் கோளத்தின் எதிரமுத்தம் Sஆனது CP வழியே செயல்படும்.

கோல் சமநிலையிலிருப்பதால் இம்மூன்று விசைகளும் O என்னும் புள்ளியில் சந்திக்கும்.

நிலைக்குத்துடன் கோலின் சாய்வு $=\theta$.

CD, ACயைச் சேர்க்கவும். $ADCP$ ஒரு வட்ட நாற்கரமாகையால், $\angle PCD=\theta$.



படம் 121

$\triangle APC \equiv \triangle ADC$ ஆகையால், $\angle ACP = \angle ACD = \dfrac{\theta}{2}$.

$\triangle AOG$யில், $\angle AGO = \theta \therefore AO = AG \sin\theta = \frac{1}{2} AB \sin\theta$
$= \dfrac{l}{2}\sin\theta$.

$\triangle APO$வில், $\angle AOP=\theta \quad \therefore AP = AO\sin\theta = \dfrac{l}{2}\sin^2\theta$.

$\triangle APC$யில், $AP = PC \tan\dfrac{\theta}{2} = a\tan\dfrac{\theta}{2}$

$$\therefore \frac{l}{2}\sin^2\theta = a\tan\frac{\theta}{2}$$

$$a = \frac{l}{2}\cdot\frac{\sin^2\theta}{\tan\frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{l}{2}\cdot 4\sin^2\frac{\theta}{2}\cdot\cos^2\frac{\theta}{2}\cdot\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$= 2l \sin\frac{\theta}{2} \cos^3 \frac{\theta}{2}.$$

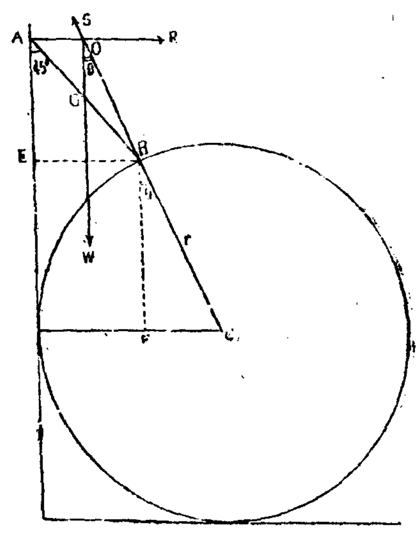
மாதிரி 86 : r ஆரையுள்ள ஒரு உருளை அதன் அச்சு கிடை நிலையிலிருக்குமாறு அதன் பிறப்பிக்கும் கோட்டின் (generating line) வழியே ஒரு நிலைக்குத்தான சுவரைத் தொட்டுக் கொண்டிருக்கிறது. $2l$ நீளமும், W எடையுமுள்ள ஒரு சீரான உலோகத்தினலான கோல் நிலைக்குத்துடன் 45° சாய்வில் அதன் முனைகள் சுவரையும், உருளையையும் அழுத்திக்கொண்டிருக்குமாறு வைக்கப்படுகிறது. உராய்வு (Friction) இல்லாத நிலையில்,

$$\frac{l}{r} = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10}}$$

என்றும், சுவரின் மீதுள்ள அழுத்தம் $\frac{1}{2} W$ என்றும், உருளையின் எதிர்விசை $\frac{1}{2}\sqrt{5}\, W$ என்றும் காட்டுக.

தீர்வு

கோலானது உருளையைத் தொடும் புள்ளிவழியே உருளையின் குறுக்கு வெட்டுப் பகுதியைப் படத்தில் காணலாம்.



படம் 122

C என்பது குறுக்கு வெட்டுவட்டத்தின் மையம். D என்பது இக்குறுக்கு வெட்டுப் பகுதி சுவரைத் தொடும் புள்ளி.

AB என்ற கோல் சுவரை Aயிலும், உருளையை Bயிலும் தொட்டுக் கொண்டிருக்கிறது. கோல் சீரானதாகயிருப்பதால்

அதன் எடையாகிய W அதன் நடுப்புள்ளி G வழியே ↓ செயல்படும்.

Aயில் சுவரின் எதிரமுத்தம் R சுவருக்குச் செங்குத்தாகச் செயல்படும்.

Bயில் உருளையின் எதிரமுத்தம் S ஆனது CB வழியே செயல்படும்.

கோல் சமநிலையிலிருப்பதால், இம்மூன்று விசைகளும் ஒரு புள்ளியில் (O-வில்) சந்திக்கும்.

நிலைக்குத்துடன் கோலின் சாய்வு $=45°$ அதாவது, $\angle BOD = 45°$. $\therefore \angle OGB = (180° - 45°)$.

$\angle AOG = 90°$.

$AG = GB = \frac{1}{2} AB = l$.

$\angle GOB = \theta$ என்க.

$\triangle AOB$யில் திரிகோணச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துக.

$$(1+1) \cot \angle OGB = 1. \cot \angle AOG - 1. \cot \angle GOB.$$

$$2 \cot (180° - 45°) = \cot \theta.$$

$$-2 \cot 45° = -\cot \theta.$$

$$\therefore \cot \theta = 2 \cot 45° = 2.$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}, \ \cos \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

$BF \perp CD$யும், $BE \perp AD$யும் வரைக.

$$\therefore BE = AB \sin 45° = 2l . \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\, l.$$

$$CF = r \sin \theta = \frac{r}{\sqrt{5}}$$

$$\therefore r = CD = CE + FD = CF + BE = \frac{r}{\sqrt{5}} + \sqrt{2}\, l.$$

$$\therefore r - \frac{r}{\sqrt{5}} = \sqrt{2}\, l$$

$$r \frac{(\sqrt{5} - 1)}{\sqrt{5}} = \sqrt{2}\, l$$

$$\therefore \frac{l}{r} = \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{10}}.$$

இப்பொழுது, இலாமியின் தேற்றப்படி,

$$\frac{R}{\sin \angle SOW} = \frac{S}{\sin \angle WOR} = \frac{W}{\sin \angle ROS}$$

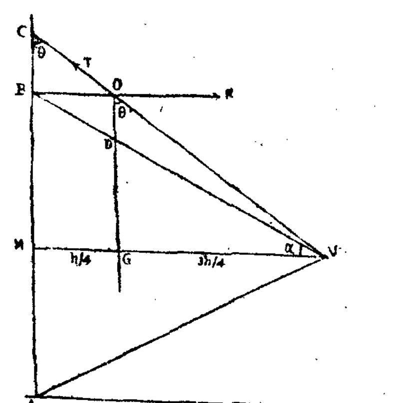
$$\frac{R}{\sin (180^\circ - \theta)} = \frac{S}{\sin 90^\circ} = \frac{W}{\sin (90^\circ + \theta)}$$

$$\frac{R}{\sin \theta} = \frac{S}{1} = \frac{W}{\cos \theta}.$$

$$\therefore\ R + W \tan \theta = \frac{W}{2},$$

$$S = \frac{W}{\cos \theta} = \frac{\sqrt{5}}{2} W.$$

மாதிரி 87 : h உயரமும் α எனும் அரையுச்சிக் கோணமும் கொண்ட ஒரு திண்மக் கூம்பு அதன் அடிப்பாகம் ஒரு வழுவழுப்பான சுவரின் மேல் பொருந்தும்படி வைக்கப்பட்டுள்ளது. அக்கூம்பு அதன் உச்சியைச் சுவரின் மேலுள்ள ஒரு புள்ளி



படம் 123

யுடன் இணைக்கும் ஒரு நூலின் மூலம் தாங்கப்படுகிறது. அந்த நூலின் அதிகபட்ச நீளம்.

$$h \sqrt{1 + \tfrac{16}{9} \tan^2 \alpha}$$

என்று நிறுவுக. (மதுரை பி. எஸ்ஸி. 1973 ஏப்.)

தீர்வு

VAB என்ற திண்மக் கூம்பின் உயரம் $VM = h$;

அரையுச்சிக்கோணம் $\angle BVM = \alpha$ அதன் அடிப்பாகம் AB யானது ஒரு நிலைக்குத்துச் சுவரைத் தொட்டுக்கொண்டிருக்கிறது. அதன் உச்சியோனது சுவரின் மேலுள்ள C என்னும் புள்ளியுடன் ஒரு நூலின் மூலம் இணைக்கப்பட்டுள்ளது.

G என்பது கூம்பின் புவியீர்ப்பு மையம். $\because MG = \frac{h}{4}$;

$$GV = \frac{3h}{4}$$

("ஈர்ப்பு மையம்" அத்தியாயம் பார்க்க)

$\because MG : GV = 1 : 3.$

கூம்பின் எடை W ஆனது G வழியே ↓ செயல்படும்

நூலின் இழுவிசை T ஆனது VC வழியே செயல்படும்.

நூலின் நீளம் அதிகபட்சமாயிருக்கும்போது கூம்பு சம நிலையில் இருக்கும். அப்போது, கூம்பானது சுவரை Bயில் அழுத்திக்கொண்டிருக்கும். ஓரம் A யானது மேலே எழும்பக் கூடிய நிலையிலிருக்குமாகையால், Aயில் அழுத்தம் எதுவும் இராது. ஆகவே, சுவரின் எதிரழுத்தம் S ஆனது Bயில் சுவருக்குச் செங்குத்தாகச் செயல்படும். கூம்பு சமநிலையிலிருப்பதால், இம்மூன்று விசைகளும் ஒரு புள்ளியில் (O-வில்) சந்திக்கும்.

VBஐ OG யானது Dயில் வெட்டட்டும்.

$\because BD : DV = MG ; GV = 1 : 3.$

$\angle BOD = 90°$;

$\angle ODV = 180° - \angle GDV = 180° - (90° - \alpha) = (90° + \alpha)$

$\angle DOV = \theta$ என்க. ∴ $BCV = \theta$.

$\triangle BOV$யில் திரிகோணச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துக.

$$(1+3) \cot \angle ODV = 1 \cot \angle BOD - 3 \cot \angle DOV$$

$$4 \cot (90° + \alpha) = \cot 90° - 3 \cot \theta$$

$$-4 \tan \alpha = 3 \cot \theta$$

$$\therefore \cot \theta = \frac{4}{3} \tan \alpha.$$

$$\operatorname{cosec}^2 \theta = 1 + \cot^2 \theta = 1 + \frac{16}{9} \tan^2 \alpha$$

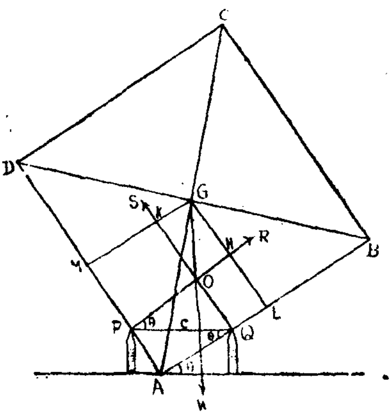
$$\text{cosec } \theta = \sqrt{1 + \frac{16}{9}\tan^2\alpha}$$

நூலின் அதிகபட்ச நீளம் $= VC$

$$= VM \text{ cosec } \theta$$

$$= h\sqrt{1 + \frac{16}{9}\tan^2\alpha}.$$

மாதிரி 88 : $2a$ நீளப் பக்கமுடைய சதுரம் ஒன்று C இடைவெளியில் ஒரே கிடைக்கோட்டிலமைந்துள்ள இரு வழவழப்பான முளைகளுக்கிடையில் அதன் தளம் நிலைக்குத்தாகயிருக்கு



படம் 124

மாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது. அது சம நிலையிலிருக்கும்போது கிடைத்தளத்துடன் அதன் பக்களுள் ஒன்றின் சாய்வு $\pi/4$ அல்லது $\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{a^2-c^2}{c^2}\right)$ என்று காட்டுக.

தீர்வு

$ABCD$ என்பது ஒரு சதுரத்தளம்.

$AB = BC = CD = DA = 2a.$

G என்பது அதன் மையம்.

P, Q என்பன கிடைமட்டத்திலமைந்துள்ள இரு முளைகள். இம்முளைகளால் தாங்கப்பட்டு சதுரம் சம நிலையிலுள்ளது.

செயல்படும் விசைகளாவன:

(அ) G வழியே ↓ செயல்படும் சதுரத்தின் எடை W.

(ஆ) P வழியே ADக்குச் செங்குத்தாகச் செயல்படும் மூலையின் எதிர்முத்தம் R.

(இ) Q வழியே ABக்குச் செங்குத்தாகச் செயல்படும் மூலையின் எதிர்முத்தம் S.

சதுரம் சம நிலையிலிருப்பதால், இம்மூன்று விசைகளும் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும். இப்புள்ளியை O என்க.

$GL \perp AB$யும், $GM \perp AD$யும் வரைக.

இச்செங்குத்துக் கோடுகள் PO, QOஐ முறையே H, Kஇல் வெட்டப்படுகின்றன.

சம நிலையில் கிடைத்தளத்துடன் பக்கம் ABயின் சாய்வு θ என்க. மூன்று விசைகளையும் கிடைத்திசையில் விசைப் பிரிப்புச் செய்க.

$$R \cos = S \sin \theta \text{.............(1)}$$

Gஐப்பற்றி திருப்புத்திறன் காண்க.

$$R.\, GH = S.\, GK$$

அதாவது, $R.\, MP = S.\, QL$

$$R\,(MA - PA) = S\,(AL - AQ)$$

$$R\,(a - c \sin \theta) = S\,(a - c \cos \theta) \text{.........(2)}$$

(1)ஐ (2) ஆல் வகுக்கவும்.

$$\frac{R \cos \theta}{R\,(a - c \sin \theta)} = \frac{S \sin \theta}{S\,(a - c \cos \theta)}$$

$$\because \cos \theta\,(a - c \cos \theta) = \sin \theta\,(a - c \sin \theta)$$

$$a \cos \theta - c \cos^2 \theta = a \sin \theta - c \sin^2 \theta.$$

$$a\,(\cos \theta - \sin \theta) - c\,(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = 0$$

$$a\,(\cos \theta - \sin \theta) - c\,(\cos \theta - \sin \theta)\,(\cos + \sin \theta) = 0$$

$$(\cos \theta - \sin \theta)\,[a - c\,(\cos \theta + \sin \theta)] = 0$$

$\therefore \cos \theta = \sin \theta$ அல்லது, $c\,(\cos \theta + \sin \theta) = a$.

$\cos \theta = \sin \theta$ எனில், $\theta = \pi/4$.

$c\,(\cos \theta + \sin \theta) = a$ எனில்,

$$c^2\,(1 + 2 \sin \theta \cos \theta) = a^2$$

$$1 + \sin 2\theta = \frac{a^2}{c^2}$$

$$\sin 2\theta = \frac{a^2 - c^2}{c^2}$$

$$\therefore\ 2\theta = \sin^{-1}\left(\frac{a^2 - c^2}{c^2}\right)$$

$$\theta = \tfrac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{a^2 - c^2}{c^2}\right)$$

ஆகவே, கிடைத்தளத்துடன் பக்கம் ABயின் சாய்வு $= \frac{\pi}{4}$ அல்லது $\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{a^2 - c^2}{c^2}\right)$

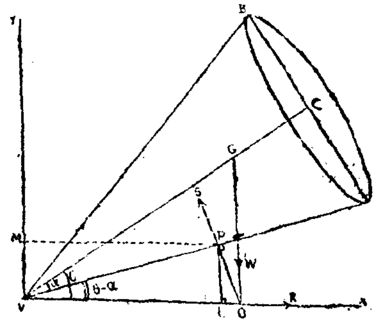
மாதிரி 89: h உயரமும் 2α உச்சிக் கோணமுமுடைய நேர்வட்டக் கூம்பு ஒன்று அதன் உச்சி ஒரு வழவழப்பான நிலைக்குத்துச் சுவருடன் தொட்டுக் கொண்டும், அதன் சாய்வுப் பக்கம் சுவரிலிருந்து c தூரத்தில் சுவருக்கு இணையாகப் பொருத்தப்பட்டுள்ள ஒரு வழவழப்பான கிராதிக் கம்பி (rail)யின் மீது இருக்குமாறும் வைக்கப்பட்டுள்ளது. சமநிலையில், கிடைத்தளத்துடன் கூம்பின் அச்சு θ சாய்வுக் கோணத்தில் இருந்தால்,

$$3h = 4c\sec^2(\theta - \alpha)\sec\theta$$

என்று காட்டுக.

தீர்வு

VAB என்ற நேர்வட்டக் கூம்பின் உயரம் $VC = h$; உச்சிக்கோணம் $\angle VAB = 2\alpha$. $\therefore\ \angle AVC = \alpha$.



படம் 125

G என்பது கூம்பின் ஈர்ப்பு மையம்.

$$\therefore\ VG = \frac{3h}{4};$$

VY என்பது சுவர். சுவரிலிருந்து C தூரத்திலுள்ள கிராதிக் கம்பியில் கூம்பு தொடும் புள்ளி P.

P யிலிருந்து சுவருக்கு PM என்னும் செங்குத்து வரைக $\therefore PM = C$.

கூம்பு பின்வரும் மூன்று விசைகளினால் சம நிலையிலிருக்கிறது.

(அ) G வழியே கூம்பின் எடை $W \downarrow$

(ஆ) V யில் கிடைக்கோடு VX வழியே சுவரின் எதிர்விசை R.

(இ) P யில் சாய்வுப் பக்கத்திற்குச் செங்குத்தாகக் கிராதியின் எதிர்விசை.

கூம்பு சமநிலையிலிருப்பதால் இம்மூன்று விசைகளும் ஒரு புள்ளியில் (O வில்) சந்திக்கும்.

சமநிலையில் $\angle CVX = \alpha$; $\angle CVA = \alpha \therefore \angle AVX = (\theta - \alpha)$
$PL \perp VO$ வரைக. $\because VL = MP = c$.

$$VO = VG \cos\theta = \frac{3h}{4} \cos\theta.$$

$$VP = VL \sec(\theta - \alpha) = c \sec(\theta = \alpha).$$

$$VO = VP \sec(\theta - \alpha) = c \sec^2(\theta - \alpha)$$

$$\therefore \frac{3h}{4} \cos\theta = c \sec^2(0 - \alpha)$$

அல்லது, $3h = 4c \sec\theta \cdot \sec^2(\theta - \alpha)$

பிணையல்களினால் பொருத்தப்பட்ட பொருட்களின் சமநிலை

மாதிரி 90 : ஒரு சீரான கோலின் ஒரு முனை ஒரு பிணையலில் பொருத்தப்பட்டுள்ளது. அதன் மறு முனையில் கட்டப்பட்டுள்ள ஒரு நூலினால் அக்கோலும் நூலும் கிடைக்கோட்டுடன் α என்னும் சமகோணத்தில் சாய்ந்த வண்ணமிருக்குமாறு அம்முனை தாங்கப்பட்டுள்ளது. கோலின் எடை W எனில், பிணையலின் எதிர்விசை $\frac{1}{4} W(8 + \operatorname{cosec}^2\alpha)^{1/2}$ என்று காட்டு.

தீர்வு

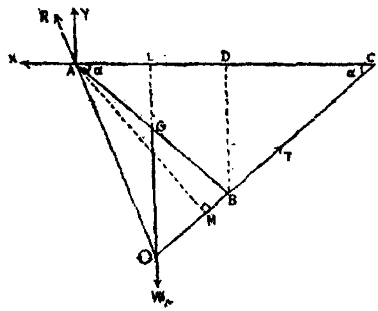
AB என்ற கோல் Aயில் ஒரு பிணையலினால் பொருத்தப்பட்டுள்ளது. B யில் ஒரு நூலினால் கட்டப்பட்டு அந்நூலின் மறு

முனை கோலும், நூலும் கிடைக் கோட்டுடன் $\propto$ கோணச் சாய்வி விருக்குமாறு Cயில் இழுத்துக் கட்டப்பட்டுள்ளது.

$\because$ $\angle CAB = \angle ACB = \propto$. கோலின் எடை W அதன் நடுப் புள்ளி G யில் $\downarrow$ செயல்படும்.

நூலின் இழுவிசை T யானது BC வழியே செயல்படும்.

பிணையலின் எதிர்விசை R என்று கொள்க. இவ்வெதிர் விசையை AC வழியாகவும், ACக்குச் செங்குத்தாகவும் விசைப்



படம் 125

பிரிப்புச் செய்தால், AC வழியே X என்னும் விசைக்கூறும், ACக்குச் செங்சித்துத் திசையில் Y என்னும் விசைக்கூறும் செயல்படுவதாகக் கொள்ளலாம்.

$$\therefore R = \sqrt{X^2 + Y^2} \text{ ஆகும்.}$$

கோல் சமநிலையிலிருப்பதால் W, T, R என்னும் மூன்று விசைகளும் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும்.

கிடைத்திசையிலும், நிலைக்குத்துத் திசையிலும் இம்மூன்று விசைகளையும் விசைப் பிரிப்புச் செய்க.

$$X = T\cos\propto\ ;\ Y + \sin\propto = W.$$

A ஐப் பற்றிய திருப்புத்திறன்கள் காண்க.

$$W \cdot AL = T \cdot AM$$

அதாவது, $W \cdot AG\cos\propto = T \cdot AC\sin\propto$

$$= T \cdot (2\,AD)\sin\propto$$

$$= T \cdot (2 \cdot AB\cos\propto)\ \sin\propto$$

$$= T \cdot 2 \cdot 2AG.\cos\propto \cdot \sin\propto$$

$$\because W = 4\,T\sin\propto.$$

$$\therefore T = \frac{W}{4 \sin \alpha}$$

$$X = T \cos \alpha = \frac{W}{4 \sin \alpha} \cdot \cos \alpha = \frac{W}{4} \cot \alpha$$

$$Y = W - T \sin \alpha = W - \frac{W}{4 \sin \alpha} \sin \alpha = W - \frac{W}{4} = \frac{3W}{4}$$

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

$$= \sqrt{\frac{W^2}{16} \cot^2 \alpha + \frac{9}{16} W^2}$$

$$= \frac{W}{4} \sqrt{\cot^2 \alpha + 9}$$

$$= \frac{W}{4} \sqrt{\operatorname{cosec}^2 \alpha - 1 + 9}$$

$$= \frac{W}{4} \sqrt{8 + \operatorname{cosec}^2 \alpha}$$

மாதிரி 91 : l நீளமும், W எடையும் கொண்ட ஒரு ஒரு சீரான கோல் அதன் கீழ்முனை Aயில் ஒரு பிணையலினால் பொருந்தப்பட்டுள்ளது. அதன் மறுமுனை Bயில் கட்டப்பட்டுள்ள ஒரு கயிறு Aக்கு நேர் மேலே θ உயரத்திலுமுள்ள ஒரு வழவழப்பான முளையின் வழியே சென்று w என்னும் ஒரு எடையைத் தாங்குகிறது. சம நிலையில் கிடைத்தளத்துடன் கோலின் சாய்வு θ எனில்,

$$\sin \theta = \frac{a}{2l}\left(1 - \frac{4w^2}{W^2}\right) + \frac{l}{2a}$$

என்று காட்டுக.

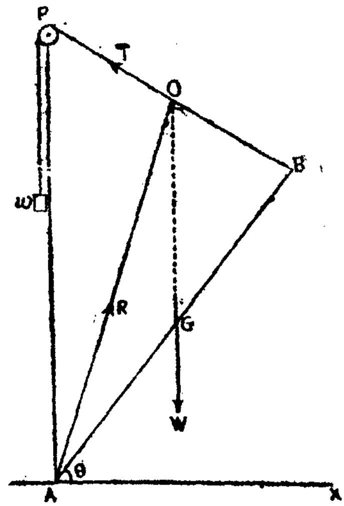
தீர்வு

AB என்னும் ஒரு கோல் அதன் முனை Aயில் ஒரு பிணையலினால் பொருத்தப்பட்டுள்ளது. P என்பது Aக்கு நேர் மேலேயுள்ள ஒரு முளை. முனை Bயில் கட்டப்பட்டுள்ள ஒரு கயிறு முளையின் வழியே சென்று w என்னும் ஒரு எடையைத் தாங்குகிறது. ஆகவே, கயிற்றின் இழுவிசை T ஆனது இந்த எடை Wக்குச் சமமாகும். அதாவது, $T = W$.

கோல் சீரானதாகையால் அதன் எடை W அதன் நடுப்புள்ளி G வழியே $\downarrow$ செயல்படும்.

T, W ஆகிய விசைகளிரண்டும் O என்னும் புள்ளியில் சந்திப்பதாகக் கொள்க.

கோல் சம நிலையிலிருப்பதால், Aயில் எதிர்விசை R ஆனது O வழியே செயல்படும்.



படம் 127

$\triangle$ AOPயின் பக்கங்களான OP, PA, AO என்பவை முறையே T, W, R ஆகிய விசைகளைக் குறிப்பிடுவதாகக் கொள்ளலாம். இம்மூன்று விசைகளும் ஒரே புள்ளியில் செயல் படுபவன. எனவே,

$$\frac{OP}{PA} = \frac{T}{W}$$

அதாவது, $$\frac{OP}{a} = \frac{w}{W}$$

அல்லது, $$OP = \frac{wa}{W}$$

$AG : GB = 1 : 1$ ஆகையால்: $OP : OB = 1 : 1$

$$\therefore OB = OP = \frac{wa}{W}$$

$$\therefore BP = \frac{2wa}{W}$$

$\triangle$ APBயில், $$\cos \angle BAP = \frac{AB^2 + AP^2 - BP^2}{2\,AB.\,AP.}$$

$\angle BAX = \theta$ எனில்,

$$\cos(90°-\theta) = \frac{l^2 + a^2 - \dfrac{4w^2a^2}{W^2}}{2la}$$

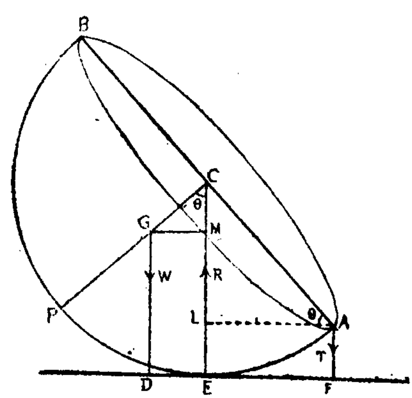
அதாவது, $\sin\theta = \dfrac{l^2}{2la} + \dfrac{a^2\left(1 - \dfrac{4w^2}{w^2}\right)}{2la}$

$$= \frac{l}{2a} + \frac{a}{2l}\left(1 - \frac{4w^2}{W^2}\right)$$

மாதிரி 92 : a ஆரையும் W எடையுமுள்ள ஒரு அரைக் கோளம் ஒரு வழுவழுப்பான மேசையின் மேல் அதன் வளை பரப்புத் தொடுகையிலிருக்குப்படியாக வைக்கப்பட்டுள்ளது. அதன் விளிம்பிலுள்ள ஒரு புள்ளியில் l நீளமுள்ள $(l<a)$ ஒரு நூல் கட்டப்பட்டு மேசையில் ஒரு புள்ளியுடன் இணைக்கப் பட்டுள்ளது. சமநிலையைக் காண்க. நூலின் இழுவிசை $\dfrac{3W}{8}.\dfrac{a-l}{\sqrt{2al-l^2}}$ என்று காட்டுக.

தீர்வு

APB என்னும் ஒரு அரைக்கோளம் அதன் விளிம்பிலுள்ள A என்னும் புள்ளியில் l நீளமுள்ள ஒரு நூலினல் கட்டப்பட்டு



படம் 128

மேசையில் F என்னும் புள்ளியுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது $\because AF = l$.

கோளத்தின் வளைபரப்பிலுள்ள E என்னும் புள்ளி மேசையைத் தொட்டுக் கொண்டிருக்கிறது.

CP என்பது அரைக் கோளத்தின் அச்சு. அரைக் கோளத்தின் ஆரை a எனில், அதன் புவியீர்ப்பு மையம் G ஆனது CPயில் Cயிலிருந்து $\frac{3a}{8}$ தூரத்திலிருக்கும் ("புவியீர்ப்பு மையம்" அதிகாரம் பார்க்கவும்)

அதாவது, $CG = \frac{3a}{8}$

அரைக்கோளத்தில் செயல்படும் விசைகளாவன.

(அ) G வழியே ↓ செயல்படும் அரைக் கோளத்தின் எடை W.

(ஆ) E வழியே வளைபரப்புக்குச் செங்குத்தாக மேசையின் எதிர்விசை R. இது கோளத்தின் மையம் C வழியே செல்லும். இது மேசைக்குச் செங்குத்தாகயிருப்பதால் நிலைக்குத்தாகயிருக்குய். ஆகவே, R, W ஆகிய இருவிசைகளும் நிலைக்குத்தாகயிருப்பதால் இணையாகயிருக்கும்.

(இ) A யில் கட்டப்பட்டுள்ள நூலின் இழுவிசை T.

மூன்று விசைகளும் சமநிலையிலிருப்பதாலும், மற்ற இரு விசைகளும் இணையாகயிருப்பதாலும், T யும் அவற்றுடன் இணையாகயிருக்கும் அதாவது T யும் நிலைக்குத்தாகயிருக்கும்

CP என்னும் அச்சு நிலைக்குத்துடன் θ கோணச் சாய்விலிருப்பதாகக் கொள்க. அதாவது, $\angle GCM = \theta$,

$AL \perp CE$யும், $GM \perp CE$ யும் வரைக.

CE = கோளத்தின் ஆரை $= a$.

$$CL = CA \sin\theta = a\sin\theta$$

$$LE = AF = l$$

$$CE = CL + LE.$$

அதாவது, $a = a\sin\theta + l$

$$\sin\theta = \frac{(a-l)}{a}$$

$$\cos\theta = \sqrt{1 - \frac{(a-l)^2}{a}}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2-(a-l)^2}}{a}$$

$$= \frac{\sqrt{2al-l^2}}{a}$$

$$\tan\theta = \frac{a-l}{\sqrt{2al-l^2}}$$

அதாவது, சமநிலையில் அரைக்கோணத்தின் அச்சு நிலைக்குத்துடன் $\tan^{-1}\left(\frac{a-l}{\sqrt{2al-l^2}}\right)$ கோணத்தில் சாய்ந்திருக்கும்.

இப்பொழுது Eஐப் பற்றிய திருப்புதிறன்கள் காண்க.

$$T.\ EF = W.\ ED$$

$$T.\ AL = W.\ GM$$

$$T.\ AC\cos\theta = W.\ CG\sin\theta$$

$$T.\ a\cos\theta = W.\ \frac{3a}{8}\sin\theta$$

$$T = \frac{3W}{8}\tan\theta$$

$$= \frac{3W}{8}\frac{a-l}{\sqrt{2al-l^2}}$$

பயிற்சி 10

(1) 4 மீட்டர் நீளமுள்ள ஒரு கோலின் ஈர்ப்பு மையம் அதை 1 : 2 என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்கிறது. அதன் ஒரு முனை ஒரு வழவழப்பான சுவரின்மீதும், மறுமுனை அச் சுவருக்கு 30° கோணத்தில் சாய்ந்துள்ள ஒரு வழவழப்பான சாய்தளத்தின் மீதும் படிந்துள்ள நிலையில் அது சமநிலையிலிருக்கிறது. கோலுக்கும் சுவருக்குமிடையேயுள்ள கோணத்தைக் காண்க.

(2) $a\sqrt{2}$ நீளமுள்ள AB என்னும் சீரான கோல் அதன் ஒரு முனை A ஆனது ஒரு வழவழப்பான நிலைக்குத்துச் சுவரின்மீது படிந்தும், மறுமுனை B-யானது $2a$ நீளமுள்ள ஒரு நூலினால் கட்டப்பட்டு, சுவரில் A-க்கு நேர் மேலேயுள்ள ஒரு புள்ளியில் கட்டப்பட்ட நிலையில் தொங்கிக் கொண்டுமிருக்கிறது. சமநிலையில் நிலைக்குத்துடன் கோலின் சாய்வு $\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ என்று காட்டுக.

(3) $2a$ நீளமுள்ள ஒரு சீரான உத்தரம் அதன் ஒருமுனை ஒரு வழவழப்பான நிலைக்குத்துச் சுவரின்மீது படிந்தும், அதன் நீளத்திலுள்ள ஒரு புள்ளி சுவரிலிருந்து b தூரத்தில் சுவருக்கு இணையாகப் பொருத்தப்பட்டுள்ள ஒரு வழவழப்பான கிராதிக் கம்பியின் மீது படிந்துமுள்ள நிலையில் சமநிலையிலுள்ளது. நிலைக் குத்துடன் உத்தரத்தின் சாய்வு $\sin^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$ என்று காட்டுக.

(4) AB என்னும் கோலை அதன் புவியீர்ப்பு மையம் a, b நீளங்களுள்ள இரு பகுதிகளாகப் பிரிக்கிறது. முனைகள் A-யும் B-யும் l நீளமுள்ள ஒரு நூலினால் கட்டப்பட்டுள்ளன. அந் நூலானது ஒரு நிலையான, வழவழப்பான முளையில் தொங்க விடப்பட்டுள்ளது. சமநிலையில் நிலைக்குத்துடன் கோலானது θ கோணத்திலும், நூலின் ஒவ்வொரு பகுதியும் α கோணத்திலு மிருந்தால்,

$$(a+b)^2 = \frac{l^2}{(a+b)^2}\,[a^2+b^2-2ab\cos 2\alpha]$$

என்று காட்டுக.

(5) $2a$ நீளமுள்ள AB என்னும் ஒரு சீரான கோல்; அதன் ஒரு முனை A ஒரு வழவழப்பான நிலைக்குத்துச் சுவரின்மீது படிந்தும், மறுமுனை B-யானது $3l$ நீளமுள்ள ஒருகனமில்லாத நூலினால் கட்டப்பட்டு, சுவரில் A-க்கு நேர்மேலேயுள்ள ஒரு புள்ளியில் கட்டப்பட்ட நிலையில் தொங்கிக்கொண்டுமிருக்கிறது. சமநிலையில் கிடைத்தளத்துடன் கோலின் சாய்வு θ எனில்,

$$\sin^2\theta = \frac{9l^2-4a^2}{12a^2}$$

என்று காட்டு. (சென்னை பி.எஸ்ஸி. 1965 ஏப்.)

(6) விளிம்பு கிடைத்தளத்திலிருக்குமாறு நிலையாகவுள்ள r ஆரையுடன் கூடிய ஓர் அரைக்கோளக் கிண்ணத்தில் ஒரு பகுதி உள்ளேயும் மறுபகுதி வெளியேயுமிருக்குமாறு $2a$ நீள முள்ள ஒரு சீரான கோல், அதன் ஒரு புள்ளி விளிம்பைத் தொட்டுக்கொண்டிருக்குமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது. கிடைத் தளத்துடன் கோலின் சாய்வு θ எனில் $a\cos\theta = 2r\cos 2\theta$ என்று காட்டு.

(7) விளிம்பு கிடைத்தளத்திலிருக்குமாறு வைக்கப்பட் டுள்ள $\sqrt{3}$ அங்குல ஆரையுள்ள ஒரு வழவழப்பான அரைக் கோளக் கிண்ணத்தில் 4 அங்குல நீளமுள்ள சீரான கோல் ஒன்று ஒருபகுதி உள்ளேயும் மறுபகுதி வெளியேயுமிருக்குமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது. விளிம்புக்கு வெளியே கால்பாகம்

நீட்டிக் கொண்டிருக்குமாறு சமநிலையில் வைக்கப்படக்கூடிய கோலின் குறைந்தபட்ச நீளம் $2\sqrt{2}$ அங்குலம் என்று காட்டு.

(8) விளிம்பு கிடைத்தளத்திலிருக்குமாறு வைக்கப்பட்டுள்ள ஒரு வழவழப்பான அரைக் கோளக் கிண்ணத்தில் அதன் ஆரைக்குச் சமமான நீளமுடைய கனமான கோல் ஒன்று வைக்கப்படுகிறது. கோலின் புவியீர்ப்பு மையம் கோலை 1 : 2 என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்கிறது. நிலைக்குத்துடன் கோலின் சாய்வு $\tan^{-1} 3\sqrt{3}$ என்று காட்டு.

(9) புவியீர்ப்பு மையத்தினால் $a : b$ என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்கப்படுகின்ற $a+b$ நீளமான ஒரு கோல் ஒரு வழவழப்பான அரைக் கோளக் கிண்ணத்தினுள் முழுமையாக இருக்கும்படி வைக்கப்படுகிறது சமநிலையில் கிடைத்தளத்துடன் கோலின் சாய்வு θ எனில், $\sin\theta = \dfrac{b-a}{2\sqrt{r^2-ab}}$ என்று காட்டுக. r என்பது கோளத்தின் ஆரை.

(10) விளிம்பு கிடையாகவிருக்குமாறு வைக்கப்பட்டுள்ள ஒரு நிலையான வழவழப்பான அரைக் கோளக் கிண்ணத்தில் ஒருபகுதி உள்ளேயும், மறுபகுதி வெளியேயுமிருக்குமாறு ஓய்வு நிலையிலிருக்கக்கூடிய ஒரு சீரான கோலின் கிடைத்தளச் சாய்வு $\sin^{-1} (\frac{1}{3}\sqrt{3})$ என்று காட்டு.

(சென்னை, 1961 செப்.)

(11) ஓர் அடி ஆரையுள்ள ஒரு நிலையான, வழவழப்பான உருளைக் குழாயினுள்ளே 32 அடி நீளமுள்ள ஒரு சீரான கோல் ஒரு பகுதி உள்ளேயும் மறுபகுதி வெளியே நீட்டிக்கொண்டுமிருக்குமாறு ஓய்வு நிலையிலுள்ளது. சமநிலையில் கிடைத்தளத்துடன் கோலின் சாய்வு 60° என்று காட்டு.

(12) $2a$ நீளமுள்ள ஒரு சீரான கோல் r எனும் ஆரையுடைய ஒரு வழவழப்பான கோளத்தின்மேல் அதன் கீழ்முனை கோளத்தைத் தொட்டுக்கொண்டிருக்கும் ஒரு வழவழப்பான சுவரின்மீது அழுத்திக் கொண்டிருக்குமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது. ஓய்வு நிலையில் கிடைத்தளத்துடன் கோலின் சாய்வு θ எனில், $r = a \cos (1+\theta)$ என்று நிறுவுக.

(13) $2l$ நீளமுள்ள AB என்னும் ஒரு கோல் AB வழியே A-யிலிருந்து $\frac{3}{2}$ l தூரத்திலுள்ள ஒரு முளையைத் தொட்டுக்கொண்டு ஓய்வுநிலையிலுள்ளது. ஒரு நிலையான புள்ளியில்

கட்டப்பட்டுள்ள ஒரு நூலில் முனை A இணைக்கப்பட்டுள்ளது. நிலைக்குத்துடன் $45°$ சாய்வில் கோல் சமநிலையிலிருந்தால் கிடைத்தளத்துடன் நூலின் சாய்வு $\tan^{-1} 2$ என்று காட்டு.

(14) $2l$ நீளமுள்ள ஒரு சீரான கோலின் ஒரு முனையில், ஒரு வழவழப்பான நிலைக்குத்துக் கம்பியின் வழியே நழுவிச் செல்லக்கூடிய ஒரு சிறு வளையம் உள்ளது. இக் கம்பியிலிருந்து c தூரத்தில் அச்சு கிடைநிலையிலிருக்குமாறு வைக்கப்பட்டுள்ள ஒரு வழவழப்பான உருளையின்மேல் அழுத்திக்கொண்டு அக் கோல் ஓய்வு நிலையிலுள்ளது. கிடைத்தளத்துடன் கோலின் சாய்வு θ எனில், $l \cos^3\theta = c \pm a \sin\theta$ என்று காட்டு.

(15) $2a$ நீளமுள்ள ஒரு வழவழப்புான கோல், கிடைத் தளத்துடன் α கோணச் சாய்விலுள்ள ஒரு வழவழப்பான தளத்தில் ஒரு முனை படிந்துள்ள நிலையில், தளத்திலிருந்து c தூரத்தில் தளத்திற்கு இணையாகவுள்ள ஒரு கிடைத்தளக் கிராதிக் கம்பியால் தாங்கப்படுகிறது. சாய்தளத்துடன் கோலின் சாய்வு θ எனில், $c \sin \alpha = a \sin^2\theta \cos(\theta - \alpha)$ என்று காட்டுக.

(16) $2l$ நீளமுள்ள சீரான கோலொன்று அதன் கீழ்முனை ஒரு வழவழப்பான நிலைக்குத்துச் சுவரை அழுத்திக்கொண்டு ஓய்வு நிலையிலுள்ளது. சுவரின் மேலுள்ள ஒரு புள்ளியில் ஒரு நுனியும், கோலின் கீழ்முனையிலிருந்து b எனும் தூரத்தில் கோலி லுள்ள புள்ளியில் மறு நுனியுமாகக் கட்டப்பட்டுள்ள ஒரு நூலி னல் அது தாங்கப்படுகிறது. நிலைக்குத்துடன் நூலின் சாய்வு θ எனில்,

$$\cos^2\theta = \frac{b^2 (a^2 - b^2)}{a^2 l (2l - b)}$$

என்று காட்டுக.

(17) a ஆரையும் w எடையுமுள்ள ஒரு கோளம் ஒரு வழ வழப்பான சாய்தளத்தின்மேல், கோளத்தின் மேற்பரப்பின் மேலுள்ள ஒரு புள்ளியில் ஒரு நுனி இணைக்கப்பட்டும், சாய் தளத்தின் மேலுள்ள ஒரு புள்ளியில் மறு நுனி கட்டப்பட்டு முள்ள l நீளமுள்ள ஒரு நூலினல் தாங்கப்பட்டு ஓய்விலுள்ளது. கிடைத்தளத்துடன் சாய்தளத்தின் சாய்வு α எனில், நூலின் இழுவிசை.

$$\frac{w(a+l)\sin\alpha}{\sqrt{l^2+2al}}$$

என்று காட்டு.

(18) ஒரு கூம்பின் உயரம் h; அடிப்பக்க ஆரை r. அதன் உச்சியுடனும், வட்டமான அடிப் பக்கத்தின் பரிதியிலுள்ள ஒரு புள்ளியுடனும் ஒரு நூல் கட்டப்பட்டு ஒரு வழவழப்பான முனையைச் சுற்றிவிடப்பட்டுள்ளது. கூம்பு அதன் அச்சைக் கிடையாகக் கொண்டு சமநிலையிலிருந்தால், நூலின் நீளம் $(h^2+4r^2)^{\frac{1}{2}}$ என்று காட்டு.

(19) ஒரு சீரான செவ்வகப் பலகை c இடைவெளியில் ஒரே கிடைக்கோட்டிலுள்ள இரு வழவழப்பான முனைகளின் மேல் அதன் a, b நீளப் பக்கங்கள் இருக்குமாறு நிலைக்குத்தாக வைக்கப்பட்டுள்ளது. a நீளப் பக்கம் நிலைக்குத்துடன் கொண்டுள்ள சாய்வுக் கோணம் θ என்பது.

$$2c \cos 2\theta = b \cos \theta - a \sin \theta$$

என்னும் தொடர்பின் மூலம் தரப்படுமென்று காட்டுக.

(20) ABC என்னும் ஒரு சீரான முக்கோணத் தகடு C-யில் ஒரு நேர் கோணத்தைக் கொண்டுள்ளது. ஒரே கிடைக்கோட்டிலுள்ள D, E என்னும் இரு வழவழப்பான முனைகளை அதன் பக்கங்கள் அழுத்திக்கொண்டு, முனை C கீழேயிருக்குமாறு அத் தகடு வைக்கப்படுகிறது. சமநிலையில் AC ஆனது கிடைத் தளத்துடன் θ கோணத்தைக் கொண்டிருக்குமெனில்,

$$AC \cos \theta - BC \sin \theta = 3\ DE \cos 2\theta$$

என்று காட்டு.

(21) r ஆரையுள்ள ஓர் அரைக்கோளக் கிண்ணம் ஒரு மேசையின்மேல் ஓய்வு நிலையிலுள்ளது. கிண்ணத்தின் எடைக்குச் சமமான எடையும் $2l$ நீளமும் கொண்ட ஒரு கோல் அதன் ஒரு பகுதி உள்ளே இருக்குமாறு ஓய்வு நிலையிலுள்ளது. கிடைத் தளத்துடன் அரைக்கோளத்தின் அடிப் பாகத்தின் சாய்வு α என்றும், கிண்ணத்தினுள்ளேயிருக்கும் கோலின் பகுதி மையத்தில் தாங்கும் கோணம் 2β என்றும் கொண்டு,

$$l \sin(\alpha+\beta) = -2r \cos(\alpha+2\beta) = r \sin \alpha$$

என்ற சமன்பாட்டின் மூலம் சமநிலை தரப்படுகிறதென்று காட்டுக.

(22) $2a$ நீளமுள்ள AB என்னும் ஓர் இலேசான கோலின் A என்னும் முனையில் $2W$ என்னும் எடையுள்ள ஒரு பொருளும் B என்னும் முனையில் W எடையுள்ள ஒரு பொருளும் கட்டப்பட்டுள்ளன. இக் கோலானது, ஒவ்வொன்றும்

b நீளமுள்ள AO, BO என்னும் நூல்களினால் O என்னும் புள்ளியிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. சமநிலையில் கிடைத்தளத்துடன் கோலின் சாய்வு θ எனில்,

$\tan \theta = \dfrac{a}{3\sqrt{b^2 - a^2}}$ என்று காட்டு. AO என்னும் நூலில் செயல்படும். இழுவிசையை a, b, W ஆகியவற்றின் சார்பில் காண்க.

(23) $2a$ நீளப்பக்கங்களுடைய ஒரு சதுரத் தகடு ஒரே கிடைக்கோட்டிலமைந்துள்ள இரு வழவழப்பான முளைகளின் மேல் நிலைக்குத்துத் தளத்தின்மேல் நிற்கிறது. அதன் கீழ் முனையிலிருந்து முளைகளின் தூரங்களின் மொத்தம் a-க்குச் சமமானல், அது சம நிலையிலிருக்குமென்று காட்டு.

(24) ஒரு சதுரப் பலகையானது அதன் ஒரு முனை ஒரு வழவழப்பான நிலைக்குத்துச் சுவரின்மீது படிந்தும், அடுத்துள்ள முனை சதுரத்தின் ஒரு பக்கத்திற்குச் சமமான நீளமுள்ள ஒரு நூலின் மூலம் சுவருடன் இணைக்கப்பட்டும் ஓய்வு நிலையிலுள்ளது. சமநிலையில் சுவருடன் நூல் $\tan^{-1} \frac{1}{3}$ என்னும் கோணத்தை யுண்டுபண்ணுமென்று காட்டு. மேலும், சுவரிலிருந்து முனைகளின் தூரங்கள் 0: 1: 3: 4 என்னும் விகிதங்களிலிருப்பதாகவும் காட்டு.

(25) C-யில் விரிகோணத்தைக் கொண்ட ABC என்னும் முக்கோணத் தகடு ஒன்று அதன்பக்கம் AC ஆனது ஒரு மேசையைத் தொட்டுக்கொண்டிருக்குமாறும், அதன் தளம் நிலைக்குத்தாக இருக்குமாறும் வைக்கப்பட்டுள்ளது. முக்கோணத் தகட்டின் எடையும் பக்கங்களும் முறையே W, a, b, c எனில், B-யில் தொங்கவிடப்பட்டு முக்கோணத்தைக் கவிழச் செய்யக்கூடிய மிகக் குறைந்தபட்ச எடை $\dfrac{W}{3} \dfrac{a^2+3b^2-c^2}{c^2-a^2-b^2}$ என்று காட்டுக. $c^2 > a^2+3b^2$ எனில், அதன் நிலையை விளக்குக.

(26) W எடையுள்ள $ABCD$ என்னும் ஒரு சீரான சதுரப் பலகை A-யிலுள்ள ஒரு பிணையலைச் சுற்றி நிலைக்குத்துத்தளத்தில் நகரக்கூடியதாயிருக்கிறது. B-யிலிருந்து w என்னும் ஓர் எடை தொங்கவிடப்பட்டால், சமநிலையில் நிலைக்குத்துடன் மூலைவிட்டம் AC-யின் சாய்வு $\tan^{-1}\left(\dfrac{w}{W+w}\right)$ என்று காட்டுக.

(27) கனமான ஒரு சமபுக்க முக்கோணத் தகட்டின் இரு முனைகள் ஒரு நூலின் இரு நுனிகளில் கட்டப்பட்டு ஒரு வழவழப்பான முளையிலிருந்து தொங்கவிடப்படுகிறது. தகட்டின்

ஒருபக்கம் நிலைக்குத்தாயிருக்குமாறு அது ஓய்விலிருந்தால், நூலின் நீளம், முக்கோணத்தின் குத்துயரத்தைப்போல் இரு மடங்கு என்று காட்டு.

(28) $2a$ நீளமுள்ள ஒரு சீரான கோல் அதன் ஒரு முனை ஒரு வழவழப்பான நிலைக்குத்துச் சுவரின்மேல் படிந்த நிலையில் ஒரு வழவழப்பான முனையின்மேல் ஓய்விலிருக்கிறது. சுவரி லிருந்து முனையின் தூரம் c என்றும் சுவருடன் கோலின் சாய்வு θ என்றும் தரப்பட்டிருந்தால், $c = a \sin^3\theta$ என்று காட்டு.

(29) AB என்னும் ஒரு சீரான கோலின் முனை A ஒரு வழ வழப்பான சுவரைத் தொட்டுக்கொண்டிருக்கிறது. $AC = \frac{1}{4}AB$ என்றவாறு அமைந்த C என்னும் புள்ளியில் ஒரு நூலின் ஒரு நுனி கட்டப்பட்டு, நூலின் மறு நுனி சுவருடன் கட்டப்பட்டுள் ளது, நிலைக்குத்துடன் α கோணச் சாய்வில் கோல் சமநிலையி லிருப்பின், நூலின் நீளத்தைக் காண்க.

(30) W எடையுள்ள AB என்னும் உத்தரம் A-யிலுள்ள ஒரு பிணையலைச் சுற்றி நிலைக்குத்துத் தளத்தில் திரும்ப முடியும். B-யில் கட்டப்பட்டுள்ள ஒரு கயிறு $AC = AB$ என்றபடி A-க்கு நேர்மேலேயுள்ள C என்னும் நிலையான, வழவழப்பான கப்பி வழியே செல்கிறது. கிடைத்தளத்துடன் 60° கோணத்தில் உத் தரத்தைத் தாங்கக்கூடிய கயிற்றின் இழுவிசையைக் காண்க.

(31) ஓர் இரு சம பக்க நேர்கோண முக்கோணத் தகடு அதன் தளம் நிலைக்குத்தாகவும், உச்சி கீழாகவுமிருக்குமாறு 3 அங்குல இடைவெளியில் ஒரே கிடைக்கோட்டிலமைந்துள்ள இரு வழவழப்பான முனைகளின்மேல் நிற்கின்றது அடிப்பக்கம் 9 அங்குலமானல், நிலைக்குத்துடன் அடிப்பக்கம் 30° சாய்வி லிருக்குமென்று காட்டு.

(32) $2l$ நீளமுள்ள ஒரு நூலின் ஒரு நுனி $2a$ நீளமுள்ள ஒரு வழவழப்பான கனமான கோலின் ஒரு முனையுடனும், மறு முனை கோலில் நழுவக்கூடிய கனமில்லாத ஒரு சிறு வளையத்துடனும் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. கோலானது அந்த நூலின்மூலம் ஒரு வழவழப்பான முனையிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. நிலைக்குத்துடன் கோலின் சாய்வு θ எனில், $l \cos\theta = a \sin^3\theta$ என்று காட்டு.

(33) $2a$ நீளமுள்ள ஒரு கோலானது, அதன் கீழ்முனை ஒரு வழவழப்பான சுவரை அழுத்திக்கொண்டிருக்குமாறு r ஆரை யுள்ள ஒரு கோளத்தின்மேல் ஓய்வுநிலையிலுள்ளது. கோளத் தின் மையம் சுவரிலிருந்து c தூரத்திலும், சுவருடன் கோல் θ

கோணச் சாய்விலுமிருந்தால், $a \sin^3 \theta + r \cos \theta = c$ என்று காட்டு.

(34) A, C என்பன இரு நிலையான புள்ளிகள். C-யானது A-க்கு நேர் மேலேயுள்ளது. AC-க்குச் சமமான நீளமுள்ள AB என்னும் ஓர் இலேசான, விறைப்பான கோல் A-யில் ஒரு சுழற்சித் தானத்தைக் கொண்டுள்ளது. ஒரு கயிறு Bஐ C-யுடன் இணைக்கிறது. B-யிலிருந்து W என்னும் எடை தொங்குகிறது. சமநிலையில் கிடைத்தளத்துடன் கோலின் சாய்வு θ எனில், கயிற்றின் இழுவிசை $2 \sin\left(45° - \frac{\theta}{2}\right)$ என்று காட்டுக.

(35) A-யில் ஒரு பிணையலைக் கொண்ட W எடையுள்ள AB என்னும் ஒரு கனமான, சீரான கோல் நிலைக்குத்துடன் 30° சாய்விலிருக்குமாறு B-யில் செயல்படும் ஒரு கிடைத்திசை விசை Fஆல் வைக்கப்படுகிறது. F-ன் அளவையும், பிணையலிலுள்ள எதிர் விசையையும் காண்க.

(36) 10 அடி நீளமும், 300 ராத்தல் எடையுமுள்ள ஒரு கனமான, சீரான உத்தரம் ஒரு நிலைக்குத்துச் சுவருடன் ஒரு முனையில் பிணைக்கப்பட்டுள்ளது. இம் முனைக்கு நேர்மேலே சுவரில் 12 அடி உயரத்தில் பொருத்தப்பட்ட ஒரு முனையைக் கொண்ட ஓர் இலேசான கோலின் மறுமுனை உத்தரத்தின் மறு முனையுடன் உத்தரம் கிடைநிலையிலிருக்குமாறு இணைக்கப்பட்டுள்ளது. உத்தரத்தின் இந்த முனையில் 40 ராத்தல் எடையானது தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. இலேசான கோலின் இழுவிசையையும், உத்தரத்திலுள்ள அழுத்தத்தையும் காண்க.

(37) a ஆரையும் nw எடையுமுள்ள ஓர் உருளை வடிவமான திறந்த ஜாடி ஒரு கிடைத்தள மேசையின்மேல் நிலைக்குத்தாக வைக்கப்பட்டுள்ளது. $2l$ நீளமும் W எடையும் கொண்ட ஒரு கனமான கோல் அதன் ஒருமுனை ஜாடியின் நிலைக்குத்தான உட்பரப்பை அழுத்திக் கொண்டிருக்குமாறு விளிம்பின்மேல் நிற்கின்றது. சமநிலையில் நிலைக்குத்துடன் கோலின் சாய்வு $\cos^{-1}\left(\frac{2a}{l}\right)^{\frac{1}{3}}$ என்று காட்டு. கோலின் சாய்வு இதைவிடக் குறைந்தால் கோல் ஜாடியைவிட்டு வெளியே விழுந்துவிடுமென்றும், $\cos^{-1}(n+2)^{a}$ஐவிடக் குறைந்தாலொழிய ஜாடி கவிழ்ந்துவிடுமென்றும் காட்டுக.

(38) $32a$ நீளமுள்ள சீரான கோலொன்று a ஆரையுள்ள உருளை வடிவமான கிண்ணத்தின்மேல் ஒருபகுதி உள்ளேயும்,

மறுபகுதி வெளியேயும் இருக்குமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது. சமநிலையில் கிடைத்தளத்துடன் கோலின் சாய்வு 60° என்றும், கோலின் எடையைப் போல 6 மடங்கு எடையுடன் கிண்ணம் இருந்தாலொழிய ஜாடி கவிழ்ந்துவிடுமென்றும் காட்டு.

(39) ஒரு முனையில் $\frac{1}{2}W$ எடையைக் கொண்டுள்ள ஒரு சீரான கோல் அதன் மறுமுனையிலுள்ள ஒரு பிணையலைச் சுற்றி ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் நகரக்கூடியதாயுள்ளது. கோலின் எடை W. எடையைத் தாங்கியுள்ள முனை, சுவரில் பிணையலுக்கு நேர்மேலே C தூரத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியுடன் ஒரு நூலின் மூலம் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. நூலின் இழுவிசை $\frac{lW}{c}$ என்று காட்டுக.

(40) W எடையுள்ள ஒரு கோளம் கிடைத்தளத்துடன் α கோணச் சாய்விலுள்ள ஒரு வழவழப்பான சாய்தளத்தின்மேல், அதன் ஆரையளவு நீளமுள்ள ஒரு நூலினால் தாங்கப்பட்டுச் சமநிலையிலுள்ளது. நூலின் ஒரு நுனி கோளத்திலும், மறுநுனி சாய்தளத்திலும் கட்டப்பட்டுள்ளன. நூலின் இழுவிசை $\frac{2}{3}\sqrt{3}W$ என்று காட்டுக.

(41) 4 கிலோ எடையுள்ள ஒரு கோல் ஒரு சுவருடன் A-யில் பிணைக்கப்பட்டு, சுவருக்கு 60° கோணத்திலிருக்குமாறு கோலுடன் 30° சாய்விலுள்ள 30° கோணத்திலுள்ள BC என்னும் நூலினால் நிலைநிறுத்தப்பட்டுள்ளது. முனை B ஆனது முனை A-க்குக் கீழே இருந்தால் பிணையலிலுள்ள எதிர்விசையையும் நூலின் இழுவிசையையும் காண்க.

(42) W எடையும் $2a$ நீளமுமுள்ள AB என்னும் சீரான கோலொன்று A-யில் ஒரு நிலையான புள்ளியுடன், ஒரு பிணையலினால் பிணைக்கப்பட்டுள்ளது. B-யில் கிடையாகச் செயல்படுத்தப்பட்ட F என்னும் விசையினால் நிலைக்குத்துடன் α கோணச் சாய்வில் அது சமநிலையில் வைக்கப்படுகிறது. கோலின்மேல் பிணையலின் அமுத்தத்தின் அளவையும் திசையையும் காண்க. $F=\frac{1}{2}W\tan\alpha$ என்றும் காட்டுக.

(43) விளிம்பு கிடைத்தளத்திலிருக்குமாறு நிலையாகவுள்ள r ஆரையுள்ள ஓர் அரைக்கோளக் கிண்ணத்தின் வழவழப்பான உட்புறப் பரப்பின்மீது ஒரு முனையிருக்குமாறு அதன் விளிம்பின்மேல் கோலொன்று வைக்கப்படுகிறது. கிண்ணத்தின் உட்புறமிருக்கும் கோலின் பகுதியின் நீளம் c எனில் கோலின் நீளம் $\frac{4}{c}\sqrt{c^2-2r^2}$ என்று காட்டு.

(44) W எடையும், $2l$ நீளமுமுள்ள AB என்னும் சீரான கோல் அதன் முனை A-யானது ஒரு வழவழப்பான சுவரின் மீது படிந்தும், அதன் மறுமுனை சுவரிலிருந்து $2\ d$ தூரத்திலிருக்குமாறும், கோல் கிடையாக இருக்குமாறும் ஒரு நூலினால் சுவரிலுள்ள ஓர் ஆணியில் கட்டப்பட்டு ஒய்வுநிலையிலுள்ளது.

சுவரின் மீதுள்ள அழுத்தம் $\dfrac{W\,d}{2\sqrt{a^2-d^2}}$ என்று காட்டுக.

(45) புவியீர்ப்பு மையத்தினால் a, b என்னும் நீளங்கள் உடைய இரு பகுதியாகப் பிரிக்கப்படுகின்ற ஒரு கோலின் இரு முனைகளிலும் l நீளமுள்ள ஒரு கயிற்றின் நுனிகள் கட்டப்பட்டு ஒரு வழவழப்பான முளையில் தொங்கவிடப்படுகிறது. α என்பது நூலின் இரு பகுதிகளுக்குமிடையேயுள்ள கோணத்தில் பாதியெனில், கோல் கிடையாகவில்லாதபோது, நிலைக்குத்துடன் அதன் சாய்வுக் கோணம் θ என்பது.

$$\cos\ \theta\ \frac{l \sin \alpha}{a+b}$$

என்ற தொடர்பினால் தரப்படுமென்று காட்டுக.

(46) புவியீர்ப்பு மையத்தினால் $a : b$ என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்கப்படுகின்ற W எடையுள்ள AB என்னும் ஒரு கோல் கிடைத்தளத்துடன் α, β சாய்வுகளிலுள்ள இரு வழவழப்பான சாய் தளங்களின்மேல் வைக்கப்பட்டுள்ளது. சமநிலையில் அது ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்திலிருக்கிறது. சமநிலையில் கோலின் நிலையையும், சாய்தளங்களின் எதிர்விசைகளையும் காண்க.

(47) 8 அடி நீளமும், 2 ராத்தல் எடையுமுள்ள ABஎன்னும் ஒரு சீரான கோல் Aஐச் சுற்றித் தாராளமாகத் திரும்ப முடியும். கோலுடன் நிலைக்குத்துத் தளத்திலமைந்துள்ள ஒரு நூலினால், கோலுக்கு 45° சாய்வில் முனை B-யில் கட்டப்பட்டு அக் கோல் கிடைநிலையில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. A-யிலிருந்து 6 அடி தூரத்தில் கோலுடன் 2 ராத்தல் எடையுள்ள பொருளொன்று கட்டப்பட்டால் நூலின் இழுவிசையையும், A-யில் செயல்படும் எதிர்விசையின் அளவு, திசை ஆகியவற்றையும் காண்க.

(48) W எடையுள்ள ஒரு சீரான கோல், அதன்முனைகளில் கட்டப்பட்டு ஒரு வழவழப்பான முளையின் வழியே செல்கின்ற l நீளமுள்ள ஒரு நூலினால் சமநிலையில் தாங்கப்படுகிறது. W' என்னும் ஒரு எடை அதன் ஓர் முனையில் இணைக்கப்பட்டால்,

முனையின்மீது நூலின் $\frac{lW'}{2(W+W^1)}$ பகுதி நீளம் நழுவுமென்று காட்டுக.

(49) W எடையுள்ள ஓர் ஏணியானது, அதன் முனைகள் ஒரு வழவழப்பான தரையின்மீதும், வழவழப்பான சுவரின்மீதும் இருக்குமாறு அதன் கீழ்முனையைச் சுவரும் தரையும் சந்திக்கும் புள்ளியுடன் ஒரு கயிற்றினுல் கட்டி, கிடைத்தளத்துடன் α கோணச் சாய்வில் இருக்குமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது. அடியி லிருந்து $\frac{2}{n}l$ தூரத்தில் ஏணியில் nW என்னும் ஓர் எடை வைக்கப்பட்டால், கயிற்றின் இழுவிசையைக் காண்க.

(50) $2a$ நீளமும் W எடையுமுள்ள ஓர் ஏணியின் புவி யீர்ப்பு மையம் அடியிலிருந்து $\frac{3}{8}$ பாகத் தூரத்திலுள்ளது. அது ஒரு வழவழப்பான சுவரின்மீது சாய்ந்த வண்ணம் ஒரு வழ வழப்பான தரையின்மேல் நிற்கிறது. அதன் நடுப்புள்ளி R நீளக் கிடைக்கயிற்றினுல் சுவருடன் கட்டப்பட்டுள்ளது. கயிற்றின் இழுவிசையைக் காண்க.

(51) 80 செ. மீ. நீளமும், 1 கி.கி. எடையுமுள்ள சீரான கோல் ஒன்று அதன் ஒரு முனையிலுள்ள வழவழப்பான பிணையலைச் சுற்றித் தாராளமாகத் திரும்பக் கூடியதாயிருக் கிறது. அதன் மறுமுனையில் செயல்படுத்தப்பட்ட $\frac{1}{2}$ கி.கி. கிடைவிசையினுல் நிலைக்குத்துடன் 30° சாய்விலிருக்குமாறு, ஒரு பக்கமாக இழுக்கப்படுகிறது. மேலும், பிணையலிருக்கும் முனையிலிருந்து 60 செ.மீ. தூரத்திலுள்ள ஒரு வழவழப்பான வட்ட முனையால் அது நகராமல் தடுக்கப்படுகிறது. பிணைய லிலும், முனையிலுமுள்ள எதிர்விசைகளைக் காண்க.

(52) AB, BC, CD என்னும் மூன்று சமநீளக் கோல்கள் ஓர் ஒழுங்கு அறுகோணத்தின் அடுத்தடுத்த மூன்று பக்கங் களாக அமையும் வண்ணம் உறுதியாக இணைக்கப்பட்டு, A-யிலிருந்து தொங்கவிடப்படுகின்றன. CD கிடையாக இருக்கு மென்று காட்டுக.

தொடுகையிலுள்ள பொருள்கள் (Bodies in contact)

ஒன்றையொன்று தொட்டுக்கொண்டிருக்கும் இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட பொருள்கள் புறவிசைகளின் தாக்குதல்களினுல் சமநிலையிலிருப்பதாகக் கொள்க. இப் புற விசைகள் தவிர இத் தொடுபொருள்களின் தொடுபுள்ளிகளின் வழியே செயல்படும் விசைகள், எதிர்விசைகள் (actions and

reactions) போன்ற உள்விசைகளும் அப் பொருள்களில் செயல் படலாம். இந்த உள்விசைகள் ஒன்றின் விளைவை ஒன்று நீக்கவும் செய்யலாம் ; நீக்கப்படாமல் மிஞ்சியும் நிற்கலாம். தொடுபொருள்கள் வழவழப்பாகவிருப்பின் அளவு தெரியாத இந்த உள்விசைகள் தொடுபுள்ளி வழியே தொடுதளத்திற்குச் செங்குத்தாகச் செயல்படும்; அல்லது இவ் வுள்விசைகள் அளவு களும் திசைகளும் தெரியாதவையாயிருக்கும். இத்தகைய தொடுபொருள்களின் சமநிலைபற்றி ஆராயுமிடத்து ஒவ்வொரு பொருளின் சமநிலையையும் தனித்தனியே கருத்திற் கொண்டு விசைச் சமன்பாடுகளையும். திருப்புதிறன் சமன்பாடுகளையும் அமைத்து, அச் சமன்பாடுகளைத் தீர்த்து, உள்எதிர்விசைகளின் விளைவுகளை நீக்கிவிடலாம். தொடுபொருள்களனைத்தையும் ஒரே பொருளாகக் கருதி விசைச் சமன்பாடு, திருப்புதிறன் சமன்பாடு ஆகியவற்றை அமைப்பதன் மூலமும் அளவு, திசை தெரியாத இவ் வுள்ளெதிர் விசைகளின் விளைவுகளை நீக்கி விடலாம். இவ்வாறு உள்விசைகள் நீக்கப் பெற்ற சமன்பாடு களிலிருந்து புறவிசைகள் பற்றிய விவரங்களைத் தெரிந்து கொள்ளலாம்.

பின்வரும் மாதிரிக் கணக்குகளில் மேற்கூறப்பட்ட முறை கள் நன்கு விளக்கப்பட்டுள்ளன.

மாதிரி 93 : ஒவ்வொன்றும் ஓர் அங்குல ஆரையும், W எடையுமுள்ள இரு வழவழப்பான கோளங்கள் 3 அங்குல ஆரையுள்ள ஒரு வழவழப்பான கோளக் கிண்ணத்தினுள் தொடுகையிலுள்ளன. அவைகளுக்கிடையேயுள்ள அழுத் தத்தைக் காண்க.

தீர்வு :

O ஐ மையமாகக் கொண்ட 3″ ஆரையுள்ள கிண்ணத் தினுள் A, B என்ற மையங்களைக் கொண்ட 1″ ஆரைக் கோளங் கள் படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளதுபோல் சமநிலையிலுள்ளன.

சிறுகோளங்க ளிரண்டும் வழவழப்பாகவும் சம அளவுடையனவாகவுமிருப்பதால், அவற்றின் தொடுபுள்ளி யாகிய E என்பது O-க்கு நேர் நிலைக்குத்தாகக் கீழே இருக்கும்.

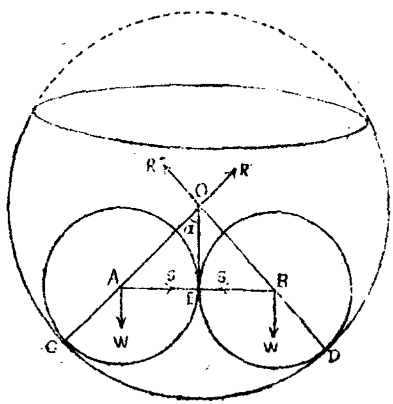
இரு கோளங்களும் பெரிய கோளத்தை உட்புறமாகத் தொடும் புள்ளிகளை C, D என்று குறிப்பிடுக.

$\angle AOE = \angle EOB = \alpha$ என்க.

கோளங்களில் செயல்படும் விசைகள் வருமாறு :

(1) *C, D* ஆகிய தொடுபுள்ளிகளில் *CA, DB* என்னும் ஆரைகளின் வழியே செயல்படும் பெரிய கோளத்தின் எதிர் விசை.

இரு சிறு கோளங்களும் சம அளவுடையனவாகவிருப்ப தால் இவ்விரு எதிர்விசைகளும் சம அளவினதாக இருக்கும். இச் சம எதிர்விசைகளை *R* என்று குறிப்பிடுக. மேலும், இச் சம எதிர்விசைகள் *C, D* வழியே பெரிய கோளத்தின் செங்கோடு



படம் 129

கள் வழியேயும் செயல்படுமாகையால் இவை பெரிய கோளத் தின் மையமாகிய *O* வழியேயும் செல்லும்.

(2) இரு சமகோளங்களின் சம எடைகள் *W, W* என்பன *A, B* வழியே நிலக்குத்தாகக் கீழ்நோக்கிச் செயல்படுகின்றன.

(3) இரு சிறு கோளங்களின் தொடுபுள்ளி வழியே பொதுத் தொடு தளத்திற்குச் செங்குத்தாக, அதாவது *AB* என்னும் மையக் கோட்டின் வழியே எதிரெதிர்த் திசைகளில் செயல்படும் உள்விசைகள். இரு கோளங்களும் சம அள வுடையனவாகையால் இவ்விரு உள்விசைகளும் சமமாகவும் எதிராகவும் செயல்பட்டு ஒன்றையொன்று விளைவு நீக்கம் செய்துவிடும்.

இப்பொழுது கோளம் *A*-யின் சமநிலையைக் கருதுக. இக் கோணத்தைச் சமநிலையில் வைத்திருக்கும் விசைகளாவன:

(அ) *A*-யில் அதன் எடை $W\downarrow$

(ஆ) *C*-யில் *CA* வழியாக பெரிய கோளத்தின் எதிர் விசை *R*.

(இ) E-யில் EA வழியாகக் கோளம் B-யின் அழுத்தம் S. இவ் விசைகளைக் கிடையாகவும், நிலைக்குத்தாகவும் விசைப் பிரிப்புச் செய்க.

$$R \sin \alpha = S,$$
$$R \cos \alpha = W$$
$$\therefore \; R = \frac{W}{\cos \alpha}$$
$$S = W \tan \alpha$$

$\triangle AEO$-விலிருந்து, $\tan \alpha = \frac{AE}{OE}$

ஆனால் $OC = 3''$; $AC = 1''$ $\therefore$ $OA = 2''$; $AE = 1''$

$$\therefore \; OE = \sqrt{OA^2 - AE^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$$

$\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ அல்லது, $\alpha = 30^\circ$

$$\therefore \; S = W \tan \alpha = \frac{W}{\sqrt{3}}$$

சிறுகோளங்களுக் கிடையேயுள்ள அழுத்தம் $\frac{W}{\sqrt{3}}$ ஆகும்.

மாதிரி 94: ஒவ்வொன்றும் W எடையும் r ஆரையும் கொண்ட வழவழப்பான இரு சமகோளங்கள், ஒரு கிடைத் தளத்தில் அச்சுநிலைக்குத்தாக இருக்குமாறு இருபுறமும் திறப்பாயுள்ள ஓர் உருளையினுள்ளே வைக்கப்பட்டுள்ளன. உருளையின் ஆரை a ($< 2r$ எனில்), இரு கோளங்களுக்குமிடையேயுள்ள எதிர்விசையைக் காண்க. உருளையின் எடை W' எனில், உருளையானது கவிழாமலிருப்பதற்கான நிபந்தனை $W' > 2W \left(1 - \frac{r}{a}\right)$ என்று காட்டு.

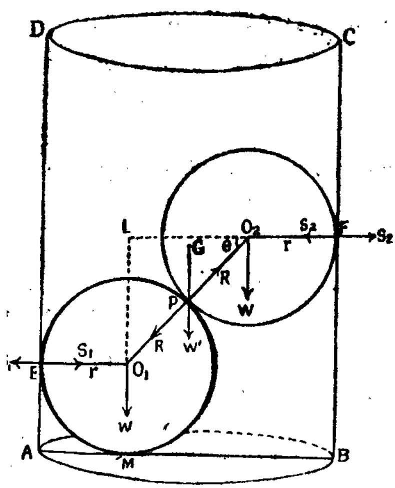
தீர்வு

$ABCD$ என்னும் உருளையானது கிடைத்தளத்தின்மேல் அதன் அச்சு GH நிலைக்குத்தாக இருக்குமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது. O_1, O_2ஐ மையங்களாகக் கொண்ட இரு கோளங்கள் ஒன்றின்மீதொன்று P என்னும் புள்ளியில் தொட்டுக்கொண்டிருக்குமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளன. இரு கோளங்களும் உருளையை E, F என்னும் புள்ளிகளில் தொடுகின்றன. இவ்விரு கோளங்களையும் சமநிலையில் வைத்திருக்கும் விசைகளாவன.

(1) O_1, O_2 என்ற மையங்களின் வழியே நிலைக்குத்தாகக் கீழ்நோக்கிச் செயல்படும் W, W என்னும் எடைகள்.

(2) E-யில் EO_1 வழியாகவும், O_1E வழியாகவும் செயல்படும் கோளம், உருளை ஆகியவற்றின் சம எதிரமுத்தங்களாகிய S_1, S_1.

(3) F-ல் FO_2 வழியாகவும், O_2F வழியாகவும் செயல்படும் கோளம், உருளை ஆகியவற்றின் சம எதிரமுத்தங்களாகிய S_2, S_2.



படம் 130

(4) இரு கோளங்களின் தொடுபுள்ளியாகிய P-யில் O_1O_2, O_2O_1 வழியே செயல்படும் சம எதிரமுத்தங்கள் R, R.

இரு கோளங்களின் மையக்கோடு கிடைக்கோட்டுடன் θ சாய்விலிருப்பதாகக் கொள்க. படத்திலிருந்து, உருளையின் விட்டம் $= EO_1 + LO_2 + O_2F$ என்று காண்கிறோம்.

அதாவது, $$2a = r + 2r\cos\theta + r$$

$$\therefore \quad a = r + r\cos\theta$$

அல்லது, $$r\cos\theta = a - r$$

$$\cos\theta = \frac{a-r}{r}$$

$$\sin^2\theta = 1 - \frac{(a-r)^2}{r^2}$$

$$= \frac{r^2-(a-r)^2}{r^2}$$

$$= \frac{2ar-a^2}{r^2}$$

அல்லது, $\sin\theta = \frac{\sqrt{2ar-a^2}}{r}$

இப்பொழுது, O_2 என்னும் கோளத்தின் சமநிலையைக் கருதுக.

இக் கோளத்தின் எடை W, FO_2 வழியே உருளையின் அழுத்தம் S_2, PO_2 வழியே O_1 உருளையின் எதிரழுத்தம் R ஆகிய விசைகள் இக் கோளத்தைச் சமநிலையில் வைத்திருக்கின்றன.

கிடைத்திசையிலும் நிலைக்குத்துத் திசையிலும் விசைப் பிரிப்புச் செய்க.

$$R\cos\theta = S_2; \quad R\sin\theta = W$$

$$\therefore \quad \frac{S_2}{W} = \cot\theta, \text{ அல்லது } S_2 = W\cot\theta$$

$$R = \frac{S_2}{\cos\theta} = \frac{W}{\sin\theta} = \frac{Wr}{\sqrt{2ar-a^2}}$$

ஆகவே, கோளங்களுக்கிடையேயுள்ள அழுத்தம் $\frac{Wr}{\sqrt{2ar-a^2}}$ ஆகும்.

இப்பொழுது, இருகோளங்களையும் ஒரு பொருளாகக் கருதி விசைப் பிரிப்புச் செய்க. (இருகோளங்களுக்குமிடையே யுள்ள R, R என்னும் சம எதிரழுத்தங்கள் ஒன்றையொன்று விளைவு நீக்கம் செய்துவிடுமென்பதைக் கருத்திற் கொள்க.)

$$S_1 = S_2$$

O_2 என்ற கோளம் மேலேயிருப்பதால், உருளையானது கவிழ்வதாயிருந்தால் B-யைச் சுற்றிக் கவிழும். ஆகவே, விசை S_2 ஆனது உருளையை B-யைச் சுற்றிக் கவிழ்க்க முயலும். அதே வேளையில் S_1-ம், உருளையின் எடை W'-ம் சேர்ந்து உருளை கவிழ்வதைத் தடுக்க முயலும்.

உருளையின் எடையாகிய W' அதன் அச்சின் வழியே ↓ செயல்படும். ஆகவே, உருளையானது கவிழாமலிருக்க

வேண்டுமாயின், S_1, W' ஆகியவற்றின் Bயைப் பற்றிய மொத்தத் திருப்புத்திறன், S_2இன் Bயைப் பற்றிய திருப்புத் திறனைவிட அதிகமாக யிருக்க வேண்டும்.

அதாவது,
$$S_1 . r + W' a > S_2 . BF$$
$$> S_2 . LM$$
$$> S_2 (LO_1 + O_1 M)$$
$$> S_2 (2 r \sin \theta + r)$$

ஆனால் $S_1 = S_2$ $\therefore S_2 r + W'.a > 2 s_2 r \sin \theta + s_2 r$
$$\therefore W'a > 2. S_2 r \sin \theta$$
$$> 2. W. \cot \theta. r. \sin. \theta$$
$$> 2 W r \cos \theta$$
$$> 2 Wr. \left(\frac{a-r}{r}\right)$$
$$> 2W (a-r)$$
$$\therefore W' > \left(\frac{a-r}{a}\right)$$
$$> 2 W \left(1 - \frac{r}{a}\right)$$

மாதிரி 95: பிறப்பிக்கும் கோடுகள் கிடையாகவுள்ள R ஆரையுடைய நிலையான உள்ளீடற்ற உருளையினுள்ளே r ஆரையுடைய இருசம உருளைகள் சமச் சீராக வைக்கப்பட்டுள்ளன. அவற்றிற்குச் சமமான மூன்ருவது உருளை யொன்று அவற்றின் மேல் சமச் சீராக வைக்கப்படுகிறது. $R < r (1 + 2\sqrt{7})$ ஆகயிருந்தாலொழிய சம நிலை சாத்தியமில்லை யென்று காட்டுக.

(சென்னை எம். எஸ்ஸி. 1968)

தீர்வு

O என்பது R ஆரையுடைய பெரிய உருளையின் குறுக்கு வெட்டுப் பகுதியின் மையம்.

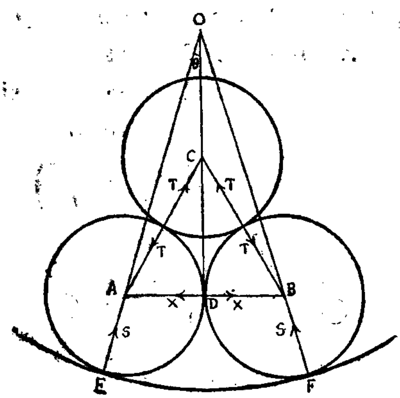
A, B, C என்பன பெரிய உருளையினுள்ளே சமச் சீராக அமைந்திருக்கும் மூன்று சம உருளைகளின் அதே தளத்துக் குறுக்கு வெட்டுப் பகுதிகளின் மையங்கள்.

$\therefore$ ABC என்பது $2 r$ நீளப் பக்கங்களைக் கொண்ட ஒரு சம பக்க முக்கோணமாகும்.

மூன்று சிறு உருளைகளின் எடைகளாகிய W, W, W என்பன A, B, C என்ற மையங்களின் வழியே ↓ செயல்படும்.

கீழேயுள்ள இரு உருளைகளும் பெரிய உருளையைத்தொடும் புள்ளிகளாகிய E, Fஇல் EA, FB வழியாகப் பெரிய உருளையின் சம எதிரமுத்தங்களாகிய S, S என்பன அவற்றின் பொதுத் தொடு கோட்டில் O என்னும் மையத்தில் சந்திக்கும்.

$$\angle EOC = \angle COF = \theta \text{ என்க.}$$



படம் 131

மூன்று உருளைகளையும் ஒரே பொருளாகக் கருதி நிலைக்குத்தாக விசைப் பிரிப்புச் செய்க.

சிறு உருளை ஒவ்வொன்றின் எடையும் W ஆதலின், மேல் நோக்கிய விசைக் கூறுகளாகிய $S \cos \theta$, $S \cos \theta$ என்பன கீழ் நோக்கிய விசைகளாகிய W, W, W ஆகியவற்றை ஈடு செய்கின்றன. (மூன்று உருளைகளும் ஒரே பொருளாகக் கருதப்படுவதால் அவற்றின் உள் எதிரமுத்தங்கள் ஒன்றையொன்று விளைவு நீக்கம் செய்து விடுமென்பதைக் கருத்திற்கொள்க.)

$$\therefore \quad 2S \cos \theta = 3W$$

அல்லது, $$S = \frac{3W}{2 \cos \theta}$$

$\triangle AOD$யில், $\tan \theta = \dfrac{AD}{OD}$

ஆனல் $AD = r;\ OD^2 = OA^2 - AD^2 = (R-r)^2 - r^2$

$$\therefore \quad \tan \theta = \frac{r}{\sqrt{(R-r)^2 - r^2}}$$

இப்பொழுது மேலேயுள்ள உருளையின் சம நிலையைக் கருதுக.

இதில் செயல்படும் விசைகளாவன.

(அ) Cயில் அதன் எடை $W\downarrow$

(ஆ) AC வழியே செயல்படும் உருளை Aயின் எதிர்விசை T.

(இ) BC வழியே செயல்படும் உருளை Bயின் எதிர்விசை T.

ABC ஒரு சமபக்க முக்கோணமாதலின்,

$$\angle ACB = 60^\circ \text{ அல்லது } \angle ACD = 30^\circ.$$

இப்பொழுது நிலைக்குத்தாக விசைப் பிரிப்புச் செய்க.

$$T\cos 30^\circ + T\cos 30^\circ = W$$

$$2T\frac{\sqrt{3}}{2} = W$$

$$\text{அல்லது, } T = \frac{W}{\sqrt{3}}$$

A, B ஆகிய கோணங்களுக்கிடையேயுள்ள எதிரமுத்தங்களை X, X என்க. உருளை A யின் சம நிலையைக் கருதுக.

இதில் செயல்படும் விசைகளாவன.

(i) Aயில் அதன் எடை $W\downarrow$

(ii) DA வழியே செயல்படும் Bயின் எதிரமுத்தம் X.

(iii) EA வழியே செயல்படும் பெரிய உருளையின் எதிரமுத்தம் S.

(iv) CA வழியே செயல்படும் Cயின் எதிரமுத்தம் T.

கிடைத்திசையில் விசைப் பிரிப்புச் செய்க.

$$X + T\cos 60^\circ = S\sin\theta.$$

$$\therefore\quad X = S\sin\theta - T\cos 60^\circ$$

$$= S\sin\theta - \frac{W}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2}.$$

$$= S\sin\theta - \frac{W}{2\sqrt{3}}.$$

$$\therefore\quad S\sin\theta - \frac{W}{2\sqrt{3}} > O.$$

$$\frac{3W}{2\cos\theta}\sin\theta - \frac{W}{2\sqrt{3}} > O.$$

$$3\tan\theta - \frac{W}{\sqrt{3}} \geqslant 0$$

$$3\sqrt{\frac{r}{(R-r)^2 - r^2}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{r}{\sqrt{(R-r)^2 - r^2}} \geqslant \frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

$$3\sqrt{3}\,r \geqslant \sqrt{(R-r)^2 - r^2}$$

$$27\,r^2 \geqslant (R-r)^2 - r^2$$

$$28\,r^2 \geqslant (R-r)^2$$

$$2\sqrt{7}\,r \geqslant R-r$$

$$r(1+2\sqrt{7}) \geq R$$

அல்லது, $R \leqslant r(1+2\sqrt{7})$

பயிற்சி 11

(1) ஒரு அங்குல ஆரையுள்ள கனமான இரு சம கோளங்கள் 3 அங்குல ஆரையுள்ள ஒரு வழவழப்பான கோளக் கிண்ணத்தினுள் சம நிலையிலிருக்கின்றன. இவ்விரு கோளங்களுக்கிடையேயுள்ள விசை 100 கி.கி. எடையெனில், கோளத்திற்கும் கிண்ணத்திற்குமிடையேயுள்ள விசை என்ன?

(2) 2 அங்குல ஆரையுள்ள கனமான இரு சமகோளங்கள் 6 அங்குல ஆரையுள்ள ஒரு வழவழப்பான அரைக்கோளக் கிண்ணத்தினுள் வைக்கப்பட்டுள்ளன. ஒரு கோளத்திற்கும் கிண்ணத்திற்குமிடையேயுள்ள அழுத்தம், இரு கோளங்களுக்கிடையேயுள்ள அழுத்தத்தைப் போல் இரு மடங்கு என்று காட்டு.

(3) ஆரை r-ம் எடை W-ம் கொண்ட வழவழப்பான இரு சம கோளங்கள் R ஆரையுள்ள ஒரு வழவழப்பான கோளக் கிண்ணத்தினுள் ஒன்றையொன்று தொட்டுக்கொள்ளும் நிலையில் வைக்கப்பட்டுள்ளன. அவைகளுக்கிடையேயுள்ள அழுத்தம் $\frac{Wr}{\sqrt{R^2 - 2Rr}}$ என்று காட்டு.

(4) ஆரை a-யும், எடை W-ம் கொண்ட வழவழப்பான இரு சம கோளங்கள் na ஆரையுள்ள ஒரு வழவழப்பான கோளக் கிண்ணத்தினுள் தொடுகையிலிருக்கின்றன. அவைகளுக்கிடையேயுள்ள அழுத்தம் யாது?

(5) 1 அங்குல ஆரையும், 4 கிராம் எடையும் கொண்ட, இரு பக்கமும் திறந்துள்ள உள்ளீடற்ற உருளையொன்று ஒரு வழவழப்பான கிடைத்தளத்தளத்தில் அதன் ஒரு முனையின் மேல் வைக்கப்பட்டுள்ளது. $\frac{3}{4}$ அங்குல ஆரையுள்ள இரண்டு சமமான கோள உருண்டைகள் அவ்வுருளையினுள்ளே வைக்கப்படுகின்றன. உருளை கவிழ்ந்து விடாத நிலையிலிருக்குமாயின், கோளங்களின் எடையைக் காண்க.

(6) வழவழப்பான மூன்று சம கோளங்கள் ஒரு வழவழப்பான கிடைத் தளத்தின்மேல் ஒன்றையொன்று தொட்டுக் கொண்டிருக்குமாறு வைக்கப்பட்டு, அவற்றின் மையங்கள் அமைந்துள்ள தளத்தில், அவற்றைச் சுற்றி ஒரு நூலினால் ஒன்றாக இறுக கட்டப்பட்டுள்ளன. நான்காவது சம கோளம் ஒன்று அவற்றின்மீது சமச் சீராக வைக்கப்பட்டால், நூலின் இழு விசைக்கும் சம கோளம் ஒன்றின் எடைக்கும் உள்ள விகிதம் $1:3\sqrt{6}$ என்று காட்டு.

(7) வழவழப்பான சமமான W எடையுள்ள மூன்று பென்சில்கள் ஒரு நூலினால் ஒன்றாகக் கட்டப்பட்டு, ஒரு வழவழப்பான மேசையின்மேல் வைக்கப்பட்டுள்ளன. மேசையின் மேல் தொடுகையிலுள்ள பென்சில்களுக் கிடையேயுள்ள அழுத்தம் P எனில் நூலின் இழு விசையைக் காண்க.

(8) கனமான ஒரே சீரான w எடையுள்ள மூன்று சம உருளைகள் ஒவ்வொன்றும் மற்ற இரண்டையும் தொட்டுக் கொண்டிருக்கும் நிலையில் ஒரு நூலினால் சுற்றிக் கட்டப்பட்டு, அவற்றின் அச்சுக்கள் கிடை நிலையிலிருக்குமாறு ஒரு வழவழப்பான மேசையின்மேல் வைக்கப்பட்டுள்ளன. உருளைகளின் புவி ஈர்ப்பு மையங்களின் வழியே செல்லும் நிலைக்குத்துத் தளத்தில் நூலிருப்பதாகக் கருதி, நூலின் இழு விசையை T என்று கொண்டு உருளைகளுக்கிடையேயுள்ள அழுத்தத்தைக் காண்க.

(9) அச்சு கிடையாகயிருக்குமாறு வைக்கப்பட்டுள்ள R ஆரையுள்ள ஒரு நிலையான உள்ளீடற்ற உருளையினுள்ளே r ஆரையுள்ள வழவழப்பான இரு சம உருளைகள் சமச் சீராக வைக்கப்பட்டுள்ளன. சம ஆரையும், இரு மடங்கு எடையும் கொண்ட மூன்றாவது உருளையொன்று அவ்விரு உருளைகளின் மேல் எல்லா உருளைகளின் அச்சுக்களும் இணையாக இருக்குமாறு சமச்சீருடன் வைக்கப்படுகிறது. $R>r(1+\sqrt{13})$ எனில்,

மூன்ருவது உருளை, மற்ற இரு உருளைகளும் விலகிக் கொள்ளத் தக்க விசையுடன் அவற்றை அழுத்துமென்று நிறுவுக.

(10) a_1, a_2 ஐ ஆரைகளாகக் கொண்ட இரு கோளங்கள் உள் ஆரை bயும் ($b<a_1+a_2$), வெளி ஆரை c யும் கொண்ட ஒரு வழவழப்பான உள்ளீடற்ற நிலைக்குத்து உருளையினுள்ளே வைக்கப்பட்டு ஓய்வு நிலையிலிருக்கின்றன. மேலேயுள்ள கோளத்தின் எடை W எனில், உருளையின் எடை $\frac{W}{c}$ $(2b-a_1-a_2)$ஐ விட அதிகமாகயிருப்பின் அது கவிழாதென்று நிறுவுக.

(11) w எடையுள்ள இரண்டு சமமான கோல்கள் தாராள மாக நகரக்கூடியவாறு முனைகளில் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. அவற்றின் மறு முனைகள் ஒரு நிலையான புள்ளியுடன் நூற்களி ளுல் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. r ஆரையும் W எடையுமுள்ள ஒரு வட்டத் தகடு கோல்களுக்கிடையேயுள்ள கோணத்தில் ஓய்வு நிலையாயிருக்கின்றது. இத் தொகுதி முழுவதும் ஒரு நிலைக் குத்துத் தளத்தில் தொங்குகிறது. கோல், நூல் ஆகியவை ஒவ் வொன்றின் நீளம் $2a$ யும் கோல்களுக்கிடையேயுள்ள கோணம் 2θ வும் இருந்தால், $r = 2a\,\frac{(3w+2W)}{W}\,\sin_2\theta\tan\theta$ என்று நிரூ பிக்கவும்.

(12) $4a$ நீளமுள்ள AC என்னும் கனமான சீரான கோல் ஒன்று A யில் பிணையல் செய்யப்பட்டுள்ளது. AC என்பது a ஆரையுடைய ஒரு கோளத்தைத் தாங்கிக் கொண்டிருக்கும் a நீளமுள்ள ஒரு நூல். கோளம், கோல் ஆகிய ஒவ்வொன்றும் 8 கி.கி. எடையுள்ளதாகவும் ஒன்றையொன்று தொட்டுக்கொள் வதாகவுமிருந்தால் நிலைக்குத்துடன் கோலின் சாய்வையும், நூலின் இழு விசையையும் காண்க.

(13) $2a$ நீளமும் W எடையுமுள்ள AB என்னும் சீரான கோலொன்று Aயிலுள்ள ஒரு வழவழப்பான பிணையலைச் சுற்றி ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் நகரக் கூடியதாகயிருக்கிறது. r ஆரையும், W எடையுமுள்ள வழவழப்பான கனமான கோளம் ஒன்று பிணையலுடன் l நீள நூலினுல் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இவ்விரு பொருட்களும் ஒன்றையொன்று தொட்டுக்கொண்டு ஓய்வு நிலையிலிருக்கின்றன. நிலைக்குத்துடன் நூல், கோல்

ஆகியவற்றின் சாய்வுகள் முறையே α, β எனில், $(r+l)\sin(\alpha+\beta)=r$ என்றும், $\sin\alpha = \dfrac{Wa}{W(l+r)}\sin\beta$ என்றும் நிறுவுக.

(14) ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்திலுள்ள AB, AC என்னுமிரு நிலையான கோல்கள் ஒவ்வொன்றும் நிலைக்குத்துடன் $30°$ கோணச் சாய்விலுள்ளன. இக் கோல்களின் மீது நழுவிச் செல்லக்கூடிய w எடையுள்ள இரு வளையங்களுடன் ஒரு நூலின் இரு முனைகளும் கட்டப்பட்டுள்ளன. நூலின் நடுப் புள்ளிகளிலிருந்து W என்னும் ஒரு எடை தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. சம நிலையில் நூலின் ஒவ்வொரு பாதியும் நிலைக்குத்துடன் θ கோணச் சாய்விலிருந்தால், $\tan\theta = \dfrac{\sqrt{3}\,(W+2w)}{W}$ என்று நிறுவுக.

(15) ஒரு நிலைக் குத்துத் தளத்திலுள்ள AB, AC என்னுமிரு நிலையான கோல்கள் ஒவ்வொன்றும் நிலைக்குத்துடன் $30°$ கோணச் சாய்விலுள்ளது. இக் கோல்களின் மீது நழுவிச் செல்லக்கூடிய W, எடையுள்ள இரு வளையங்களுடன் ஒரு நூலின் இரு முனைகளும் கட்டப்பட்டுள்ளன. நூலின் நடுப் புள்ளியிலிருந்து W_2 என்னும் ஒரு எடை தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. சம நிலையில் நூலின் ஒவ்வொரு பாதியும் நிலைக்குத்துடன் θ கோணச் சாய்விலிருந்தால், $\tan\theta = \left(1+\dfrac{2W_1}{W_2}\right)$ என்று நிறுவுக.

இணைக்கப்பட்ட பொருட்களின் சமநிலை

மாதிரி 96 : AB, AC என்னும் இரு சமநீளக் கோல்கள் Aயில் ஒரு பிணையிலினால் இணைக்கப்பட்டு அவற்றின் முனைகள் Bயும் Cயும் ஒரு வழவழப்பான கிடைத்தளத்திலிருக்குமாறு ஒரு நிலைத்தளத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ளன. அவற்றின் இந்த அமைப்புக் குலைந்துவிடாமல் Bயும் Cயும் கோல்களின் நடுப் புள்ளிகளுடன் கயிறுகளினால் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. கோல்களின் கிடைத்தளச் சாய்வு θ எனில், ஒவ்வொரு கயிற்றின் இழுவிசைக்கும் கோலின் எடைக்குமுள்ள விகிதல் $\frac{1}{8}\sqrt{1+9\cot^2\theta}$ என்று காட்டுக.

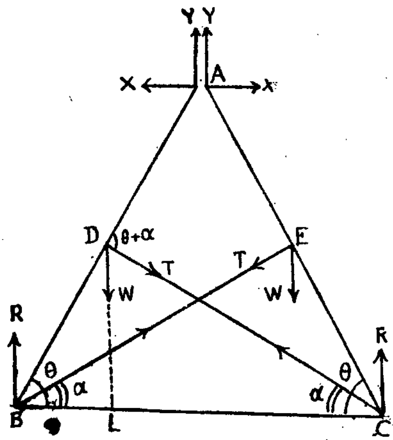
தீர்வு

$AB=AC=2a$ என்க.

D, E என்பன AB, AC ஆகிய கோல்களின் நடுப்புள்ளிகளெனில், $BD=DA=a$; $CE=EA=a$. BE, CF என்பன கயிறு

கள். *D*, *E* வழியே கோல்களின் எடைகளான *W*, *W* என்பன ↓ செயல்படுகின்றன. *DC*, *EB* ஆகிய கயிறுகளின் வழியே *T*, *T* என்னும் இழுவிசைகள் செயல்படுகின்றன.

இரு கோல்களும் *A*யில் பிணையலின் மூலம் இணைக்கப்பட்டிருப்பதால், *A*யில் கோல்கள் ஒவ்வொன்றும் மற்ற தன்மீது அழுத்திக் கொண்டிருக்கும். இவ்வழுத்தத்தின் கிடைத்திசை • நிலைக்குத்துக் கூறுகளை *X*, *Y* என்று குறிப்பிடுக.



படம் 132

கிடைத்தளத்துடன் ஒவ்வொரு கயிற்றின் சாய்வும் θ என்க கிடைத்தளத்துடன் ஒவ்வொரு கோலின் சாய்வு = θ.

$$\triangle\ BDC\text{யிலிருந்து, } \angle ADC = \angle DBC + \angle DCB = (\theta + \alpha)$$
$$ABE = (\theta - \alpha)$$

DL ⊥ *BC* வரைக.

$$\triangle\ DLC\text{யிலிருந்து, } \tan\alpha = \frac{DL}{LC} = \frac{BD\sin\theta}{BC - BL} = \frac{a\sin\theta}{4a\cos\theta - a\cos\theta}$$
$$= \frac{a\sin\theta}{3a\cos\theta}$$
$$= \tfrac{1}{3}\tan\theta.$$

இரு கோல்களையும் ஒரே பொருளாகக் கருதி நிலைக்குத்தாக விசைப் பிரிப்புச் செய்க.

B, *C* ஆகியவற்றில் கிடைத்தளத்தின் எதிர்விசை கிடைத் தளத்திற்குச் செங்குத்தாகச் செயல்படும். கோல்கள் சமமான

வையாதலால், இவ்வெதிர் விசைகளும் சமமாயிருக்கும். இச்சம எதிர்விசைகள் R எனில்,

$$2R = 2W \quad \text{அல்லது} \quad R = W.$$

இப்பொழுது கோல் ABருன் சமநிலையைக் கருதுக.

Aஐப் திருப்புத்திறன் காண்க.

BE வழி $T.\ 2a\sin(\theta-\alpha) + DC$ வழி $T.\ a\sin(\theta+\alpha) + W.\ a\cos\theta = R.\ 2a\cos\theta.$

அதாவது, $T.\ 2a\ (\sin\theta\cos\alpha - \cos\theta\sin\alpha) + T.\ a\ (\sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha)$

$$= W.\ 2a\cos\theta - W.\ a\cos\theta\ (\because\ R = W)$$

$$T.\ a\ (3\sin\theta\cos\alpha - \cos\theta\sin\alpha) = W.\ a\cos\theta$$

அல்லது,
$$T = \frac{W\cos\theta}{3\sin\theta\cos\alpha - \cos\theta\sin\alpha}$$
$$= \frac{W}{3\tan\theta\cos\alpha - \sin\alpha}$$

ஆனால், $\tan\alpha = \frac{1}{3}\tan\theta$ ஆகையால்,

$$\sin\alpha = \frac{\tan\theta}{\sqrt{9+\tan^2\theta}}, \quad \cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{9+\tan^2\theta}}$$

$$\therefore\ T = \frac{W}{3\tan\theta.\dfrac{3}{\sqrt{9+\tan^2\theta}} - \dfrac{\tan\theta}{\sqrt{9+\tan^2\theta}}}$$

$$= \frac{W\sqrt{9+\tan^2\theta}}{9\tan\theta - \tan\theta}$$

$$= \frac{W\sqrt{9+\tan^2\theta}}{8\tan\theta}$$

$$= \frac{W}{8}\sqrt{9\cot^2\theta + 1}$$

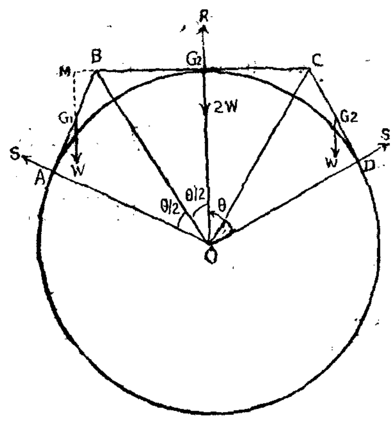
$$\therefore\ \frac{T}{W} = \frac{1}{8}\sqrt{1+9\cot^2\theta}$$

மாதிரி 97 : AB, BC, CD என்பன ஒரே மாதிரியான பருமனுள்ள l, $2l$, l நீளங்களுடைய சீரான கோல்கள். இவை

A, C என்ற முனைகளில் வழவழப்பான பிணையல்களினல் இணைக்கப்பட்டு $2l$ ஆரையுள்ள முற்றிலும் வழவழப்பான ஒரு கோணத்தின்மேல் ACயின் நடுப்புள்ளியும், A, D ஆகிய முனை களும் கோளத்துடன் தொடுகையிலிருக்குமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளன. ACயின் நடுப்புள்ளியின் மேலுள்ள அழுத்தம் கோல்களின் எடையைப்போல் $\frac{91}{100}$ மடங்கு என்று காட்டு.

தீர்வு

O என்பது கோளத்தின் மையம். G_1, G_2, G_3 என்பன முறையே AB, AC, CD ஆகிய கோல்களின் நடுப்புள்ளிகள் (புவியீர்ப்பு மையங்கள்)



படம் 133

கோல்களின் நீளங்கள் முறையே l, $2l$, l ஆதலின் மூன்றும் ஒரே சீரான கோல்களாகையால் அவற்றின் எடைகளை W, $2W$, W என்று கொள்க. இவ்வெடைகள் முறையே G_1, G_2, G_3 வழியே ↓ செயல்படும்.

G_2 வழியே செயல்படும் $2W$ என்னும் எடையானது கோளத்தின் தொடுபுள்ளிவழியே AC என்னும் தொடுகோட்டிற்குச் செங்குத்தாகச் செயல்படுமாகையால், O வழியே செல்லும்.

A, G_2, D ஆகிய தொடு புள்ளிகளில் கோளத்தின் எதிர்முத்தங்கள் அப்புள்ளிகளின் வழியே செல்லும் ஆரைகளின் வழியே வெளி நோக்கிச் செயல்படும். இவற்றுள் A யிலும் Dயிலும் எதிர்முத்தங்கள் சமமாக யிருக்கும். இவ்வெதிர்முத்தங்

களை S என்று குறிப்பிடுக. G_2வில் OG_2 வழியே செயல்படும் எதிரமுத்தத்தை R என்று குறிப்பிடுக.

$\angle DOG = \theta$ என்க. சமச்சீர்காரணமாக, $\angle ADG_2 = \theta$

$$\therefore \quad \angle AOB = \angle BOG = \frac{\theta}{2}$$

$AB = l$; $BC = 2l$; $CD = l$, ஆகவே, $BG_2 = G_2C = l$.

$OA = OG_2 = OD =$ கோளத்தின் ஆரை $= 2l$

$\triangle AOB$யில், $\angle OAB = 90°$. $\therefore \tan\frac{\theta}{2} = \frac{AB}{OA} = \frac{l}{2l} = \frac{1}{2}$.

மூன்று கோல்களையும் ஒரே பொருளாகக் கருதிச் சம நிலை காண்க. எனவே, A, C ஆகிய பிணையல்களிலுள்ள எதிர்விசைகள் ஒன்றையொன்று விளைவு நீக்கம் செய்துவிடும். ஆகவே, செயல்படும் விசைகளாவன.

(i) Aயில் OA திசையில் செயல்படும் வெளிநோக்கிய அழுத்தம் S.

(ii) G_2வில் வெளிநோக்கிச் செயல்படும் அழுத்தம் R.

(iii) Dயில் வெளிநோக்கிச் செயல்படும் அழுத்தம் S.

(iv) G_1 இல் $\downarrow$ செயல்படும் எடை W

(v) G_2வில் $\downarrow$ செயல்படும் எடை $2W$

(vi) G_3இல் $\downarrow$ செயல்படும் எடை W

நிலைக்குத்தாக விசைப் பிரிப்புச் செய்க.

$$2S\cos\theta + R = 4W \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

கோல் ABயின் சமநிலையை மட்டும் கருதி Bஐப் பற்றிய திருப்புத்திறன் காண்க.

$$S.\,AB = W.\,BM$$

ஆனால், $\angle G_1AG_2 = (180° - \theta)$ ஆகையால், $\angle G_1BM = \theta$

$$\therefore \quad S.\,l = W\frac{l}{2}\cos\theta$$

அல்லது, $S\,W = \frac{W}{2}\cos\theta \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$

(1) இலிருந்து, $2\left(\frac{W}{2}\cos\theta\right)\cos\theta + R = 4W$

$$W\cos^2\theta + R = 4W$$

$$R = 4W - W\cos^2\theta$$

$$= 4W - W\left(\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}\right)^2$$

$$= 4W - W\left(\frac{1-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}}\right)^2$$

$$= 4W - W.\left(\frac{3}{5}\right)^2$$

$$= 4W - \frac{9}{25}W$$

$$= \frac{91}{25}W$$

$$= \frac{91}{100}(4W)$$

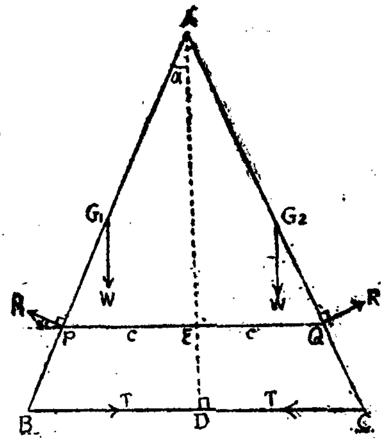
$= \frac{91}{100}$ மூன்று கோல்களின் மொத்த எடை).

மாதிரி 98 : ஒவ்வொன்றும் W எடையும் $2a$ நீளமும் கொண்ட இரு சீரான பட்டைகள் பொதுவான ஒரு முனையில் தாராளமாக நகரக்கூடிய வகையில் இணைக்கப்பட்டு, $2c$ இடைவெளியில் ஒரே கிடைக்கோட்டிலமைந்துள்ள இரு முனைகளின் மேல் வைக்கப்பட்டுள்ளன. பட்டைகளுக்கிடையேயுள்ள கோணம் 2α ஆகயிருக்குமாறு அவற்றின் மற்ற இரு முனைகளும் ஒரு கயிற்றினால் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. கயிற்றின் இழுவிசை $\frac{1}{2}W\cos\alpha\,\mathrm{cosec}^2\alpha\left(\frac{c}{a}-\sin^3\alpha\right)$ என்று காட்டுக.

AB, AC என்னும் இரு பட்டைகள் Aயில் ஒரு பிணையலினால் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. $AB = BC = 2a$. ஒவ்வொன்றின் எடையும் W. G_1, G_2 என்பன் கோல்களின் நடுப்புள்ளிகள். இவற்றின் வழியே W, W என்னும் அவற்றின் எடைகள் ↓ செயல்படும். P, Q என்பன $2c$ இடைவெளியில் கிடைக்கோட்டிலமைந்துள்ள இரு முளைகள். முனைகள் Bயும் Cயும் ஒரு கயிற்றினால் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. கயிற்றில் BCஐ நோக்கியும், CBஐ நோக்கியும் சம இழு விசைகள் T, T என்பன செயல்படும். இரு பட்டைகளும் சமமாகவும், சமச்சீராகவுமிருப்பதால் P, Q ஆகிய இரு முளைகளிலும் எதிர்விசைகள் சமமாக,

கோல்களுக்குச் செங்குத்துத் திசைகளில் செயல்படும். இச் சம எதிர்விசைகளை R என்று குறிப்பிடுக.

D என்பது BC யின் நடுப்புள்ளி. ADஐச் சேர்க்கவும். $AB = AC$ ஆகையால், $AD \perp BC$ ஆகும்.



படம் 134

$BAC = 2x$ (கொடுக்கப்பட்டுள்ளது) $\because BAD = DAC = \alpha$. இரு பட்டைகளையும் ஒருபொருளாகக் கருதிச்சமநிலைக் காண்க. எனவே, பிணையல் A யிலுள்ள எதிரழுத்தங்களும், கயிற்றிலுள்ள எதிர் இழுவிசைகளும் விளைவு நீக்கம் பெற்றுவிடும்.

நிலைக்குத்தாக விசைப்பிரிப்புச் செய்க.

$2R \sin \alpha = 2W$

அல்லது, $R = \dfrac{W}{\sin \alpha} = W \operatorname{cosec} \alpha.$

இப்பொழுது பட்டை ABயின் சம நிலையை மட்டும் கருதுக.

Aஐப்பற்றிய திருப்புத்திறன்கள் காண்க.

$T.\ AD + W.\ AG, \sin \alpha = R.\ AP.$

$T.\ AB \cos \alpha + W.\ AG, \sin \alpha = R\ c \operatorname{cosec} \alpha.$

$T.\ 2a \cos \alpha + W.\ a \sin \alpha = W \operatorname{cosec} \alpha\ c \operatorname{cosec} \alpha.$

$T.\ 2a \cos \alpha = W\ c \operatorname{cosec}^2 \alpha - W\ a \sin \alpha$

$= W (c \operatorname{cosec}^2 \alpha - a \sin \alpha)$

$$\perp = \frac{W}{2a \cos \alpha} (c \operatorname{cosec}^2 \alpha - a \sin \alpha)$$

$$= \frac{W}{2a} \sec \alpha . \operatorname{cosec}^2 \alpha (c - a \sin^3 \alpha)$$

$$= \frac{W}{2} \sec \alpha . \operatorname{cosec}^2 \alpha \left(\frac{c}{a} - \sin^3 \alpha \right)$$

பயிற்சி 12

(1) b நீளமுள்ள AB, AC என்னும் இலேசான இருசமநீளக் கோல்கள் Aயில் ஒரு கீலினுல் தாராளமாக இணைக்கப்பட்டு, B, C ஆகிய முனைகளில் W, W என்னும் சம எடைகளைத் தாங்கிக் கொண்டிருக்கின்றன. அவை a ஆரையிள்ள ஒரு வழ வழப்பான நிலையான கோளத்தின்மேல் ஓய்வு நிலையிலிருக் கின்றன. சமநிலையில் நிலைக்குத்துடன் கோல்களின் சாய்வு θ எனில்.

$$b \sin^3 \theta = a \cos \theta$$

என்று காட்டுக.

(2) a நீளமுள்ள கனமான, சீரான இரு கோல்கள் ஒரு வழ வழப்பான பிணையலினுல் ஒன்ருக இணைக்கப்பட்டு ஒரே கிடைக் கோட்டில் c இடைவெளியிலிருக்கும் வழவழப்பான இரு முனைகளின்மேல் சமச்சீராக வைக்கப்பட்டுள்ளன. சம நிலையில் நிலைக்குத்துடன் ஒவ்வொரு கோலின் சாய்வும் $\cos^{-1} \left(\frac{c}{a} \right)^{1/3}$ என்று காட்டு.

(3) W எடையுள்ள AB, AC என்னும் சமமான இரு கோல் கள் Aயில் ஒரு பிணையலினுல் இணைக்கப்பட்டு முனைகள் Bயும் Cயும் ஒரு வழவழப்பான கிடைத்தளத்தின் மேலிருக்குமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளன. ACயின் நடுப்புள்ளியுடன் முனை B ஒரு கயிற்றினுல் கட்டப்பட்டு அவை நிலைநிறுத்தப்பட்டுள்ளன. சமநிலையில் ABC ஒரு சமபக்க முக்கோணமாகின்றது. இழு விசை $\frac{1}{2} W$ என்று காட்டு.

(4) AB, AC என்னும் சமநீளமுள்ள சீரான கோல்கள் Aயில் தாராளமாக நகரக் கூடியவாறு இணைக்கப்பட்டுள்ளன இத் தொகுதி Bயில் ஒரு நூலினுல் கட்டப்பட்டு புவியீர்ப்பு விசையின் கீழ் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. ஒவ்வொரு கோலின்

எடையும் $2W$. சமநிலையில் இரு கோல்களுக்குதுடையேயுள்ள கோணம் 2α எனில், நூலின் இழுவிசை $\frac{3W \sin \alpha}{\sqrt{1+3 \sin^2 \alpha}}$ என்று காட்டுக.

(5) ஒரு ஏணிப்படி A என்ற எழுத்தின் வடிவத்திலுல்ளது. அதன் ஒவ்வொருகாலும் நிலைக்குத்துதுன் α கோணத்தில் சாய்ந்துள்யது, அதன் கால்களின் நடுப்புள்ளிகளிரண்டும் ஒரு கயிற்றினல் கட்டப்பட்டு ஒரு கிடைத்தளத் தரையின்மேல் நிறுத்திவைக்கப்பட்டுள்ளது. எங்கேயும் உராய்வு இல்லையென்று கொண்டு, W என்னும் ஒரு எடை தரையிலிருந்து ஏணியின் உயரத்தைப்போல் $\frac{1}{n}$ உயரத்தில் ஒரு படியில் வைக்கப்பட்டால், கயிற்றின் இழுவிசை $\frac{1}{n} W \tan \alpha$ அதிகமாகுமென்று காட்டு.

(6) AB, BC, CD என்னும் மூன்று சமநீளக் கோளங்கள் B. C என்னும் முனைகளில் தாராளமாக இணைக்கப்பட்டுள்ளன. AB, CD என்ல கோல்கள் ஒரே கிடைக் கோட்டின் மேலுள்ள வழவழப்பான இரு முனைக்ளின்மேல், BC கிடையாகயிருக்குமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளன. நிலைக்குத்துடன் ABயின் சாய்வு α, கிடைத்தளத்துடன் Bயிலுள்ள எதிர்விசையின் சாருவு β எனில், $3 \tan \beta = \tan \alpha$ என்று காட்டுக,

(7) AB, BC என்னும் இருசம நீளக் கோல்கள் Bயில் வழவழப்பாக இணைக்கப்பட்டுள்ளன. அவற்றின் நடுப்புள்ளிகள் ஒரு மீளியல்பற்ற நூலினல் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. நூல் விறைப்பாகயிருக்கும்போது $\angle ABC = 90°$ ஆகயிருக்குமாறு நூலின் நீளமுள்ளது. இத்தொகுதியானது Aயிலிருந்து தொங்க விடப்பட்டுள்ளது. நிலைக்குத்துடன் ABயின் சாய்வு $\tan^{-1} \frac{1}{3}$ என்றும் நூலின் இழுவிசை $\frac{3W}{\sqrt{3}}$ என்றும் காட்டுக.

(8) ஒல்வொன்றும் W எடையுள்ள AB, AC என்னுமிரு சமமான சீரான கோல்கள் Aயில் வழவழப்பாக இணைக்கப்பட்டு, B, C ஆகிய முனைகள் ஒரு வழவழப்பான மேசையின் மேலிருக்குமாறு நிலைத் தளத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ளன. ABயின் நடுப்புள்ளியுடன் C ஒரு நூலினல் இணைக்கப்பட்டு, சம நிலை வைக்கப்பட்டுள்ளது. நிலைக்குத்துடன் ஒவ்வொரு கோலின்

சாய்வும் α எனில், நூலின் இழுவிசை, Aயில் கோல்களின் எதிர் விசை ஆகிய ஒவ்வொன்றும் $\frac{W}{4}$ cosec $\alpha\sqrt{1+8\cos^2\alpha}$ என்றும் கிடைத்தளத்துடன் ஒவ்வொன்றின் சாய்வும் $\tan^{-1}(\frac{1}{3}\tan\alpha)$ என்றும் காட்டுக.

9. ABC என்பது தாராளமாக இணைக்கப்பட்ட மூன்று கோல்களினாலான ஒரு முக்கோணம். $AB: AC: BC = 3: 4: 5$. முக்கோணம் Aயிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டு W, $2W$ என்னும் எடைகள் முறையே B, Cயிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டுள்ளன. கிடைத்தளத்துடன் ABயின் சாய்வு $\tan^{-1}\frac{3}{8}$ என்று காட்டுக.

(10) W எடையுள்ள மூன்று சமமான, சீரான கோல்கள் ABC என்னும் சமபக்க முக்கோணமாக அமையுமாறு வழவழப்பாக இணைக்கப்பட்டுள்ளன. இந்த முக்கோணம் BCயின் நடுப்புள்ளியிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. Aயிலுள்ள பிணையலின் எதிர்விசை $\frac{\sqrt{3}\,W}{6}$ என்று காட்டு.

(11) மூன்று இலேசான கோல்கள் வழவழப்பாக இணைக்கப்பட்டு ABC என்னும் முக்கோணமாக அமைந்துள்ளன. D என்பது Aயிலிருந்து BCக்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் பாதம். T என்னும் இழுவிசையுடன் ஒரு நூல A, Dஐ இணைக்கிறது. AB, AC ஆகிய கோல்களின் அழுத்தங்கள் முறையே T cosec A cos C, T cosec A cos B என்று காட்டுக.

(12) AB, AC என்பன Aயில் வழவழப்பாக இணைக்கப்பட்ட a நீளமுள்ள ஒரே மாதிரியான இரண்டு சீரான கோல்கள் BD என்பது Bயில் வழவழப்பாக இணைக்கப்பட்ட b நீளமுள்ள எடையில்லாத ஒரு குச்சி. ACயில் நழுவிச் செல்லக்கூடிய ஒரு வழவழப்பான வளையம் Dயில் கட்டப்பட்டுள்ளது. இச்சட்டம் Aயில் ஒரு வழவழப்பான ஊசியிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. நிலைக்குத்துடன் கோலின் சாய்வு $\tan^{-1}\frac{b}{a+\sqrt{a^2-b^2}}$ என்று காட்டுக.

(13) W எடையும் $2a$ நீளமுள்ள இரண்டு சமமான கனமான கோல்கள் வழவழப்பாக இணைக்கப்பட்டு, r ஆரையுள்ள ஒரு வழவழப்பான நிலையான கோளத்தின்மேல் சமச்சீருடன்

வைக்கப்பட்டுள்ளது. நிலைக்குத்துடன் ஒவ்வொரு கோலின் சாய்வும் θ எனில்,

$$r \cot \theta\,(1+\cot^2\theta)=a$$

என்று காட்டுக.

(14) AB என்பது $2a$ நீளமும், λW எடையுமுள்ள ஒரு நேரான கோல், அதன் கீழ் முனை A யானது AC என்னும் நிலைக் குத்துச் சுவரின் அடியில் தரையின்மேல் நிற்கிறது. Bயும் Cயும் Aக்கு மேலே $2b$ உயரத்திலுள்ளன. W எடையுள்ள ஒரு கன மான வளையம், B, Cஐ இணைக்கக்கூடிய $2l$ நீளமுள்ள ஒரு நூலில் தாராளமாக நகரக்கூடியதாயிருக்கின்றது வளையம் நூலின் நடுப்புள்ளியிலிருக்கும்போது அவை சம நிலை யிலிருந்தால்

$$l^2=a^2-\frac{b^2\lambda\,(\lambda+2)}{(\lambda+1)^2}$$

என்று காட்டுக.

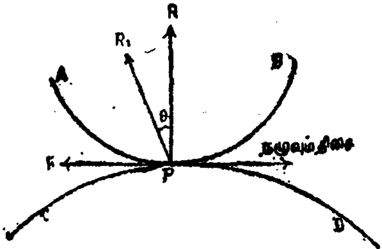
(15) $2a$ நீளமும் W எடையும் கொண்ட ஒரு சீரான கோல் அதன் முனைகளில் $2\,b$ நீளமுள்ள நூலின் நுனிகளினால் கட்டப் பட்டுள்ளது. அந்த நூலானது ஒரு வழவழப்பான நிலைக்குத் துச் சுவரின்மீது பொருத்தப்பட்டுள்ள C என்னும் ஒரு வழவழப் பான வளையத்தின் வழியே செல்கிறது. கோலானது ஒரு நிலைத் தளத்தில் முனை A யானது Cக்கு நேர் நிலைக்குத்தாகக் கீழே யிருக்குமாறு சுவருக்குச் செங்குத்தாக வைக்கப்பட்டுள்ளது. சம நிலையில் A யானது Cக்குக் கீழே $\sqrt{b^2-a^2}$ தூரத்திலிருக்கு மென்றும் நூலின் இழுவிசை $\frac{1}{2}\;W\;\left[\frac{2b}{\sqrt{b^2-a^2}}-\right]$ என்றும் காட்டுக.

6. உராய்வு
(FRICTION)

இரு வழவழப்பான பொருட்கள் ஒன்றையொன்று தொட்டுக்கொண்டு சம நிலையிலிருந்தால் அவற்றிற்கிடையே எதிர் விசைகள் செயல்படுமென்றும் இவ்வெதிர் விசைகள் அப்பொருட்களின் தொடுபுள்ளி வழியே தொடு தளத்திற்குச் செங்குத்துத் திசையில் செயல்படுமென்றும் கண்டோம். இத்தகைய எதிர்விசைகள் "செங்குத்து எதிர் விசைகள்" (Normal Reactions) என்றழைக்கப்படுகின்றன. ஆனால், ஒன்றையொன்று தொட்டுக்கொண்டிருக்கும் வழவழப்பற்ற பொருட்களுக்கிடையே செயல்படும் எதிர்விசையானது தொடுதளத்திற்கு நேர்குத்துத் திசையில் செயல்படாமல் சற்றுத் திரும்பிய திசையில் செயல்படும். இதற்குக் காரணம் அப்பொருட்களின் வழவழப்பற்ற உராய்வுத் தன்மையேயாகும். இத்தகைய உராய்வுத் தன்மையுடைய பொருட்களுக்கிடையே செயல்படும் எதிர்விசைகளைப் பற்றியும், அவ்வுராய்வுத் தன்மைபற்றியும் இங்கு ஆராய்வோம்.

AB என்னும் பொருள் CD என்னும் பொருளின்மேல் P என்னும் புள்ளியில் தொட்டுக்கொண்டு சம நிலையிலுள்ளது. பொருட்களிரண்டும் வழ வழப்பாகயிருப்பின் அவற்றிற்கிடையே செயல்படும் எதிர்விசை P வழியே தொடுபுள்ளித் தளத்திற்குச் செங்குத்தாகச் செயல்படும். ஆனால் பொருட்களிரண்டும் வழவழப்பின்றி சற்று உராய்வுத் தன்மையுடையதாகவும் ஒன்றின்மீதொன்று நழுவும் நிலையிலுமிருப்பின், பொருள் AB நழுவ முயலும் திசைக்கு எதிர் திசையில் உராய்வுத் தன்மையின் காரணமாக ஒரு விசை செயல்பட்டு அப்பொருளைச் சம நிலையில் வைத்திருக்கும். இதன் காரணமாகப் பொருள் ABயின் மேல் பொருள் CDயின் எதிர் விசையானது P வழித் தொடுபுள்ளித் தளத்திற்குச் செங்குத்துத் திசையிலில்லாமல்

சற்று மாறிய திசையில் செயல்படும். உண்மையில் பொருள் CD மீது பொருள் ABயின் அழுத்த விசையும், பொருள் ABயின் மீது பொருள் CDயின் எதிரழுத்த விசையும் ஒன்றையொன்று விளைவு நீக்கம் செய்து விடுவதால் பொருட்கள் சம நிலையி லிருக்க முடிகிறது. இவ்வெதிர்விசையானது அளவும் திசையும் தெரியாத ஒரு விசையாகும். இவ்வெதிர்விசையை R_1 என்றும், தொடுபுள்ளி வழி நேர்குத்துடன் அதன் திசையின் சாய்வை



படம் 135

θ என்றும் கொள்க. இவ்வெதிர்விசை R_1ஐ நேர்குத்துக் கோட்டின் வழியாகவும், பொதுத்தொடு கோட்டின் வழியாகவும் இறு கூறுகளாகப் பிரிக்கலாம். பொது நேர்குத்துக் கோட்டு வழிப் பிரிவை F என்றும் குறிப்பிடுவோம்.

$$\therefore \quad R = R_1 \cos\theta, \quad F = R_1 \sin\theta.$$

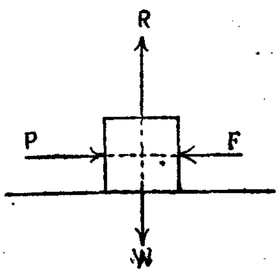
R என்பது அப்பொருட்களுக்கிடையேயுள்ள நேர்குத்தெதிர் விசை (Normal Reaction) என்றும், F என்பது அவற்றிற்கிடையேயுள்ள உராய்வு விசை (Force of Friction) என்றும் அழைக்கப் படுகின்றன. பொருட்கள் வழவழப்பாக யிருப்பின் அவற்றிற்கிடையேயுள்ள எதிர்விசையானது பொது நேர்குத்துக் கோட்டின் வழியாகவே செயல்படுமாகையால் பொதுத் தொடுகோட்டு வழிக் கூறு மறைந்து விடுகிறது; அதாவது, உராய்வு விசை மறைந்துவிடுகிறது. ஆகவே, இவ்வுராய்வு விசையானது தொடுகையிலுள்ள பொருட்களின் தன்மைகளைப் பொறுத்த அளவுடையதாகயிருக்கும். நடைமுறையில் முற்றிலும் வழவழப்பான பொருட்களைக் காணுதலரிது. ஆகவே, பொருட்களின் உராய்வுத்தன்மையை, அது எத்துணை சிறிய அளவுடையதாயினும், அளவிட வேண்டுவது மிகவும் அவசியமாகிறது. ஒன்றையொன்று தொட்டுக் கொண்டிருக்கும் இரு வழவழப்பற்ற பொருட்கள் ஒன்றின் மீதொன்று நழுவ முயல்வதைத் தடை செய்யும் வகையில் அப்பொருட்

களினுண்டாக்கப்படுகின்ற தடையின் அளவே "உராய்வு" (friction) ஆகும்.

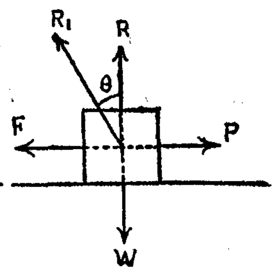
உராயவு (friction)

இரு பொருட்கள் ஒன்றையொன்று தொட்டுக் கொண்டிருக்கும்போது ஒன்றின் மீதொன்று நழுவுவதையோ. உருளுவதையோ தடை செய்ய முயலும் வகையில் அவற்சுன் தொடுபுள்ளி வழியே செயல்படும் விசையே "உராய்வு" (Friction) எனப்படும், இது ஒரு செயலற்ற விசை (passive force) ஆகும். ஏனெனில், புறவிசைகளின் தாக்குதல்களினுல் ஒரு பொருள் இன்னொரு பொருளின் மீது நகர முயலும்போது மட்டுமே உராய்வு விசை செயல்படுகிறது. மேலும், புறவிசையின் அளவுக்கேற்ப உராய்வு விசை தன் அளவையும் மாற்றிக் கொள்வதால் இது ஒரு "தானே சரிக்கட்டிக் கொள்ளும் விசை" (self-adjusting force) ஆகும்.

ஒரு மேசையின் மேல் ஒரு கனமான பெட்டியொன்று வைக்கப்பட்டிருப்பதாகக் கொள்க.



படம் 136 (அ)



படம் 136 (ஆ)

அதன் எடை W-ம் அதன் புவியீர்ப்பு மையத்தின் வழியே பொதுத் தொடுதளமாகிய மேசைக்குச் செங்குத்தாகச் செயல்படும் மேசையின் எதிர்விசையுமாகிய R-ம் சமமாகவும் எதிராகவுமிருக்குமாகையால் அவை ஒன்றையொன்று விளைவு நீக்கம் செய்து சமநிலை பெறுகின்றன. ஆகவே பெட்டியானது மேசையின் மேல் ஓய்வு நிலையிலிருக்கின்றது.

இப்பொழுது P என்னும் மிகச்சிறிய விசையினுல் அப்பெட்டியை மேசையின் மீது தள்ளுக. பெட்டி கனமானதாயிருப்பதால் இப்பொழுதும் சமநிலையிலேயே யிருக்கும். ஆனல் பெட்டியின் மீது செயல்படும் மேசையின் எதிர்விசையில் சற்று

மாறுதல் காணப்படும். ஏனெனில், பெட்டியின் எடை W, பெட்டியின் மீது செலுத்தப்பட்டுள்ள விசை P ஆகியவற்றை விளைவு நீக்கம் செய்யக்கூடிய வகையில் குத்துப் பிரிவுகளைக் கொண்ட ஒரு விசையாக மேசையின் எதிர்விசை மாறுகிறது. இவ்வெதிர் விசையை R_1 என்றும், தொடுபுள்ளி வழிநேர்குத்துடன் அதன் சாய்வுக் கோணத்தை θ என்றும் கொள்க. இவ்வெதிர் விசையின் குத்துப் பிரிவுகளான $R_1 \cos\theta$, $R_1 \sin\theta$ என்பன முறையே W, P ஆகியவற்றை விளைவு நீக்கம் செய்ய வேண்டும்.

எனவே, $R_1 \cos\theta = W$; $R_1 \sin\theta = P$ ஆகும்.

ஆனால், $W = R$ ஆகையால், $R_1 \cos\theta = R$, $\sin\theta = P$.

இவ்வாறு, பொருளின் மீது செயல்படுத்தப்பட்ட Pயின் விளைவை அதற்கு எதிரான $R_1 \sin\theta$ என்னும் விசைப் பிரிவு விளைவு நீக்கம் செய்வதன் காரணமாகவே அப்பொருள் சம நிலையில் இருந்து வருகிறது. Pக்கு எதிராகச் செயல்படும் $R_1 \sin\theta$ என்னும் விசைப் பிரிவே உராய்வு விசை எனப்படுகிறது. இவ்வுராய்வு விசையானது பெட்டி, மேசை ஆகியவற்றுடன் உராய்வுத் தன்மையின் காரணமாக ஏற்படுகிறது. இவ்வுராய்வு விசையை F என்று குறிப்பிடுவோம்.

$$\therefore F = R_1 \sin\theta$$

ஆகவே, R_1 என்னும் எதிர்விசையானது R, F ஆகியவற்றின் விளைவு விசையே என்றும் கூறலாம். பெட்டியும், மேசையும் முற்றிலும் வழவழப்பாகயிருப்பின் மேசையின் எதிர் விசையானது தொடுபுள்ளி வழியே மேசைக்குச் செங்குத்தாகச் செயல்படுமாகையால் அதன் தொடுதளம் பிரிவு பூச்சியமாகிறது,

அதாவது. $F = R_1 \sin 0^\circ = 0$

ஆகவே, பெட்டியின்மீது செயல்படுத்தப்பட்ட விசை P ஐ விளைவு நீக்கம் செய்யக்கூடிய உராய்வு விசை எதுவுமில்லையாதலால், பெட்டியானது அவ்விசை (P)யின் விளைவால் ஏற்படும் முடுக்கத்துடன் பொதுத் தளமாகிய மேசையின் மீது நகரத் தொடங்குகிறது.

இப்பொழுது பெட்டியின்மீது செயல்படுத்தப்படுகின்ற விசையாகிய P ஐப் படிப்படியாக அதிகரிக்கவும். தள்ளு விசையைச் சிறிதளவு அதிகரித்த போதிலும் பெட்டி நகராமலிருப்பதற்குக் காரணமென்ன ? உராய்வு விசையானது தள்ளு

விசைக்குச் சமமாகவும், எதிராகவுமிருப்பதால் தள்ளுவிசையை அதிகரிக்க அதிகரிக்க உராய்வு விசையும் அதற்குச் சமமாக அதிகரிக்கிறது. இருப்பினும் ஒரு எல்லைக்கு மேல் P ஐ அதிகரிக்கும்போது பெட்டி நகரத் தொடங்குவதைக் காணலாம். இதற்குக் காரணமென்ன ? தள்ளுவிசையை அதிகரிக்க அதிகரிக்க உராய்வு விசையும் அதிகரித்துக் கொண்டே சென்று ஒரு குறிப்பிட்ட நிலையை அடைந்ததும் அது மீப்பெரு எல்லையை அடைந்து அதற்குமேல் அதிகரிக்க முடியாததாகி விடுகிறது. ஏனெனில், மேசையும், பெட்டியும் சேர்ந்து தங்களின் உராய்வுத் தன்மைகளின் காரணமாக ஒரு குறிப்பிட்ட அளவு எதிர்விசையையே தள்ளு விசைக்கு எதிராகச் செயல்படுத்த முடியும். இந்த மீப்பெரு எல்லையளவுக்கு மேல் Pஐ அதிகரிக்கும்போது, அதை ஈடு செய்யும் வகையில் உராய்வு விசை அதிகரிக்க முடியாதாகையால், உராய்வு விசையால் ஈடு செய்யப்பட்டது போக மிஞ்சியுள்ள தள்ளுவிசையின் விளைவினால் பெட்டி நகரத் தொடங்குகிறது. இவ்வாறு மீப்பெரு எல்லையளவு கொண்ட உராய்வு விசையானது "எல்லையுராய்வு" (limiting friction) என்றழைக்கப்படுகிறது.

எல்லையுராய்வு (Limiting Friction)

ஒருபொருள் இன்னொரு பொருளின் மேல் நகரும் தருவாயிலிருக்கும்போது அப்பொருட்களாலுண்டாகும் உராய்வு விசை அதன் உச்ச அளவைப் பெறுகிறது, உராய்வு விசையின் இவ்வுச்ச அளவே "எல்லையுராய்வு" என்றழைக்கப்படுகிறது. உராய்வு விசை உச்சமாயிருக்கும்போது பொருட்களில் காணப்படும் சமநிலைக்கு "எல்லைச் சமநிலை" (limiting equilibrium) என்று பெயர்.

உராய்வை "நிலையியலுராய்வு" (statical friction), "இயக்கப் பண்புராய்வு" (kinetic friction) என்று இருவகையாகப் பிரிக்கலாம்.

நிலையியலுராய்வு (Statical Friction)

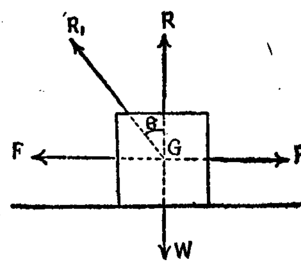
தொடுகையிலுள்ள இரு பொருட்கள் எல்லைச் சமநிலை தவிர்த்து வேறெவ்விதச் சமநிலையிலுமிருக்கும்போது செயல்படும் உராய்வுக்கு "நிலையியல் உராய்வு" என்று பெயர் ஆகவே, நிலையியலுராய்வு எப்பொழுதும் எல்லையுராய்வுக்குக் குறைவாகவேயிருக்குமென்றறிக.

இயக்கப்பண்புராய்வு (Kinetic Friction)

ஒரு பொருள் மற்றொரு பொருளின் மீது நகர்ந்துகொண்டிருக்கும்போது செயல்படும் உராய்வுக்கு "இயக்கப்பண்புராய்வு" என்று பெயர். இயக்கப்பண்புராய்வும் எல்லையுராய்வைவிடக் குறைவாகவே யிருக்குமென்று பரிசோதனைகளின் மூலம் அறியப்பட்டுள்ளது.

உராய்வுக் கோணமும் உராய்வுக் குணமும்
(Angle of Friction and cone of Friction)

W எடையுள்ள ஒரு கனமான பொருள் உராய்வுத்தன்மையுடைய ஒரு மேசையின்மேல் வைக்கப்பட்டுள்ளதாகக் கொள்வோம். மேசையின்மீது பொருளின் அழுத்தமும், பொருளின் மீது மேசையின் எதிரழுத்தமும் சமமாகவும் எதிராகவுமிருக்குமாகையால் இவ்விரு அழுத்தங்களும் ஒன்றையொன்று விளைவு நீக்கம் செய்து பொருளைச் சமநிலையில் வைத்திருக்கின்றன. புறவிசை எதுவும் செயல்படவில்லையாகையால் மேசையின் நிலைக்குத் தெதிர்விசையாகிய *R* என்பது அப்பொருளின் புவியீர்ப்பு மையத்தின் வழியே மேசைக்குச் செங்குத்தாகச் செயல்படும். எனவே, $R = W$ ஆகும்.



படம் 137

இப்பொழுது, அப்பொருளின்மீது மேசைக்கு இணையாக *P* என்னும் விசையைச் செயல்படுத்துக. இப்போதும் அப்பொருள் சம நிலையிலேயே தொடர்ந்து இருப்பதாகக் கொள்க. உராய்வுத் தன்மையின் காரணமாக மேசையின் எதிரழுத்தம் மேசைக்குச் செங்குத்தாகச் செயல்படாமல் புதிதாகச் செயல்படுத்தப்பட்டுள்ள விசை *P* ஐ விளைவு நீக்கம் செய்யும் வகையில் சற்று சாய்வான திசையில் செயல்படும்.

மேசையின் இவ்வெதிரழுத்தம் R_1 என்றும், தொடுபுள்ளி வழிச் செங்குத்துடன் இதன் சாய்வு θ என்றும் கொள்வோமானால், இதன் குத்துப் பிரிவுகள் தொடுபுள்ளி வழிச் செங்குத்துத்

திசையில் R, cos θ என்றும், தொடுதளத்தின் வழியில் அதாவது மேசையின் தளத்தின் வழியாக R, sin θ என்றும் காணலாம். இக்குத்துப் பிரிவுகள் முறையே W, P ஆகிய விசைகளை ஈடு செய்யும் வகையில் சமமாகவும், எதிராகவும்இருக்கவேண்டும்.

$$\because\ R_1 \cos\theta = W;\ R_1 \sin\theta = P.$$

ஆனால் பொருளின்மீது செயல்படுத்தப்பட்டுள்ள விசை Pக்கு எதிராகச் செய்யும் விசையே உராய்வு விசை F ஆகையால்,

$F = R_1 \sin\theta$ ஆகும்.

$$\because\ \tan\theta = \frac{R_1 \sin\theta}{R_1 \cos\theta} = \frac{F}{W} = \frac{F}{R}$$ (ஏனெனில் $R = W$).

இப்பொழுது P யின் அளவை மேலும் மேலும் அதிகரிக்கவும் Pயின் அளவு அதிகரிக்க அதிகரிக்க Fஇன் அளவும் அதிகரிக்கும். $\tan\theta = \frac{F}{R}$ ஆகையால் θ-வின் மதிப்பும் அதிகரிக்கும். இறுதியில் பொருளானது நகருந் தருவாயிலிருக்கும்போது F இன் அளவு உச்சமாகயிருக்கும். அதற்குமேல் Pயின் அளவு எவ்வளவு அதிகரிக்கப்பட்ட போதிலும் Fஇன் அளவு மேலும் அதிகரிக்க இயலாமையால் உச்ச நிலையிலேயே இருக்கும்' எனவே, θஇன் மதிப்பும் உச்ச நிலையிலேயே இருக்கும். இவ்வாறு உராய்வு விசை உச்சமாயிருக்கும்போது, அதாவது பொருளானது எல்லைச் சம நிலையிலிருக்கும் போது θஇன் உச்ச மதிப்பு λ எனில்,

$$\tan\lambda = \frac{F \text{ இன் உச்ச மதிப்பு}}{R} = \frac{\text{எல்லையுராய்வு}}{\text{நேர்குத்தொதிர்விசை}}$$

ஆகும்.

θ-வின் λ என்னும் இந்த உச்ச மதிப்புக்கு "நிலையியலுராய்வுக் கோணம்" (Angle of Static Friction) என்று பெயர்.

ஒன்றுக்கொன்று தொடுகையிலிருக்கும் இரு பொருட்களுக்கிடையே நேர்குத் தெதிர்விசை R-ம், எல்லையுராய்வு F-ம் மாறிலிகளாயிருக்குமாகையால் $\frac{F}{R}$ என்னும் விகிதம் ஒரு மாறிலியாகயிருக்கும். இம்மாறிலியானது இரு பொருட்களின் தொடுபுள்ளியைச் சுற்றியுள்ள பரப்புக்களின் தன்மைகளைப் பொறுத்ததாயிருக்கும். தொடுகையிலேயிருக்கும் பொருட்களுக்கிடையேயுள்ள எல்லையுராய்வுக்கும் நேர்குத்தெதிர் விசைக்குமிடையே

யுள்ள இம்மாறிலிவிகிதமானது "நிலையியலுராய்வுக்குணகம்" (coefficient of static friction) என்றழைக்கப்படுகிறது. இவ்வுராய்வுக்குணகம் பொதுவாக μ என்று குறிப்பிடுகின்றது.

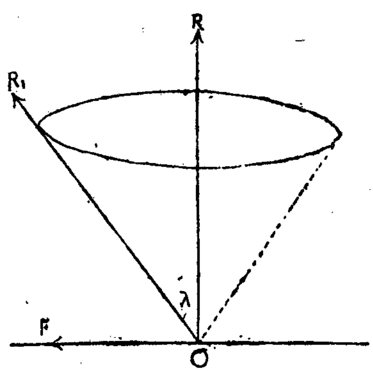
அதாவது, $\mu = \tan \lambda = \dfrac{F}{R}$

அல்லது, எல்லை உராய்வு விசை $F = \mu R$. ஆகும்.

இயக்கப்பண்புராய்வுக் குணகமும் இயக்கப் பண்புராய்வுக் கோணமும்

(Coefficient of kinetic Friction and Angle of kinetic Friction)

ஒரு பொருள் இன்னொரு பொருளின்மீது நகரும்போது முதற் பொருளின்மீது செயல்படும் உராய்வு விசையானது அப்பொருள் நகரும் திசைக்கு எதிர்த்திசையில் அவற்றின் தொடுபுள்ளி வழியே செயல்படும் மேலும் இவ்வுராய்வு விசைக்கும் தொடுபுள்ளி வழியே செயல்படும் நேர்குத்தெதிர் விசைக்குமிடையேயுள்ள விகிதம் ஒரு மாறிலியாகயிருக்கும். இம்மாறிலியானது "இயக்கப்பண்புராய்வுக் குணகம்" (coefficient of kinetic friction) என்றழைக்கப்படுகிறது. இக் குணகம் μ' என்று குறிக்கப்படின், $\tan \lambda^1 = \mu^1$ என்ற தொடர்பின் மூலம்



படம் 198

பெறப்படுகின்ற λ^1 என்னும் கோணம் "இயக்கப் பண்புராய்வுக் கோணம்" (angle of kinetic friction) என்றழைக்கப்படுகிறது.

குறிப்பு: பரிசோதனைகளிலிருந்து நிலையியலுராய்வுக் குணகம் எப்பொழுதும் 1க்குக் குறைவாகவேயிருக்குமென்றும், இயக்கப்பண்புராய்வுக்குணகம் நிலையியலுராய்வுக்குணகத்தை விடக் குறைவாகயிருக்குமென்றும் கண்டறியப்பட்டுள்ளன.

உராய்வுக்கூம்பு (Cone of Friction)

இரு பொருட்களின் தொடுகைப் புள்ளி O என்றும், அவற்றிற்கிடையேயுள்ள எல்லையுராய்வுக் கோணம் λ என்றும் கொள்க. Oஐ உச்சியாகவும், Oவழியே பொருட்களின் தொடு தளத்திற்குச் செங்குத்தான நேர்கோட்டை அச்சாகவும், λஐ அரையுச்சிக் கோணமாகவும் கொண்ட ஒரு நேர்வட்டக் கூம்பு ஒன்றைக் கற்பனைச் செய்துகொள்க. பொருட்களிரண்டும் வழவழப்பாகயிருப்பின் தொடுபுள்ளி வழியே செல்லும் நேர்குத்தெதிர் விசையானது இக்கூம்பின் அச்சுவழியே செயல்படும். ஆனல், உராய்வு விசையின் காரணமாக, கீழேயுள்ள பொருளின் எதிர்விசையானது நேர்குத்தெதிர் விசைக்குச் சற்று திரும்பிய திசையில் செயல்படும். இவ்வெதிர்விசையானது நேர்குத்தெதிர்விசை, உராய்வு விசை ஆகியவற்றின் விளைவு விசையாகும். நேர்குத்தெதிர்விசையுடன் இவ்விளைவு எதிர்விசையின் சாய்வுக்கோணத்தின் உச்ச மதிப்பு λ ஆதலின் இவ்விளைவு எதிர்விசையின் திசை எப்பொழுதும் இக்கூம்பினுள்ளேயே அமைந்திருக்கும். உராய்வு விசையானது எல்லை மதிப்பையடையும்போது இவ்விளைவு விசையின் திசையானது இக் கற்பனைக் கூம்பின் வளைபரப்பின் மேல் படியும். இக்கற்பனைக் கூம்பிற்கு "உராய்வுக் கூம்பு" cone of friction) என்று பெயர்.

பொருட்களிடையே அவற்றின் தன்மைகளுக்கேற்ப உராய்வு இருப்பதன் காரணமாக பலவித நன்மைகளிருப்பதை நடைமுறையில் நாம் காணலாம். உராய்வுத் தன்மையுடைய ஒரு தளத்தின்மீது நாம் தாராளமாக நடந்து செல்ல முடிகிறது. ஆனல், வழவழப்பான தளத்தில் நாம் தாராளமாக நடந்து செல்லும்போது வழுக்கி விழுவதன் காரணம் அத்தளத்தில் உராய்வு இல்லாமையேயாகும். பலதிறப்பட்ட வண்டிகளின் சக்கரங்கள் உருண்டோடுவதும் இவ்வுராய்வின் பயனேயாகும். ஆகவே, உராய்வு பொருட்களின் இயக்கத்திற்குத் துணை செய்கிறது என்றறிகிறோம். ஆனல் சிற்சில வேளைகளில் உராய்வு விசையானது இயக்கத்திற் கெதிராகவும் செயல்படுவதுண்டு. எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு வழவழப்பான சாய்தளத்தின்மீது ஒரு வழவழப்பான பொருளை வைத்தால் அது வேகமாகக் கீழ் நோக்கி நழுவிச் செல்லுமென்பது யாவரும் அறிந்ததே. ஆனல் உராய்வுடைய ஒரு சாய்தளத்தின்மேல் ஒரு வழவழப்பற்ற பொருளை வைத்தால் அது அச்சாய்தளத்தின்மேல் சமநிலையிலிருப்பதைக் காணலாம். அப்பொருளுக்கும் அச்சாய்தளத்திற்குமிடையேயுள்ள உராய்வு விசையானது அப்பொருளுக்கும்

அச்சாய்தளத்திற்குமிடையேயுள்ள உராய்வு விசையானது அப் பொருள் நழுவிச்செல்வதைத் தடுத்துவிடுவதே இதற்குக் காரணமாகும். மேலும் இயக்கத்திலிருக்கின்ற பொருட்களின் இயக்கவேகம், உராய்வு விசையினால் குறைக்கப்படுகிறது. இவ்வாறு, உராய்வு விசையானது இயக்கத்திற்குத் துணையாகவு மிருக்கும்; எதிராகவுமிருக்குமென்றறிகிறோம்.

பலதிறப்பட்ட மூலப் பொருட்களான பொருட்களுக்கிடை யேயும், பல்வேறு நிலைகளில் தொடுகைகளைக் கொண்ட பல் வேறு வகையான பொருட்களுக்கிடையேயும் செயல்படுகின்ற எல்லையுராய்வுகள் பரிசோதனைகளின்மூலம் நிர்ணயிக்கப்பட் டுள்ளன. இப்பரிசோதனைகளின்மூலம் கண்டறியப்பட்ட உண்மைகள் யாவும் உராய்வு விதிகளாகத் தொகுக்கப்பட் டுள்ளன. இவ்வுராய்வு விதிகளை முதன்முதலில் தொகுத்தவர் "சார்லஸ் கோலம்" (Charles Coulomb: 1736—1806) என்னும் பிரெஞ்சுப் பொறியியல் வல்லுநராவர்.

உராய்வு விதிகள் (Laws of Friction)
நிலையியலுராய்வு விதிகள்

விதி 1: இரு பொருட்கள் தொடுகையிலிருக்கும்போது தொடுபுள்ளியில் அவற்றுள் ஒன்றின்மீது செயல்படும் உராய்வு அது மற்றதன்மீது நழுவிச் செல்லமுயலும் திசைக்கு எதிராகச் செயல்படும்.

விதி 2: சமநிலையில் உராய்வின் அளவு பொருளின் இயக்கத்தைத் தடுப்பதற்குச் சரியாகப் போதுமானதாக யிருக்கும்.

விதி 3: எல்லையுராய்வு நேர்குத்தெதிர்விசையுடன் ஒரு மாறு விகிதத்தைக் கொண்டிருக்கும்; இவ்விகிதம் தொடுகை யிலுள்ள பொருட்களின் மூலப்பொருட்களுடைய தன்மைகளை மட்டிலுமே சார்ந்திருக்கும்.

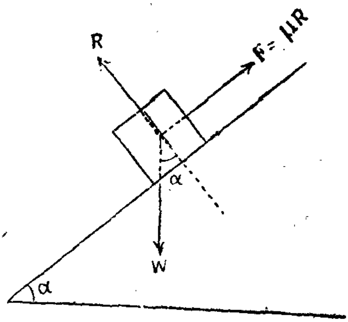
விதி 4: நேர்குத்தெதிர்விசை மாறுதிருக்கும்வரை எல்லை யுராய்வு தொடுகைப் பகுதியின் பரப்பளபு வடிவமைப்பு ஆகியவற்றைச் சாராதிருக்கும்.

விதி 5 (இயக்கப்பண்புராய்வு விதி): ஒரு பொருள் மற் றொரு பொருளின்மீது இயக்கத்திலிருக்கும்போதும், உராய்வு விசையானது இயக்கத்திற்கெதிராகவே செயல்படும். ஆனால் உராய்வின் அளவு இயக்க வேகத்தைச் சாராததாயிருக்கும்.

இயக்கத்திலிருக்கும் பொருட்களின் உராய்வுக் குணகம், அவை ஓய்விலிருக்கும் போதுள்ள உராய்வுக் குணகத்தைவிட குறைத்ததாயிருக்கும்.

உராய்வுடைய சாய்தளத்தின் மேலுள்ள பொருளின் சமநிலே (Equilibrium of a body on a rough inclined plane)

1. உராய்வுடைய சாய்தளத்தின்மேல் தன் எடையைக் கொண்டு நழுவும் நிலேயிலுள்ள பொருள்பற்றிய சமநிலே.



படம் 139

W எடையுள்ள ஒரு பொருளே உராய்வுடைய ஒரு சாய் தளத்தின் மேல்வைத்து, அது கீழ்நோக்கி நழுவத் தொடங்கும் வரை சாய்தளத்தின் சாயவை மெதுவாக உயர்த்தவும்.

அப்பொருள் கீழ்முகமாக நழுவத் தொடங்கும் தருவாயில் கிடைத்தளத்துடன் சாய்தளத்தின் சாய்வுக்கோணம் α என்க. R என்பது தொடுபுள்ளி வழியே சாய்தளத்திற்கு நேர்குத்தெதிர் விசைகயன எல்லேயுராயவாகிய μR என்பது சாய்தளத்தில் மேல்முகமாகச் செயல்படும். பொருளின் எடை W ஆனது அவன் புவியீர்ப்பு மையத்தின்வழியே நிலேக்குத்தாகக் கீழ் நோக்கிச் செயல்படும். ஆகவே, அப் பொருளானது W, μR, R ஆகிய விசைகளிஞல் சமநிலேயில் வைக்கப்படுகிறது. சாய் தளத்திற்கும், கிடைத்தளத்திற்குமிடையேயுள்ள கோணம் α ஆதலின். Rக்கும் Wக்குமிடையேயுள்ள கோணம் α ஆகும்.

சாய்தளத்தின் வழியாகவும், சாய்தளந்திற்குச் செங்குத்துத் திசையிலும் விசைப் பிரிப்புச் செய்க.

$$\mu R = W \sin \alpha,$$

$$R = W \cos \alpha,$$

$$\therefore \mu = \tan \alpha$$

உராய்வுக் கோணம் λ எனில், $\mu = \tan \lambda$ ஆகும்.

$$\therefore \tan \lambda = \tan \alpha$$

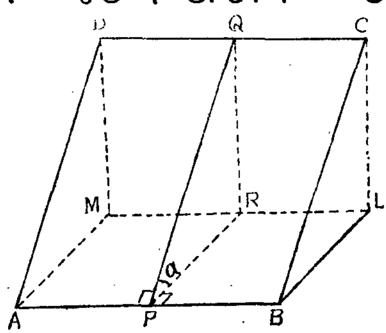
அல்லது, $\lambda = \alpha$ ஆகும்,

அதாவது, ஒரு உராய்வுடைய தளத்தின்மேல் ஒரு பொருள் எல்லைச் சமநிலையிலிருக்குமாயின், கிடைத்தளத்துடன் சாய்தளத்தின் சாய்வுக் கோணம் உராய்வுக் கோணத்திற்குச் சமமாகும்.

ABCD என்னும் சாய்தளத்தை *ABLM* என்னும் கிடைத்தளம் *AB* என்னும் கிடைக்கோட்டில் வெட்டுகிறது. *P* என்பது *AB*யில் ஒரு புள்ளி. *P*யிலிருந்து *AB*க்குச் செங்குத்தாக, கிடைத்தளத்தில் *PR* என்னும் நேர்க்கோட்டையும், சாய்தளத்தில் *PQ* என்னும் நேர்கோட்டையும் வரைக *PQ* என்பது சாய்தளத்தின் மேலுள்ள மீப்பெரு சரிவுக்கோடு ஆகும். ஏனெனில், *P* வழியே கிடைத்தளத்துடன் இதைவிடவும் சரிவு அதிகமுள்ள நேர்கோடு வேறு வரைய முடியாது.

மீப்பெரு சரிவுக்கோடு
(Line of greatest slope)

$\angle QPR$ என்பது கிடைத்தளத்துடன் சாய்தளத்தின் சாய்வுக் கோணமாகும். மேலும், *RPQ* என்னும் தளம் *ABLM* தளத்திற்குச் செங்குத்தான ஒரு நேர்குத்துத் தளமாகும்.



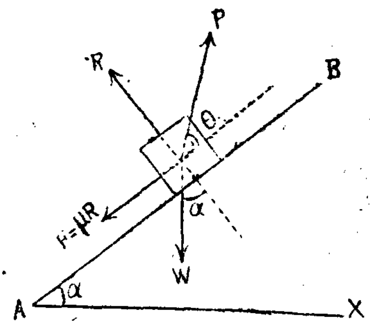
படம் 140

2. உராய்வுக் கோணத்தைவிட அதிகமான சாய்வுக் கோணத்துடனுள்ள ஒரு உராய்வுடைய சாய்தளத்தின்மேல் ஒரு பொருள் வைக்கப்பட்டு, அச்சாய்தளத்தின் மீப்பெரு சரிவுக் கோட்டின் வழியே செல்லும் ஒரு நிலைத்தளத்தில் செயல்படும் ஒரு விசையினால் தாங்கப்படுகிறது; அவ்விசையின் அளவின் எல்லையைக் காணல்.

கிடைத்தளத்துடன் ∝ கோணச் சாய்விலுள்ள ஒரு சாய் தளத்தின் Wமேல் எனும் எடையுள்ள ஒரு பொருள் வைக்கப் பட்டு, மீப்பெரு சரிவுக் கோட்டுடன் θ கோணத் திசையில் செயல்படும் P என்னும் விசையினுல் சரியாகத் தாங்கப்படு கிறது. பொருளானது எல்லைச் சம நிலையிலிருப்பதால் சாய் தளத்தின் மேல் அது மேல் நோக்கி நகரும் தருவாயிலோ அல்லது கீழ் முகமாக நகருந் தருவாயிலோ இருக்கலாம்.

(அ) பொருள் மேல் முகமாக நகரும் தருவாயிலிருத்தல்

பொருளான்து மேல் முகமாக நகரும் தருவாயிலிருப்பதால், உராய்வு விசையானது சாய்த்தில் கீழ் முகமாகச் செயல்படும். சாய்தளத்தின் நேர்குத்தெதிர் விசையாகிய R தொடுபுள்ளி



படம் 141

வழியே தளத்திற்குச் செங்குத்தாகவும், பொருளின் எடை W அதன் புவியீர்ப்பு மையம் வழியே நிலைக்குத்தாகக் கீழ் நோக்கிச் செயல்படும்.

ஆகவே, பொருளைச் சம நிலையில் வைத்திருக்கும் விசை களாவன:

(i) பொருளின் எடை $W\downarrow$

(ii) சாய்தளத்திற்கு θ கோணச் சாய்வில் பொருளைத் தாங்கி நிற்கும் விசை P.

(iii) சாய்தளத்திற்குச் செங்குத்தாக நேர்குத் தெதிர் விசை R.

(iv) சாய்தளத்தின் வழியே கீழ் முகமாகச் செயல படும் உராய்வு விசை μR.

சாய்தளத்தின் வழியாகவும், அதற்குச் செங்குத்தாகவும் விசைப் பிரிப்புச் செய்க.

$$P \cos\theta = \mu R + W \sin\alpha \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$P \sin\theta + R = W \cos\alpha.$$

அல்லது, $R = W\cos\alpha - P\sin\theta \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$

(1) இலிருந்து, $P\cos\theta = \mu(W\cos\alpha - P\sin\theta) + W\sin\alpha$

அதாவது, $P\cos\theta + \mu P\sin\theta = \mu W\cos\alpha + W\sin\alpha$

$$P(\cos\theta + \mu\sin\theta) = W(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)$$

ஆனால் $\mu = \tan\lambda = \dfrac{\sin\lambda}{\cos\lambda}$ (λ என்பது உராய்வுக் கோணம்)

$$\therefore\ P\left(\cos\theta + \frac{\sin\lambda}{\cos\lambda}\sin\theta\right) = W\left(\frac{\sin\lambda}{\cos\lambda}\cos\alpha + \sin\alpha\right)$$

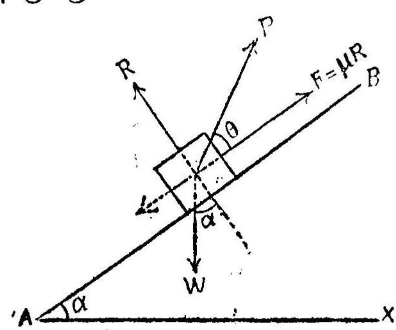
$$P(\cos\theta\cos\lambda + \sin\theta\sin\lambda) = W(\sin\alpha\cos\lambda + \cos\alpha\sin\lambda)$$

$$P\cos(\theta - \lambda) = W.\sin(\alpha + \lambda)$$

$$\therefore\ P = \frac{W(\sin(\alpha + \lambda)}{\cos(\theta - \lambda)}$$

(ஆ) பொருள் கீழ்முகமாக நகருந் தருவாயிலிருத்தல்

பொருள் கீழ் முகமாக நகரும்தருவாயிலிருப்பதால் உராய்வு விசை மேல் முகமாகச் செயல்படும். ஆகவே, பொருளைச் சம நிலையில் வைத்திருக்கும் விசைகளாவன:



படம் 142

(i) பொருளின் எடை $W\downarrow$

(ii) சாய்தளத்துடன் θ கோணச் சாய்வில் பொருளைத் தாங்கி நிற்கும் விசை P.

(iii) சாய்தளத்திற்குச் செங்குத்தாக நிலைக்குத்தெதிர் விசை R.

(iv) சாய்தளத்தில் மேல் முகமாகச் செயல்படும் உராய்வு விசை μR.

சாய்தளத்தின் வழியாகவும், அதற்குச் செங்குத்தாகவும் விசைப் பிரிப்புச் செய்க.

$$P\cos\theta+\mu R=W\sin\alpha$$
$$R+P\sin\theta=W\cos\alpha$$
$$\therefore\quad R=W\cos\alpha-P\sin\theta$$

(1) இல் இம்மதிப்பைப் பிரதியிடவும்.

$$P\cos\theta+\mu(W\cos\alpha-P\sin\theta)=W\sin\alpha$$
$$P\cos\theta-\mu P\sin\theta=W\sin\alpha-\mu W\cos\alpha$$

ஆனால், $\mu=\tan\lambda=\dfrac{\sin\lambda}{\cos\lambda}$

$$\therefore\quad P\left(\cos\theta-\frac{\sin\lambda}{\cos\lambda}\sin\theta\right)=W\left(\sin-\alpha\frac{\sin\lambda}{\cos\lambda}\cos\alpha\right)$$
$$P(\cos\theta.\cos\alpha-\sin\theta\ \sin)\alpha=W(\sin\alpha\cos\lambda-\cos\alpha\sin)\lambda$$
$$P\cos(\theta+\lambda)=W\sin(\alpha-\lambda)$$
$$\therefore\quad P=\frac{W\sin(\alpha-\lambda)}{\cos(\theta+\lambda)}$$

ஆகவே, பொருளைத் தாங்கும் விசையின் அளவு $\dfrac{W\sin(\alpha+\lambda)}{\cos(\theta-\lambda)}$க்கும், $\dfrac{W\sin(\alpha-\lambda)}{\cos(\theta+\lambda)}$ க்குமிடையே யிருப்பின் பொருளானது சாய்தளத்தின்மீது மேல் முகமாகவோ அல்லது கீழ்முகமாகவோ நகர முயலாமல் ஓய்வு நிலையிலிருக்கும்.

குறிப்பு: பொருளை சாய்தளத்தில் மேல் நோக்கி இழுக்கத் தேவையான குறைந்த பட்ச விசை.

பொருள்மேல் நோக்கி நகரும் தருவாயிலிருக்கும்போது அதைத் தாங்கக்கூடிய விசை $\dfrac{W\sin(\alpha+\lambda)}{\cos(\theta-\lambda)}$ ஆகும். இது மீச்சிறு மதிப்பைப் பெற வேண்டுமாயின் $\cos(\theta-\lambda)$ மீப்பெரு மதிப்பைப் பெற வேண்டும்.

அதாவது, $\cos(\theta-\lambda)=1$ **அல்லது** $\theta-\lambda=0$ **அல்லது** $\theta=\lambda$ **ஆகவே,** P **ஆனது சாய்தளத்துடன்** λ **கோணச் சாய்வில் செயல்படவேண்டும்.** $\theta=\lambda$ **ஆகயிருக்கும்போது பொருளை**

$$P \cos\theta = \mu R + W \sin\alpha \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$P \sin\theta + R = W \cos\alpha.$$

அல்லது, $R = W\cos\alpha - P\sin\theta \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$

(1) இலிருந்து, $P\cos\theta = \mu(W\cos\alpha - P\sin\theta) + W\sin\alpha$

அதாவது, $P\cos\theta + \mu P\sin\theta = \mu W\cos\alpha + W\sin\alpha$

$$P(\cos\theta + \mu\sin\theta = W(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)$$

ஆனால் $\mu = \tan\lambda = \dfrac{\sin\lambda}{\cos\lambda}$ (λ என்பது உராய்வுக் கோணம்)

$$\therefore P\left(\cos\theta + \frac{\sin\lambda}{\cos\lambda}\sin\theta\right) = W\left(\frac{\sin\lambda}{\cos\lambda}\cos\alpha + \sin\alpha\right)$$

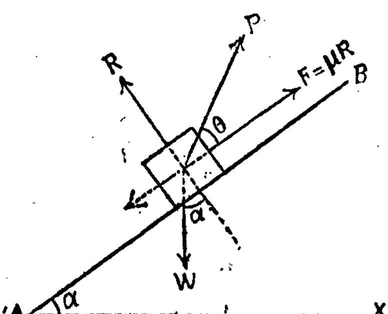
$$P(\cos\theta\cos\lambda + \sin\theta\sin\lambda) = W(\sin\alpha\cos\lambda + \cos\alpha\sin\lambda)$$

$$P\cos(\theta - \lambda) = W.\sin(\alpha + \lambda)$$

$$\therefore P = \frac{W(\sin(\alpha+\lambda)}{\cos(\theta-\lambda)}$$

(ஆ) பொருள் கீழ்முகமாக நகருந் தருவாயிலிருத்தல்

பொருள் கீழ் முகமாக நகரும்தருவாயிலிருப்பதால் உராய்வு விசை மேல் முகமாகச் செயல்படும். ஆகவே, பொருளைச் சம நிலையில் வைத்திருக்கும் விசைகளாவன:



படம் 142

(i) பொருளின் எடை $W\downarrow$

(ii) சாய்தளத்துடன் θ கோணச் சாய்வில் பொருளைத் தாங்கி நிற்கும் விசை P.

(iii) சாய்தளத்திற்குச் செங்குத்தாக நிலைக்குத்தெதிர் விசை R.

ஆனல் $\mu = \tan\lambda$ ஆதலின்,

$$P\left(\cos + \frac{\sin\lambda}{\cos\lambda}\sin\theta\right) = W\left(\frac{\sin\lambda}{\cos\lambda}\cos\alpha - \sin\alpha\right)$$

$$P(\cos\lambda\cos\theta + \sin\lambda\sin\theta) = W(\sin\lambda\cos\alpha - \cos\lambda\sin\alpha)$$

$$P\cdot\cos(\lambda-\theta) = W\sin(\lambda-\alpha)$$

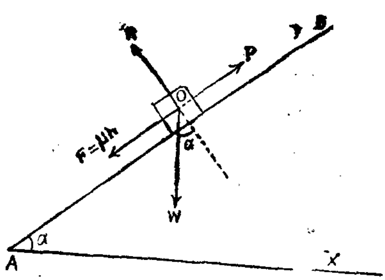
$$\therefore P = \frac{W\sin(\lambda-\alpha)}{\cos(\lambda-\theta)}$$

Pயின் அளவு மீச்சிறிதாகயிருக்க வேண்டுமாயின் $\cos(\lambda-\theta)$ மீப்பெருமதிப்பைப் பெறவேண்டும். $\therefore \theta = \lambda$,

ஆகவே, Pயின் குறைந்தபட்ச அளவு $= W\sin(\lambda-\alpha)$. மேலும், இக் குறைந்தபட்ச விசை நேரெண்மதிப்புடையதாயிருக்க வேண்டுமாயின் $\lambda > \alpha$ வாக யிருக்கவேண்டும். அதாவது, சாய்தளத்தின் சாய்வு உராய்வுக் கோணத்தைவிடக் குறைவாகயிருத்தல் வேண்டும்.

எனவே, சாய்தளத்தின் சாய்வு உராய்வுக் கோணத்தை விடக் குறைவாகயிருக்கும்போது பொருளை சாய்தளத்தில் கீழ் முகமாக இழுப்பதற்குத் தேவையான குறைந்தபட்ச விசையானது தளத்துடன் உராய்வுக் கோணச் சாய்வில் செயல் படுத்தப்படவேண்டிய $W\sin(\lambda-\alpha)$ என்னும் அளவுடைய விசையாகும்.

(4) உராய்வுடைய சாய் ளத்தின்மேல் ஒருபொருள் தளத்திற்கு இணையான விசையினல் சமநிலையிலிருத்தல்.



படம் 144

கிடைத்தளத்துடன் x கோணச் சாய்விலுள்ள AB என்னும் சாய் தளத்தின் மேல் W எடையுள்ள O என்னும் பொருள் சாய் தளத்திற்கு இணையாக மேல்நோக்கிச் செயல்படுத்தப்பட்டுள்ள P என்னும் விசையினல் சம நிலையிலிருப்பின் Pயின் அளவைக் காணல்.

(அ) பொருள் தளத்தில் மேல் முகமாக நகருந்தருவாயிலிருத்தல்.

உராய்வு விசை சாய்தளத்தின் மீது கீழ்முகமாகச் செயல் படும் பொருளின் மீது செயல்படும் விசைகளாவன;

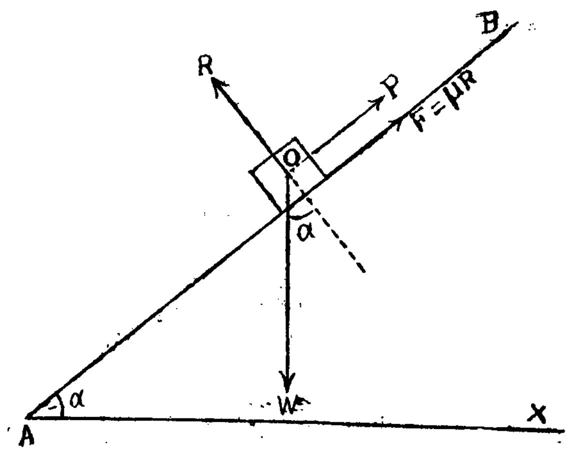
(i) பொருளின் எடை $W \downarrow$

(ii) தளத்திற்கு இணையாக மேல் முகமாகச் செயல் படுத்தப்பட்டுள்ள விசை P.

(iii) சாய்தளத்தின் நேர்குத்தெதிர்விசை R.

(iv) சாய்தளத்தின்மீது கீழ் முகமாகச் செயல்படும் உராய்வு விசை μR.

சாய்தளத்திற்கு இணையாகவும் செங்குத்தாகவும் விசைப் பிரிப் புச் செய்க.



படம் 145

$$\mu R + W \sin \propto = P.$$

$$R = W \cos \propto$$

$$\therefore\ P = \mu W \cos \propto + W \sin \propto$$

$$= (\mu \cos \propto + \sin \propto)$$

ஆனால் $\mu = \tan\lambda$ ஆதலின்,

$$P = W \left(\frac{\sin\lambda}{\cos\lambda} \cos\propto + \sin\propto \right)$$

$$= W\frac{(\sin\lambda\cos\alpha + \cos\lambda\sin\alpha)}{\cos\lambda}$$

$$= \frac{W\sin(\alpha+\lambda)}{\cos\lambda}$$

(ஆ) பொருள் தளத்தில் கீழ்முகமாக நகரும் தருவாயிலிருத்தல்:

உராய்வு விசையானது சாய்தளத்தில்மேல் முகமாகச் செயல்படும். பொருளின்மீது செயல்படும் விசைகளாவன:

(i) பொருளின் எடை $W\downarrow$

(ii) தளத்திற்கு இணையாகமேல் முகமாகச் செயல்படுத்தப்பட்டுள்ள விசை P.

(iii) சாய்தளத்தின் நேர்குத்தெதிர் விசை R

(iv) சாய்தளத்தின்மீது மேல் முகமாகச் செயல்படும் உராய்வு விசை μR.

சாய்தளத்திற்கு இணையாகவும் செங்குத்தாகவும் விசைப் பிரிப்புச் செய்க.

$$P + \mu R = W\sin\alpha$$

$$R = W\cos\alpha$$

$$\because\ P + \mu W\cos\alpha = W\sin\alpha$$

$$P = W(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$$

$$= W\left(\sin\alpha - \frac{\sin\lambda}{\cos\lambda}\cos\alpha\right)$$

$$= \frac{W(\sin\alpha\cos\lambda - \cos\alpha\sin\lambda)}{\cos\lambda}$$

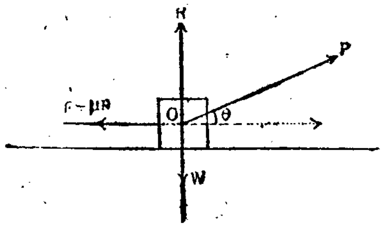
$$= \frac{W\sin(\alpha-\lambda)}{\cos\lambda}$$

உராய்வுடைய கிடைத்தளத்தின் மேல் ஒரு எடையை இழுப்பதற்குத் தேவையான குறைந்தபட்ச விசை :

AB என்னும் உராய்வுடைய கிடைத்தளத்தின் மேல் W எடையுள்ள O என்னும் பொருள் வைக்கப்பட்டுள்ளது. கிடைத்தளத்திற்கும் பொருளுக்குமிடையேயுள்ள உராய்வுக் கோணம் λ என்க. உராய்வுக் குணகம் $\mu = \tan\lambda$.

கிடைத்தளத்துடன் θ கோணச் சாய்வுத்திசையில் P என்னும் விசையால் பொருள் இழுக்கப்பட்டு, நகரும் தருவாயில்

சம நிலையிலிருப்பதாகக் கொள்க. உராய்வு விசையானது பொருள் நகர முயலும் திசைக்கு எதிர்த்திசையில் செயல்படும். பொருளின் எடை W ஆனது பொருளின் புவியீர்ப்பு மையம் வழியே நிலைகுத்தாகக் கீழ் நோக்கிச் செயல்படும். பொருளின் மீது கிடைத்தளத்தின் எதிர்விசையானது கிடைத்தளத்திற்குச் செங்குத்தாகச் செயல்படும். அதாவது, பொருளின் மீது செயல்படுகின்ற விசைகளாவன:



படம் 146

(i) பொருளின் எடை $W \downarrow$

(ii) கிடைத்தளத்தின் நேர்குத்தெதிர் விசை R.

(iii) கிடைத்தளத்துடன் θ கோணத்தில் செயல்படும் விசை P.

(iv) Pக்கு எதிர்ப்பக்கமாகச் செயல்படும் உராய்வு விசை μR.

கிடையாகவும் நிலைக்குத்தாகவும் விசைப்பிரிப்புச் செய்க.

$$P \cos\theta = \mu R$$

$$P \sin\theta + R = W$$

$$\therefore R = W - P\sin\theta$$

$$\therefore P\cos\theta = \mu W - \mu P \sin\theta$$

$$P(\cos\theta + \mu\sin\theta) = \mu W$$

$$P\left(\cos\theta + \frac{\sin\lambda}{\cos\lambda}\sin\theta\right) = \frac{\sin\lambda}{\cos\lambda}W$$

$$P(\cos\theta\cos\lambda + \sin\theta\sin\lambda) = W\sin\lambda$$

$$P\cos(\theta - \lambda) = W\sin\lambda$$

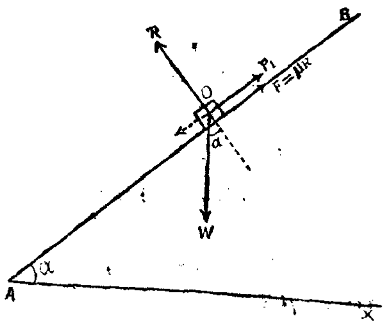
$$P = \frac{W\sin\lambda}{\cos(\theta - \lambda)}$$

P யின் அளவு மிகச்சிறிதாகயிருக்க வேண்டுமாயின் $\theta = \lambda$ ஆகவேண்டும்.

$\therefore P$ யின் மீச்சிறு அளவு $= W\sin\lambda$.

ஆகவே, பொருளைக் கிடைத்தளத்தின் மேல் இழுப்பதற்குத் தேவையான குறைந்தபட்ச விசையானது, கிடைத்தளத்துடன் உராய்வுக் கோணத்திற்குச் சமமான கோணச் சாய்வில் செயல்படக்கூடிய $W \sin \lambda$ என்னும் அளவுடைய விசையாகும்.

மாதிரி 99 ஒரு உராய்வுடைய α கோணச் சாய்தளத்தின் மேல் வைக்கப்பட்டுள்ள ஒரு பொருளைச் சரியாகத் தாங்கக் கூடிய மீப்பெரு விசைக்கும் மீச்சிறுவிசைக்குமுள்ள விகிதம் அப்பொருளின் எடைக்கும், தளத்தின் மீதுள்ள அழுத்தத்திற்குமுள்ள விகிதத்திற்குச் சமமெனில், உராய்வுக்குணகம் $\tan \alpha \tan^2 \frac{\alpha}{2}$க்குச் சமமாகுமென்று காட்டுக.



படம் 147

தீர்வு

W எடையுள்ள O என்னும் பொருள் α கோணச் சாய்விலுள்ள AB என்னும் சாய்தளத்தின் மேல் வைக்கப்பட்டுச் சாய்தளத்திற்கு இணையாகச் செயல்படும் P என்னும் விசையினால் தாங்கப்படுகிறது.

உராய்வுக் கோணம் λ என்றும் உராய்வுக் குணகம் μ என்றும் கொள்க.

$$\therefore \mu = \tan \lambda.$$

பொருளின் எடை W நிலைக்குத்தாகக் கீழ்நோக்கிச் செயல்படும். பொருளின் மீது சாய்தளத்தின் எதிரழுத்தம் R ஆனது சாய்தளத்திற்குச் செங்குத்தாகச் செயல்படும்.

பொருள் கீழ்முகமாக நகரும் தருவாயிலிருக்கும் போது Pயின் அளவு மீச் சிறிதாகயிருக்கும். ஆகவே, P என்னும் மீச்சிறு விசையினால் பொருள் தாங்கப்படும் போது உராய்வு விசை μR என்பது சாய்தளத்தில் மேல் முகமாகச் செயல்படும்.

சாய்தளத்திற்கு இணையாகவும், செங்குத்தாகவும் விசைப் பிரிப்புச் செய்க.

$$P_1 + \mu R = W \sin \alpha$$

$$R = W \cos \alpha$$

$$\therefore \quad P_1 = W \sin\alpha - \mu W \cos\alpha$$

$$= W(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$$

$$= W\left(\sin \alpha - \frac{\sin \lambda}{\cos \lambda} \cos \alpha\right)$$

$$= \frac{W(\sin \alpha \cos \lambda - \cos \alpha \sin \lambda)}{\cos \lambda}$$

$$= \frac{W \sin(\alpha - \lambda)}{\cos \lambda}$$

பொருள் மேல்முகமாக நகரும் தருவாயிலிருக்கும்போது P யின் அளவு மீப்பெரிதாகயிருக்கும். ஆகவே, P_2 என்னும் மீப்பெருவிசையினால் பொருள் தாங்கப்படும்போது பொருள் மேல்முகமாக நகரும் தருவாயிலிருக்குமாகையால் உராய்வு விசை μR என்பது சாய்தளத்தின் மேல் கீழ் முகமாகச் செயல் படும்.

சாய்தளத்திற்கு இணையாகவும், செங்குத்தாகவும் விசைப் பிரிப்புச் செய்க.

$$P_1 = \mu R + \sin \alpha$$

$$R = W \cos \alpha$$

$$\therefore \quad P_2 = \mu W \cos \lambda + W \sin \alpha$$

$$= W(\mu \cos \alpha + \sin \alpha)$$

$$= W\left(\frac{\sin \lambda}{\cos \lambda} \cos \alpha + \sin \alpha\right)$$

$$= W \frac{(\sin \lambda \cos \alpha + \cos \lambda \sin \alpha)}{\cos \lambda}$$

$$= W \frac{\sin(\alpha + \lambda)}{\cos \lambda}$$

$$\therefore \quad \frac{P_2}{P_1} = \frac{W \cdot \sin(\alpha + \lambda)}{\cos \lambda} \cdot \frac{\cos \lambda}{W \sin(\alpha - \lambda)}$$

$$= \frac{\sin(\alpha + \lambda)}{\sin(\alpha - \lambda)}$$

இவ்விகிதம் $\frac{W}{R}$ என்னும் விகிதத்திற்குச் சமமென்று கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$\therefore \quad \frac{\sin(\alpha + \lambda)}{\sin(\alpha - \lambda)} = \frac{W}{R}$$

அதாவது $\dfrac{\sin\alpha\cos\lambda + \cos\alpha\sin\lambda}{\sin\alpha\cos\lambda - \cos\alpha\sin\lambda} = \dfrac{W}{W\cos\lambda}$

$(\because R = W\cos\lambda$

இடதுபக்கம் ஒவ்வொரு உறுப்பையும் $\cos\lambda\cos\lambda$ ஆல் வகுக்கவும்.

$$\frac{\tan\alpha + \tan\lambda}{\tan\alpha - \tan\lambda} = \frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\therefore \frac{(\tan\alpha + \tan\lambda) - (\tan\alpha - \tan\lambda)}{(\tan\alpha + \tan\lambda) + (\tan\alpha - \tan\lambda)} = \frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}$$

$$\frac{2\tan\alpha}{2\tan\alpha} = \tan^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\therefore \quad \tan\lambda = \tan\alpha \cdot \tan^2\frac{\alpha}{2}$$

அதாவது, $\mu = \tan\alpha\tan^2\dfrac{\alpha}{2}$

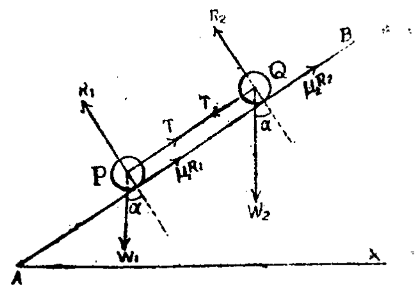
மாதிரி 100 : ஒரு இலேசான நூலினால் இணைக்கப்பட்ட இரு பொருட்கள் ஒரு சாய்தளத்தின் மேல் ஓய்வு நிலையிலிருக்கின்றன. அவற்றின் எடைகள் W_1, W_2 ம், உராய்வுக் குணகங்கள் முறையே μ_1, μ_2-ம் ஆனால், சம நிலைக்கான சாய்தளத்தின் அதிகபட்ச சாய்வு $\tan^{-1}\left(\dfrac{\mu_1 W_1 + \mu_2 W_2}{W_1 + W_2}\right)$ என்று காட்டுக.

(மதுரை பி. எஸ்ஸி., 1972 ஏப்)

தீர்வு

AB என்பது கிடைத்தளத்துடன் α கோணத்தில் சாய்ந்துள்ள ஒரு சாய்தளம். *P*, *Q* என்பன முறையே W_1, W_2 எடைகளும் μ_1, μ_2 உராய்வுக் குணங்களுமுடைய இரு பொருட்கள். இவ்விரு பொருட்களும் ஒரு இலேசான நூலினால் இணைக்கப்பட்டுச் சாய்தளத்தின் மேல் சம நிலையிலுள்ளன. இரு பொருட்களும் எல்லைச் சமநிலையிலிருப்பதால் நூல் விறைப்பாகயிருக்கும். ஒவ்வொன்றும் மற்றதை இழுத்துத் தாங்கிய

நிலையிலிருப்பதால் Pயிலும், Qவிலும் நூலின் இழுவிசைகள் சமமாகவும் எதிராகவுமிருக்கும். இவ்விரு விசைகளை T என்று குறிப்பிடுக. P, Q ஆகிய இரு பொருட்களுமே கீழ்முகமாக நகர முயலுமாகையால் இருதொடு புள்ளிகளிலும் உராய்வு விசைகள் சாய்தளத்தில் மேல் முகமாகச் செயல்படும். P, Q ஆகிய பொருட்களின் மீது சாய்தளததின் எதிர்விசைகள் முறையே R_1. R_2 எனில், இவற்றின் தொடுபுள்ளி வழியே மேல் முகமாகச் செயல்படும் உராய்வு விசைகள் $\mu_1 R_1, \mu_2 R_2$ ஆகும்.



படம் 148

இப்பொழுது Pயின் சம நிலையைக் கருதுக.

$$R_1 = W_1 \cos \alpha$$
$$T + \mu_1 R_1 = W_1 \sin \alpha$$
$$\therefore \quad T = W_1 \sin \alpha - \mu_1 R_1$$
$$= W_1 \sin \alpha - \mu_1 W_1 \cos \alpha$$
$$= W_1 (\sin \alpha - \mu_1 \cos \alpha) \quad \ldots$$

இப்பொழுது Q வின் சமநிலையைக் கருதுக.

$$R_2 = W_2 \cos \alpha$$
$$T + W_2 \sin \alpha = \mu_2 R_2$$
$$\therefore \quad T = \mu_2 R_2 - W_2 \sin \alpha$$
$$= \mu_2 W_2 \cos \alpha - W_2 \sin \alpha$$
$$= W_2 (\mu_2 \cos \alpha - \sin \alpha) \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

(1), (2) ஆகிய சமன்பாடுகளிலிருந்து,

$$W_1 (\sin \alpha - \mu_1 \cos \alpha) = W_2 (\mu_2 \cos \alpha - \sin \alpha)$$
$$W_1 \sin \alpha + W_2 \sin \alpha = \mu_1 W_1 \cos \alpha + \mu_2 W_2 \cos \alpha$$
$$\sin \alpha (W_1 + W_2) = \cos \alpha (\mu_1 W_1 + \mu_2 W_2)$$

$$\therefore \text{tna}\ \alpha = \frac{\mu_1 W_1 + \mu_2 W_2}{W_1 + W_2}$$

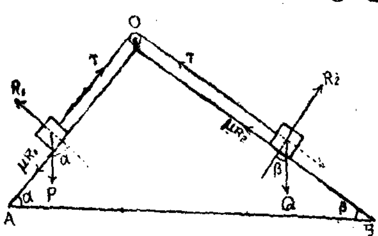
$$\therefore \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{\mu_1 W_1 + \mu_2 W_2}{W_1 + W_2}\right)$$

மாதிரி 101 : α, β சாய்வுக் கோணங்களையுடைய ஒரு இரட்டைச் சாய்தளத்தின் இரு தளங்களின் மேலும் P, Q என்னும் இரு எடைகள் வைக்கப்பட்டு, தளங்களின் பொது உச்சி வழியே செல்லும் ஒரு நேர்த்தியான நூலினால் இணைக்கப்பட்டுச் சமநிலையில் வைக்கப்பட்டுள்ளன. இவற்றுள் θ ஆனது தளத்தில் கீழ்முகமாக நகரும் தருவாயிலுள்ளது. λ என்பது உராய்வுக் கோணமெனில் சமநிலை கெடாமல் Pயுடன் சேர்க்கப்படக்கூடிய அதிகபட்ச எடை $\dfrac{Q \sin 2\lambda . \sin(\alpha+\beta)}{\sin^2\alpha - \sin^2\lambda}$ என்று காட்டுக.

தீர்வு

OA, OB என்பன பொது உச்சியுடன்கூடிய ஒரு இரட்டைச் சாய்தளத்தின் இரு தளங்கள். இவற்றின் சாய்வுக் கோணங்கள் முறையே α, β ஆகும். OAயின் மேல் P என்னும் எடையும் OBயின் மேல் Q என்னும் எடையும் வைக்கப்பட்டு O வழியே செல்லும் ஒரு நூலினால் இணைக்கப்பட்டுள்ளன.

எடைகளிரண்டும் ஒரே நூலினால் இணைக்கப்பட்டுள்ளதால் இவற்றில் இழுவிசைகள் சமமாகவும் எதிராகவும் செயல்படும். இச்சம எதிர் இழு விசைகளை T என்று குறிப்பிடுக.



படம் 149

P, Q ஆகிய இரு எடைகளும் நிலைக்குத்தாகக் கீழ் நோக்கிச் செயல்படும். இவற்றின்மீது தளங்களின் எதிர்விசைகளாகிய R_1, R_2 என்பன தளங்களுக்குச் செங்குத்தாகச் செயல்படும்.

எடை Q கீழ்முகமாக நகரும் நிலையிலிருப்பதால் OB தளத்தில் உராய்வு விசை μR_2 மேல் முகமாகவும், OA தளத்தில் உராய்வு விசை μR_1 கீழ் முகமாகவும் செயல்படும்.

Pயின் சம நிலையைக் கருதுக.

$$R_1 = P\cos\alpha$$
$$T = \mu R_1 + P\sin\alpha$$
$$= \mu P\cos\alpha + P\sin\alpha$$
$$= P(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)$$
$$= P\left(\frac{\sin\lambda}{\cos\lambda}\cos\alpha + \sin\alpha\right)$$
$$= P\frac{(\sin\lambda\cos\alpha + \cos\lambda\sin\alpha)}{\cos\lambda}$$
$$= P\frac{\sin(\alpha+\lambda)}{\cos\lambda} \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

இப்பொழுது Qவின் சமநிலையைக் கருதுக.

$$R_2 = Q\cos\beta$$
$$T + \mu R_2 = Q\sin\beta$$
$$\therefore T = Q\sin\beta - \mu R_2$$
$$= Q\sin\beta - \mu Q\cos\beta$$
$$= (\sin\beta - \frac{\sin\lambda}{\cos\lambda}\cos\beta)$$
$$= Q\frac{\sin(\beta-\lambda)}{\cos\lambda} \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

(1), (2) ஆகிய சமன்பாடுகளிலிருந்து,

$$Q\sin(\beta-\lambda) = P\sin(\alpha+\lambda) \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

இப்பொழுது, சம நிலை கெடாமல் Pயுடன் சேர்க்கக்கூடிய அதிகபட்ச எடையை W என்று குறிப்பிடுக.

எனவே, OA தளத்தில் $(P+W)$ என்னும் எடையும் OB தளத்தில் Q என்னும் எடையுமிருக்கும். மேலும் $(P+W)$ எடையானது கீழ்நோக்கி நகரும் தருவாயிலிருக்கும். எனவே, OA தளத்தில் உராய்வுவிசை μR_1 மேல் முகமாகவும், OB தளத்தில் உராய்வு விசை μR_2 என்பது கீழ்முகமாகவும் செயல்படும். எனவே, இவற்றின் சம நிலைச் சமன்பாட்டைச் சமன்பாடு (3) இலிருந்து Qஐ $(P+W)$ ஆகவும், Pஐ Q ஆகவும் α, βஐ முறையே β, α ஆக மாற்றிப் பெறலாம்.

$$\therefore (P+W)\sin(\alpha-\lambda) = Q\sin(\beta+\lambda) \quad \ldots \quad (4)$$

அதாவது, $P\sin(\alpha-\lambda) + W\sin(\alpha-\lambda) = Q\sin(\beta+\lambda)$

(3) இலிருந்து $P = \frac{Q \sin(\beta - \lambda)}{\sin(\alpha + \lambda)}$ என்னும் மதிப்பைப் பிரதியிடவும்.

$$\frac{Q \sin(\beta - \lambda)}{\sin(\alpha + \lambda)} \sin(\alpha - \lambda) + W \sin(\alpha - \lambda) = Q \sin(\beta + \lambda)$$

$$\therefore W \sin(\alpha - \lambda) = Q \sin(\beta + \lambda) - Q \frac{\sin(\beta - \lambda)}{\sin(\beta + \lambda)} \alpha - \lambda(\sin\ )$$

$$W = Q \frac{\sin(\beta + \lambda)}{\sin(\alpha - \lambda)} - Q \frac{\sin(\beta - \lambda)}{\sin(\alpha + \lambda)}$$

$$= Q \frac{\sin(\beta + \lambda) \sin(\alpha + \lambda) - \sin(\beta - \lambda) \sin(\alpha - \lambda)}{\sin(\alpha - \lambda).\ \sin(\alpha + \lambda)}$$

$$= Q \frac{\frac{1}{2}[\cos(\beta - \alpha) - \cos(\lambda + \beta + 2\lambda)] - \frac{1}{2}[\cos(\beta - \alpha) - \cos(\alpha + \beta - 2\lambda)]}{\sin^2\alpha - \sin^2\lambda}$$

$$= -\frac{Q}{2} \frac{[\cos(\alpha + \beta + 2\lambda) - \cos(\alpha + \beta - 2\lambda)]}{\sin^2\alpha - \sin^2\lambda}$$

$$= \frac{Q}{2} \quad \frac{2 \sin(\alpha + \beta).\ \sin 2\lambda}{\sin^2\alpha - \sin^2\lambda}$$

$$= Q \frac{\sin 2\lambda.\ \sin(\alpha + \beta)}{\sin^2\alpha - \sin^2\lambda}$$

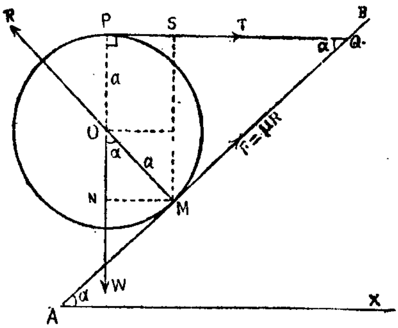
மாதிரி 102: கிடைத்தளத்துடன் α கோணச் சாய்விலிருக்கும் ஒரு உராய்வுடைய சாய் தளத்தின் மேல் W எடையுள்ள ஒரு கோளம் அதன் உச்சிப் புள்ளியில் கிடைத்தளமாகக் கட்டப்பட்டுள்ள ஒரு நாலினால் சம நிலையில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. உராய்வுக் கோணம் $\frac{\alpha}{2}$ ஐவிடவும் அதிகமாயிருக்குமென்று நூலின் இழுவிசை $W \tan \frac{\alpha}{2}$ என்றும் காட்டுக.

தீர்வு

AB என்பது α சாய்வுடைய ஒரு சாய்தளம். O என்பது இச் சாய்தளத்தின் மேல் வைக்கப்பட்டுள்ள ஒரு கோளம் P என்பது கோளத்தின் மிக உயர்ந்த புள்ளி. Pயில் கட்டப்பட்டுள்ள ஒருகயிறு கிடைத்தளமாகச் சாய்தளத்துடன் Q என்னும்

புள்ளியில் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. M என்பது சாய் தளத்துடன் கோளத்தின் தொடு புள்ளி.

கோளத்தின் எடை W என்பது O வழியே ↓ செயல்படும். தொடுபுள்ளி M இல் சாய்தளத்தின் நேர்குத்தெதிர் விசை R தளத்திற்குச் செங்குத்தாகச் செயல்படும். கோளம் கீழ்முக-



படம் 150

மாக உருள முயலுமாகையால் உராய்வுவிசையாகிய μR என்பது சாய்தளத்தில் மேல் முகமாகச் செயல்படும். நூலில் இழுவிசை T ஆனது PQ திசையில் செயல்படும்.

சாய்தளத்திற்கு இணையாகவும் செங்குத்தாகவும் விசைப் பிரிப்புச் செய்க.

$$\mu R + T \cos \alpha\ W = \sin \alpha, \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$R = T \sin \alpha + W \cos \alpha \quad \ldots \quad (2)$$

கோளத்தின் ஆரை a என்க. Mஐப் பற்றிய திருப்புத் திறன் காண்க.

$$W.\ MN = T.\ MS$$

$$W.\ a \sin \alpha = T\ (a + a \cos \alpha)$$

ஆல்லது, $W \sin \alpha = T\ (1 + \cos \alpha)$

$$\therefore \quad T = \frac{W \sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

$$= \frac{W.\ 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{1 + 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1}$$

$$= W \tan \frac{\alpha}{2} \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

சமன்பாடு (1) இலிருந்து,

$$F = \mu R = W \sin \alpha - T \cos \alpha$$

$$= W \sin \alpha - W \tan \frac{\alpha}{2} \cos \alpha$$

$$= W \left(\sin \alpha - \tan \frac{\alpha}{2} \cos \alpha\right)$$

$$= \frac{W}{\cos \frac{\alpha}{2}} \left(\sin \alpha \cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \cos \alpha\right)$$

$$= \frac{W}{\cos \frac{\alpha}{2}} \sin \left(\alpha - \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$= \frac{W}{\cos \frac{\alpha}{2}} \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$= W \tan \frac{\alpha}{2}$$

$$R = T \sin \alpha + W \cos \alpha$$

$$= W \tan \frac{\alpha}{2} \sin \alpha + W \cos \alpha$$

$$= W \left(\frac{\sin \frac{\alpha}{2} \sin \alpha + \cos \alpha}{\cos \frac{\alpha}{2}}\right)$$

$$= \frac{W}{\cos \frac{\alpha}{2}} \left(\sin \frac{\alpha}{2} \sin \alpha + \cos \frac{\alpha}{2} \cos \alpha\right)$$

$$= \frac{W}{\cos \frac{\alpha}{2}} \cos \left(\alpha - \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$= \frac{W}{\cos \alpha} \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$= W.$$

கோளமானது எல்லையுராய்விலிருந்தால் $\frac{F}{R} = \mu$ ஆகும்.

ஆகவே, $\frac{F}{R} \not> \mu$.

அதாவது, $F \not> \mu R$

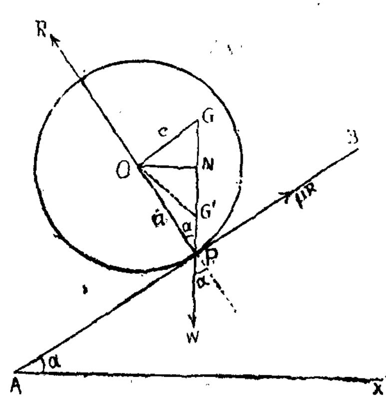
$$W \tan \frac{\alpha}{2} \not> \tan \lambda . W$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} \not> \tan \lambda$$

$$\lambda \not< \frac{\alpha}{2}$$

அல்லது, $\lambda \geqslant \frac{\alpha}{2}$

மாதிரி 103: a ஆரையுள்ள ஒரு கோளத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் அதன் மையத்திலிருந்து c எனும் தூரத்திலுள்ளது. அது α சாய்விலுள்ள ஒரு உராய்வுடைய சாய்தளத்தின் மேல் எல்லைச் சம நிலையிலிருக்கின்றது. அது $2 \cos^{-1}\left(\frac{a \sin \alpha}{c}\right)$ எனும் கோணத்திற்குத் திருப்பப்பட்டபோதிலும் எல்லைச் சம நிலையிலேயே யிருக்குமென்று காட்டுக.



படம் 151

தீர்வு

G என்பது Oஐ மையமாகக் கொண்ட ஒரு கோளத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் $OG = c$. கோளத்தின் ஆரை a.

AB என்பது α சாய்விலுள்ள ஒரு சாய்தளம், P என்பது சாய்தளத்தின்மேல் கோளத்தின் தொடுபுள்ளி.

கோளத்தின் எடை W என்பது G வழியே ↓ செயல்படும்.

Pயில் சாய்தளத்தின் எதிர்விசை R சாய்தளத்திற்குச் செங்குத்தாகச் செயல்படும்; அதாவது PO வழியே செயல்படும். கோளம் சாய்தளத்தில் கீழ்முகமாக உருள முயலுமாகையால், உராய்வு விசை μR என்பது மேல்முகமாகச் செயல்படும்.

கோளமானது, W, R, μR ஆகிய மூன்று விசைகளினால் சம நிலையிலிருக்கின்றது. இவற்றுள் R, μR என்பன P வழியே செல்வதால், Wம் P வழியே செல்லும். அதாவது, GP என்பது நிலைக்குத்து கோடு ஆகும்.

இப்பொழுது Oஐ மையமாகவும், $GO = c$ஐ ஆரையாகவும் கொண்டு வரையப்படும் வட்டவில் GPஐ G'இல் வெட்டுவதாகக் கொள்க ஆகவே, கோளத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் G' என்னும் நிலையை அடையுமாறு கோளம் திருப்பப்பட்ட போதிலும் சம நிலையிலேயே யிருக்குமென்றறிகிறோம்.

எனவே, கோளம் உருண்டு விடாமல் திருப்பப்படக்கூடிய கோணம்.

$$= \angle GOG'$$
$$= 2\angle GON, \ (ON \perp GG')$$

ஆனால் $\triangle GON$இல் $\cos \angle GON = \dfrac{ON}{OG}$

$$= \frac{a \sin \alpha}{C}$$

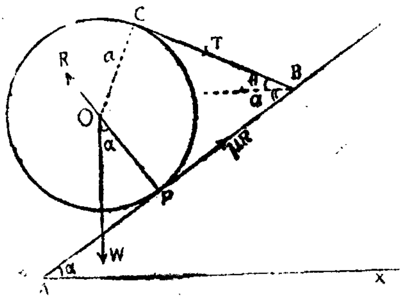
$$\therefore \angle GON = \cos^{-1}\left(\frac{a \sin \alpha}{c}\right)$$

ஆகவே, எல்லைச் சமநிலை கெடாதவாறு கோளத்தை $2\cos^{-1}\left(\dfrac{a \sin \alpha}{c}\right)$ கோணத்திற்குத் திருப்பலாம்.

மாதிரி **104**: ஒரு வட்ட உருளை அதனுடைய அச்சு கிடைத்தளமாகயிருக்குமாறு α கோணச் சாய்வுடைய $(\alpha > \lambda)$ ஒரு உராய்வுடைய சாய்தளத்தின் மேல் வைக்கப்பட்டு, உருளையின் அச்சுக்குச் செங்குத்தாகவும், உருளைக்குத் தொடுகோடாகவுமுள்ள ஒரு நூலினால் தாங்கப்படுகிறது. கிடைத்தளத்துடன் நூலின் ஏற்றுக்கொள்ளத்தக்க அதிகபட்சச் சாய்வு $\cos\theta = \dfrac{\sin(\alpha - \lambda)}{\sin \lambda}$ என்னும் தொடர்பின் மூலம் தரப்படுமென்று காட்டுக.

தீர்வு

AB என்பது கிடைத்தளத்துடன் ∝ சாய்விலுள்ள ஒரு சாய்தளம் *O* என்பது அத்தளத்தின் மேலுள்ள ஒரு உருளையின் குறுக்கு வெட்டுப் பகுதியின் மையம். *A* என்பது அவற்றின் தொடுபுள்ளி. உருளையின் மேலுள்ள *C* என்னும்



படம் 152

புள்ளியும் சாய்தளத்திலுள்ள *B* என்னும் புள்ளியும் ஒரு நூலினால் இணைக்கப்பட்டுள்ளன.

உருளையின் எடையாகிய *W* என்பது *O* வழியே ↓ செயல்படும். சாய்தளத்தின் எதிர்விசை *R* என்பது *P* வழியே சாய்தளத்திற்குச் செங்குத்தாகச் செயல்படும். உருளையானது கீழ் நோக்கி உருள முயலுமாகையால், உராய்வு விசை μR என்பது மேல் நோக்கிச் செயல்படும். நூலின் இழுவிசை *T* ஆனது *C B* வழியே செயல்படும்.

உருளையின் ஆரை *a* என்றும், கிடைத்தளத்துடன் நூலின் சாய்வு θ என்றும் கொள்க. $\therefore \angle CBP = (\theta + \propto)$

O ஐப் பற்றிய திருப்புத்திறன்கள் காண்க.

$$T \ a = \mu R \cdot a$$

$$\therefore \quad T = \mu R. \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (1)$$

சாய்தளத்திற்கு இணையாகவும் செங்குத்தாகவும் விசைப் பிரிப்புச் செய்க.

$$\mu R + T \cos(\theta + \propto) = W \sin \propto \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (2)$$

$$R = W \cos \propto + T \sin(\theta + \propto) \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (3)$$

(1) இலிருந்து *T* யின் மதிப்பை (2), (3) இல் பிரதியிடவும்.

$$\mu R + \mu R \cos(\theta + \propto) = W \sin \propto,$$

$$R = W \cos \propto + \mu R \sin(\theta + \propto)$$

அதாவது, $\mu R [1+\cos(\theta+\alpha)] = W \sin\alpha,$

$$R[1-\mu\sin(\theta+\alpha)] = W\cos\alpha,$$

வகுக்கவும்.

$$\mu\frac{[1+\cos(\theta+\alpha)]}{1-\mu\sin(\theta+\alpha)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

அல்லது, $\mu\cos\alpha[1+\cos(\theta+\alpha)] = \sin\alpha[1-\mu\sin(\theta+\alpha)$

$$\mu[\cos\alpha\cdot\cos(\theta+\alpha)+\sin\alpha\cdot\sin(\theta+\alpha)] = \sin\alpha-\mu\cos\alpha)$$

$$\mu\cos(\alpha-\theta-\alpha) = \sin\alpha-\mu\cos\alpha$$

$$\mu\cos\theta = \sin\alpha-\mu\cos\alpha$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{\sin\alpha}{\mu} - \cos\alpha$$

$$= \sin\alpha\cdot\frac{\cos\lambda}{\sin\lambda} - \cos\alpha$$

$$= \frac{\sin\alpha\cdot\cos\lambda-\cos\alpha\cdot\sin\lambda}{\sin\lambda}$$

$$= \frac{\sin(\alpha-\lambda)}{\sin\lambda}$$

மாதிரி 105 : முற்றிலும் உராய்வுடைய சாய்தளம் ஒன்று கிடைத்தளத்துடன் α கோணத்தில் சாய்ந்துள்ளது. அதன் மேல் சமநிலையிலிருக்கக்கூடிய நீள் வட்டத் தகட்டின் (elliptic lamina) குறைந்த பட்ச "மையவகற்சி" (eccentricity) $\sqrt{\frac{2\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}$ என்று நிறுவுக.

தீர்வு

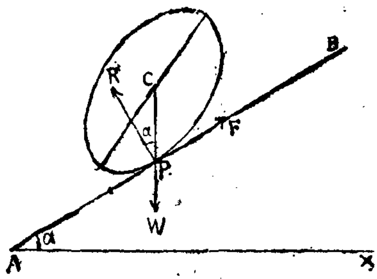
AB என்பது α கோணச் சாய்விலுள்ள ஒரு சாய்தளம். C என்பது W எடையுள்ள ஒரு நீள்வட்டத் தகட்டின் மையம் இது சாய்தளம் AB யின் மேல் சமநிலையில் வைக்கப் பட்டுள்ளது. P என்பது அவற்றின் தொடுபுள்ளி.

நீள்வட்டத் தகட்டின் அச்சுக்களை x, y அச்சுக்களாகக் கொண்டு அதன் சமன்பாட்டை $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ வென்று கொள்க. நீள்வட்டத்தின் மையவகறசி e என்க.

நீள்வட்டத்தைச் சமநிலையில் வைத்திருக்கும் விசைகளாவன.

(i) C வழியே செயல்படும் அதன் எடை $W \downarrow$

(ii) P வழியே தளத்திற்குச் செங்குத்தாகச் செயல் படும் நேர்குத்தெதிர் விசை R



படம் 153

(iii) P வழியே சாய்தளத்தில் மேல்முகமாகச் செயல் படும் உராய்வு விசை μR செல்வதாலும், W-ம் P வழியே செல்லும். அதாவது, CP என்பது நிலைக்குத்துக் கோடாகும்.

$$\therefore \angle CPR = \alpha.$$

P யின் அச்சுத்தூரங்கள் $(a \cos \theta, \ b \sin \theta)$ என்க.

P யில் நீள்வட்டத்தின் நேர்குத்துக் கோட்டின் சமன்பாடு $\dfrac{ax}{\cos \theta} - \dfrac{by}{\sin \theta} = a^2 - b^2$ ஆகும்.

$$\therefore \ PR \text{ இன் சரிவு} = \frac{-a/\cos \theta}{-b/\sin \theta} = \frac{a \sin \theta}{b \cos \theta} = m_1 \text{ என்க.}$$

$$PC\text{யின் சரிவு} = \frac{b \sin \theta}{a \cos \theta} = m_2 \text{ என்க.}$$

α என்பது PR, PC ஆகியவற்றிற்கிடையேயுள்ள கோணம்.

$$\therefore \quad \tan \alpha = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

$$= \frac{\dfrac{a \sin \theta}{b \cos \theta} - \dfrac{b \sin \theta}{a \cos \theta}}{1 + \dfrac{a \sin \theta}{b \cos \theta} \cdot \dfrac{b \sin \theta}{a \cos \theta}}$$

$$= \frac{a^2 \sin \theta \cos \theta - b^2 \sin \theta \cos \theta}{ab (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}$$

$$= \frac{a^2 - b^2}{ab} \sin\theta\cos\theta$$

$$= \frac{a^2 - b^2}{2\,ab} \sin 2\theta$$

ஆனால் $b^2 = a^2(1 - e^2)$

$$\therefore\ a^2 - b^2 = a^2 e^2$$

$$\therefore\ \tan\alpha = \frac{a^2 e^2}{2\,ab} \sin 2\theta$$

$$= \frac{a^2 e^2 \sin 2\theta}{2a \cdot a\sqrt{1 - e^2}}$$

$$= \frac{e^2}{2\sqrt{1 - e^2}} \text{san } 2\theta$$

அல்லது, $\sin 2\theta = \frac{2}{e^2}\sqrt{1 - e^2}\tan\alpha$

$= f(e)$ என்க. (ஏனெனில் α ஒரு மாறிலி)

θஐக் குறித்து வகையீடு செய்க.

$$2\cos 2\theta = f'(e)\frac{de}{d\theta}$$

e ஆனது மீச்சிறு மதிப்பைப் பெறும்போது, $e\ (f)$யின் மதிப்பு மீப்பெரிதாக யிருக்கும்.

எனவே, $f(e)$இன் மீப் பெருமதிப்புக்கு $f'(e) = 0$ ஆகும்.

$$\therefore\ \cos 2\theta = 0$$

அல்லது, $2\theta = \pi/2$,

$$\theta = \pi/4.$$

மேலும் $\sin 2\theta = \frac{2}{e^2}\sqrt{1 - e^2}\tan\alpha$

$\theta = \pi/4$ எனில், $1 = \frac{2}{e^2}\sqrt{1 - e^2}\tan\alpha$

$$e^2 = 2\sqrt{1 - e^2}\tan\alpha$$

$$e^4\cot^2\alpha = 4(1 - e^2)$$

$$e^4\cot^2\alpha + 4e^2 - 4 = 0$$

$$\therefore\ e^2 = \frac{-4 + \sqrt{16 + 16\cot^2\alpha}}{2\cot^2\alpha}$$

$$= \frac{-4 + 4\sqrt{1 + \cot^2\alpha}}{2\cot^2\alpha}$$

$$= \frac{-2 \pm 2\operatorname{cosec}\alpha}{\cot^2\alpha}$$

$$= \frac{-2+2\operatorname{cosec}\alpha}{\cot^2\alpha}$$ (எதிரடையாளம் ஏற்புடைத் தன்று)

$$= 2\left(\frac{1}{\sin\alpha} - 1\right)\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$

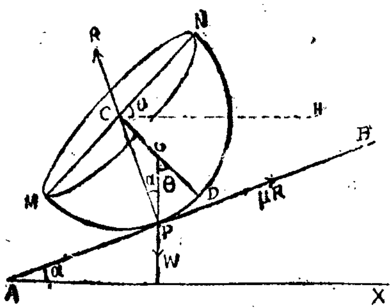
$$= \frac{2\sin\alpha(1-\sin\alpha)}{\cos_2\alpha}$$

$$= \frac{2\sin\alpha(1-\sin\alpha)}{1-\sin^2\alpha}$$

$$= \frac{2\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$$

$$\therefore e = \sqrt{\frac{2\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}$$

மாதிரி 106 : கிடைத்தளத்துடன் α கோணச் சாய்வி லுள்ள ஒரு சாய்தளத்தின்மேல் ஒரு அரைக்கோளம் அதன் வளைபரப்பு சாய்தளத்தைத் தொட்டுக்கொண்டிருக்குமாறு சம நிலையிலிருக்கிறது. αஎன்பது $\sin^{-1}\frac{3}{8}$ க்குக் குறைவாகவும்



படம் 154

உராய்வுக் கோணத்திற்குக் குறைவாகவுமிருந்தால் கிடைத் தளத்துடன் அரைக்கோளத்தின் அடித்தளத்தின் சாய்வு $\sin^{-1}(\frac{8}{3}\sin\alpha)$ என்று காட்டுக.

தீர்வு

AB என்பது கிடைத்தளத்துடன் α சாய்விலுள்ள ஒரு சாய்தளம். *C*ஐ மையமாகவுடைய *W* எடையுள்ள ஒரு

அரைக்கோளம் அதன்மேல் சமநிலையிலுள்ளது. P என்பது தொடுபுள்ளி. a என்பது அரைக்கோளத்தின் ஆரையெனில், அதன் புவியீர்ப்பு மையம் G ஆனது அதன் அச்சாகிய CDயின் மேல் $CG=\frac{3a}{8}$ தூரத்திலிருக்கும். ("புவியீர்ப்பு மையம்" — அத்தியாயம் பார்க்கவும்)

∵ அரைக்கோளத்தின் எடையாகிய W என்பது Gவழியே ↓ செயல்படும். Pயில் சாய்தளத்தின் எதிர்விசையாகிய R சாய்தளத்திற்குச் செங்குத்தாகவும், PC வழியேயும் செயல்படும்.

அரைக்கோளம் கீழ்நோக்கி நழுவ முயலுமாகையால் Pயில் உராய்வு விசையாகிய μR என்பது சாய்தளத்தில் மேல்முகமாகச் செயல்படும். $R, \mu R, W$ என்பன அரைக்கோளத்தைச் சம நிலையில் வைத்துள்ளன. இவற்றுள் $R, \mu R$. என்பன P வழியே செல்வதால், W-ம் P வழியே செல்லும். அதாவது, QP என்பது G வழி நிலைக்குத்துக் கோடாகும்.

$$\therefore \angle GPR=\alpha$$

MN என்பது அரைக்கோளத்தின் அடிப்பாகம். CH என்பது C வழிக்கிடைக்கோடு. MNக்கும் CHக்கு மிடையேயுள்ள கோணம் θ என்க.

அதாவது $\angle PGD=\theta$.

$\triangle$ CPGயில், $$\frac{CP}{\sin \angle CGP}=\frac{CG}{\sin \angle CPG}$$

அதாவது, $$\frac{a}{\sin (180-\theta)}=\frac{\frac{3}{8}a}{\sin\alpha}$$

$$\frac{a}{\sin\theta}=\frac{3a}{8\sin\alpha}$$

$$\sin\theta=\frac{8}{3}\sin\alpha$$

அல்லது, $$\theta=\sin^{-1}\left(\frac{8}{3}\sin\alpha\right)$$

θ-இன் மதிப்பு சாத்தியமாக வேண்டுமெனில், $\sin\theta<1$ ஆகயிருத்தல் வேண்டும்.

$$\therefore \frac{8}{3}\sin\alpha<1$$

$$\sin\alpha<\tfrac{3}{8}$$

$$\alpha<\sin^{-1}(\tfrac{3}{8})$$

மேலும், α என்பது F, R ஆகியவற்றின் விளைவு விசைக் கோடாகிய PGக்கும்,

நேர்குத்தெதிர் விசைக் கோடாகிய PCக்குமிடையேயுள்ள கோணமாதலின், அது எல்லை உராய்வுக் கோணத்தைவிட அதிகமாயிருக்க முடியாது.

அதாவது, $\alpha < \lambda$ ஆகும்.

பயிற்சி 13

(1) உராய்வுடைய ஒரு சாய்தளத்தின்மேல் வைக்கப்பட்டுள்ள 60 கி. கி. எடையுள்ள ஒரு பொருள் சாய்தளத்தின் மீப்பெருச் சரிவுக் கோட்டின் வழியாக, தளத்திற்கு இணையாக 24 கி. கி. எடை விசையினால் தாங்கப்படும்போது தளத்தில் கீழ்முகமாக நகரும் தருவாயிலும், 36 கி. கி. எடை விசையினால் தாங்கப்படும்போது தளத்தில் மேல் நோக்கி நகரும் தருவாயிலுமிருப்பின், உராய்வுக் குணகத்தைக் காண்க.

(2) 30° சாய்வுடன்கூடிய ஒரு உராய்வுள்ள சாய்தளத்தின் மேல் 4 கி.கி. எடையுள்ள ஒரு பொருள் எல்லைச் சம நிலையிலுள்ளது. சாய்தளத்தை 60° சாய்வுக்கு உயர்த்தினால் அப்பொருளைச் சம நிலையில் தாங்குவதற்குத் தேவையான சாய்தள வழிவிசையைக் காண்க.

(3) α சாய்வுக் கோணமுடைய ஒரு உராய்வுள்ள சாய்தளத்தின் மேல், 4 கி.கி. எடையுள்ள பொருளொன்று சமநிலையிலிருக்கிறது. உராய்வுக் குணகம் $\sqrt{2}\tan\alpha$ எனில், பொருளின் சம நிலை கெடாமல் அதன்மீது செயல்படுத்தப்படக்கூடிய அதிகபட்ச கிடை விசை $W\sin\alpha$ என்று காட்டு.

(4) 500 கி. கி. பொருண்மையுள்ள ஒரு பொருள் ஒரு உராய்வுடைய சாய்தளத்தின்மேல் ஒரு கிடைக் கயிற்றினால் சம நிலையில் நிறுத்தப்பட்டுள்ளது. உராய்வுக் குணகம் $\frac{1}{8}$ என்றும், கிடைத்தளத்துடன் சாய்தளத்தின் சாய்வு $\tan^{-1}(\frac{1}{2})$ என்றும் தரப்பட்டால், கயிற்றின் மீப்பெரு, மீச்சிறு இழுவிசைகளைக் காண்க.

(5) கிடைத்தளத்துடன் 75° சாய்விலுள்ள ஒரு உராய்வுடைய சாய்தளத்தின் மேல் 48 கி.கி. எடையுள்ள பொருளொன்று வைக்கப்பட்டுள்ளது. உராய்வுக்கோணம் 30° எனில், அப்பொருளைச் சம நிலையில் வைத்திருக்கக்கூடிய சாய்தளத்திற்கிணையான விசைகள் எல்லைகளைக் காண்க.

(6) ஒரு உராய்வுடைய சாய்தளத்தின்மேல் வைக்கப்பட்டுள்ள ஒரு எடை அதன் மீப்பெருச் சரிவுக் கோட்டின் வழியே செயல்படும் ஒரு விசையினுல் தாங்கப்படுகிறது. தளத்தின் சாய்வு θ ஆகயிருக்கும்போது அதைத் தாங்கக்கூடிய விசையும் சாய்வு $\frac{\theta}{2}$ ஆகயிருக்கும்போது அதைச் சாய்தளத்தில் மேல் முகமாக நகருந் தருவாயில் வைத்திருக்கக்கூடிய விசையும் சமமானுல் உராய்வுக் கோணம் $\frac{\theta}{4}$ என்று காட்டுக.

(7) கிடைத்தளத்துடன் α சாய்விலுள்ள ஒரு சாய்தளத்தில் ஒரு எடையை மேல் நோக்கி நகர்த்தக்கூடிய மீச்சிறு விசையானது அதே எடையைக் கீழே நழுவாமல் தடுக்கக்கூடிய விசையைப்போல் இருமடங்கானுல், எடைக்கும் சாய்தளத்திற்கு மிடையேயுள்ள உராய்வுக் குணகம் $\frac{1}{3}\tan\alpha$ என்று காட்டுக.

(8) வெவ்வேறு மூலப் பொருட்களாலான இருசம எடைகள் W, W என்பன ஒரு சாய்தளத்தின் மீப்பெருச் சரிவுக் கோட்டின் வழியே செல்லும் ஒரு நூலினுல் இணைக்கப்பட்டு தளத்தின்மேல் ஒய்வு நிலையிலிருக்கின்றன. கீழேயுள்ள எடைக்கும் சாய்தளத்திற்குமிடையேயுள்ள உராய்வுக்குணகம் $\frac{1}{2}$-ம், மேலேயுள்ள எடைக்கும், சாய்தளத்திற்குமிடையேயுள்ள உராய்வுக் குணகம் $\frac{3}{4}$யுமானுல், எல்லைச் சம நிலையில் சாய்தளத்தின் சாய்தளத்தின் சாய்வையும் நூலின் இழுவிசையையும் காண்க.

(9) 60°, 30° சாய்வுகளில் சம உராய்வுத் தளங்களைக் கொண்ட ஒரு இரட்டைச் சாய்தளத்தின் தளங்கள் ஒவ்வொன்றின் மேலும் முறையே 2 கி.கி., 1 கி.கி. எடைகள் வைக்கப்பட்டுள்ளன. சாய்தளத்தின் உச்சியிலுள்ள ஒரு கப்பியின் வழியே செல்லும் ஒரு நூலினுல் இவ்விரு எடைகளும் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. கனம் அதிகமான எடை தளத்தில் கீழ்முகமாக நகருந் தருவாயிலிருந்தால், உராய்வுக் குணகத்தைக் காண்க.

(10) α, β சாய்வுகளையுடைய ஒரு இரட்டைச் சாய்தளத்தின் இருதளங்களிலும் இரு சம எடைகள் வைக்கப்பட்டுள்ளன. சாய்தளத்தின் உச்சியிலுள்ள ஒரு கப்பலின் வழியே செல்லும் ஒரு நூலினுல் அவை இணைக்கப்பட்டுள்ளன. அவை

நகரும் தருவாயிலிருக்கும்போது $\mu = \dfrac{\sin\alpha - \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta}$ என்று காட்டுக.

(11) 30°, 60° சாய்வுகளிலுள்ள சம உராய்வும், சட்ட உயரமுள்ள இரு தளங்களின் பின்புறங்கள் ஒன்றையொன்று பார்த்தவாறு இருக்கும்படியாக வைக்கப்பட்டு, அவற்றின் உச்சியில் பொருத்தப்பட்டுள்ள ஒரு வழவழப்பான கப்பியின் வழியே செல்லும் ஒரு நூலின் இரு நுனிகளிலும் சம எடைகள் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. இத்தொகுதி எல்லைச் சமநிலையிலிருப் பின் உராய்வுக் குணகம் $2-\sqrt{3}$ என்று காட்டுக.

(சென்னை பி.எஸ்.ஸி. 1960 செப்., 67 ஏப்.)

(12) ஒரு கனமான வட்டத்தகடு ஒரு உராய்வுடைய சாய் தளத்தின்மேல் அதன் தளம் நிலைக்குத்தாக யிருக்குமாறு, அதன் விளிம்பிலிருந்து தொடு கோட்டின் வழியாகச் சாய்தளத் திணையாகச் செல்லும் ஒரு கயிற்றினால் ஓய்வு நிலையில் வைக்கப் பட்டுள்ளது சாய்தளத்தின் சாய்வு i எனில், உராய்வுக் குணகம் $\frac{1}{2}\tan i$ஐ விடக் குறைவாக யிருந்தால் தகடு நழுவி விடுமென்று காட்டுக.

(13) a ஆரையுள்ள ஒரு முழுநூல் உருளை அதன் அச்சு கிடைத்தளமாகயிருக்குமாறு α சாய்வுள்ள சாய்தளத்தின்மேல், உருளையின் மத்திவழியே உருளைக்குத் தொடுகோடாகவும், கிடையாகவும் செல்லும் நூலினால் நிறுத்தப்பட்டுள்ளது. உருளை யின் எடை W எனில், நூலின் இழுவிசையையும், உருளைக்கும் தளத்திற்குமிடையேயுள்ள உராய்வையும் காண்க. உருளை யானது இவ்வாறு ஓய்வுநிலையிலிருப்பதற்கான உராய்வுக் குணகத்தையும் காண்க.

(14) α சாய்வுள்ள ஒரு உராய்வுடைய சாய்தளத்தின்மேல் W எடையுள்ள சீரானகோளம் ஒன்று அதன் பரிதியின் தொடு கோடு வழியாகச் செயல்படுத்தப்பட்ட $\frac{1}{2}W\sin\alpha$ அளவுள்ள ஒரு விசையினால் சமநிலையில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. இவ்விசை யானது தளத்திற்கு இணையாகச் செயல்படவேண்டுமென்றும், உராய்வுக் குணகம் $\frac{1}{2}\tan\alpha$ஐ விடக் குறையக்கூடாதென்றும் நிறுவுக.

(15) உராய்வுக் கோணத்தைவிடக் குறைவான θ என்னும் சாய்வுக்கோணமுடைய ஒரு உராய்வுடைய சாய்தளத்தின்மேல் W எடையுள்ள கோளம் ஒன்று வைக்கப்பட்டுள்ளது தளத்

திற்கு இணையான விட்டத்தின்மேல் முனையில் கட்டப்பட்டுள்ள, $\frac{W \sin \theta}{\cos \theta - \sin \theta}$ என்னும் எடையானது கோளம் கீழ்நோக்கி உருளு வதைத் தடுக்கச் சரியாகப் போதுமானதாகுமென்று காட்டு.

(16) ஒரு உராய்வுடைய சாய்தளத்தின்மேல் ஒரு கோளம் வைக்கப்பட்டு அதன் உச்சிப் புள்ளியுடனும் தளத்துடனும் இணைக்கப்பட்ட கிடை நூலினால் தாங்கப்பட்டுள்ளது. உராய்வுக் குணகம் μ எனில், கோளம் நகரும் தருவாயி லிருக்கும்போது சாருதளத்தின் சாய்வைக் காண்க.

(17) உராய்வுடைய கிடைத்தளம் ஒன்றின்மேல் W எடை யுள்ள சீரானகோளம் ஒன்று ஓய்வு நிலையிலுள்ளது. அதன் கிடைத்தள விட்டத்தின் ஒரு முனையில் நிலைத்தளத்தில் P என் னும் மேல்நோக்கிய விசை செயல்படுத்தப்படுகிறது. உராய்வுக் குணகம் μ எனில், சமநிலை காக்கப்படவேண்டுமானால், அவ் விசை $\frac{\mu W}{\mu+1}$ஐ விட அதிகமாகயிருக்கக் கூடாதென்று காட்டுக.

(18) λ உராய்வுக் கோணமுடைய ஒரு உராய்வுள்ள சாய் தளத்தின் மேல் ஒரு அரைக் கோளக்குண்டு (உள்ளீடற்றது) ஓய்வுநிலையில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. கிடைத்தளத்துடன் அதன் அடித்தளத்தின் சாய்வு $\sin^{-1}(2\sin\lambda)$ஐ விட அதிகமாகயிருக்க முடியாதென்று காட்டு.

(19) W எனும் எடையுள்ள ஒரு திண்ம அரைக்கோளம் அதன் வளைபரப்பு ஒரு உராய்வுடைய சாய்தளத்தின் மேலிருக் குமாறு எல்லைச் சமநிலையிலிருக்கிறது அதன் விளிம்புடன் இணைக்கப்பட்ட W_1 என்ற எடையினால் அதன் சமதளமுகம் கிடைத்தளத்திலிருக்குமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது. உராய்வுக் குணகம் $\frac{W_1}{\sqrt{W(W+2W_1)}}$ என்று காட்டு.

(பி. எஸ். ஸி., சென்னை 1969 ஏப்., மதுரை '70 ஏப்.)

(20) W, W^1 எடைகளுள்ள இரு கோளங்கள் இரு வெவ் வேறு சாய்தளங்களின்மேல் ஓய்விலிருக்கின்றன. கோளங் களின் உச்சிப் புள்ளிகள் அவ்விரு தளங்களின் பொதுக் கிடைத்தள ஓரத்திற்குச் செங்குத்தாயும், கிடையாகவும் செல் லும் ஒரு நூலினால் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. கோளங்களுக்கும் தளங்களுக்குமிடையேயுள்ள உராய்வுக் குணங்களை முறையே μ, μ^1 எனில், கோணங்கள் ஒவ்வொன்றும் கீழ்முகமாக நகரும் $\mu W = \mu^1 W^1$ என்று காட்டுக.

உராய்வுடைய கிடைத்தளம், நிலைத்தளம் ஆகியவற்றின்மீது தொடுகையிலிள்ள பொருட்களின் சமநிலை

கனமான கோலொன்று அதன் ஒரு முனை உராய்வுடைய ஒரு கிடைத்தளத்தின மீதும், மறுமுனை உராய்வுடைய ஒரு நிலைக்குத்துக்தளத்தின்மீதும் படிந்துள்ள நிலையில் எல்லைச் சமநிலையிலிருப்பதாகக் கொள்க.

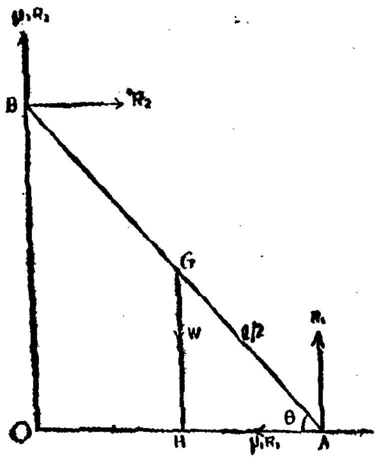
கோலின் எடை அதன் புவியீர்ப்பு மையத்தின் வழியே நிலைக்குத்தாகக் கீழ்நோக்கிச் செயல்படும். கிடைத்தளத்திலுள்ள முனையானது நிலைக்குத்துத் தளத்திற்கு அப்பால் நகரும் நிலையிலிருக்குமாகையால், உராய்வு விசையானது கிடைத்தளத்தில் நிலைக்குத்துத் தளத்தை நோக்கிச் செயல்படும். கிடைத்தளத்தின் எதிர்விசை தொடுபுள்ளிவழியே அத்தளத்திற்குச் செங்குத்தாகச் செயல்படும். கோலின் மேல் முனையானது நிலைக்குத்துத் தளத்தில் கீழ்நோக்கி நகர முயலுமாகையால், உராய்வு விசை நிலைக்குத்துத்தளத்தில் தொடுபுள்ளி வழியே மேல் நோக்கிச் செயல்படும். நிலைக்குத்துத் தளத்தின் எதிர் விசையானது தொடுபுள்ளிவழியே அத்தளத்திற்குச் செங்குத்தாகச் செயல்படும். இவை தவிர வேறு ஏதேனும் விசைகள் செயல்படின் அவற்றின் செயற்பாடுகளையும் கணக்கில் சேர்த்துக் கொள்ளவேண்டும். இவ்வாறு செயல்படும் விசைகளையெல்லாம் நிர்ணயித்தபின், எல்லா விசைகளையும் கிடைத் திசையிலும், நிலைக்குத்துத் திசையிலும் சமநிலை நிபந்தனைகளுக்கேற்ப விசைப்பிரிப்புச் செய்து இருவிசைச் சமன்பாடுகளைப் பெறலாம். பின் கோலின் ஏதாவதொரு முனையைப் பற்றிய திருப்புத்திறன் சமன்பாடு அமைத்து, இம் மூன்று சமன்பாடுகளையும் தீர்த்துத் தெரியாத கணியங்களைப் பெறலாம். பின்வரும் மாதிரிக் கணக்குகளிலிருந்து இவ்விதிமுறைகளை நன்கு அறிந்து கொள்ளலாம்.

மாதிரி 107 : l நீளமும் W எடையுமுள்ள சீரான ஏணியொன்று உராய்வுடைய ஒரு சுவரின்மீதும் தரையின்மீதும் அழுத்திக்கொண்டு நிற்கிறது. தரையிலும் சுவரிலும் உராய்வுக் குணகங்கள் முறையே μ_1, μ_2 எனில், கிடைத்தளத்துடன் ஏணி ஏற்படுத்துகின்ற குறைந்தபட்ச சாய்வைக் காண்க.

தீர்வு

AB என்ற ஏணியின் முனை A ஆனது OA என்ற உராய்வுடைய தரைமீதும் முனை B யானது OB என்ற உராய்வுடைய சுவரின்மீதும் படிந்த நிலையில் நிற்கின்றது. $AB = l$.

ஏணி சீரானதாகையால் அதன் எடை W ஆனது ஏணியின் நடுப்புள்ளியாகிய Gயின் வழியே நிலைக்குத்தாகச் செயல்படும். தரையுடன் ஏணியின் சாய்வு θ என்க. θ குறைந்தபட்ச மதிப்புடன் இருக்கும்போது ஏணியானது எல்லைச் சமநிலையிலிருக்கும். எனவே, முனை Aயானது OA வழியாகச் சுவருக்கு அப்பாலும், Bயானது BO வழியாகத் தரையை நோக்கியும் நகர



படம் 155

முயலும். எனவே, Aயில் உராய்வு விசை $\mu_1 R_1$ என்பது AO திசையிலும், $\mu_2 R_2$ என்பது OB திசையிலும் செயல்படும்.

ஏணி எல்லைச் சமநிலையிலிருக்கிறது. கிடைத் திசையிலும் நிலைக்குத்துத் திசையிலும் விசைப்பிரிப்புச் செய்க.

$$R_2 = \mu_1 R_1 \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$R_1 + \mu_2 R_2 = W \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

முனை Aயைப் பற்றித் திருப்புத்திறன்கள் காண்க.

$$W.\ HA = R_2 .\ OB + \mu_2 R_2 .\ OA \quad \ldots \quad (3)$$

ஆனால் $AB = l$ ஆகையால் $AG = \frac{l}{2}$

$$\therefore W \frac{l}{2} \cos\theta = R_2\, l \sin\theta + \mu_2 R_2\, l \cos\theta.$$

அல்லது, $$W = 2 R_2 \tan\theta + 2\mu_2 R_2 \quad \ldots \quad (3)$$

(2) இலிருந்து, $R_1 = W-\mu_2 R_2$
$= 2R_2 \tan\theta + 2\mu_2 R_2 - \mu_2 R_2$
$= 2R_2 \tan\theta + \mu_2 R_2$

(1) இலிருந்து, $R_2 = \mu_1 R_1$
$= 2\mu_1 R_2 \tan\theta + \mu_1\mu_2 R_2$

அதாவது, $1 = 2\mu_1 \tan\theta + \mu_1\mu_2$

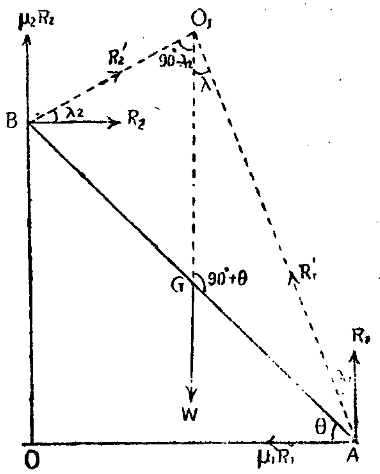
$\therefore\ 2\mu_1 \tan\theta = 1-\mu_1\mu_2$

$$\tan\theta = \frac{1-\mu_1\mu_2}{2\mu_1}$$

ஆகவே, கிடைத்தளத்துடன் ஏணி சாய்ந்திருக்கக்கூடிய குறைந்தபட்ச கோணம் $\tan^{-1}\left(\frac{1-\mu_1\mu_2}{2\mu_1}\right)$ ஆகும்.

திரிகோணச் சூத்திரமுறை

Aயில் செயல்படும் $R_1, \mu_1 R_1$ ஆகியவற்றின் விளைவு விசையை R_1' என்றும், Bயில் செயல்படும் $R_2, \mu_2 R_2$ ஆகியவற்றின் விளைவு விசையை R_2' என்றும் குறிப்பிடுக. ஆகவே,



படம் 156

R_1' என்பது Aயில் தரையின் விளைவு எதிர்விசையாகும். இது போல் R_2' என்பது Bயில் சுவரின் விளைவு எதிர்விசையாகும்.

ஏணியானது எல்லைச் சம நிலையிலிருப்பதால், Aயில் R_1, R_1' ஆகியவற்றிற்கிடையேயுள்ள கோணம் தரையின் எல்லையுராய்

-வுக் கோணமாகும். இவ்வுராய்வுக் கோணம் λ_1 எனில், $\tan\lambda_1 = \mu_1$ ஆகும்.

இதுபோல், Bயில் R_2, R_2' ஆகியவற்றிற்கிடையேயுள்ள கோணம் சுவரின் எல்லையுராய்வுக் கோணம் λ_2 எனில், $\tan\lambda_2 = \mu_2$ ஆகும்.

இப்பொழுது ஏணியானது W, R_1' R_2' ஆகிய விசைகளினால் எல்லைச் சம நிலையில் நிற்கிறது. ஆகவே, இம்மூன்று விசைகளும் O_1 என்றும் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும்.

$\triangle AO_1B$யில் திரிகோணச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துக.

$$BG : GA = 1:1$$

$\angle OAB = \theta$ எனில், $\angle O_1GA = (90° + \theta)$

$$\angle BO_1G = (90° - \lambda_2);\ \angle GO_1A = \lambda_1$$

$$\therefore\ (1+1)\cot\angle O_1GA = 1\cot\angle BO_1G - 1\cot\angle GO_1A$$

$$2\cot(90° + \theta) = \cot(90° - \lambda_2) = \cot\lambda_1$$

$$-2\tan\theta = \tan\lambda_2 - \frac{1}{\tan\lambda_1}$$

$$= \mu_2 - \frac{1}{\mu_1}$$

$$= \frac{\mu_1\mu_2 - 1}{\mu_1}$$

$$\therefore\ \tan\theta = \frac{1 - \mu_1\mu_2}{2\mu_1}$$

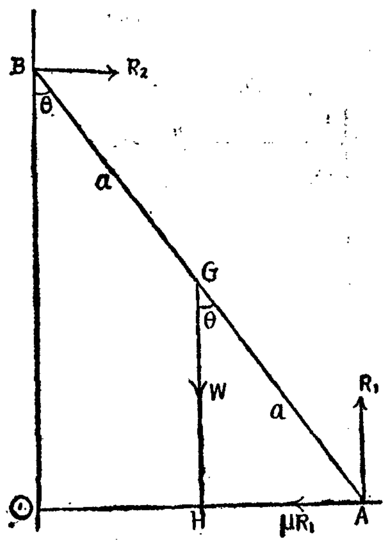
மாதிரி 108: *சீரான ஏணியொன்று அதன் கீழ்முனை* உராய்வுடைய ஒரு கிடைத்தளத்தின் மேலும், மேல் முனை ஒரு வழவழப்பான நிலைக்குத்துச் சுவரின் மீதும் இருக்குமாறு சம நிலையிலுள்ளது. நிலைக்குத்துடன் ஏணியின் சாய்வு θ என்றும், உராய்வுக் குணகம் μ என்றும் கொண்டு, $\tan\theta = 2\mu$ என்று நிறுவுக.

தீர்வு

AB என்னும் ஏணியின் கீழ்முனை A யானது உராய்வுடைய தரையின் மேலும், மேல் முனை Bயானது வழவழப்பான சுவரின் மீதும் படிந்துள்ளன. ஏணி சீரானதாகையால் அதன் எடை W என்பது நடுப்புள்ளி G வழியே ↓ செயல்படும்.

Aயில் தரையின் நேர்குத்தெதிர் விசை R_1 என்பது தரைக்குச் செங்குத்தாகவும், உராய்வு விசை μR_1 என்பது AO திசையில் சுவரை நோக்கியும் செயல்படும்.

B யில் சுவர் வழவழப்பாகயிருப்பதால் சுவரின் நேர்குத்தெதிர் விசை R_2 மட்டுமே சுவருக்குச் செங்குத்தாகச் செயல்படும்.



படம் 157

ஏணியின் நீளம் $AB=2a$ என்று கொள்க.

$$\therefore \quad AG=GB=a.$$

விசைகளைக் கிடைத் திசையிலும் நிலைக்குத்தாகவும் விசைப் பிரிப்புச் செய்து விசைச் சமன்பாடுகள் அமைக்கவும்.

$$R_2=\mu\ R_1$$
$$R_1=W$$

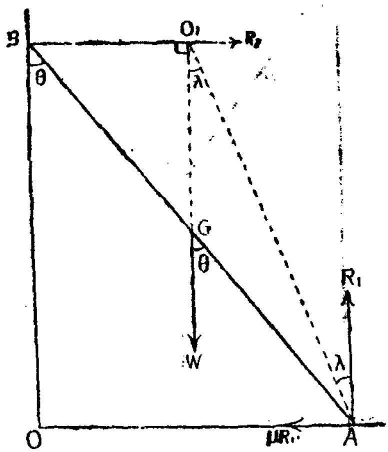
Aஐப் பற்றித் திருப்புத்திறன் சமன்பாடு காண்க.

$$W.\ AH=R_2.\ OB$$
$$W.\ a\sin\theta=R_2.\ 2\ a\cos\theta$$
$$\therefore \quad W\sin\theta=2\ R_2\cos\theta$$
$$=2\ \mu\ R_1\cos\theta$$
$$=2\ \mu\ W\cos\theta$$
$$\therefore \quad \tan\theta=2\ \mu$$

திரிகோணச் சூத்திரமுறை

Aயில் செயல்படும் R_1, μR_1 ஆகிய விசைகளின் விளைவு விசை R_1' எனில் R_1, R_1' ஆகியவற்றிற்கிடையேயுள்ள கோணம் எல்லையுராய்வுக் கோணமாகும். இக்கோணம் λ எனில், $\tan \lambda = \mu$ ஆகும்.

ஏணியானது , R_1', W, R_2 ஆகிய மூன்று விசைகளினுல் சமநிலையிலுள்ளது. எனவே இம்மூன்று விசைகளும் O_1 என்னும் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும்.



படம் 158

$\triangle AO_1B$யில் திரிகோணச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துக.

$\angle AGH = \theta$ ஆதலின் $\angle O_1GA = (180° - \theta)$

$\angle GO_1A = \angle O_1AR_1 = \lambda$

$\angle BO_1G = 90°$.

$BG: GA = 1:1$

$$(1+1) \cot \angle O_1GA = 1. \cot \angle BO_1G - 1. \cot \angle GO_1A$$

$$2 \cot (180° - \theta) = \cot 90° - \cot \lambda$$

$$-2 \cot \theta = 0 - \cot \lambda$$

$$\tfrac{1}{2} \tan \theta = \tan \lambda = \mu$$

$$\tan \theta - 2 \mu$$

மாதிரி 109: AB என்னும் ஒரு சீரான கோல் கிடைத்தளத்துடன் α கோணச் சாய்வில் அதன் முனை B ஒரு உராய்வுடைய

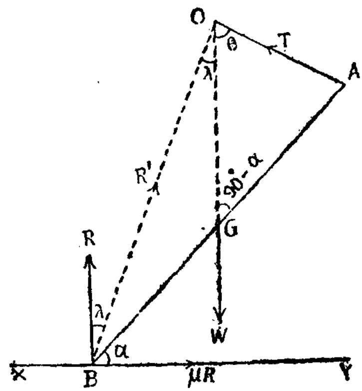
கிடைத்தளத்தின் மேலிருக்குமாறு Aயுடன் இணைக்கப்பட்ட ஒரு இலேசான நூலினால் தாங்கப்படுகிறது. நிலைக்குத்துடன் நூலின் சாய்வுக் கோணமாகிய θ என்பது,

$$\cot\theta = \frac{1}{\mu} \pm 2\tan\alpha$$

என்னும் தொடர்பின் மூலம் தரப்படுமென்று காட்டுக.

தீர்வு:

AB என்னும் கோலின் ஒரு முனை Bயானது XY என்னும் கிடைத்தளத்தின்மேல் வைக்கப்பட்டுள்ளது. முனை A யானது ஒரு நூலினால் கட்டப்பட்டு AO திசையில் இழுக்கப்படுகிறது.



படம் 159

கோலின் எடை W ஆனது அதன் நடுப்புள்ளியாகிய G வழியே ↓ செயல்படும்.

Bயில் நேர்குத்தெதிர் விசையாகிய R என்பது XY தளத்திற்குச் செங்குத்தாகச் செயல்படும். முனை B யானது BX திசையில் நகர முயலுமெனக் கொண்டால் உராய்வு விசை μR ஆனது BY திசையில் திசையில் செயல்படும். $R, \mu R$ ஆகிய இருவிசைகளின் விளைவு விசையாகிய R^1 என்பது Bயில் XY தளத்தின் விளைவு எதிர்விசையாகும். ஆகவே, R, R^1 ஆகியவற்றிற்கிடையேயுள்ள கோணம் உராய்வுக் கோணம் α ஆகும் $\therefore \tan\lambda = \mu$.

நூலின் இழுவிசை T ஆனது AO திசையில் செயல்படும். கோலானது W, R^1, T ஆகிய மூன்று விசைகளினால் சம நிலையி

லுள்ளது. எனவே, இம்மூன்று விசைகளும் O என்னும் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும்.

சம நிலையில் XY தளத்துடன் கோலின் சாய்வு α ஆகும்.

$$\therefore \angle ABY = \lambda. \quad \therefore \angle OGA = (90° - \alpha)$$

$$\angle BOG = \angle OBR = \lambda.$$

நிலைக்குத்துடன் நூலின் சாய்வு $= \angle AOG = \theta$ என்க.

$\triangle AOB$யில் திரிகோணச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துக.

$$(1+1) \cot \angle OGA. = \cot \angle BOG - 1. \cot \angle GOA$$

$$2 \cot (90° - \alpha) = \cot \lambda - \cot \theta.$$

$$2 \tan\alpha = \frac{1}{\tan\lambda} - \cot \theta$$

$$\therefore 2 \cot \theta = \frac{1}{\tan\lambda} - 2 \tan\alpha$$

$$= \frac{1}{\mu} - 2 \tan\alpha. \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

இப்பொழுது முனை Bயானது BY திசையில் நகர முயலுவதாகக் கொள்வோமானால் உராய்வு விசை μR ஆனது BX திசையில் செயல்படும். எனவே μஐ $-\mu$ ஆக மாற்றி $\cot \theta$வின் மதிப்பைப் பெறலாம்.

$$\therefore \cot \theta = -\frac{1}{\mu} - 2 \tan \alpha$$

$$= -\left(\frac{1}{\mu} + 2 \tan \alpha\right)$$

θ ஆனது நிலைக்குத்துக்கு மறுபக்கத்திலிருந்து அளவிடப்பட்டால்,

$$-\cot \theta = -\left(\frac{1}{\mu} + 2 \tan \alpha\right)$$

அல்லது, $\cot \theta = \frac{1}{\mu} + 2 \tan \alpha \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$

ஆகவே, (1), (2) ஆகிய சமன்பாடுகளிலிருந்து,

$$\cot \theta = \frac{1}{\mu} \pm 2 \tan \alpha$$

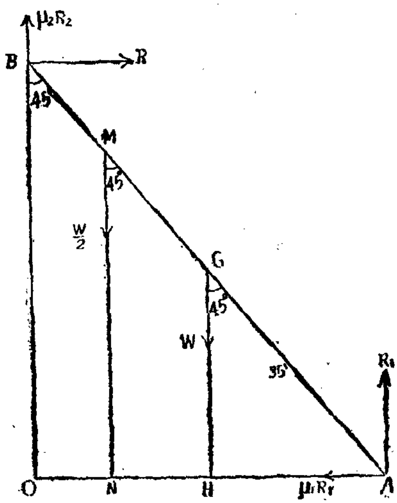
என்று காண்கிறோம்.

மாதிரி 110: 70 அடி நீளமுள்ள ஏணியொன்று ஒரு நிலைக் குத்துச் சுவருடன் 45° கோணச் சாய்வில் சாய்த்து வைக்கப்பட்டுள்ளது. ஏணிக்கும் சுவருக்கு மிடையேயுள்ள உராய்வுக் குணகம் $\frac{1}{3}$; ஏணிக்கும் தரைக்கு மிடையேயுள்ள உராய்வுக் குணகம் $\frac{1}{2}$ ஏணியின் எடையில் பாதியளவு எடையுள்ள ஒரு மனிதன், ஏணியின் மேல் ஏறுகிறான். ஏணி நழுவத் தொடங்கும்போது அவன் எவ்வளவு உயரத்திலிருப்பான்? அந்த மனிதன் ஏணியின் உச்சிவரை நழுவாமல் செல்ல வேண்டுமானல் ஏணியின் அடிப்படியில் நிற்கின்ற ஒரு பையனின் குறைந்தபட்ச எடை எவ்வளவு இருக்க வேண்டும்?

தீர்வு

AB என்பது ஏணி' $AB = 70'$.

ஏணியின் எடையாகிய W அதன் நடுப்புள்ளி G வழியே ↓ செயல்படும்.



படம் 160

$AG = GB = 35'$.

மனிதனின் எடை $\frac{W}{2}$ மனிதன் M என்ற இடத்தில் ஏணியிலிருக்கும்போது ஏணி நழுவத் தொடங்குவதாகக் கொள்வோம். $AM = x$ என்க. M இல் மனிதனின் எடை $\frac{W}{2}$ ஆகிய நிலைக்குத்தாகக் கீழ் நோக்கி MN திசையில் செயல்படும்.

*A*யில் தரையின் நேர்குத் தெதிர்விசை R_1 என்று கொள்க. எனவே, *A*யில் தரையின் உராய்வு விசை $\mu_1 R_1$ என்பது *AO* திசையில் செயல்படும்.

*B*யில் சுவரின் நேர்குத் தெதிர்விசை R_2 என்று கொள்க. எனவே. *B*யில் சுவரின் உராய்வு விசை $\mu_2 R_2$ என்பது *OB* திசையில் செயல்படும்.

விசைப் பிரிப்புச் செய்து விசைச் சமன்பாடுகளை அமைக்கவும்.

$$\mu_1 = \frac{1}{2}, \mu_2 = \frac{1}{3} \text{ ஆதலின்,}$$

$$R_2 = \mu_1 R_1 = \frac{1}{2} R_1$$

$$R_1 + \mu_2 R_2 = W + \frac{W}{2}$$

$$\text{அதாவது, } R_1 + \frac{1}{3} R_2 = \frac{3}{2} W$$

$$R_1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} R_1\right) = \frac{3}{2} W$$

$$R_1 + \frac{1}{6} R_1 = \frac{3}{2} W$$

$$\frac{7}{6} R_1 = \frac{3}{2} W$$

$$\therefore R_1 = \frac{9}{7} W$$

$$\therefore R_2 = \frac{9}{14} W$$

*A*ஐப் பற்றித் திருப்புத் திறன் சமன்பாடு காண்க. $AB = 2a$ என்று கொள்க.

$$W. AH + \frac{W}{2}. AN = R_2 OB + \mu_2 R_2. OA$$

$$W a \sin 45° + \frac{W}{2}. x \sin 45° = R_2 2a \cos 45° + \mu_2 R_2. 2a \sin 45°$$

$$Wa + \frac{W}{2} x = 2 R_2 a + 2\mu_2 R_2 a$$

$$= 2a.\ \frac{9}{14}W + 2a.\ \frac{1}{3}\ \frac{9}{14}W$$

$$= \frac{9}{7}aw + \frac{3}{7}aw$$

$$= \frac{12}{7}aw.$$

$$\therefore a + \frac{x}{2} = \frac{12}{7}a$$

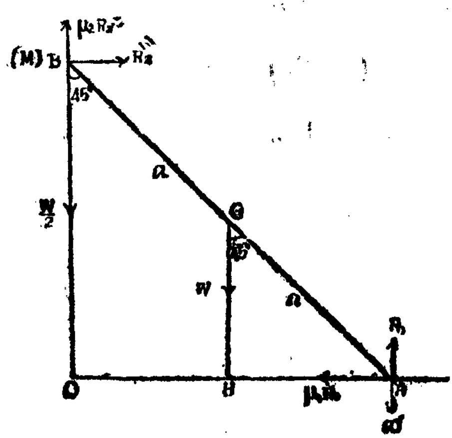
$$\frac{x}{2} = \frac{12}{7}a - a = \frac{5}{7}a$$

ஆனல் $a = 35'$. $\therefore\ x = \frac{10}{7}a$

$$= \frac{10}{7} \times 35$$

$$= 50''.$$

ஏணி நழுவத் தொடங்கும்போது மனிதன் ஏணியில் 50 அடி தூரத்திலிருப்பான்.



படம்-161

இப்பொழுது பையன் A யிலிருக்கும்போது மனிதன் Bயிலிருப்பதாகக் கொள்வோம்.

பையனின் எடை w எனில், w ஆனது Aயில் ↓ செயல்படும்

மனிதனின் எடை $\frac{W}{2}$ என்பது Bயில் ↓ செயல்படும் விசைச் சமன்பாடுகள் காண்க.

$$R_2 = \mu_1 R_1 = \tfrac{1}{2} R_1$$

$$R_1 + \mu_2 R_2 = \frac{W}{2} + W + w$$

$$R_1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} R_1\right) = \frac{3}{2} W + w$$

$$\tfrac{7}{6} R_1 = \tfrac{3}{2} W + w$$

அல்லது, $R_1 = \frac{6}{7} (\frac{3}{2} W + w)$

Aஐப் பற்றித் திருப்புத்திறன் சமன்பாடு காண்க.

$$W.\ AH + \frac{W}{2}.\ AO = R_2.\ OB + \mu_2\ R_2.\ OA.$$

$$W.(a \sin 45°) + \frac{W}{2}(2a \sin 45°) = R_2.\ (2a \cos 45°)$$
$$+ \mu_2\ R_2\ (2a \sin 45°$$

அதாவது,

$$W + W = 2\ R_2 + 2\ \mu_2\ R_2$$

$$2\ W = 2\left(\frac{1}{2} R_1\right) + 2\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2} R_1\right)$$

$$= R_1 + \frac{1}{3} R_1$$

$$= \frac{4}{3} R_1$$

$$\therefore R_1 = \frac{3}{2} W.$$

சமன்பாடு (1) இலிருந்து $\frac{6}{7}\left(\frac{3}{2} W + w\right) = \frac{3}{2} W.$

$$\frac{3}{2} W + w = \frac{7}{4} W.$$

$$w = \frac{7}{4} W - \frac{3}{2} W$$

$$= \frac{1}{4} W.$$

ஆகவே, பையனின் குறைந்தபட்ச எடையானது மனித னின் எடையில் பாதியாகும்; அல்லது ஏணியின் எடையில் கால் பாகமாகும்.

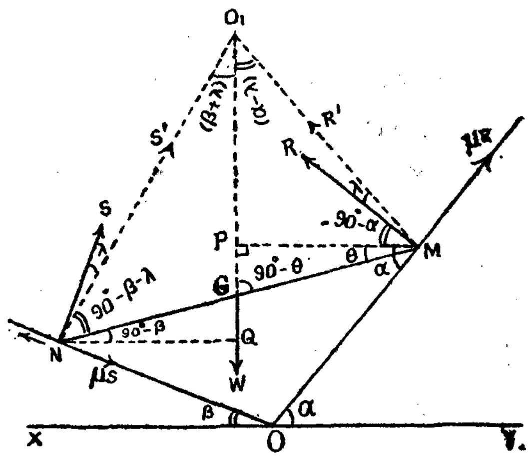
மாதிரி 111 : MN என்னும் சீரான கோலொன்று அதன் முனைகள் கிடைத்தளத்துடன் α, β சாய்வுகளிலுள்ள OA, OB என்னும் இரு நிலையான, உராய்வுடைய நேர் வரிப்பள்ள அரண் களில் (fixed rough grooves) இருக்குமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது. உராய்வுக்கோணம் λ எனில், முனை M ஆனது AO திசையில் நழுவுந்தருவாயிலிருக்கும்போது கிடைத்தளத்துடன் கோலின் சாய்வு

$$\tan^{-1}\left\{\frac{\sin(\alpha-\beta-2\lambda)}{2\sin(\beta+\lambda).\sin(\alpha-\lambda)}\right\}$$

என்று காட்டுக.

தீர்வு

OA, OB என்பன கிடைத்தளத்துடன் α, β கோணங்களில் அமைந்துள்ள இரு அரண்கள்.



படம் 162

MN என்ற கோல் அவற்றின் மீது முனைகளிருக்குமாறு வைக் கப்பட்டுள்ளது.

கோலின் எடை W என்பது அதன் நடுப்புள்ளி G வழியே ↓ செயல்படும்.

Mஇல் நேர்குத்தெதிர்விசையாகிய R என்பது OAக்குச் செங்குத்தாகவும், Nஇல் நேர்குத்தெதிர்விசையாகிய S என்பது OBக்குச் செங்குத்தாகவும் செயல்படும். முனை M ஆனது AO திசையில் நழுவ முயல்வதால் Mஇல் உராய்வு விசை μR என்பது OA திசையில் செயல்படும். முனை N ஆனது OB திசையில் நழுவமுயலுமாகையால் Nஇல் உராய்வு விசை μS ஆனது BO திசையில் செயல்படும்.

Mஇல் செயல்படும் $R, \mu R$ ஆகியவற்றின் விளைவு விசையை R_1 என்றும், Nஇல் செயல்படும், $S, \mu S$ ஆகியவற்றின் விளைவு விசையை S_1 என்றும் குறிப்பிடுக. எனவே. R, R^1 ஆகியவற்றிற்கிடையேயுள்ள கோணமும், S, S^1 ஆகியவற்றிற்கிடையேயுள்ள கோணமும் உராய்வுக் கோணம் λக்குச் சமமாகும்.

கோல் சமநிலையிலிருப்பதால் W, R^1, S^1 ஆகியவை O_1 என்னும் புள்ளியில் சந்திக்கும்.

O_1Gக்குச் செங்குத்தாக MP, NQ வரைக.

$\angle GMP =$ கிடைத்தளத்துடன் கோலின் சாய்வு $= \theta$. (என்க)

$\angle O_1GM = (90^\circ - \theta)$ $\angle PMO = \angle MOY = \alpha$

$\therefore \angle PMR = (90^\circ - \alpha)$ $\therefore \angle PMO_1 = (90^\circ - \alpha + \lambda)$

$\therefore PO_1M = 90^\circ - \angle PMO_1 = (\alpha - \lambda)$

$\angle QNO = \angle NOX = \beta$

$\angle SNQ = (90^\circ - \beta)$ $\therefore O_1NQ = 90^\circ - \beta - \lambda$

$\angle NO_1Q = 90^\circ - \angle O_1NQ = (\beta + \lambda)$

$\triangle NOM$ இல் $NG : GM = 1 : 1$

$$\therefore (1+1)\cot \angle O_1GM = 1 \cot \angle NO_1G - 1 \cot \angle GO_1M$$

$$2\cot(90^\circ - \theta) = \cot(\beta+\lambda) - \cot(\alpha - \lambda)$$

$$2\tan 0 = \frac{\cos(\beta+\lambda)}{\sin(\beta+\lambda)} - \frac{\cos(\alpha-\lambda)}{\sin(\alpha-\lambda)}$$

$$= \frac{\sin(\alpha-\lambda)\cos(\beta+\lambda) - \cos(\alpha-\lambda)\sin(\beta+\lambda)}{\sin(\beta+\lambda)\sin(\lambda-\lambda)}$$

$$= \frac{\sin(\alpha-\lambda-\beta-\lambda)}{\sin(\beta+\lambda)\sin(\alpha-\lambda}$$

$$= \frac{\sin(\alpha-\beta-2\lambda)}{\sin(\beta+\lambda)\sin(\alpha-\lambda)}$$

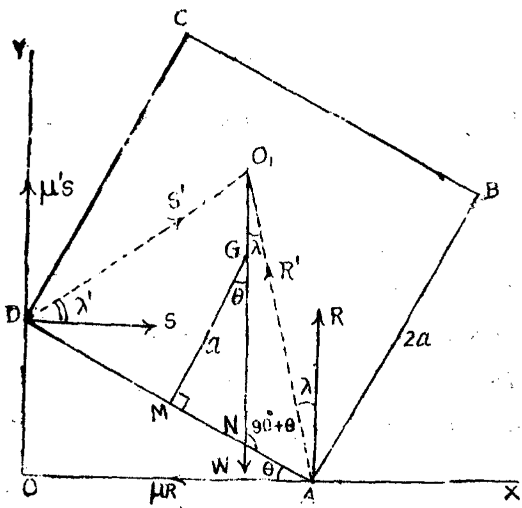
$$\tan 0 = \frac{\sin(\alpha - \beta - 2\lambda)}{2\sin(\beta+\lambda)\sin(\alpha-\lambda)}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left\{\frac{\sin(\alpha - \beta - 2\lambda)}{2\sin(\beta+\lambda)\sin(\alpha-\lambda)}\right\}$$

மாதிரி **112 :** தளம் நிலைக்குத்தாகவுள்ள ஒரு சதுரத் தகடு அதன் ஒரு பக்கத்து மூலைகள் ஒரு உராய்வுடைய சுவரின் மீதும், ஒரு உராய்வுடைய கிடைத்தளத்தின் மேலுமிருக்குமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது. கிடைத்தளம், சுவர் ஆகியவற்றின் உராய்வுக் குணகங்கள் முறையே μ, μ^1 எனில், தகடு நகரும் தருவாயிலிருக்கும்போது, கிடைத்தளத்துடன் மேற்கூறப்பட்ட பக்கத்தின் சாய்வு $\tan^{-1}\left(\frac{1-\mu\mu^1}{1+2\mu+\mu\mu^1}\right)$ என்று காட்டுக.

தீர்வு

ABCD என்பது *W* எடையுள்ள ஒரு சதுரத்தகடு. மூலை *A*யானது *OX* என்னும் கிடைத்தளத்தின் மேலும், மூலை *D* யானது *OY* என்னும் சுவரின் மீதுமிருக்குமாறு தகடு வைக்கப் பட்டுள்ளது.



படம் 163

தகட்டின் எடை *W* ஆனது தகட்டின் மையம் *G* வழியே ↓ செயல்படும். *A*யில் கிடைத்தளத்தின் நேர்க்குத்தெதிர் விசையை *R* என்றும், *D*யில் சுவரின் நேர்குத் தெதிர்விசையை *S* என்றும் குறிப்பிடுக.

மூலை Aயானது கிடைத்தளத்தில் OX திசையிலும் D யானது சுவரில் YO திசையிலும் நழுவ முயலுமாகையால், Aயில் கிடைத் தளத்தின் உராய்வு விசையாகிய μR என்பது AO திசையிலும், Dயில் சுவரின் உராய்வு விசையாகிய $\mu^1 S$ என்பது OY திசையிலும் செயல்படும்.

Aயில் R, μR ஆகியவற்றின் விளைவு விசையை R^1 என்றும் Bயில் S, $\mu^1 S$ ஆகியவற்றின் விளைவு விசையை S^1 என்றும் குறிப்பிடுக.

$\therefore$ R, R^1 ஆகியவற்றிற்கிடையேயுள்ள கோணம் λ என்றும், S, S^1 ஆகியவற்றிற்கிடையேயுள்ள கோணம் λ^1 என்றும் கொள்வோமானால், $\tan \lambda = \mu$; $\tan \lambda^1 = \mu^1$ ஆகும்.

தகடு சம நிலையிலிருப்பதால், W R^1, S^1 ஆகிய மூன்று விசைகளும் O_1 என்னும் புள்ளியில் சந்திக்கும்.

கிடைத்தளத்துடன் ADயின் சாய்வு θ என்க.

$O^1 G$ என்ற நிலைக்குத்துக்கோடு ADஐ Nஇல் சந்திக்கப் படும்.

$$\therefore \quad \angle O_1NA = 90° + \theta$$

$GM \perp AD$ வரைக. சதுரத்தின் பக்கம் $2a$ எனில் $GM = a$ ஆகும்.

$$\therefore \quad MN = a \tan \theta$$

$$DN = DM + MN = a + a \tan \theta = a(1 + \tan \theta)$$

$$NA = MA - MN = a - a \tan \theta - a(1 - \tan \theta)$$

$$\therefore \quad DN : NA = (1 + \tan \theta) : (1 - \tan \theta)$$

$$\angle DO_1G = (90° - \lambda^1); \quad \angle NO_1A = \angle O^1AR = \lambda.$$

Δ $DO_1 A$யில் திரிகோணச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துக.

$$(DN + NA) \cot \angle O_1NA = DN. \cot \angle DO_1N - NA. \cot \angle NO_1A$$

$$2a \cot (90° + \theta) = a(1 + \tan\theta). \cot (90° - \lambda^1) - a(1 - \tan \theta) \cot \lambda$$

$$-2 \tan \theta = (1 + \tan \theta) \tan \lambda^1 - (1 - \tan \theta) \cot \lambda$$

$$= (1 + \tan\theta) \mu^1 - (1 - \tan \theta) \frac{1}{\mu}$$

$$= \left(\mu^1 - \frac{1}{\mu}\right) + \tan\theta\left(\mu^1 + \frac{1}{\mu}\right)$$

$$\therefore \quad \tan\theta\left(\mu^1 + \frac{1}{\mu} + 2\right) = \frac{1}{\mu} - \mu^1$$

$$\tan\theta\,\frac{(1+\mu\mu^1+2\mu)}{\mu} = \frac{1-\mu\,\mu^1}{\mu}$$

$$\therefore \quad \tan\theta = \frac{1-\mu\mu^1}{1+2\mu+\mu\mu^1}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1-\mu\mu^1}{1+2\mu+\mu\mu^1}\right)$$

மாதிரி 103 : *சீரான தடிப்பும் அடர்த்தியுமுள்ள* ஒரு சம பக்க முக்கோணத் தகடு, அதன் ஒரு பக்கத்தின் ஒரு முனை ஒரு உராய்வுடைய கிடைத்தளத்தின் மேலும், மறு முனை ஒரு வழவழப்பான நிலைக்குத்துச் சுவரின் மீதும் இருக்குமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது. உராய்வுக் குணகம் μ எனில், கிடைத்தளத்துடன் அப்பக்கம் ஏற்படுத்தக் கூடிய மிகச் சிறிய கோணம் $\cot\theta = 2\mu + \frac{1}{\sqrt{3}}$ என்னும் சமன்பாட்டின்மூலம் தரப்படுமென்று காட்டுக.

தீர்வு

ABC என்பது ஒரு சமபக்க முக்கோணத் தகடு.

$AB = BC = CA = 2a$ தகட்டின் எடை W என்று கொள்க. G என்பது திணிவு மையமெனில், W என்பது G வழியே $\downarrow$ செயல்படும்.

முனை Aயானது OY என்னும் வழவழப்பான நிலைக்குத்துச் சுவரின் மீதும், B என்பது OZ என்னும் உராய்வுடைய கிடைத்தளத்தின் மீதும் இருக்குமாறு எல்லைச் சமநிலையில் வைக்கப்பட்டுள்ளது.

Aயில் சுவரி நேர்க்குத் தெதிர்விசை R ஆனது சுவருக்குச் செங்குத்தாகச் செயல்படும்.

Bயில் கிடைத்தளத்தின் நேர்க்குத் தெதிர் விசையாகிய S என்பது கிடைத்தளத்திற்குச் செங்குத்தாகச் செயல்படும். முனை Bயான OX திசையில் நகர முயலுமாகையால் உராய்வு விசை μS ஆனது OX திசையில் செயல்படும்.

S' என்பது Sக்கும் μSக்குமுள்ள விளைவு விசையெனில், Sக்கும் S^1க்குமிடையேயுள்ள கோணம் உராய்வுக் கோண மாகிய λ ஆகும்.

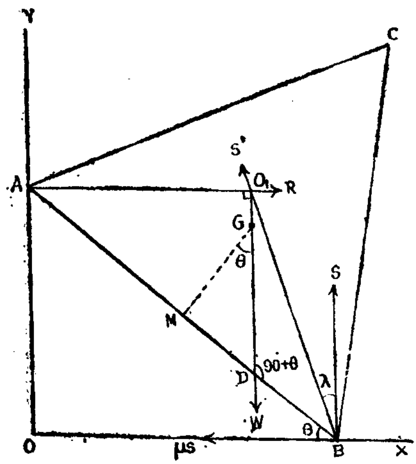
$$\therefore \tan \lambda = \mu.$$

கிடைத்தளத்துடன் ABயின் சாய்வு θ என்க.

தகடு எல்லைச் சம நிலையிலிருக்கும்போது θ மீச்சிறு மதிப்புடனிருக்கும்.

தகடு சமநிலையிலிருப்பதால், W, R, S^1 ஆகிய மூன்று விசைகளும் ஒரு புள்ளியில் (O_1 இல்) சந்திக்கும்.

$O_1\ G$ என்னும் நிலைக்குத்துக்கோடு ABஐ Dயில் வெட்டட்டும்.



படம் 164

$$\angle O_1DB = (90^\circ + \theta) ;$$

$GM \perp AB$ வரைக. $\therefore AM = MB = a;\quad \angle MGD = \theta.$

$$GM = \frac{1}{3}CM = \frac{1}{3}.\ \sqrt{3}\,a = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$MD = GM \tan\theta = \frac{a}{\sqrt{3}} \tan\theta.$$

$$AD = AM + = a + \frac{a}{\sqrt{3}} \tan\theta = a(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \tan\theta)$$

$$DB = MB = MD = a - \frac{a}{\sqrt{3}} \tan\theta = a\,(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \tan\theta)$$

$$\angle AO_1D = 90°; \ \angle DO_1B = \angle O_1BS = \lambda.$$

$\triangle\ AO_1B$யிலிருந்து,

$$(AD+DB) \cot \angle O_1DB = AD. \cot \angle AO_1D - DB. \cot \angle DO_1B$$

$$2a \cot (90°+\theta) = a\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\theta\right)\cot 90 - a\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\theta\right)\cot\lambda.$$

$$-2a \tan\theta = -a\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\theta\right)\cot\lambda.$$

$$2\tan\theta = \left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\theta\right)\frac{1}{\mu}.$$

$$2\mu\tan\theta = 1-\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\theta.$$

$$\tan\theta\left(2\mu+\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 1$$

$$\tan\theta = \frac{1}{2\mu+\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

அல்லது, $$\cot\theta = 2\mu+\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

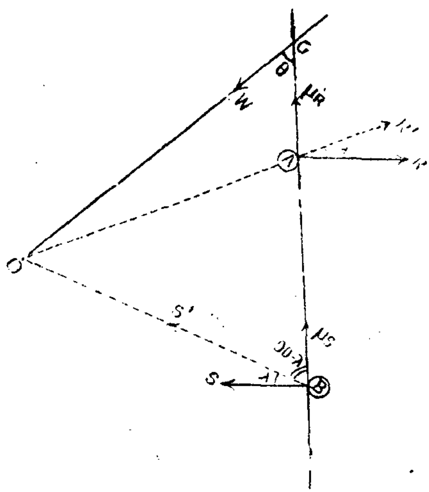
மாதிரி 114 : சம உராய்வுடைய , AB என்னும் இரு முளைகள், நிலைக்குத்துடன் θ கோணச் சாய்விலுள்ள ஒரு நேர்க் கோட்டில் $2a$ இடைவெளியில் அமைந்துள்ளன. முளை Aயின் மேலும், முளை Bயின் கீழும் செல்லுமாறு வைக்கப்பட்டுள்ள ஒரு கோல் நழுவிவிடாதவாறு முளைகளிலுள்ள உராய்விஞல் தாங்கப்பட்டுள்ளது. μ என்பது முளைகளுக்கும் கோலுக்குமிடையேயுள்ள உராய்வுக் குணகமெனில், கோலின் புவியீர்ப்பு மையம் மேல் முளையிலிருந்து $a\left(\frac{\cot\theta}{\mu}-1\right)$ க்குச் சமமான தூரத்திலிருக்க வேண்டுமென்று நிறுவுக.

மேலும், சமநிலை சாத்தியமாக வேண்டுமாயின், கோலின் நீளம் $2\theta\left(1+\frac{\cot\theta}{\mu}\right)$ஐ விட அதிகமாகயிருக்க வேண்டுமென்றும் காட்டுக.

(சென்னை எம், எஸ்ஸி., 1967).

தீர்வு

A, B என்ற இரு முனைகளால் Gஐ ஈர்ப்பு மையமாகக் கொண்ட ஒரு கோல் நிலைக்குத்துடன் θ கோணத்தில் தாங்கப் பட்டுள்ளது. $AB = 2a$.



படம் 165

கோலானது முனை Aயின் மேலும் முனை Bயின் கீழும் அமைந்துள்ளது. எனவே, A, B ஆகிய முனைகளின் நேர்குத் தெதிர்விசைகளாகிய R, S என்பன கோலுக்குச் செங்குத்தாக, படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளதுபோல் செயல்படும். கோலானது கீழ்நோக்கி நழுவ முயலுமாகையால் இரு முனைகளிலும் உராய்வு விசைகள் முறையே μR, μS என்பன கோலின் வழியாக மேல் நோக்கிச் செயல்படும். Aயில் செயல்படுகின்ற R, μR ஆகிய வற்றின் விளைவு விசையை R^1 என்றும், Bயில் செயல்படுகின்ற S, μS ஆகியவற்றின் விளைவு விசையை S^1 என்றும் குறிப்பிடுக. உராய்வுக் குணகம் μ எனின், இரு முனைகளும் சம உராய்வுடனிருப்பதால் R, R^1க்கும், S, S^1க்குமிடையேயுள்ள கோணங்கள் λ ஆகும்.

கோல் சம நிலையிலிருப்பதால், W, R^1, S^1 ஆகிய மூன்று விசைகளும் ஒரு புள்ளியில் (O-வில்) சந்திக்கும்.

$$\angle AGO = \text{நிலைக்குத்துடன் கோலின் சாய்வு} = \theta.$$

$$\therefore \angle OAB = \angle OBA = (90° - \lambda)$$

$AG = x$ என்க.

$\triangle\, OGB$யில் திரிகோணச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துக.

$$(BA+AG)\cot\angle OAB = BA\cot\angle OGA - AG\cot\angle OBA$$

$$(2a+x)\cot(90^\circ-\lambda) = 2a\cot\theta - x\cot(90^\circ-\lambda)$$

$$(2a+x)\tan\lambda = 2a\cot\theta - x\tan\lambda$$

$$2x\tan\lambda = 2a\cot\theta - 2a\tan\lambda$$

$$2x\,\mu' = 2a(\cot\theta-\mu)$$

$$x = a\left(\frac{\cot\theta}{\mu} - 1\right)$$

மேலும், கோலின் கீழ்முனை Bயிலிருக்கும்போது கோலானது எல்லைச் சமநிலையிலிருந்தால், கோலின் நீளம் மீச் சிறிதாக யிருக்கும்.

ஆகவே, கோலின் மீச்சிறு நீளம் $= 2\,BG$

$$= 2(BA+AG)$$

$$= 2\left[2a+a\left(\frac{\cot\theta}{\mu}-1\right)\right]$$

$$= 2\left[2a+\frac{a\cot\theta}{\mu}-a\right]$$

$$= 2\left[a+\frac{a\cot\theta}{\mu}\right]$$

$$= 2a\left(1+\frac{\cot\theta}{\mu}\right)$$

மாதிரி **115**: உராய்வுடைய கிடையான தரையின் மேல் தரையிலிருந்து a அடி உயரத்தில் கிடை நிலையிலுள்ள ஒரு வழவழப்பான கோலின்மேல் மிகச் சிறிதளவே நீட்டிக்கொண்டிருக்குமாறு l அடி நீளமுள்ள ஒரு சீரான ஏணி வைக்கப்படுகிறது. ஏணி நழுவும் நிலையிலிருந்தால், உராய்வுக் குணகம் $\dfrac{a\sqrt{l^2-a^2}}{l^2+a^2}$ என நிறுவுக. (பி.எஸ்ஸி. சென்னை 1966 ஏப்.,

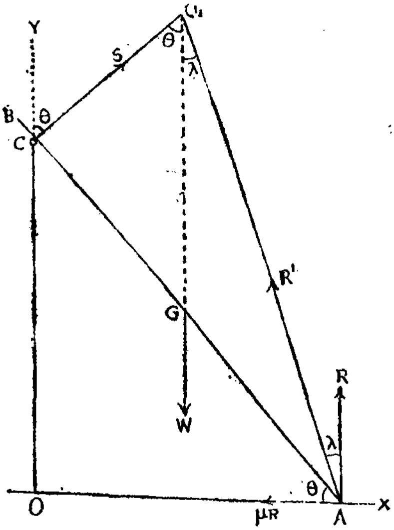
தீர்வு :

AB என்பது l நீளமுள்ள ஏணி. C என்பது OX என்னும் கிடைத்தளத்திற்கு மேலே a அடி உயரத்தில் கிடைநிலையிலுள்ள ஒரு கோலில் ஏணியின் தொடுகைப் புள்ளி. ஏணியின் முனை Aயானது OX தளத்தில் படிந்துள்ளது.

ஏணியின் எடையாகிய W என்பது அதன் நடுப்புள்ளி Gயின் வழியே ↓ செயல்படும்.

Aயில் தரையின் நேர்குத்தெதிர்விசை R ஆனது தரைக்குச் செங்குத்தாகவும், உராய்வுவிசை μR ஆனது AO திசையிலும் செயல்படும். இவ்விரு விசைகளின் விளைவு விசை R^1 எனில், R, R^1 ஆகியவற்றிற்கிடையேயுள்ள கோணம் λ ஆகும். $\tan\lambda = \alpha$.

Cயில் ஏணியின்மீது கோலின் எதிரமுத்தம் S ஆனது ஏணிக்குச் செங்குத்தாகச் செயல்படும்.



படம் 166

ஏணியானது W, R^1, S ஆகிய மூன்று விசைகளினால் சமநிலையிலிருப்பதால் இம்மூன்று விசைகளும் ஒரு புள்ளியில் (O_1 இல்) சந்திக்கும். ஏணியானது Cக்கு மேலே மிகச் சிறிய அளவிலேயே நீட்டிக்கொண்டிருப்பதால் வெளியே நீட்டிக் கொண்டிருக்கும் நீளத்தைப் புறக்கணித்துவிட்டு ACயின் நீளத்தை ஏணியின் நீளமாகிய lக்குச் சமமாகவே எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

$$\therefore \quad OA = \sqrt{AC^2 - OC^2} = \sqrt{l^2 - a^2}.$$

கிடைத்தளத்துடன் ஏணியின் சாய்வு $= \theta$ என்க.

$$\therefore \quad \angle O_1GA = (90^\circ + \theta)$$

$$\angle CO_1G = \theta.$$

$$\angle GO_1A = \angle O_1AR = \lambda.$$

$\triangle\ AOC$யில், $\tan\theta = \dfrac{OC}{OA} = \dfrac{a}{\sqrt{l^2 - a^2}}.$

$\triangle\ CO_1A$யில் திரிகோணச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துக.

$$(CG+GA)\cot\angle O_1GA = CG\cot\angle CO_1G - GA.\cot\angle GO_1A$$

$$(1+1)\cot(90°+\theta) = 1.\cot\theta - 1.\cot\lambda.$$

$$-2\tan\theta = \cot\theta - \cot\lambda$$

$$\therefore\quad \cot\lambda = \cot\theta + 2\tan\theta$$

$$= \frac{\sqrt{l^2-a^2}}{a} + \frac{2a}{\sqrt{l^2-a^2}}$$

$$= \frac{l^2 - a^2 + 2a^2}{a\sqrt{l^2-a^2}}$$

$$= \frac{l^2+a^2}{a\sqrt{l^2-a^2}}$$

$$\therefore\quad \mu = \tan\lambda = \frac{a\sqrt{l^2-a^2}}{l^2+a^2}$$

பயிற்சி 14

(1) சீரான ஏணியொன்று அதன் கீழ் முனை ஒரு உராய்வுடைய கிடைத்தளத்தின் மேலும், மேல் முனை ஒரு வழவழப்பான நிலைக்குச் சுவரின் மீதுமிருக்குமாறு வைக்கப்படுகிறது. சமநிலையில் நிலைக்குத்துடன் ஏணியின் சாய்வு 30° எனில், தரையின் உராய்வுக் குணகத்தைக் காண்க.

(2) சீரான ஏணியொன்று அதன் கீழ்முனை ஒரு உராய்வுடைய கிடைத்தளத்தின் மேலும், மேல் முனை சம உராய்வுடைய நிலைக்குத்துச் சுவரின் மீதுமிருக்குமாறு எல்லைச் சமநிலையிலுள்ளது. நிலைக்குத்துடன் ஏணியின் சாய்வு θ எனில், $\tan\theta = \dfrac{2\mu}{1-\mu}$ என்று காட்டுக. (μ என்பது உராய்வுக் குணகம்

(3) 112 ராத்தல் எடையும் 24 அடி நீளமுள்ள ஏணியொன்று அதன் கீழ்முனை ஒரு கிடைத்தளத்தின் மேலும், மேல் முனை ஒரு சுவரின் மேலும் இருக்குமாறு சாய்த்து வைக்கப்படு

கிறது. கிடைத்தளமும் சுவரும் 0·3 சம உராய்வுக் குணக முடையவையாயிருப்பின், எல்லைச் சம நிலையில் கிடைத்தளத் துடன் ஏணியின் சாய்வைக் காண்க.

(4) 72 ராத்தல் எடையும், 20 அடி நீளமுமுள்ள ஒரு ஏணி யின் புவியீர்ப்பு மையம் அடியிலிருந்து 8 அடி தூரத்திலுள்ளது. அது ஒரு வழவழப்பான சுவரின்மீது தரையுடன் θ கோணச் சாய்வில் சாய்த்து வைக்கப்பட்டுள்ளது. தரைக்கும், ஏணிக்கு மிடையேயுள்ள உராய்வுக் குணகம் $\frac{1}{2}$ எனில், 168 ராத்தல் எடையுள்ள ஒரு மனிதன் ஏணி நழுவிவிடாமல் ஏணியின் உச்சிவரை ஏற வேண்டுமானல் θ வின் குறைந்த பட்ச மதிப் பைக் காண்க

(5) 120 ராத்தல் எடையும் 50 அடி நீளமுள்ள ஒரு ஏணி யின் புவியீர்ப்பு மையம் அதன் அடியிலிருந்து 20 அடி தூரத்தி லுள்ளது. அதன் ஒரு முனை ஒரு வழவழப்பான சுவரின்மீதும், மறுமுனை ஒரு உராய்வுடைய தளத்தின்மேல் சுவரிலிருந்து 14 அடி தூரத்திலுமுள்ளன. உராய்வு விசையைக் காண்க. ஏணியின் அடியிலிருந்து 40 அடி தூரத்தில் ஏணியிலிருந்து 40 ராத்தல் எடை தொங்கவிடப்பட்டால், ஏணி நழுவுந் தருவாயிலிருக்கிறது. உராய்வுக் குணகத்தைக் காண்க.

(6) AB என்னும் சீரான ஏணியொன்று அதன் முனை A யானது ஒரு வழவழப்பான சுவரின்மீதும், முனை Bயானது உராய்வுடைய தரையின் மேலுமிருக்குமாறு சாய்த்துவைக்கப் படுகிறது. ஏணியின் எடையைப்போல் இருமடங்கு எடையுள்ள ஒரு பையன் அந்த ஏணியின் மேல் ஏறுகிறன். அவன் ஏணி யின் உச்சியின் மேலிருக்கும்போதுள்ள உராய்வு விசையானது அவன் ஏணியின் அடியிலிருக்கும்போதுள்ள உராய்வு விசையைவிட 5 மடங்கு என்று காட்டு.

(7) 30 அடி நீளமுள்ள ஏணியொன்று அதன் ஒரு முனை ஒரு வழவழப்பான சுவரின்மீதும் மறுமுனை $\frac{1}{2}$ உராய்வுக் குணக முடைய தரையின் மேலுமிருக்குமாறு சாய்த்துவைக்கப்பட் டுள்ளது. ஏணியின் அடி சுவரிலிருந்து 6 அடி தூரத்திலிருந் தால், ஏணியைப்போல் நான்கு மடங்கு எடையுள்ள ஒரு மனிதன் ஏணி நழுவாமல் ஏணியில் எவ்வளவு தூரம் ஏறமுடியு மென்று காண்க.

(8) 25 மீட்டர் நீளமும் 10 கிலோ கிராம் எடையுமுள்ள சீரான கோலொன்று DB என்னும் வழவழப்பான தரையின் மேலும், DA என்னும் வழவழப்பான சுவரின்மீதும் இருக்குமாறு

சாய்த்து வைக்கப்பட்டுள்ளது. கோல் நழுவாமலிருக்க, கோலின் அடியிலிருந்து 9 மீட்டர் தூரத்திலுள்ள C என்ற புள்ளியும் சுவரின் அடிப் புள்ளியும் 12 மீட்டர் நீளக் கயிற்றினல் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. கயிற்றின் இழு விசையையும், சுவர், தரை ஆகியவற்றின் மீதுள்ள அழுத்தங்களையும் காண்க.

(9) $2h$ நீளமுள்ள சீரான உத்திரம் ஒன்று அதன் ஒரு முனை ஒரு உராய்வுடைய கிடைத்தளத்தின் மேலும், மறு முனை சம உராய்வுடைய ஒரு நிலைக்குத்துச் சுவரின் மீது h உயரத்திலுமிருக்குமாறு வடிவியல் முறையில் சாத்தியமான கோணச் சாய்வில் சாய்ந்து நிற்க முடிகிறது. உத்திரத்திற்கும், தளம் சுவர் ஆகியவற்றிற்குமிடையேயுள்ள உராருய்வுக் கோணம் $\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{4}{3\sqrt{3}}\right)$ஐ விடக் குறைவாகயிருக்க முடியாதென்று காட்டுக.

(10) W எடையும், 37 அடி நீளமும் கொண்ட AB என்னும் சீராண ஏணி யொன்று அதன் முனை Aயானது உராய்வுக் குணகம் $\frac{1}{2}$ கொண்ட ஒரு கிடைத்தரையின் மேலும், மறு முனை Bயானது உராய்வுக் குணகம் $\frac{5}{12}$ கொண்ட சுரு நிலைக்குத்துச் சுவரின் மீது மிருக்குமாறு வைக்கப்படுகிறது. சுவரிலிருந்து Aயின் தூரம் 12 அடி. ஏணியைச் சுவரை நோக்கி இலோசாக நகர்த்துவதற்கு Aயில் செயல்படுத்த வேண்டிய கிடைவிசை $\frac{89}{120}W$ என்று காட்டு.

(11) $2l$ நீளமுள்ள ஏணியொன்று ஒரு கிடைத்தளத்தின் மேலும், ஒரு சுவரின் மீதும் தொடுகையிலிருக்ன்மாறு வைக்கப் படுகிறது. ஒவ்வொரு தொடுகைப் புள்ளியிலும் உராய்வுக் கோணம் λ, ஏணியின் எடையானது அதன் நடுப்புள்ளியிலிருந்து கீழே kl தூரத்தில் செயல்படுகிறதெனில், எல்லைச் சம நிலையில் நிலைக்குத்துடன் அதன் சாய்வு θ என்பது $\cot\theta = \cot 2\lambda - k \operatorname{cosec} 2\lambda$ என்ற தொடர்பின் மூலம் தரப்படுமென்று காட்டு.

(12) W எடையுள்ள சீரான ஏணியொன்று கிடைத்தளத்துடன் 45° கோணச் சாய்வில் அதன் மேல் முனை ஒரு உராய்வுடைய சுவரின் மீதும், கீழ் முனை உராய்வுடைய தரையின் மேலும் இருக்குமாறு சாய்த்து வைக்கப்படுகிறது. μ, μ^1 என்பன முறையே ஏணி, தரை ஆகியவற்றிற்கும், ஏணி, சுவர் ஆகியவற்றிற்கு மிடையேயுள்ள உராய்வுக் குணங்களெனில்,

அதன் கீழ் முனையைச் சுவரை நோக்கி மெதுவாக நகர்த்துவதறகுத் தேவையான குறைந்தபட்ச கிடைவிசை $\frac{1}{2}W$ $\left(\frac{1+2\mu-\mu\mu^1}{1-\mu^1}\right)$ என்று காட்டுக.

(13) l நீளமும், W எடையுமுள்ள சீரான ஏணியொன்று அதன் அடி μ உராய்வுக் குணகமுடைய தரையின் மேலும், மேல் முனை ஒரு வழவழப்பான நிலைக்குத்துச் சுவரின்மீது மிருக்குமாறு கிடைத்தளத்துடன் θ கோணச் சாய்வில் வைக்கப்பட்டுள்ளது ஏணியின் அடியிலிருந்து C தூரத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியில் செயல்படுத்தப்படும் F என்னும் கிடைவிசை அதன் அடியைச் சுவரை நோக்கி நகர்த்த சரியாகப் போதுமானதாகயிருக்கிறதெனில், P ஆனது $\frac{W\,l}{l-c}\,(\mu+\frac{1}{2}\tan\theta)$ஐ விட அதிகமாயிருக்க வேண்டுமென்று காட்டு.

(14) W எடையுள்ள சீரான கோலொன்று அதன் கீழ் முனை ஒரு உராய்வுடைய கிடைதளத்தின் மேலும், மேல் முனை சம உராய்வுடைய நிலைக்குத்துச் சுவரின்மீதும் இருக்குமாறு θ கோணச் சாய்வில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. அதன் நடுப்புள்ளியில் செயல்படுத்தப்படும் P என்னும் கிடைத்தள விசையினால் அது நழுவி விடாமல் வைக்கப்பட்டுள்ளது. $\lambda<\frac{\alpha}{2}$ என்பது உராய்வுக் கோணமெனில்

$$P = W\tan(\alpha-2\lambda).$$

என்று காட்டு.

(15) ஒரு உராய்வுடைய கிடைத்தளத்தின் மேல், கிடைத்தளத்துடன் 45° கோணச் சாய்வில் சம உராய்வுடைய ஒரு சுவரின் மீது சாய்த்து வைக்கப்பட்டுள்ள 20 அடி நீளமும் 70 ராத்தல் எடையுமுள்ள ஒரு ஏணியின் மேல் 140 ராத்தல் எடையுள்ள ஒரு மனிதன் ஏறுகிறான். உராய்வுக் குணகம் $\frac{1}{2}$ எனில், ஏணி நழுவத் தொடங்குமுன் ஏணியில் எவ்வளவு தூரத்திற்கு அம் மனிதனால் ஏற முடியும்?

(16) $4a$ நீளமுள்ள சீராண ஏணியொன்றி கிடைத்தளத் தரையுடன் α கோணச் சாய்வில் தரையிலிருந்து h உயரத்திலுள்ள ஒரு வழவழப்பான கிடைத்தளக் கிராதிக் கம்பியின் மீது வைக்கப்பட்டுள்ளது. தரைக்கும் ஏணிக்கு மிடையேயுள்ள உராய்வுக் கோணம் λ எனில், ஏணியைப் போல் இரு மடங்கு

எடையுள்ள ஒரு மனிதன் ஏணியில் $3h \sin\lambda \operatorname{cosec}(\alpha+\lambda) \operatorname{cosec} 2\alpha - a$ தூரத்திற்கு ஏற முடியுமென்று காட்டு.

(17) $2a$ நீளமுள்ள சீரான ஏணியொன்று கிடைத்தளத் தரையுடன் α கோணச் சாய்வில் தரையிலிருந்து h உயரத்தி லுள்ள ஒரு வழவழப்பான கிடைத்தளக் கிராதியின் மீது வைக் கப்பட்டுள்ளது. தரைக்கும், ஏணிக்கு மிடையேயுள்ள உராய் வுக்கோணம் λ எனில் ஏணியைப் போல் n மடங்கு எடையுள்ள ஒரு மனிதன் ஏணியில்

$$\frac{1}{n}\left[2(n+1)\sin\lambda \sec(\alpha-\lambda) \operatorname{cosec} 2\alpha - a\right]$$

தூரத்திற்கு ஏணி நழுவாமல் ஏற முடியுமென்று காட்டு.

(18) AB என்னும் ஒரு கனமான சீரான கோல் அதன் முனை Aயில் பொருத்தப்பட்டுள்ள ஒரு சிறு வளையத்தின் மூலம் AC என்னும் மற்றொரு நிலையான கிடைத்தளக் கோலின் மேல் நழுவிச் செல்லக் கூடியதாயிருக்கிறது. B, C ஆகியவை ஒரு நூலினால் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. கோல் நழுவி விழுந்தருவா யிலிருக்கும்போது நிலைக்குத்துடன் α கோணச் சாய்விலுள்ள அக்கோலும், நூலும் செங்குத்தாகவிருக்கிறதெனில் உராய்வுக் குணகம் $\mu = \dfrac{\tan\alpha}{2+\tan^2\alpha}$ என்று காட்டுக.

19) $2a$ நீளமும், W எடையுமுள்ள சீரான ஏணியொன்று அதன் ஒரு முனை ஒரு உராய்வுடைய நிலைக்குத்துச் சுவரின் மீதும், மறு முனை சம உராய்வுடைய கிடைத்தளத் தரையின் மீதும் இருக்குமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது. உராய்வுக்கோணம், கிடைத்தளத்துடன் ஏணியின் சாய்வு ஆகியவை முறையே λ, θ எனில், P எடையுள்ள ஒரு வனிதன் ஏணியின் மேல் முனையி லிருந்து

$$\frac{W\cot 2\lambda + P\cot\lambda - (W+P)\tan\theta}{P} \cdot a\sin 2\lambda$$

தூரத்தை விடவும் பக்கத்தில் நெருங்க முடியாதென்று காட்டுக

(20) $2a$ நீளமுள்ள கனமான கோலொன்று அதன் ஒரு முனை ஒரு உராய்வுடைய நிலைக்குத்துச் சுவரிலிருக்குமாறு சாய்ந்தவண்ணம் ஒரு உராய்வுடைய முளையின்மேல் வைக்கப் பட்டுள்ளது. சுவரிலிருந்து முளையின் தூரம் c என்றும், முளையி லும் சுவரிலும் உராய்வுக் கோணம் λ என்றும் கொண்டு சுவ

ருடன் கோலின் தொடுகைப்புள்ளி மூலைக்குக் கீழேயிருந்தால், கோலானது கீழ்நோக்கி நழுவ முயலும்போது

$$\sin^2\theta\cdot\sin(\theta+2\lambda)=\frac{c}{a}\cos^2\lambda$$

என்றும், மேல்நோக்கி நகரமுயலும்போது

$$\sin^2\theta\cdot\sin(\theta-2\lambda)=\frac{c}{a}\cos^2\lambda$$

என்றும் காட்டுக.

(21) ஒரு ஏணியானது அதன் கீழ்முனை ஒரு உராய்வுடைய கிடைத்தளத்தின்மேலும், மேல்முனை ஒரு உராய்வுடைய நிலைக் குத்துச் சுவரின்மீதுமிருக்குமாறு எல்லைச் சமநிலையிலுள்ளது. தளம், சுவர் ஆகியவற்றின் உராய்வுக் குணகங்கள் முறையே μ, μ^1 ஆகும். ஏணியின் புவியீர்ப்பு மையம் ஏணியைக் கீழிருந்து மேலாக $a:b$ என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்கிறது. ஏணியானது அதன் இருமுனைகளிலும் நழுவும் தருவாயிலிருந்தால், கிடைத்தளத்துடன் அதன் சாய்வைக் காண்க.

(மதுரை பி,எஸ்ஸி. 1969 ஏப்., 70 ஏப்.)

(22) ஒரு அரைவட்டத் தகடு அதன் வளைவு ஓரம் μ உராய்வுக் குணகமுடைய ஒரு கிடைத்தளத்தின் மேலும், சம உராய்வுடைய ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தின் மேலும் தொட்டுக் கொண்டிருக்குமாறு ஒரு நிலைத்தளத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. கிடைத்தளத்துடன் அதன் விட்ட விளிம்பின் அதிகபட்ச சாய்வு $\sin^{-1}\left(\frac{3\pi}{4}\ \frac{\mu+\mu^2}{1+\mu^2}\right)$ என்று காட்டு.

(a ஆரையுள்ள அரைவட்டத் தகட்டின் புவியீர்ப்பு மையம் அதன் விட்ட விளிம்பின் நடுப்புள்ளியிலிருந்து நேர்குத்தாக $\frac{4a}{3\pi}$ தூரத்திலிருக்கும்)

(23) ஒரு திண்ம அரைக்கோளம் அதன் வளைபரப்பு ஒரு கிடைத்தளத் தரையின்மேலும், சம உராய்வுடைய ஒரு நிலைக் குத்துச் சுவரின்மீதுமிருக்குமாறு எல்லைச் சமநிலையில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. கிடைத்தளத்துடன் அதன் அடிப்பாகத்தின் சாய்வு

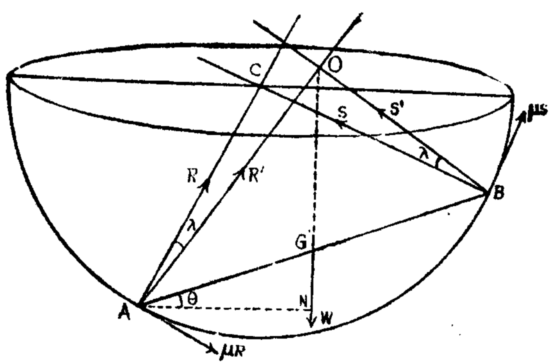
$$\sin^{-1}\left[\frac{8}{3}\ \frac{\mu(1+\mu)}{1+\mu^2}\right]$$

என்று காட்டுக.

(அரைக் கோளத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் அதன் அடிப் பக்க மையத்திற்குக் கீழே $\frac{3a}{8}$ தூரத்திலிருக்கும்:— a என்பது ஆரை).

(24) ஒரு அரைக் கோளக் கிண்ணமானது அதன் வளை பரப்பு μ உராய்வுக் குணகமுடைய ஒரு கிடைத்தளத்தின் மேலும், ஒரு வழவழப்பான நிலைக்குத்துச் சுவரின்மீதுமிருக்கு மாறி சாய்ந்த நிலையில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. கிண்ணம் நழுவும் நிலையிலிருக்கும்போது நிலைக்குத்துடன் அதன் அச்சின் சாய்வு $\sin^{-1}(2\mu)$ என்று காட்டு. (புவியீர்ப்பு மையம் கிண்ணத்தின் அச்சின் நடுவிலிருக்கும்).

(25) a ஆரையும் W எடையுமுள்ள ஒரு சீரான அரைக் கோளம் அதன் வளை பரப்பு ஒரு கிடைத்தளத்திலிருக்குமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது. அதன் சமதளப் பக்கத்தின்மேல் W^1



படம் 167

எடையுள்ள உராய்வுடைய துகளொன்று வைக்கப்படுகிறது. உராய்வுக்குணகம் μ எனில், சமதளப்பக்கத்தின் மையத்தி லிருந்து அத்துகளின் தூரம் $\frac{3\mu a}{8} \cdot \frac{W}{W^1}$ ஐ விடவும் அதிகமாக யிருக்க முடியாதென்று காட்டுக.

கிண்ணம் அல்லது உருளையினுள்ளே பொருட்களின் சமநிலை

ஒரு அரைக் கோளக் கிண்ணத்தின் சமதள முகப்பின் மையம் C என்றும், அதன் உராய்வுக் குணகம் μ என்றும் கொள்க. இக் கோளத்தினுள் AB என்னும் ஒரு கோல் சமநிலை யிலிருக்கின்றது

கோலின் எடையாகிய W என்பது கோலின் புவியீர்ப்பு மையம் வழியே நிலைக்குத்தாகக் கீழ்நோக்கிச் செயல்படும்.

Aயில் கிண்ணத்தின் நேர்குத்தெதிர்விசையாகிய R என்பது வளைபரப்புக்குச் செங்குத்தாக AC வழியாகச் செயல்படும். Bயில் கிண்ணத்தின் நேர்குத்தெதிர் விசையாகிய S என்பது வளைபரப்புக்குச் செங்குத்தாக BC வழியே செயல்படும். கோலின் முனை B, முனை Aஐ விட உயரத்திலிருப்பதால் முனை B கீழ்நோக்கியும், முனை A மேல் நோக்கியும் நகர முயலும். ஆகவே, Aயில் உராய்வு விசையாகிய μR என்பது தொடு கோட்டின் வழியே கீழ்முகமாகவும், Bயில் உராய்வு விசையாகிய μS என்பது தொடு கோட்டின் வழியே மேல்முகமாகவும் செயல்படும். Aயில் செயல்படுகின்ற $R, \mu R$ ஆகியவற்றின் விளைவு விசையை R^1 என்றும், Bயில் செயல்படுகின்ற $S, \mu S$ ஆகியவற்றின் விளைவு விசையை S^1 என்றும் குறிப்பிடுக. R, R^1 ஆகியவற்றிற்கும், S, S^1 ஆகியவற்றிற்குமிடையேயுள்ள கோணங்கள் கோளத்தின் உராய்வுக் கோணமாகிய λ விற்குச் சமமாகும். அதாவது, $\tan\lambda = \mu$.

கோல் சம நிலையிலிருப்பதால் W, R^1, S^1 ஆகிய மூன்று விசைகளும் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும். இப் புள்ளியை O என்று குறிப்பிடுக. இப்போது $\triangle AOB$யில் திரிகோணச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி சமநிலையில் கிடைத்தளத்துடன் கோலின் சாய்வைக் காணலாம்.

மாதிரி 116 : ஒரு நிலையான அரைக் கோளக் கிண்ணத்தினுள்ளே அதன் ஆரைக்குச் சமமான நீளமுள்ள ஒரு சீரான கோல் ஒரு நிலைக்குத்துத்தளத்தில் எல்லைச் சமநிலையிலிருக்கிறது கோலுக்கும் கிண்ணத்திற்குமிடையேயுள்ள உராய்வுக் குணகம் μ எனில், கிடைத்தளத்துடன் கோலின் சாய்வு $\tan^{-1}\left(\dfrac{4\mu}{3-\mu^2}\right)$ என்று காட்டுக.

(படம் ஐப் பார்க்கவும்)

கோல் AB ஆனது கிண்ணத்தின் ஆரைக்குச் சமமாகையால் ABC ஒரு சமபக்க முக்கோணமாகும்.

$$\therefore\ \angle CAB = \angle CBA = 60^\circ.$$

$$\therefore\ \angle OAB = (60^\circ - \lambda);\ \angle OBA = (60^\circ + \lambda)$$

கிடைத்தளத்துடன் கோலின் சாய்வு θ எனில், $\angle OGB = (90^\circ - \theta)$.

$\triangle\ OAB$யில் திரிகோணச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துக.

$$(1+1)\cot\angle OGB = 1.\cot\angle OAB - 1.\cot\angle OBA$$

$$2\cot(90^\circ-\theta) = \cot(60^\circ-\lambda)-\cot(60+\lambda)$$

$$2\tan\theta = \frac{\cos(60^\circ-\lambda)}{\sin(60^\circ-\lambda)} - \frac{\cos(60^\circ+\lambda)}{\sin(60^\circ+\lambda)}$$

$$= \frac{\sin(60^\circ+\lambda)\cos(60^\circ-\lambda)-\cos(60^\circ+\lambda)\sin(60^\circ-\lambda)}{\sin(60^\circ-\lambda)\sin(60^\circ+\lambda)}$$

$$= \frac{\sin(60^\circ+\lambda-60^\circ+\lambda)}{\sin^2 60^\circ-\sin^2\lambda}$$

$$= \frac{\sin 2\lambda}{\frac{3}{4}-\sin^2\lambda}$$

$$= \frac{8\sin\lambda\cos\lambda}{3-4\sin^2\lambda}$$

$$= \frac{8\tan\lambda}{3\sec^2\lambda-4\tan^2\lambda}$$

$$= \frac{8\tan\lambda}{3(1+\tan^2\lambda)-4\tan^2\lambda}$$

$$= \frac{8\tan\lambda}{3-\tan^2\lambda}$$

$$= \frac{8\mu}{3-\mu^2}$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{4\mu}{3-\mu^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{4\mu}{3-\mu^2}\right)$$

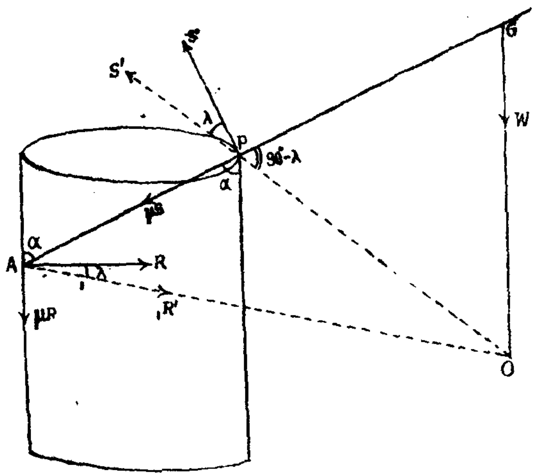
மாதிரி **117:** ஒரு கண்ணுடிக்கோல் ஒரு உருளை வடிவக் கண்ணுடிக் குவளையினுள்ளே ஒரு பகுதியும் வெளியே மறு பகுதியும் இருக்குமாறு குவளையின் நிலைக்குத்துப் பரப்பைத் தொட்ட வண்ணம் சம நிலையிலுள்ளது. நிலைக்குத்துடன் கண்ணுடிக் கோலின் மீப்பெரு, மீச்சிறு சாய்வுக் கோணங்கள் முறையே α, β எனில் உராய்வுக் கோணம்,

$$\lambda = \tfrac{1}{2}\tan^{-1}\left\{\frac{\sin^3\alpha-\sin^3\beta}{\sin^2\alpha\cos\alpha+\sin^2\beta\cos\beta}\right\}$$

என்று காட்டுக.

தீர்வு

AB என்ற கண்ணாடிக்கோல் அதன் முனை A யானது கண்ணாடிக்கு வளையின் உட்புறமாகவும், முனை B வெளியிலுமிருக்கு மாறும் விளிம்பை P என்னும் புள்ளியில் தொட்டுக்கொண்டு



படம் 168

சம நிலையிலிருக்கிறது. நிலைக்குத்துடன் கோலின் மீப்பெரு கோணச் சாய்வு α எனில், முனை A மேல் நோக்கியும் தொடு புள்ளி P வெளிநோக்கியும் நகர முயலும்.

எனவே, A யில் உராய்வு விசை μR கீழ்நோக்கியும், P யில் உராய்வு விசை μS கோலின் வழியே உள்நோக்கியும் செயல்படும். A யில் நேர்குத்தெதிர்விசை, உராய்வுவிசை μR ஆகியவற்றின் விளைவு விசை R^1 எனில் R க்கும் R^1 க்குமிடையேயுள்ள கோணம் λ ஆகும். P யில் நேர்குத்தெதிர்விசை S கோலுக்குச் செங்குத்தாகச் செயல் படும்

S, μS ஆகியவற்றின் விளைவு விசை S^1 எனில் S க்கும் S^1 க்குமிடையேயுள்ள கோணம் λ ஆகும்.

கோலின் எடை W என்பது அதன் நடுப்புள்ளி G வழியே செயல்படும். கோல் சம நிலையிலிருப்பதால் W, R^1, S^1 ஆகிய மூன்று விசைகளும் ஒரு புள்ளியில் (O-வில்) சந்திக்கும்.

$AB = 2l$ என்று கொள்க. $\therefore\ AG = l$

குவளையின் விட்டம் $2a$ என்று கொள்க.

$\therefore\ AP = 2a \operatorname{cosec} \alpha$

$\therefore \quad PG = AG - AP = (l - 2a \text{ cosec } \alpha)$

$\angle PAO = (90^\circ - \alpha + \lambda) = [90^\circ - (\alpha - \lambda)]$

$\angle PGO = \alpha$

$\triangle$ OAGயில், திரிகோணச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துக

$AP + PG = AG = l.$

$(GP + PA) \cot \angle OPG = GP \cot \angle OAP - PA \cot \angle OGP$

$$l \cot (90^\circ - \lambda) = (l - 2a \text{ cosec } \alpha) \cot [90^\circ - (\alpha - \lambda)] - 2a \text{ cosec } \alpha \cot \alpha$$

$$l \tan \lambda = (l - 2a \text{ cosec } \alpha) \tan (\alpha - \lambda) - 2a \text{ cosec } a \cot \alpha$$

$$l [\tan \lambda - \tan (\alpha - \lambda)] = -2a \text{ cosec } \alpha \; [\tan (\alpha - \lambda) + \cot \alpha]$$

$$l \left[\frac{\sin \lambda}{\cos \lambda} - \frac{\sin (\alpha - \lambda)}{\cos (\alpha - \lambda)} \right] = -\frac{2a}{\sin \alpha} \left[\frac{\sin (\alpha - \lambda)}{\cos (\alpha - \lambda)} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right]$$

$$l \left[\frac{\sin \lambda \cos (\alpha - \lambda) - \cos \lambda \sin (\alpha - \lambda)}{\cos \lambda \cos (\lambda - \alpha)} \right]$$

$$= \frac{-2a}{\sin \alpha} \left[\frac{\sin \lambda \sin (\alpha - \lambda) + \cos \alpha \cos (\alpha - \lambda)}{\cos (\alpha - \lambda) \sin \alpha} \right]$$

$$l \frac{\sin (\lambda - \alpha + \lambda)}{\cos \lambda} = \frac{-2a}{\sin \lambda} \left[\frac{\cos (\alpha - \alpha + \lambda)}{\sin \alpha} \right]$$

$$l \frac{\sin (2\lambda - \alpha)}{\cos \lambda} = \frac{-2a \cos \lambda}{\sin^2 \alpha}$$

$$l \sin (\alpha - 2\lambda) = \frac{2a \cos^2 \lambda}{\sin^2 \alpha} \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

நிலைக்குத்துடன் கண்ணாடிக் கோலின் மீச்சிறு சாய்வு β எனில், முனை A கீழ் நோக்கியும் தொடுபுள்ளி P உட்புறமாகவும் நகர முயலும். எனவே, உராய்வு விசைகள் எதிர் திசைகளில் செயல்படும். எனவே, αஐ β என்றும், λஐ-λ என்றும் மாற்றி மீச்சிறு கோணம் βஐத் தருகின்ற தொடர்பைப் பெறலாம்.

$$l \sin (\beta + 2\lambda) = \frac{2a \cos^2 \lambda}{\sin^2 \beta} \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

(1)ஐ (2) ஆல் வகுக்கவும்.

$$\frac{\sin (\alpha - 2\lambda)}{\sin (\beta + 2\lambda)} = \frac{\sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha}$$

$$\therefore \quad \sin^2 \alpha \sin(\alpha - 2\lambda) = \sin^2\beta \sin(\beta + 2\lambda)$$

$$\sin^2\alpha\,[\sin\alpha\cos 2\lambda - \cos\alpha\sin 2\lambda] = \sin^2\beta\,[\sin\beta\cos 2\lambda + \cos\beta\sin 2\lambda]$$

$$\sin 2\lambda\,[\sin^2\alpha\cos\alpha + \sin^2\beta\cos\beta] = \cos 2\lambda\,[\sin^3\alpha - \sin^3\beta]$$

$$\tan 2\lambda = \frac{\sin^3\alpha - \sin^3\beta}{\sin^2\alpha\cos\alpha + \sin^2\beta\cos\beta}$$

$$\lambda = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left\{\frac{\sin^3\alpha - \sin^3\beta}{\sin^2\alpha\cos\alpha + \sin^2\beta\cos\beta}\right\}$$

சாய்தளத்தின்மேல் பொருட்களின் நழுவும், கவிழும் நிலைகள்

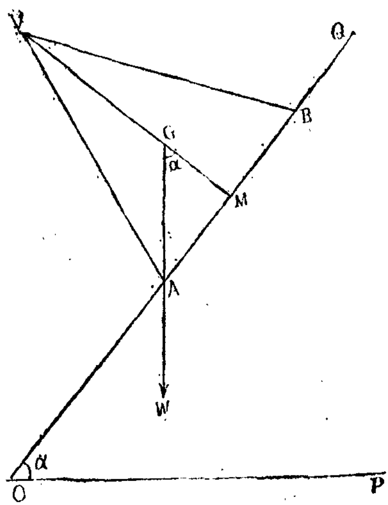
ஒரு உராய்வுடைய சாய்தளத்தின்மேல் ஒரு உராய்வுடைய பொருள் வைக்கப்பட்டுள்ளதாகக் கொள்வோம். பொருளுக்கும் தளத்திற்குமிடையேயுள்ள உராய்வுக் கோணம் λ என்க. இப்பொழுது தளத்தின் சாய்வைப் படிப்படியாக உயர்த்திக் கொண்டே போவோமானால் தளத்தின் சாய்வுக்கோணம் λக்குச் சமமாகயிருக்கும்போது பொருள் சாய்தளத்தில் கீழ்முகமாக நழுவத் தொடங்கும். இவ்வாறு சாய்தளத்தின் சாய்வு படிப்படியாக உயர்த்தப்படும்போது அப்பொருள் நழுவாமல் கவிழுவதாகக் கொள்வோம். இங்ஙனம், பொருளானது கவிழும் நிலையிலிருக்கும்போது தளத்தின் சாய்வு θ என்க. எனவே, $\theta < \lambda$ எனில் பொருளானது நழுவுமுன் கவிழத் தொடங்குமென்றறியலாம். மாறாக, $\lambda < \theta$ எனில், சாய்தளத்தின் சாய்வு படிப்படியாக உயர்த்தப்படும்போது, பொருளானது கவிழுமுன் நழுவத் தொடங்கும். பின்வரும் மாதிரிகளில் இக் கோட்பாடுகள் விளக்கப்பட்டுள்ளன.

மாதிரி 118 : r ஆரையும் h உயரமுமுடைய ஒரு கூம்பு ஒரு சாய்தளத்தின்மேல் வைக்கப்பட்டு, தளத்தின் சாய்வு படிப்படியாக உயர்த்தப்படுகிறது. உராய்வுக் குணகம் $\frac{4r}{h}$ ஐ விடக் குறைவாகயிருப்பின் கூம்பு கவிழுமுன் நழுவத்தொடங்குமென்று காட்டுக.

OQ என்னும் சாய்தளத்தின்மேம் VAB என்னும் கூம்பு வைக்கப்பட்டு, சாய்தளத்தின் சாய்வு படிப்படியாக உயர்த்தப்படுகிறது. G என்பது அடிப்பக்கத்தின் மையம். கூம்பின் உயரம் h ஆதலின் $GM = \frac{h}{4}$ ஆகும். ("புவியீர்ப்பு மையம்" பார்க்கவும்)

$AM =$ அடிப்பக்க ஆரை $= r$.

கூம்பு கவிழும் நிலையிலிருக்கும்போது, அதன் ஓரத்தைச் சுற்றி (Aயைச் சுற்றி) கூம்பு திரும்புமாகையால் சாய்தளத்தின்மேல் கூம்பின் அழுத்தம் Aயில் மட்டுமே செயல்படும். அதாவது, கூம்பின் முழு எடையும் A வழியே செயல்படும். எனவே, GA என்பது நிலைக்குத்துக் கோடாகும்.



படம் 169

இவ்வாறு கூம்பு கவிழும் நிலையிலிருக்கும்போது சாய்தளத்தின் சாய்வு α என்க. $\therefore \angle AGM = \alpha$ ஆகும்.

$$\triangle AMG\text{யிலிருந்து,} \quad \tan\alpha = \frac{AM}{GM} = \frac{r}{h/4} = \frac{4r}{h}.$$

கூம்பு நழுவும் நிலையிலிருக்கும்போது சாய்தளத்தின் சாய்வு உராய்வுக் கோணம் λக்குச் சமமாகயிருக்கும்.

ஆனால் கூம்பு கவிழும் நிலையில் சாய்தளத்தின் சாய்வு α ஆதலின், கூம்பு கவிழுமுன் நழுவ வேண்டுமாயின்,

$$\lambda < \alpha$$

$$\therefore \tan\lambda < \tan\alpha$$

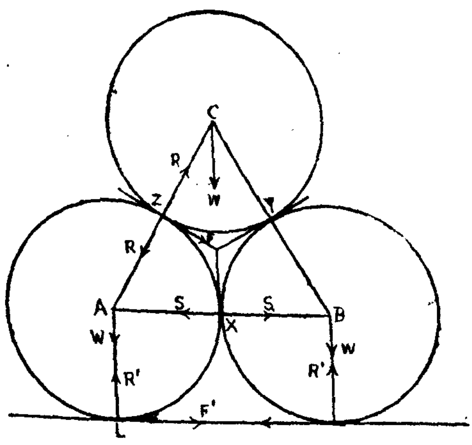
$$\mu < \frac{4r}{h}$$

மாதிரி 119: இருவடிவொத்த வட்ட உருளைக் கட்டைகள் ஒன்றையொன்று தொட்டுக் கொண்டு ஒரு உராய்வுடைய

கிடைத்தளத்தின் மேலிருக்கின்றன. இவற்றுடன் வடிவொத்த மூன்ருவது வட்ட உருளைக் கட்டையொன்று இவற்றின் அச்சுக்களுக்கு இணையாக அதன் அச்சு இருக்குமாறு இவற்றின்மேல் வைக்கப்படுகிறது இவை சம நிலையிலிருக்க வேண்டுமாயின் இவற்றிற்கிடையேயுள்ள உராய்வுக் குணகம் $(2-\sqrt{3})$ஐ விட அதிகமாகயிருக்க வேண்டுமென்று காட்டுக.

தீர்வு

மூன்று உருளைக் கட்டைகளின் புவியீர்ப்பு மையங்களின் வழியே செல்லும் நிலைக்குத்துக் குறுக்கு வெட்டுகளின் அமைப்பைக் கற்பனை செய்து கொள்க. மூன்று கட்டைகளும் வடிவொத்திருப்பதாலும், சீராக வைக்கப்பட்டுள்ளதாலும் இம் மூன்று குறுக்கு வெடடுக்களும் ஒரே நிலைத்தளத்திலமையும். மூன்று கட்டைகளின் குறுக்கு வெட்டுக்களும் மூன்று சம வட்டங்களாகயிருப்பதோடு, அவற்றின் புவியீர்ப்பு மையங்களும்



படம் 170

இக் குறுக்கு வெட்டு வட்டங்களும் மையங்களாகயிருக்கும். இம்மையங்களை A, B, C என்க. எனவே, ABC ஒரு சமபக்க முக்கோணமாகும்.

உருளை Aயில் செயல்படும் விசைகளைக் கவனிக்கவும்.

அதன் எடையாகிய W புவியீர்ப்பு மையம் A வழியே ↓ செயல்படும்.

கிடைத்தளத்தின் எதிர்வரிசை R^1 என்பது தொடு புள்ளி வழியே மேல்நோக்கிச் செயல்படும். Aயின் மீது Cயின் அழுத்

தமும், Cயின் மீது Aயின் எதிரமுத்தமும் சமமாகவும் எதிராகவும் மையக் கோட்டின் வழியே செயல்படும். இச்சம எதிரமுத்தங்களை R என்று குறிப்பிடுக. இதுபோல் A, B ஆகிய உருளைகளுக்கிடையே அவற்றின் மையக் கோட்டின் வழியே S என்னும் சம எதிரமுத்தங்கள் செயல்படும்.

உருளை Cயின் அமுத்தம் காரணமாக உருளை Aயானது வெளிப்புறமாக உருள முயலுமாகையால், L, Z ஆகிய தொடுபுள்ளிகளில் முறையே F^1, F என்னும் உராய்வு விசைகள் உட்புறம் நோக்கிச் செயல்படும்.

உருளைகளின் ஆரைகளை a என்று கொள்க.

உருளை Aயின் சமநிலையைக் கருதுக.

Aயைப் பற்றிய திருப்புத் திறன் காண்க.

$$F \cdot a = F^1 \cdot a \quad \therefore F = F^1$$

கிடைத்திசையில் விசைப் பிரிப்புச் செய்க.

$$F^1 + F \cos 30^\circ - R \cos 60^\circ - S = O.$$

ஆனல் $F^1 = F$ ஆகையால், $F + F \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{R}{2} + S.$

$$F\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{R}{2} + S.$$

Sஇன் குறைந்தபட்ச மதிப்பு பூச்சியமாகுமாகையால்,

$$F\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) > \frac{R}{2}$$

அல்லது, $$\frac{F}{R} > \frac{1}{2\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

$$> \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$$

$$> 2 - \sqrt{3}.$$

எல்லைச் சமநிலையில் $\frac{F}{R} = \mu$ ஆகையால்

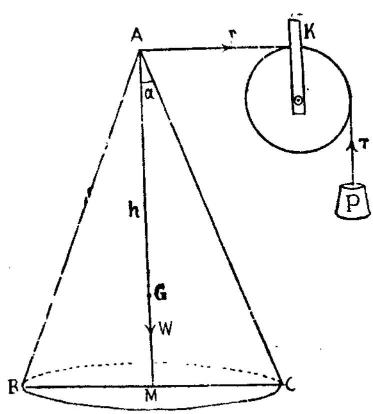
$$\mu > (2 - \sqrt{3})$$

மாதிரி 120 : உராய்வுடைய ஒரு மேசையின் மேல் ஒரு கூம்பு, அதன் அடிப்பக்கம் மேசையைத் தொட்டுக் கொண்

டிருக்குமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது. அதன் உச்சியில் கட்டப் பட்டுள்ள இலேசான கயிறு ஒன்று உச்சியுடன் சம உயரத்தி லுள்ள ஒரு வழவழப்பான கம்பியின் வழியே சென்று அதன் மறு முனையில் ஒரு எடையைத் தாங்குகிறது. கூம்பின் அரை யுச்சிக் கோணம் α எனில், இந்த எடையைத் தொடர்ந்து அதி கரித்துக் கொண்டேயிருந்தால், உராய்வுக் குணகம் $\tan\alpha$ஐ விட அதிகமாகவோ குறைவாகவோயிருப்பதற்கேற்ப கூம்பு கவிழும் அல்லது நழுவும் என்று காட்டுக.

தீர்வு

ABC என்பது α அரையுச்சிக் கோணமும் h உயரமுமுடைய ஒரு கூம்பு. அதன் உச்சியில் கட்டப்பட்டுள்ள ஒரு கயிறு அதே மட்டத்திலுள்ள k என்னும் கப்பிவழியே சென்று P



படம் 171

என்னும் எடையைத் தாங்குகிறது. கயிற்றின் இழுவிசையை T என்று குறிப்பிடுக.

AM என்பது கூம்பின் அச்சு.

$$\tan\alpha = \frac{r}{h} \text{ ஆதலின்.}$$

$$r = h\tan\alpha.$$

கூம்பின் எடை W என்பது அதன் ஈர்ப்பு மையம் G வழியே ↓ செயல்படும்.

கயிற்றின் இழுவிசையானது அது தாங்கும் எடைக்குச் சம மாகுமாகையால், $T = P$ ஆகும்.

கயிற்றில் தொங்கும் எடை P_1 ஆகயிருக்கும்போது கூம்பு கவிழத்தொடங்குவதாகக் கருதுக. எனவே, மேசையின் மீது கூம்பின் அழுத்தம் முழுவதும் Cயில் மட்டுமே செயல்படும். எனவே, Cஐப் பற்றி திருப்புத்திறன் காண்க.

$$T \,.\, AM = W \,.\, MC$$

$$T \,.\, k = W \,.\, r$$

ஆனால், $T = P_1$ ஆகையால். $P_1 \,.\, h = W \,.\, h \tan \alpha$

$$\because P_1 = W \tan \alpha.$$

இப்பொழுது கயிற்றில் தொங்கும் எடை P_2 ஆகயிருக்கும் போது கூம்பு நழுவுவதாகக் கொள்வோம். நிலைக்குத்துத் திசையில் கூம்புக்கு இயக்கமெதுவும் இல்லையாதலாலும், கூம்பின் எடை W மேசையின்மீது கீழ்நோக்கி அழுத்துவதாலும், மேசையுன் எதிரெழுத்தம் R ஆனது அதற்கு எதிராகவும் சமமாகவுமிருக்கும்.

$$\therefore \quad R = W$$

மேலும், கூம்பு BC திசையில் நழுவுமாகையால், உராய்வு விசையாகிய $F = \mu R$ என்பது CB திசையில் செயல்படும்.

கிடைத் திசையில் விசைப் பிரிப்புச் செய்தால்,

$$T = \mu R$$

என்று காணலாம். ஆனால், இப்பொழுது $T = P_2$ ஆகையால்,

$$P_2 = \mu R = \mu W$$

ஆகவே கூம்பு கவிழவோ அல்லது நழுவவோ வேண்டுமாயின்

$$P_1 < P_2 \text{ அல்லது } P_1 > P_2$$

ஆகயிருக்க வேண்டும்.

அதாவது, $W \tan \alpha <$ அல்லது $> \mu W$

அதாவது, $\tan \alpha <$ அல்லது $> \mu$

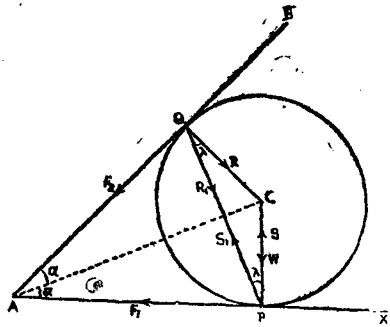
அல்லது, $\mu >$ அல்லது $< \tan \alpha$

மாதிரி 121: *சீரான உருளையொன்று அதன் அச்சு கிடையாக யிருக்குமாறு ஒரு கிடைத்தளத்தின் மேல் வைக்கப்பட்டுள்ளது. ஒரு பலகையானது அதன் ஒரு முனை கிடைத்தளத்தின் மேலிருக்குமாறு உருளையின் மேல் குறுக்கு வசமாக வைக்கப்படுகிறது. பலகை உருளையின் மேல் நழுவும் நிலையி*

லிருப்பின் அவற்றிற்கிடையேயுள்ள உராய்வுக் கோணம் கிடைத்தளத்துடன் பலகையின் சாய்வுக் கோணத்தில் பாதி யாகுமென்று காட்டுக.

தீர்வு

AX என்னும் கிடைத்தளத்தின்மேல் C என்னும் உருளை வைக்கப்பட்டுள்ளது. AB என்னும் பலகை இவ்வுருளையின் மேல் சாய்வாக, கிடைத்தளத்தை Aயிலும், உருளையை Qவிலும்



படம் 172

தொடுமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது. P என்பது கிடைத்தளத்துடன் உருளையின் தொடுபுள்ளி.

P, Q ஆகிய புள்ளிகளில் கிடைத்தளம், பலகை ஆகிய வற்றின் நேர்குத்தெதிர்விசைகளாகிய $S_1 R$ என்பன PC, QC ஆகிய ஆரைகளின் வழியே செயல்படும். பலகையின் அழுத்தம் காரணமாக உருளை வெளிநோக்கி நகர முயலுமாகை யால், Pயில் $F_1 = \mu S$ என்னும் உராய்வு விசை PAஐ நோக்கியும் Qவில் $F_2 = \mu R$ என்னும் உராய்வு விசை QAஐ நோக்கியும் செயல்படும்.

Pயில் செயல்படும் S, F_1 ஆகியவற்றின் விளைவு விசையை S_1 என்றும், Qவில் செயல்படும் R, F_2 ஆகியவற்றின் விளைவு விசையை R_1 என்றும் குறிப்பிடுக. $\therefore$ R, R_1 ஆகியவற்றிற்கு இடையேயுள்ள கோணம் உராய்வுக் கோணம் λக்குச் சமமாகும்.

உருளையின் எடையாகிய W என்பது C வழியே நிலைக்குத் தாகக் கீழ் நோக்கிச் செயல்படும். அதாவது CP வழியே செயல் படும். ஆகவே, W, S_1 ஆகிய இருவிசைகளும் P வழியே செல்கின்றன.

உருளையானது W, S_1, R_1 ஆகிய மூன்றுகளின் கீழ் சம நிலையிலிருப்பதாலும், இவற்றுள் W, S_1 ஆகிய இரு விசைகளும் P வழியே செல்வதாலும், R_1-ம் P வழியே செல்லும். அதாவது R_1 ஆனது QC வழியே செயல்படும். $\because \quad \angle PQC = \lambda$.

கிடைத்தளத்துடன் பலகையின் சாய்வு 2α என்க. ACஐச் சேர்க்கவும்.

$$\therefore \quad \angle PAC = \angle QAC = \alpha$$

$\angle AQC = \angle APC = 90^\circ$ ஆகையால், $APCQ$ ஒரு வட்ட நாற்கரம்

$$\therefore \quad \angle PQC = \angle PAC$$

ஆதாவது, $\lambda = \alpha$

ஆகவே, உராய்வுக் கோணம் λ = கிடைத்தளத்துடன் பலகையின் சாய்வில் பாதி.

மாதிரி 122: $2a$ நீளமும் W எடையும் கொண்ட சீரான பலகையொன்று அதன் நடுப்புள்ளி ஒரு உராய்வுடைய கிடைத்தள உருளையின் மேலிருக்குமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது. உருளையின் ஆரை b, உராய்வுக் கோணம் λ எனில், உருளை நகர்ந்துவிடாமல் பலகையின் ஒரு முனையில் வைக்கப்படக் கூடிய மீப்பெரு எடை $\dfrac{b\lambda}{a - b\lambda} W$ என்று காட்டு.

தீர்வு

O-ஐக் குறுக்குவெட்டு மையமாகக் கொண்ட உருளையின் உச்சிப்புள்ளியாகிய M-இல் பலகை ABயின் நடுப்புள்ளி G இருக்குமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது.

இப்பொழுது முனை Bயில் W^1 என்னும் எடை வைக்கப் படுகிறது.

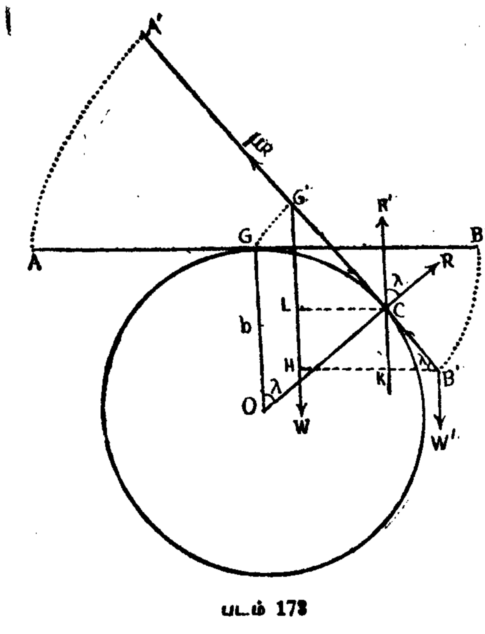
இதன் காரணமாக, பலகையானது சற்றே தூக்கிய நிலைவில் சம நிலையிலிருக்கும். எனவே இப்போது பலகையானது உருளையின் மேல் C என்னும் வேறொரு புள்ளியில் தொட்டுக் கொண்டிருக்கும்.

A^1B^1 என்பது பலகையின் புதிய நிலை. G^1 என்பது அதன் நடுப்புள்ளியின் புதிய நிலை.

பலகையின் எடையாகிய W ஆனது G^1 வழியே $\downarrow$ செயல் படும்.

Bயில் இணைக்கப்பட்டுள்ள எடை W^1 ஆனது B^1 வழியே ↓ செயல்படும்.

Cயில் உருளையின் நேர்குத்தெதிர்விசையாகிய R என்பது OC வழியே செயல்படும். பலகையானது கீழ்நோக்கி நகர முயலுமாகையால் Cயில் உராய்வு விசையாகிய μR என்பது CA^1 வழியே செயல்படும். $R, \mu R$ ஆகியவற்றின் விளைவு விசையை R' என்று குறிப்பிடுக.



படம் 178

பலகையானது W, W^1, R^1 ஆகிய மூன்று விசைகளினால் சம நிலையிலிருக்கின்றது. இவற்றுள் W, W^1 ஆகியவை நிலைக் குத்தாகயிருப்பதால், R^1ம் நிலைக்குத்தாக யிருக்கும்.

$$\therefore \quad \angle R'CR = \text{உராய்வுக் கோணம்} = \lambda$$

$$\therefore \quad \angle GOC = \angle R^1CR = \lambda$$

இப்பொழுது $CG^1 =$ வட்டவில் $CG = b\lambda$

$$\therefore \quad B^1C = B^1G^1 - CG^1 = a - b\lambda$$

Cஐப்பற்றித் திருப்புத்திறன் காண்க.

$$W.\, CL = W^1.\, B'K$$

$$W . CG^1 \cos \lambda = W^1 . B^1C \cos \lambda$$

$$W . b \lambda = W^1 . (a - b \lambda)$$

$$\therefore W_1^1 = \frac{b \lambda}{a - b \lambda} W$$

பயிற்சி 15

(1) ஒரு நிலையான நிலைக்குத்து வட்டத்திற்குள் சீரான கோலொன்று மையத்தில் 2α கோணத்தைத் தாங்கிக்கொண்டு சமநிலையிலிருக்கிறது. அதன் மேல்முனை வழவழப்பாகவும், கீழ் முனை λ உராய்வுக்கோணமுடையதாகவுமிருக்கின்றன. கிடைத் தளத்துடன் கோலின் சாய்வு $\tan^{-1}\left\{\frac{\sin \lambda}{\cos \lambda + \cos(\lambda + 2\alpha)}\right\}$ என்று காட்டுக.

(2) உராய்வுடைய ஒரு உள்ளீடற்ற கோணத்தினுள்ளே சீரான கோலொன்று எல்லைச் சமநிலையிலுள்ளது. உராய்வுக் கோணம் λ எனில்' கோலானது மையத்தில் தாங்கும் கோணம் 2α ஆகயிருந்தால் கிடைத்தளத்துடன் அதன் சாய்வு $\tan^{-1}$ $\left\{\frac{\sin 2\lambda}{2 \cos(\alpha + \lambda) \cos(\alpha - \lambda)}\right\}$ என்று காட்டுக.

(3) ஒரு உராய்வுடைய உள்ளீடற்ற கோணத்தினுள்ளே சீரான கோலொன்று எல்லைச் சமநிலையிலுள்ளது. உராய்வுக் கோணம் λ எனில், கோலானது மையத்தில் தாங்கும் கோணம் 2α ஆகயிருந்தால், கிடைத்தளத்துடன் அதன் சாய்வு $\tan^{-1}$ $[\frac{1}{2}\{\tan(\alpha + \lambda) - \tan(\alpha - \lambda)\}]$ என்று காட்டுக.

(4) ஒரு உராய்வுடைய நிலைக்குத்து வட்டத்தினுள்ளே சீரான கோலொன்று எல்லைச் சமநிலையிலுள்ளது. உராய்வுக் கோணம் λ எனில், கோல் மையத்தில் தாங்கும் கோணம் 2α ஆகயிருப்பின், கிடைத்தளத்துடன் கோலின் சாய்வு $\tan^{-1}$ $\left\{\frac{\sin 2\lambda}{\cos 2\lambda + \cos 2\alpha}\right\}$ என்று காட்டு.

(5) a ஆரையுள்ள ஒரு உராய்வுடைய நிலைக்குத்து வட்டத்தினுள்ளே சீரான $2l$ கோலொன்று எல்லைச் சமநிலையிலுள்ளது. உராய்வுக் குணகம் μ எனில், கிடைத்தளத்துடன் கோலின் சாய்வு $\cot^{-1}\left(\frac{a^2 - l^2 - \mu^2 l^2}{a^2 \mu}\right)$ என்று காட்டு.

(6) $a\sqrt{2}$ உள் ஆரையுள்ள ஒரு நிலையான உராய்வுடைய கோளத்தினுள்ளே $2a$ நீளமுள்ள சீரான கோலொன்று வைக்கப்பட்டுள்ளது. கோலின் ஒரு மூலை கோளத்தின் மையத்திற்கு நிலைக்குத்தாகக் கீழே இருக்கும்போது அது எல்லைச் சமநிலையிலிருந்தால், அதன் இரு மூலைகளிலும் உராய்வுக் குணகங்கள் சமமாயிருக்குமென்ற தற்கோளின் அடிப்படையில் உராய்வுக் கோணத்தைக் காண்க.

(7) ஒரு நிலையான அரைக் கோளக் கிண்ணத்தினுள்ளே அதன் ஆரைக்குச் சமமான நீளமுடைய சீரான கோலொன்று ஒரு நிலைத்தளத்தில் சமநிலையிலுள்ளது. கோலுக்கும் கிண்ணத்திற்குமிடையேயுள்ள உராய்வுக் குணகம் 1 எனில், எல்லைச் சமநிலையில் கிடைத்தளத்துடன் கோலின் சாய்வு $\tan^{-1}(2)$ என்று காட்டுக.

(8) வட்டமாக வளைக்கப்பட்டு நிலைத்தளத்தில் நிறுத்தப்பட்டுள்ள ஒரு சீரான உராய்வுடைய கம்பியுடன் ஒரு சீரான கோலின் முனைகளிரண்டும் இலேசான வளையங்களின் மூலம் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. கோலானது வட்டத்தின் மையத்தில் 2α கோணத்தைத் தாங்குகிறது. கம்பிக்கும் வளையங்களுக்குமிடையேயுள்ள உராய்வுக் கோணம் λ $(<\pi/4)$. நிலைக்குத்துடன் கோலின் குறைந்தபட்ச சாய்வுக் கோணம் θ என்பது

$$\tan\theta = \cot 2\lambda + \cos 2\alpha \operatorname{cosec} 2\lambda$$

என்ற சமன்பாட்டின்மூலம் தரப்படுமென்று காட்டுக.

(9) ஒரு நிலையான அரைக்கோளக் கிண்ணத்தின் விளிம்பு வழவழப்பாகவும், கிடைத்தளமாகவுமிருக்கிறது. அதன் உராய்வுடைய உட்பரப்பின்மேல் வைக்கப்பட்டுள்ள m எனும் பொருண்மையானது விளிம்பின் வழியாகச் செல்லும் ஒரு நூலின் மூலம் அதன் ஒரு நுனியில் தொங்கிக் கொண்டிருக்கும் $\frac{1}{2}m$ பொருண்மையுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. கிண்ணத்தினுள்ளேயிருக்கும் கயிற்றுப் பகுதி கிண்ணத்தின் மையத்தின் 120° கோணத்தைத் தாங்குகிறதெனில் உராய்வுக் குணகம் $\sqrt{3}$ என்று காட்டுக.

(10) a, h ஆகியவற்றை நீள, அகலங்களாகக் கொண்ட ஒரு செவ்வகத் தகடு அதன் தளம் நிலைக்குத்தாகயிருக்குமாறு ஒரு உராய்வுடைய கிடைத்தளத்தின்மேல் வைக்கப்பட்டுள்ளது. அதன் உச்சியில் இணைக்கப்பட்டுள்ள ஒரு நூலைக் கிடைத்தளமாக இழுப்பதன்மூலம், அதன்மீது அதிகரித்துக்

கொண்டேயிருக்கின்ற .விசையொன்று செயல்படுத்தப்படு கிறது. தகடு நழுவு முன் எப்பொழுது கவிழத் தொடங்கு மென்று காண்க.

(சென்னை 1963 ஏப்.)

(11) a நீளப் பக்கங்களைக் கொண்ட சதுரத்தை அடிப்பாக மாகக் கொண்ட h உயரமுள்ள சீரான திண்மப்பட்டைக் கூம்பு (Pyramid) ஒன்று அதன் அப்பாகம் ஒரு உராய்வுடைய கிடைத் தரையின் மேலிருக்குமாறு வைக்கப்படுகிறது. அடிப்பாகத்தின் இரு எதிர்பக்கங்கட்கு இணையான திசையில் செயல்படுமாறு அதன் உச்சியில் அதிகரித்துக் கொண்டேயிருக்கின்ற கிடைத் தளவிசையொன்று செயல்படுத்தப்படுகிறது.உராய்வுக் குணகம் μஎனில், μ < அல்லது > $\frac{a}{2h}$ என்பதற்கேற்ப பட்டைக்கூம்பு நழுவுவதன்மூலம் அல்லது கவிழ்வதன்மூலம் சமநிலை சீர்கெடு மென்று காட்டுக.

(12) ஒரு கிடைத்தளத்தின்மேல் சதுரத்தகடு ஒன்று நேர் குத்தாக நிற்கின்றது. அதன்மேல் மூலைகளுள் ஒன்றில் ஒரு நூல் கட்டப்பட்டு மெதுவாக அதிகரிக்கின்ற விசையினால் அம் மூலை வழி. மூலைவிட்டத்திற்குச் செங்குத்தான திசையில் இழுக் கப்படுகிறது. உராய்வுக் குணகம் $\frac{1}{3}$ஐ விட அதிகமானால் தகடு நழுவு முன்னால் கவிழும் என்று நிறுவுக.

(சென்னை 1968 ஏப்.)

(13) ஒரு உராய்வுடைய சாய்தளத்தின்மேல் சீரான கூம்பு ஒன்று வைக்கப்பட்டுள்ளது. கூம்பின் அரையுச்சிக் கோணம் α எனில், உராய்வுக் குணகம் 4 tan α ஐ விடக் குறைவாகயிருந் தால், கூம்பு கவிழுமுன்னால் நழுவுமென்று காட்டுக.

(சென்னை பி.எஸ்ஸி. 1966 செப்.)

உராய்வுக் குணகம் $\frac{1}{\sqrt{3}}$ எனில், கூம்பு ஒரே நேரத்தில் நழு வுந் தருவாயிலும், கவிழுந் தருவாயிலுமிருந்தால் கூம்பின் உச்சிக் கோணத்தைக் காண்க.

(சென்னை பி.எஸ்ஸி. 61 செப்.

(14) ஒரு உராய்வுடைய கிடைத்தளத்தின்மேல் அடிப்பாக மிருக்குமாறு உச்சிக் கோணம் 2 α கொண்ட நேர்வட்டக்கூம்பு ஒன்று வைக்கப்படுகிறது. அதன் உச்சியில் ஒரு நூலைக் கட்டி மெதுவாக அதிகரித்துக் கொண்டிருக்கும் விசையினால் கிடைத் திசையில் இழுக்கப்படுகிறது. λ என்பது உராய்வுக் கோண

மெனில், $\alpha <$ அல்லது $>$ λ என்பதற்கேற்ப அதன் இயக்கத்தை ஆராய்க.

(15) கிடைத்தளத்துடன் α சாய்விலுள்ள ஒரு சாய்தளத்தின் மேல் அடிப்பாகம் இருக்குமாறு அடிப்பக்க ஆரை a யும், உச்சிக்கோணம் 2α-ம் கொண்ட சீரான நேர்வட்டக் கூம்பு ஒன்று வைக்கப்பட்டுள்ளது. கூம்பைச் சாய்தளத்தின் மேல் நோக்கி நகர்த்த முயலும் ஒரு கிடைவிசையானது அதன் உச்சியில் செயல்படுத்தப்படுகிறது. $5 \tan 2\alpha \lesseqgtr 8 \tan (\alpha+\lambda)$ என்பதற்கேற்ப கூம்பு நழுவும் அல்லது கவிழுமென்று நிறுவுக.

(16) $2a$ நீளப் பக்கங்களைக்கொண்ட கன சதுரக்கட்டையொன்று ஒரு கிடைத்தளத் தரையின்மேல் வைக்கப்பட்டுளளது. தரைக்கும் கட்டைக்கு மிடையேயுள்ள உராய்வுக குணகம் μ. படிப்பரியாக அதிகரிக்கும் கிடைவிசை யொன்று கனசதுரத்தின் நிலைக்குத்துப் பக்கத்திற்குச் செங்குத்தாக, கன சதுரத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் வழிநிலைத் தளத்தில் செயல்படுத்தப்படுகிறது, அவ்விசையின் இடுபுள்ளி $\frac{a}{\mu}$ ஐவிட அதிகமான உயரத்திலிருந்தால் $\mu<\frac{1}{2}$ ஆகயிருக்கும்போது கட்டையானது கவிழாமல் நழுவ முயலுமென்றும் $\mu>\frac{1}{2}$ ஆகியிருக்கும்போது நழுவாமல் கவிழ முயலுமென்றும் காட்டுக.

(17) சாய்வுக்கோணம் $\theta\left(<\frac{\pi}{4}\right)$ கொண்ட ஒரு சாய்தளத்தின்மேல் ஒரு கனசதுரம் அதன்மேல் ஓரங்களிரண்டும், கீழோரங்களிரண்டும் கிடையாயிருக்குமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது. சாய்தளத்திற்கும், கனசதுரத்திற்கு மிடையேயுள்ள உராய்வுக் குணகம் $\frac{1}{2}(1-\tan\theta)$ ஐவிட அதிகமாயிருந்தால் அதன் மேல் விளிம்பின் நடுப்புள்ளியுடன் இணைக்கப்பட்ட ஒரு கயிற்றைச் சாய்தளத்தின் மிப்பெரு சரிவுக்கு இணையாக இருப்பதன்மூலம் கனசதுரம் கவிழாதவாறு தளத்தின் மேலே இழுப்பது சாத்தியமில்லையென்று காட்டுக.

(18) சீரான உருளையொன்றை அதன் அடித்தளம் ஒரு உராய்வுடைய சாய்தளத்தின் மேல் இருக்குமாறு வைத்து, சாய் தளத்தின் சாய்வு படிப்படியாக உயர்த்தப்படுகிறது. உருளையின் விட்டத்திற்கும் உயரத்திற்கு மிடையேயுள்ள விகிதம் உராய்வுக் குணகத்தைவிடக் குறைவாகயிருந்தால், உருளை நழுவுமுன் கவிழுமென்று நிறுவுக.

(19) a நீளப் பக்கமுடைய சதுரமான அடிப்பாகத்தைக் கொண்ட h உயரமுள்ள ஒரு சீரான செவ்வகக் கட்டை ஒரு உராய்வுடைய கிடைத்தளத்தின் மேல் வைக்கப்பட்டு, அதன் அடிப்பாகத்தின் இரு ஓரங்களுக்கு இணையாக அத்தளம் மெதுவாகத் தூக்கப்படுகிறது. உராய்வுக் குணகம் μ எனில், $a>$ அல்லது $<h\mu$ என்பதற்கேற்ப கட்டையானது நழுவும் அல்லது கவிழுமென்று காட்டுக.

(20) கிடைத்தளத்துடன் α கோணச் சாய்விலுள்ள ஒரு உராய்வுடைய சாய்தளத்தின்மேல் W என்னும் எடை வைக்கப்பட்டுள்ளது. உராய்வுக் குணகம் $2 \tan \alpha$. தளத்தின் மேல் எடையை நகர்த்தக் கூடிய மிகச் சிறிய கிடைவிசை $\sqrt{3} \sin \alpha W$. என்றும், தளத்தின் மீப்பெரு சரிவுக்கு $60°$ சாய்வுடன் கூடிய திசையில் எடை நகருமென்றும் காட்டுக.

(21) கிடைத்தளத்துடன் $45°$ கோணச் சாய்விலுள்ள ஒரு உராய்வுடைய தளத்தின் மேல் $\left(\mu=\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, W என்னும் எடை வைக்கப்பட்டு, தளத்தின் உச்சியிலுள்ள A என்னும் ஒரு சிறிய வழவப்பான வளையத்தின் வழியே செல்லும் நூலில் தொங்கிக் கொண்டிருக்கும் P என்னும் எடையுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. தளத்தின் மீப்பெருஞ் சரிவுடன் AW என்ற நூலின் அதிகபட்ச சாத்தியமான சாய்வு θ எனில், $W=3P$ ஆனல் $\cos-\theta \frac{2\sqrt{2}}{3}$ என்று காட்டுக.

(22) $2a$, $2b$ பக்கங்களுடைய ஒரு சீரான செவ்வகப் பலகையானது d இடை வெளியில் ஒரே கிடைக்கோட்டிலுள்ள இரு உராய்வுடைய முளைகளின் மேல் சமநிலையிலிருக்கின்றது. உராய்வுக் கோணம் λ எனில், கிடைத்தளத்துடன் $2a$ பக்கத்தின் சாய்வாகிய θ என்பது

$$d \cos \lambda \cos (2\theta+\lambda)=a \cos \theta-\sin \theta$$

என்ற சமன்பாட்டினுல் தரப்படுமென்று காட்டுக.

(சென்னை எம். எஸ்ஸி. 1966)

(23) $2a$ நீளமான சீரான இருசம நீளக் கோல்கள் அவற்றின் ஒரு முனைகளில் ஒரு பிணையலினுல் வழவழப்பாக இணைக்கப்பட்டு c ஆரையுள்ள ஒரு உராய்வுடைய நிலையான கோளத்தின்மேல் சமம் சீருடன் வைக்கப்பட்டுள்ளன. உராய்வுக் குணகம் $\frac{c}{a}$ எனில். எல்லைச் சமநிலையில் நிலைக்குத்துடன் ஒவ்

வொரு கோலின் எல்லைச் சாய்வும் $\tan^{-1}\left(\frac{c}{a}\right)$ ½ என்று காட்டுக.

(24) $2b$ நீளமுள்ள சீரான பலகையொன்று அதன் ஒரு முனை ஒரு உராய்வுடைய கிடைத்தளத்தின் மேலிருக்குமாறு கிடைத்தளத்தின் மேலிருக்குமாறு கிடைத்தளத்துடன் 2α கோணச் சாய்வில் a ஆரையுள்ள ஒரு நிலையான வழவழப்பான உருளையைத் தொட்டுக் கொண்டிருக்கிருது. உராய்வுக் கோணம் λ ஆகும். $a \sin\lambda = b \tan\alpha \cos 2\alpha \sin(2\alpha+\lambda)$ எனில், சமநிலை சாத்தியமாகுமென்று காட்டுக.

(25) a ஆரையும் W எடையுமுள்ள ஒரு வட்டத்தகடு b ஆரையுள்ள ஒரு வழவழப்பான கோணத்தில் வைக்கப்பட்டு, அதன் மேல் w எடையுள்ள துகள் ஒன்று வைக்கப்படுகிறது. இத் துகளும் தகட்டிற்குமிடையேயுள்ள உராய்வுக் குணகம் μ எனில், தகட்டின் மையத்திலிருந்து துகள் ஓய்விலிருக்கக்கூடிய இடத்தின் அதிகபட்ச தூரம் $\mu\sqrt{b^2-a^2}\left(\frac{W}{w}+1\right)$ என்று காட்டுக.

(26) a நீளப்பக்கமும், α குறுங்கோணமுடைய சாய்சதுர வடிவமான ஒரு விறைப்பான சட்டம் μ உராய்வுக் குணகமுடைய ஒரு உராய்வுடைய முளையின்மேல் ஓய்வு நிலையிலுள்ளது. முளையுடன் சட்டத்தின் தொடுபுள்ளி பெறக்கூடிய இரு நுனிநிலைகளுக்கு கிடையேயுள்ள தூரம் $a\mu\sin\alpha$ என்று காட்டு.

(27) W எடையுள்ள சீரானவட்ட வளையத்தின் பரிதியின் மேல் w எடையுள்ள துகள் ஒன்று வைக்கப்பட்டுள்ளது. உராய்வுக் கோணம் $\sin^{-1}\left(\frac{w}{W+w}\right)$ ஐவிடக் குறைவாகயில்லையெனில், ஒரு உராய்வுடைய முளையின்மேல் அவ் வளையத்தின் எந்தப் புள்ளியும் தொடுகையிலிருக்குமாறு சமநிலையில் வைக்க முடியுமென்று காட்டுக.

(28) ஒரு நாற்சக்கர வண்டியின் அச்சாணிகள் $2a$ இடைவெளியில் இருக்கின்றன. அதன் புவியீர்ப்பு மையம் அச்சாணிகளுக்கிடையே பாதி தூரத்திலும், வண்டி சமதளத்திலிருக்கும் போது தளத்திலிருந்து h உயரத்திலும் இருக்கிறது. θ சாய்வுள்ள ஒரு தளத்தில் கீழேயுள்ள சக்கரங்கள் பூட்டப்பட்ட நிலையிலும், ϕ சாய்வுள்ள ஒரு தளத்தில் மேலேயுள்ள சக்கரங்

களில் பூட்டப்பட்ட நிலையிலும் வண்டி நழுவுந் தருவாயிலிருப்பதாகக் காணப்பட்டுள்ளது. உராய்வுக் குணகம் μ எனில், $\tan\theta = \frac{\mu a}{2a-\mu h}$ என்றும், $\tan\phi = \frac{\mu a}{2a+\mu h}$ என்றும் காட்டுக.

(29) ஒரு இழுவறை (drawer) யானது அதற்கு இணையாகச் செயல்படுத்தப்படும் ஒரு தனிவிசையினால் வெளியே இழுக்கப் படவேண்டியுள்ளது. இழுவறையின் முனைப்பக்கத்தின் நடுப் புள்ளியிலிருந்து எவ்வளவு தூரத்தில் அவ்விசையைச் செயல் படுத்தினால் இழுவறையானது அடைப்பட்டுக் கிடக்காமல் வெளியே வரும் நிலையிலிருக்கும்? (சென்னை 1963 செப்.)

(30) ஒரு நாற்சக்கர வண்டி கிடைத்தளத்துடன் α சாய்விலுள்ள தண்டவாளங்களின் மேல் அதன் கீழ்ச் சக்கரங்கள் பூட்டப்பட்டு ஒய்வு நிலையிலுள்ளது. வண்டியின் புவியீர்ப்பு மையம் தண்டவாளத்திலிருந்து h உயரத்திலும்' கீழ் அச்சாணியிலிருந்தும் மேல் அச்சாணியிலிருந்தும் தண்டவாளத்திற்கு இணையாக முறையே a, b தூரங்களிலுமிருந்தால், சக்கரங்களுக்கும் தண்டவாளங்களுக்கு மிடையேயுள்ள உராய்வுக் குணகம் $\frac{a+b}{h+b\cot\alpha}$ ஐவிடக் குறைவாகயிருக்கக் கூடாதென்று காட்டுக.

7. புவியீர்ப்புமையம்
(CENTRE OF GRAVITY)

பொருண்மை மையம் (Centre of Mass)

ஒரே தளத்திலுள்ள n துகள்களின் பொருண்மைகள் $m_1, m_2, m_3, \ldots\ldots, m_n$ என்று கொள்க. இப்பொருண்மைகள் யாவும் அத்தளத்தின் மேலுள்ள $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots A_n$ என்னும் புள்ளிகளிலிருப்பதாகக் கொள்வோம். அத்தளத்திலுள்ள O என்னும் ஒரு புள்ளியை ஆதியாகக் கொண்டு இப்புள்ளிகளின் திசையி நிலைகள் முறையே $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \ldots\ldots, \vec{r}_n$ என்று கொள்க.

$$\text{இப்பொழுது,}\quad \vec{r} = \frac{m_1\vec{r}_2 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + \ldots\ldots + m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots\ldots + m_n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

என்ற கணியத்தைத் திசையி நிலையாகக் கொண்டு அத்தளத்தின் மேலமைந்துள்ள G என்னும் புள்ளியானது அந்த n துகள்களின் "பொருண்மை மையம்" அல்லது "திணிவு மையம்" (Centre of Mass) என்றழைக்கப்படுகிறது.

இப்பொழுது அத் தளத்தின்மேல் O என்னும் புள்ளியை ஆதியாகக் கொண்டு OX, OY என்னும் செங்குத்து அச்சுக்களை எடுத்துக் கொள்க. i, j என்பன முறையே OX, OY ஆகிய

திசைகளில் எடுத்துக்கொள்ளப்பட்ட திசையி அலகுகள் என்று கொள்க. (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3),......, (x_n, y_n) என்பன முறையே A_1, A_2, A_3......, A_n என்ற புள்ளிகளின் அச்சுத் தூரங்கள் என்றும் (x, y) என்பன பொருண்மை மையம் Gயின் அச்சுத் தூரங்கள் என்றும் கொண்டால்,

$$\vec{r}_1 = x_1\mathbf{i}+y_1\mathbf{j},\ \vec{r}_2 = x_2\mathbf{i}+y_2\mathbf{j},\ \vec{r}_3 = x_3\mathbf{i}+y_3\mathbf{j},\ldots\ldots$$

$$\vec{r}_n = x_n\mathbf{i}+y_n\mathbf{j}$$

என்றும், $\vec{r} = x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$ என்றும் காணலாம்

ஆகவே, $$\vec{r} = \frac{m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2+\ldots\ldots+m_n\vec{r}_n}{m_1+m_2+\ldots\ldots+m_n}$$

$$= \frac{m_1(x_1\mathbf{i}+y_1\mathbf{j})+m_2(x_2\mathbf{i}+y_2\mathbf{j})+\ldots+m_n(x_n\mathbf{i}+y_n\mathbf{j})}{m_1+m_2+\ldots+m_n}$$

$$= \frac{(m_1x_1+m_2x_2+\ldots m_nx_n)\mathbf{i}+(m_1y_1+m_2y_2+\ldots+m_ny_n)\mathbf{j}}{m_1+m_2+\ldots+m_n}$$

$$\therefore\quad x = \frac{m_1x_1+m_2x_2+\ldots+m_nx_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i},$$

$$y = \frac{m_1y_1+m_2y_2+\ldots+m_ny_n}{m_1+m_2+\ldots m_n} = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}$$

எனவே, $G = (x, y) = \left[\dfrac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}, \dfrac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}\right]$ ஆகும்.

இணைவிசைகளின் மையம் (Centre of Parallel Forces)

$\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \ldots\ldots, \vec{P}_n$ என்பன முறையே A_1, (x_1, y_1), A_2, (x_2, y_2), A_3 (x_3, y_3), ..., A_n (x_n, y_n) என்ற புள்ளிகளில் செயல்படும் ஒரு தள இணைவிசைகள் என்று கொள்க.

A_1, A_2 ஆகிய புள்ளிகளில் செயல்படும் $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ ஆகிய இணைவிசைகளின் விளைவு விசை $\vec{R}_1 = (\vec{P}_1 + \vec{P}_2)$ என்னும் இணைவிசையாகும் இவ்விளைவு விசையானது $A_1 A_2$ என்னும்

நேர்கோட்டை $A_1 G_1 : G_1 A_2 = P_2 : P_1$ என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்கக்கூடிய G_1 என்னும் புள்ளிவழியே P_1, P_2 ஆகிய விசை களுக்கிணையாகச் செயல்படும் ஒரு விசையாகும்.

$$\text{எனவே,}\quad G_1 = \left[\frac{P_1 x_1 + P_2 x_2}{P_1 + P_2},\ \frac{P_1 y_1 + P_2 y_2}{P_1 + P_2}\right] \text{ ஆகும்.}$$

இப்பொழுது, G_1 இல் செயல்படும் $\vec{R}_1$ விசைக்கும், A_3 யில் செயல்படும் $\vec{P}_3$ விசைக்குமுள்ள விளைவு விசை

$$\vec{R}_2 = \vec{R}_1 + \vec{P}_3 = (\vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3)$$

என்னும் இணைவிசையாகும். இவ்விளைவு விசையானது, $G_1 A_3$ என்ற நேர்கோட்டை $G_1 G_2 : G_2 A_3 = P_3 : R_1$ என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்கின்ற G_2 என்னும் புள்ளிவழியே R_1, P_3 ஆகிய விசை களுக்கு இணையாகச் செயல்படும் விசையாகும்.

$$\text{ஆகவே,}\quad G_2 = \left[\frac{R_1\left(\dfrac{P_1 x_1 + P_2 x_2}{P_1 + P_2}\right) + P_3 x_3}{R_1 + P_3},\ \frac{R_1\left(\dfrac{P_1 y_1 + P_2 y_2}{P_1 + P_2}\right) + P_3 y_3}{R_1 + P_3}\right]$$

$$= \left[\frac{(P_1 + P_2)\left(\dfrac{P_1 x_1 + P_2 x_2}{P_1 + P_2}\right) + P_3 x_3}{P_1 + P_2 + P_3},\ \frac{(P_1 + P_2)\left(\dfrac{P_1 y_1 + P_2 y_2}{P_1 + P_2}\right) + P_3 y_3}{P_1 + P_2 + P_3}\right]$$

$$= \left[\frac{P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3}{P_1 + P_2 + P_3},\ \frac{P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3}{P_1 + P_2 + P_3}\right]$$

ஆகும். இம்முறையைத் தொடர்ந்து பின்பற்றி வந்தால் இறுதி யில்

$$G_{n-2} = \left[\frac{P_1 x_1 + P_2 x_2 + \ldots + P_{n-1} x_{n-1}}{P_1 + P_2 + \ldots + P_{n-1}},\ \frac{P_1 y_1 + P_2 y_2 + \ldots + P_{n-1} y_{n-1}}{P_1 + P_2 + \ldots + P_{n-1}}\right]$$

என்ற புள்ளியில் செயல்படும் $\vec{R}_{n-2}=\vec{P}_1+\vec{P}_2+\ldots+\vec{P}_{n-1}$ என்னும் இணைவிசையும், A_n இல் செயல்படும் $\vec{P}_n$ என்னும் விசையுமே மிஞ்சி நிற்கும். இவ்விரு இணைவிசைகளும் சமமாகவும், எதிராகவுதுருப்பின், அவை ஒரு சுழலிணையாக அமையும். அவ்வாறில்லையெனில், அவற்றிற்கு ஒரு தனி விளைவு விசையுண்டு.

இத்தனி விளைவு விசை $\vec{R}$ எனில்,

$$\vec{R}=\vec{R}_{n-1}+\vec{P}_n=\vec{P}_1+\vec{P}_2+\vec{P}_4+\ldots+\vec{P}_{n-1}+\vec{P}_n$$

என்றும், அது $G_{n-2}\,A_3$ என்ற நேர்கோட்டை $G_{n-2}\,G:G\,A_n=P_n:R_{n-2}$ என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்கின்ற G என்னும் புள்ளியில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள விசைகளிக்கு இணையாகச் செயல்படுமென்றும் காணலாம்.

$$\therefore\ G=\left[\frac{R_{n-2}\left(\dfrac{P_1x_1+P_2x_2+\ldots+P_{n-1}}{P_1+P_2+\ldots+P_{n-1}}\right)+P_nx_n}{R_{n-2}+P_n},\right.$$

$$\left.\frac{R_{n-2}\left(\dfrac{P_1y_1+P_2y_2+\ldots+P_{n-1}y_{n-1}}{P_1+P_2+\ldots+P_{n-1}}\right)+P_ny_n}{R_{n-2}+P_n}\right]$$

$$=\left[\frac{P_1x_1+P_2x_2+\ldots+P_nx_n}{P_1+P_2+\ldots+P_n},\ \frac{P_1y_1+P_2y_2+\ldots+P_ny_n}{P_1+P_2+\ldots+P_n}\right]$$

எனவே, $x=\dfrac{P_1x_1+P_2x_2+\ldots+P_nx_n}{P_1+P_2+\ldots+P_n}=\dfrac{\sum P_i\,x_i}{\sum P_i}$,

$$y=\frac{P_1y_1+P_2y_2+\ldots+P_ny_n}{P_1+P_2+\ldots+P_n}=\frac{\sum P_i\,y_i}{\sum P_i}$$

என்று காண்கிறோம்.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள இணை விசைகளின் விளைவு விசை செயல்படுகின்ற $G=\left[\dfrac{\sum P_i\,x_i}{\sum P_i},\ \dfrac{\sum P_i\,y_i}{\sum P_i}\right]$ என்னும் இந்தப் புள்ளியானது "இணைவிசைகளின் மையம்" (Centre of Parallel Forces) என்றழைக்கப்படுகிறது.

குறிப்பு 1 : $\sum P_i = P_1 + P_2 + \ldots + P_n = O$ எனில், x, y ஆகியவற்றின் மதிப்புக்களைக் காண இயலாது. ஆகவே கொடுக்கப்பட்டுள்ள இணைவிசைகள் ஒரு சுழலிணையாகக் சுருங்குமென்றறிக.

குறிப்பு 2: இணை விசைகளின் மையத்தைக் காணப் பயன்படும் இச் சூத்திரம் x-அச்சுடன் அவ்விசைகள் கொண்டுள்ள சாய்வுகளைச் சாராதிருப்பதால், இணைவிசைகளின் மையமானது x-அச்சுடன் அவற்றின் சாய்வுகளைச் சாராதிருக்குமென்றறிக.

புவியீர்ப்பு மையம் (Centre of Gravity)

ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருள் என்பது எண்ணற்ற பல சிறு துகள்களால் ஒன்ருக இருக்கிப் பிணைக்கப்பட்ட ஒரு பொருள் ஆகும். இவற்றுள் ஒவ்வொரு துகளும் பூமியின் மையத்தை நோக்கி ஒரு ஈர்ப்பு விசையினுல் இழுக்கப்படுகிறது. இவ்வாறு பூமியின் மையத்தை நோக்கி ஈர்க்கப்படும் விசையானது அந்தத் துகளின் பொருண்மையுடன் விகித சமத்திலிருக்கும். இவ்வீர்ப்பு விசையே அத்துகளின் எடை என்று அழைக்கப்படுகிறது. பொருளின் பருமன் பூமியின் ஆரையுடன் ஒப்பிடுகையில் புறக்கணிக்கத்தக்க அளவில் மிகவும் சிறியதாகயிருப்பின் அப்பொருளிலுள்ள எண்ணற்ற துகள்களின்மீது செயல்படுகின்ற பூமியின் ஈர்ப்பு விசைகளை அத்துகள்களின் வழியே நிலைக்குத்தாகக் கீழ்நோக்கிச் செயல்படுகின்ற இணைவிசைகளாகக் கொள்ளலாம். ஆகவே, இவ்விணை விசைகளின் விளைவு விசை அவற்றின் இணைவிசை மையமாகிய G என்னும் புள்ளி வழியே நிலைக்குத்தாகக் கீழ் நோக்கிச் செயல்படும் ஒரு விசையாகும். இவ்விளைவு விசையின் அளவு அத்துகள்களில் செயல்படுகின்ற விசைகளின் (எடைகளின்) மொத்தமாகும். ஆகவே, $w_1, w_2, w_3, \ldots\ldots, w_n$ என்பன அப்பொருளிலுள்ள துகள்களின் எடைகளெனில், G வழியே செயல்படும் விளைவு விசையின் அளவு $w_1 + w_2 + w_3 + \ldots + w_n = W$ (என்க). ஆகும். இவ்விளைவு விசையாகிய W என்பதே அப்பொருளின் எடை (Weight) என்றும், இவ்விளைவு விசை செயல்படுகின்ற G என்னும் புள்ளியே அப்பொருளின் "புவியீர்ப்பு மையம்" என்றும் அழைக்கப்படுகின்றன.

மேலும், இப்புவியீர்ப்பு மையமானது நிலைக்குத்தாகக் கீழ் நோக்கிச் செயல்படும் $w_1, w_2, w_3, \ldots, w_n$ ஆகிய இணைவிசைகளின் மையமாதலாலும். இவ்விணை விசைகளின் மையத்தின் அச்சுத் தூரங்கள் அச்சுக்களுடன் அவ்விசைகள்கொண்டுள்ள

சாய்வுகளைச் சாராதிருக்குமாகையாலும், பொருளை எந்த நிலையில் திருப்பி வைத்தாலும் அதன் புவியீர்ப்பு மையம் மாறாதிருக்கு மென்றறியலாம்.

புவியீர்ப்பு மையம்—வரையறை

ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருள் அல்லது இறுக்கமாகப் பிணைக் கப்பட்ட பல துகள்களைக்கொண்ட தொகுதியொன்றின் "புவியீர்ப்பு மையம்" என்பது அப்பொருளை அல்லது அத் தொகுதியினை எந்நிலையில் வைத்திருந்தாலும் அப்பொருளின் எடை அல்லது அத்தொகுதியின் மொத்த எடை செயல்படு கின்ற, அப்பொருள் அல்லது அத்தொகுதியிலுள்ள, ஒரு நிலை யான புள்ளியாகும்.

ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளிலமைந்துள்ள துகள்கள் யாவும் ஒரே தளத்திலமைந்துள்ளனவென்றும், அத்தளத்தில் எடுத்துக் கொள்ளப்பட்ட OX, OY என்றும் செங்குத்து அச்சுக்களைக் குறித்து இத்துகள்கள் அமைந்துள்ள புள்ளிகளின் அச்சுத் தூரங்கள் முறையே (x_1, y_1) (x_2, y_2),...., (x_n, y_n) என்றும் அத் துகள்களின் புவியீர்ப்பு மையம் Gயின் அச்சுத் தூரங்கள் (x, y) என்றும் கொண்டால்,

$$x = \frac{w_1x_1+w_2x_2+\ldots+w_nx_n}{w_1+w_2+\ldots+w_n} = \frac{\sum w_i x_i}{\sum w_i},$$

$$y = \frac{w_1y_1+w_2y_2+\ldots+w_ny_n}{w_1+w_2+\ldots+w_n} = \frac{\sum w_i y_i}{\sum w_i}$$

என்று காணலாம்.

அதாவது, $G = \left[\frac{\sum w_i x_i}{\sum w_i}, \frac{\sum w_i y_i}{\sum w_i}\right]$ ஆகும்.

இத்துகள் யாவும் ஒரே தளத்தில் அமையாவிடில், அக்கட் டிறுக்கப் பொருளிலுள்ள O என்னும் ஏதேனுமொரு புள்ளி வழியே OX, OY, OZ என்னும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான அச்சுக்களைக் குறித்துக் கொள்க. இவ்வச்சுக்களைக் குறித்து இத்துகள்களமைந்துள்ள புள்ளிகளின் அச்சுத் தூரங்கள் முறையே (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2),......(x_n, y_n, z_n) என்றும், புவியீர்ப்பு மையம் Gயின் அச்சுத் தூரங்கள் (x, y, z) என்றும் கொண்டால்,

$$G=(x, y, z) = \frac{\sum w_i x_i}{\sum w_i}, \frac{\sum w_i y_i}{\sum wi}, \frac{\sum w_i Z_i}{\sum w_i}$$

என்று காணலாம். எவ்வாறெனில்,

$A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots, A_n$ என்ற புள்ளிகளிலமைந்துள்ள துகள் களின் எடைகளாகிய $w_1, w_2, w_3, \ldots, w_n$ என்பன நிலைக்குத் தாகக் கீழ் நோக்கிச் செயல்படுவதால் இவை யாவும் ஒரு திசை யிலை விசைகளாகின்றன. இவற்றின் விளைவு விசை W எனில், இதுவும் புவியீர்ப்பு மையம் G வழியே நிலைக்குத்தாகக் கீழ் நோக்கிச் செயல்படும் ஒரு இணைவிசையாகும். மேலும்,

$W = w_1 + w_2 + w_3 + \ldots + w_n$ = அக்கட்டிறுக்கப் பொருளின் எடையாகும்.

இவ்விணை விசைகள் யாவும் நிலைக்குத்தாகக் கீழ்நோக்கிச் செயல்படுவதால் அவையாவும் OZ அச்சுக்கு இணையாகச் செயல்படுவதாகக் கொள்ளலாம். இப்பொழுது, OY அச்சு பற்றிய திருப்புத்திறன்களையெடுத்து, திருப்புத்திறன் சமன்பாடு காண்க.

அதாவது, ஏதேனுமொரு நேர்கோட்டைப் பற்றி ஒரு விசைத் தொகுதியைச் சேர்ந்த விசைகளின் திருப்புத்திறன் களின் மொத்தம் அதே நேர்கோட்டைப்பற்றி அவற்றின் விளைவு விசையின் திருப்புத்திறனுக்குச் சமம் என்ற தேற்றத் தின்படி,

$$W x = w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3 + \ldots + w_n x_n$$

அல்லது,
$$x = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3 + \ldots + w_n x_n}{W}$$

$$= \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3 + \ldots + w_n x_n}{w_1 + w_2 + w_3 + \ldots + w_n}$$

$$= \frac{\sum w_i x_i}{\sum w_i}$$

இதுபோல், $y = \dfrac{\sum w_i y_i}{\sum w_i}$ என்றும், $z = \dfrac{\sum w_i z_i}{\sum w_i}$ என்றும் காணலாம்.

தொகையீட்டு முறையில் புவியீர்ப்பு மையம்
(C. G. by Integration)

கொடுக்கப்பட்டுள்ள கட்டிறுக்கப் பொருளானது தொடர்ச் சியாக அமையப்பெற்ற எண்ணற்ற துகல்களானதெனக் கொள்க. அப்பொருளிலுள்ள O என்னும் ஏதேனுமொரு

புள்ளி வழியே குறிக்கப்பட்ட OX, OY, OZ என்னும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான அச்சுக்கள் குறித்து இத்துகள்கள் அமைந்துள்ள புள்ளிகளில் அச்சுத் தூரங்கள முறையே (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), ... என்றும், அப்பொருளின் புவியீர்ப்பு மையம் Gயின் அச்சுத் தூரங்கள் (x, y, z) என்றும் கொள்க. இத்துகள்களின் எடைகள் முறையே δw_1, δw_2, δw_3, ... எனில், தொகையீட்டு முறைப்படி, அப்பொருளின் எடை

$$W = \underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} \sum_{i=1}^{n} \delta w_i = \int \delta w.$$

ஆகும். மேலும், முன் குறிப்பிட்டுள்ளபடி,

$$x = \frac{\underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} \sum_{i=1}^{n} x_i \,\delta w_i}{\underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} \sum_{i=1}^{n} \delta w_i} = \frac{\int x\, dw}{\int dw}$$

என்றும், $$y = \frac{\underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} \sum_{i=1}^{n} y_i \,\delta w_i}{\underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} \sum_{i=1}^{n} \delta wi} = \frac{\int y\, dw}{\int dw}$$

என்றும், $$z = \frac{\underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} \sum_{i=1}^{n} z_i \,\delta w_i}{\underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} \sum_{i=1}^{n} \delta wi} = \frac{\int z\, dw}{\int dw}$$

என்றும் காணலாம்.

குறிப்பு 1: $\delta m_1, \delta m_2, \delta m_3, \ldots$ என்பன இத்துகள்களின் பொருண்மைகளெனில்,

எடை = பொருண்மை × ஈர்ப்பு முடுக்கம்

என்ற சூத்திரத்தின்படி, $\delta w = \delta m \times g$ ஆகையால்,

$$x = \frac{\underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \sum_{i=1}^{n} x_i \, \delta w_i}{\underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \sum_{i=1}^{n} x_i \, \delta w_i}$$

$$= \frac{\underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \sum_{i=1}^{n} x_i \, \delta m_i \, g}{\underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \sum_{i=1}^{n} \delta m_i \, g}$$

$$= \frac{g \int x \, dm}{g \int dm}$$

$$= \frac{\int x \, dm}{\int dm}$$

இதுபோல், $y = \dfrac{\int y \, dm}{\int dm}$, $z = \dfrac{\int z \, dm}{\int dm}$ ஆகும்.

குறிப்பு 2: இத்துகள்கள் யாவும் ஒரே தளத்திலமைந்திருப்பின்,

$$G = (x, y) = \left[\frac{\int x \, dm}{\int dm}, \frac{\int y \, dm}{\int dm}\right]$$ என்றறிக.

குறிப்பு 3: மேற்கண்ட தொகைடுயீடுகளில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள கட்டிறுக்கப் பொருள் முழுவதிலுமுள்ள துகள்களுக்குத் தொகையீடு காணவேண்டும். மேலும், கொடுக்கப்பட்டுள்ள கட்டிறுக்கப் பொருளின் பரிமாணம் வரையறுக்கப்பட்டதாயிருக்குமாதலின் மேற்கண்ட தொகை டுகள் யாவும் வரையறுத்த தொகையீடுகள் (Definite Integrals) ஆகும்.

புவியீர்ப்பு மையத்தின் தனித் தன்மை

ஒரு பொருளுக்கு ஒரேயொரு புவியீர்ப்பு மையம் தானுண்டு. சாத்தியமானல் ஒரே பொருளுக்கு G^1, G_2 என்னும் இரு புவியீர்ப்பு மையங்கள் இருப்பதாகக் கொள்க. எனவே, அப்பொருளின் மொத்த எடையும் G^1 வழியாகவும், G^2 வழியாகவும் செயல்படும். அதாவது அப்பொருளின் எடை செயல்படும் செயற்கோடு $G^1 \, G^2$ ஆகும். ஆனல் ஒரு பொருளை எந்த நிலையில் வைத்திருந்தாலும் அதன் எடை புவியீர்ப்பு மையத்

தின் வழியேதான் செயல்படுமென்று கண்டோம். எனவே, அப்பொருளைச் சற்று திருப்பி G^1 G^2 என்ற நேர்கோடு கிடையாக இருக்குமாறு செய்க. இப்பொழுதும் அப்பொருளின் எடை G^1 வழியாகவும், G^2 வழியாகவும் செயல்பட வேண்டுமாதலின், இவ்வாறு திரும்பி நிலையில் அப்பொருளின் எடை G^1 G_2 என்ற கிடைக்கோட்டின் வழியாகச் செயல்படுமென்று காண்கிறோம்; இது சாத்தியமன்று. ஏனெனில் எல்லாப் பொருட்களின் எடைகளும் நிலைக்குத்தாகக் கீழ் நோக்கித்தான் செயல்படுமேயன்றி கிடைநிலையாகச் செயல்பட முடியாது, எனவே, அப்பொருளுக்கு இரு புவியீர்ப்பு மையங்கள் இருக்க முடியாது. அதாவது, எந்தப் பொருளுக்கும் ஒரேயொரு புவியீர்ப்பு மையம் தான் உண்டு.

சீரான பொருட்களின் புவியீர்ப்பு மையங்கள்

சீரான ஒழுங்கான பொருட்களின் புவியீர்ப்பு மையங்களைப் பெரும்பாலும் வடிவியல் முறைகளைப் பயன்படுத்தி நிர்ணயிக்க முடியும். அவற்றுள் முக்கியமான சில பொருட்களின் புவியீர்ப்பு மையங்களை நிர்ணயிக்கும் முறைகள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

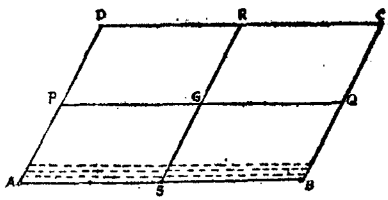
(1) சீரான நேரான மெல்லிய கோல்

AB என்னும் ஒரு சீரான நேரான கோலொன்றைக் கருதுக. அதன் நடுப்புள்ளியை *M* என்று குறிப்பிடுக. கோல் சீரானதாகையால், *AM*, *MB* ஆகிய இரு பகுதிகளிலும் சம எண்ணிக்கையிலான துகள்களிருக்கும். எனவே, *AM* பகுதியில் *P* என்னும் புள்ளியிலுள்ள ஒரு துகளுக்குச் சமமான துகள் ஒன்று *MB* பகுதியில் *M*இலிருந்து சமதூரத்திலிருக்கும். சமச் சீருடன் அமைந்திருக்கும் இவ்விரு சம எடைகளின் விளைவு எடை *M* வழியே செயல்படும். இதுபோல், *AM*, *BM* ஆகிய இரு பகுதிகளிலுமுள்ள எல்லாத் துகள்களையும் சமச் சீருடன் அமைந்துள்ள சோடித் துகள்களாகக் (Pairs of Particles) கருதி, ஒவ்வொரு சமச் சீர்ஜோடித் துகள்களின் விளைவு எடையும் *M* வழியே செயல்படுமென்று கொண்டு. கோலின் மொத்த எடையும் அதன் நடுப் புள்ளியாகிய *M* வழியே செயல்படுமென்றறியலாம்.

ஆகவே, ஒரு சீரான மெல்லிய கோலின் புவியீர்ப்பு மையம் அதன் நடுப் புள்ளியாகும்.

(2) ஒரு மெல்லிய சீரான இணைகரத் தகடு

ABCD என்பது ஒரு மெல்லிய சீரான இணைகர வடிவத் தகடு. *P*, *Q*, *R*, *S*, என்பன முறையே *AD*, *BC*, *CD*, *AB* ஆகிய பக்கங்களின் நடுப் புள்ளிகள்.



படம் 174

இந்தத் தகடானது, *AB*க்கு இணையான பெரு எண்ணிக்கையிலான மெல்லிய சீரான கோல்களினலானதெனக் கருதலாம். இச்சீரான கோல்கள் ஒவ்வொன்றின் புவியீர்ப்பு மையமும் அதன் நடுப் புள்ளியிலிருக்கு மென்றறிவோம். மேலும், இக் கோல்களின் நடுப்புள்ளிகள் யாவும் *RS* என்ற நடுக்கோட்டின் மேலிருக்கு மென்பது நாமறிந்ததே. ஆகவே, தகட்டின் புவியீர்ப்பு மையம் *RS* என்ற நடுக்கோட்டின் மேலிருக்கு மென்றறிகிறோம்.

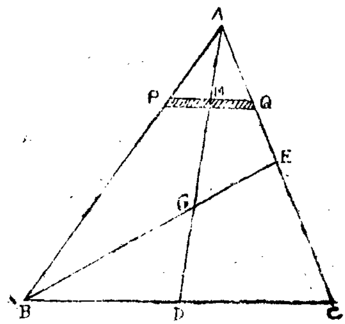
இதுபோல், இந்த தகடானது *AD*க்கு இணையான பெரு எண்ணிக்கையிலான மெல்லிய சீரான கோல்களிலானதெனக் கருதி, அதன் புவியீர்ப்பு மையம் *PX* என்னும் நடுக்கோட்டின் மேலிருக்குமென்று காணலாம். ஆகவே, இணைகரத் தகட்டின் புவியர்ப்பு மையம் இவ்விரு நடுக் கோடுகளின் வெட்டுப் புள்ளியிலிருக்குமென்று காணலாம்.

குறிப்பு 1 ஓர் இணைகரத்தின் எதிர்ப் பக்கங்களின் நடுப் புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நடுக் கோடுகளின் வெட்டுப் புள்ளியும் அதன் மூலை விட்டங்களின் வெட்டுப் புள்ளியும் ஒன்றேயாதலால் இணைகரத் தகட்டின் புவியீர்ப்பு மையம் அதன் மூலை விட்டங்களின் வெட்டுப் புள்ளியிலிருக்கு மென்றுங் கூறலாம்.

குறிப்பு 2 சதுரம், சாய்சதுரம், செவ்வகம் ஆகியவையும் இணைகர வகையைச் சார்ந்தவையாதலின் இவற்றின் புவியிர்ப்பு மையங்களும் மூலைவிட்டங்களின் வெட்டுப் புள்ளியிலிருக்கு மென்றறிக.

(3) ஒரு மெல்லிய சீரான முக்கோணத் தகடு

ABC என்பது ஒரு சீரான முக்கோணத் தகடு. *AD*, *BE* என்பன அதன் மையக் கோடுகள். இம் முக்கோணத் தகடானது *BC*க்கு இணையான *PQ* போன்ற மெல்லிய சீரான எண்ணற்ற நுண் பகுதிகளானதெனக் கருதுக. ஒவ்வொரு நுண்



படம் 175

பகுதியையும் ஒரு நீண்ட மெல்லிய சீரான கோலெனக் கருதி அதன் புவியீர்ப்பு மையம் அதன் நடுப்புள்ளியி லிருப்பதாகக் கொள்ளலாம். அதாவது, *PQ* என்ற நுண் பகுதியின் புவியீர்ப்பு மையம் அதன் நடுப்புள்ளியாகிய *M*இல் இருக்கும். இதுபோல் எல்லா இணை நுண் பகுதிகளின் புவியிர்ப்பு மையங்களும் அவற்றின் நடுப் புள்ளிகளிலிருக்கும். இந்த நடுப் புள்ளிகள் யாவும் *AD* என்னும் மையக் கோட்டின் மேலமையுமென்பது நாமறிந்ததே. ஆகவே, முக்கோணத் தகட்டின் புவியீர்ப்பு மையம் *AD* என்னும் இந்த மையக் கோட்டின் மேல் ஏதோ வொரு புள்ளியிலிருக்கு மென்றறிகிறோம்.

இதுபோல் முக்கோணத் தகட்டை *AC*க்கு இணையான மெல்லிய சீரான எண்ணற்ற நுண் பகுதிகளாகப் பிரித்து, மேற் கூறப்பட்டவை போன்ற விளக்கங்களின் மூலம் முக்கோணத் தகட்டின் புவியிர்ப்பு மையம் *BE* என்னும் மையக் கோட்டின் மேலும் ஏதோவொரு புள்ளியிருக்கு மென்று காணலாம். ஆகவே, முக்கோணத் தகட்டின் புவியிர்ப்பு மையம் *AD*, *BE* ஆகிய இரு மையக் கோடுகளிலுமிருப்பதால், அவற்றின் வெட்டுப் புள்ளியே அதன் புவியிர்ப்பு மையமாகும். ஆனால் ஒரு முக்கோணத்தில் மையக் கோடுகளின் வெட்டுப்புள்ளி அதன் பொருண்மை மையம் (centroid) ஆகும். ஆகவே, ஒரு சீரான மெல்லிய முக்கோணத் தகட்டின் புவியிர்ப்பு மையம் அதன் பொருண்மை மையத்திலிருக்கு மென்றறிகிறோம்.

குறிப்பு 1 ஒரு முக்கோணத்தின் பொருண்மை மையம் அதன் மையக்கோடு ஒவ்வொன்றையும் 2 : 1 என்ற விகிதத்திற் பிரிக்குமாகையால், ஒரு மெல்லிய சீரான முக்கோணத் தகட்டின் புவியீர்ப்பு மையம் அதன் மையக்கோடு ஒவ்வொன்றையும் 2 : 1 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்குமென்றறிக.

குறிப்பு 2 ஒரு மெல்லிய சீரான முக்கோணத் தகட்டின் புவியீர்ப்பு மையமானது அம் முக்கோணத்தின் உச்சிகளில் வைக்கப்படும் மூன்று சம எடைகளின் புவியீர்ப்பு மையத்துடன் பொருந்தும்.

$\triangle ABC$யின் உச்சி ஒவ்வொன்றிலும் W என்னும் எடை வைக்கப்பட்டுள்ளதாகக் கருதுக. B, C ஆகிய உச்சிகளிலுள்ள் W. W ஆகிய எடைகளின் விளைவு BCயின் நடுப் புள்ளியாகிய Dயில் செயல்படும் $2W$ எடையுள்ள விசையாகும். இப்பொழுது Aயில் செயல்படும் W எடையுள்ள விசை, Dயில் செயல்படும் $2W$ எடையுள்ள விசை ஆகிய ஒரு திசை இணை விசைகளின் விளைவு ADயை 2 : 1 என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்கின்ற G என்னும் புள்ளி வழியே செயல்படும் $3W$ எடையுள்ள விசையாகும். அதாவது, A, B, C ஆகிய மூன்று புள்ளிகளின் வைக்கப்படும் மூன்று சம எடைகளின் புவியீர்ப்பு மையமானது AD என்னும் மையக் கோட்டினை 2:1 என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்கின்ற புள்ளியாகும். ஆனால் முக்கோணத் தகட்டின் புவியீாப்பு மையமும் AD ஐ 2:1 என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்கின்ற திணிவு மையத்திலேயேயிருக்குமாகையால் இரண்டு புவியீர்ப்பு மையங்களும் ஒன்ருகப் பொருந்து மென்றறிக.

குறிப்பு 3 ABC என்ற மெல்லிய சீரான முக்கோணத் தகட்டின் முனைகளின் அச்சுத்தூரங்கள் முறையே (x_1, y_1), (x_2, y_2), $(x_3\ y_3)$ என்று எடுத்துக்கொள்வோமானல் அவற்றின் புவியீர்ப்பு மையம் $G\ (x,y)$ இண் அச்சுத்தூரங்கள்

$$x = \frac{wx_1 + wx_2 + wx_3}{w+w+w} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3},$$

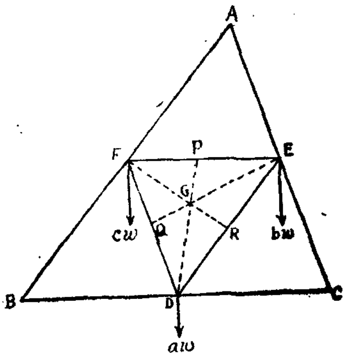
$$y = \frac{wy_1 + wy_2 + wy_3}{w+w+w} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

என்று காணலாம்.

4. சீரான மூன்று கோல்களாலான முக்கோணம்

ABC என்பது BC, CA, AB ஆகிய மூன்று சீரான கோல்களினலான ஒரு முக்கோணம். இக்கோல்களின் நீளங்கள் $BC=a$, $CD=b$, $AB=c$ என்று கொள்க.

W என்பது ஒரு அலகு நீளக்கோலின் எடையெனில் இக்கோல்களின் எடைகள் முறையே *aw*, *bw*, *cw* ஆகும். *D*, *E*, *F* என்பன முறையே *BC*, *CA*, *AB* ஆகிய கோல்களின் நடுப்புள்ளிகளெனில், *aw bw cw* ஆகிய எடைகள் முறையே *D*, *E*, *F* ஆகிய நடுப்புள்ளிகளின் வழியே செயல்படும். இம் மூன்று எடைகளும் நிலைக்குத்தாகக் கீழ்நோக்கிச் செயல்படும் மூன்று இணை விசைகளாகும். இம்மூன்று இணை விசைகளின் விளைவு விசை செயல்படும் புள்ளியே மூன்று கோல்களின் புவியீர்ப்பு மையமாகும்.



படம் 176

E யில் செயல்படும் *bw*, *F* இல் செயல்படும் *cw* ஆகிய விசைகளின் விளைவு விசையாகிய $(b+c)$ *w* என்பது *EF* ஐ $EP : PF = cw : bw = c : b$ என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்கக்கூடிய *P* என்னும் புள்ளியில் செயல்படும்.

அதாவது, $\frac{EP}{PF} = \frac{c}{b} = \frac{AB}{AC} = \frac{2\,DE}{2\,DF} = \frac{DE}{DF}$

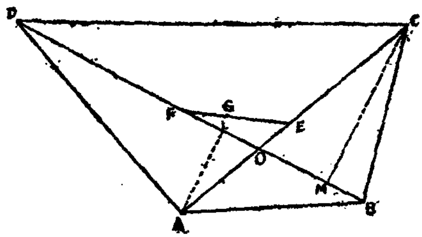
$\therefore$ *DP* என்பது *EDF* இரு சம வெட்டியாகும்.

இப்பொழுது, *D* யில் செயல்படும் *aw* என்னும் எடை, *P* யில் செயல்படும் $(b+c)$ *w* என்னும் எடை ஆகியவற்றின் விளைவு விசையாகிய $(a+b+c)$ *w* என்னும் எடையானது *DP* யிலுள்ள ஏதோவொரு புள்ளியில் செயல்படும். அதாவது $\triangle ABC$ யின் புவியீர்ப்பு மையம் *DP* யில் இருக்குமென்றறிகிறோம். இது போல் $\triangle ABC$ யின் புவியீர்ப்பு மையமானது *DEF*, *EFD* ஆகிய கோணங்களின் இரு சமவெட்டிகளாகிய *EQ*, *FR* ஆகியவற்றிலுதுருக்குமென்று காணலாம். ஆகவே $\triangle ABC$யின் புவியீர்ப்பு மையமானது

$\triangle DEF$இன் இருசம வெட்டிகளின் வெட்டுப்புள்ளியாகும்; அதாவது $\triangle DEF$இன் உள்வட்ட மையமாகும்.

5. ஒரு சீரான நாற்கரவடிவத் தகடு

ஒரு சீரான நாற்கரவடிவத் தகட்டின் புவியீர்ப்பு மையத்தைக் காண்பதற்குமுன் பின்வரும் முக்கியக் கோட்பாடு ஒன்றினை நிறுவுவோம்.



படம் 177

ஒரு நாற்கரத் தகட்டின் புவியீர்ப்பு மையமானது அதன் நான்கு முனைகளிலும் வைக்கப்படும் நான்கு சம எடைகளுடன் அதன் மூல விட்டங்களின் வெட்டுப் புள்ளியில் வைக்கப்படும் சமமான ஆனல் எதிரடையான முள்ள எடையும் சேர்ந்த தொகுதியின் புவியீர்ப்பு மையத்துடன் பொருந்தும்.

நிறுவல்: $ABCD$ என்னும் நாற்கரத் தகட்டின் மூலை விட்டங்கள் O-வில் வெட்டுகின்றன.

ABD, CBD ஆகிய முக்கோணத் தகடுகளின் எடைகள் முறையே W_1, W_2 என்க.

A, C ஆகிய உச்சிகளிலிருந்து BDக்கு முறையே AL, CM என்னும் குத்துயரங்கள் வரைக.

$$\frac{\triangle ABD}{\triangle CBD} = \frac{\frac{1}{2}BD.AL}{\frac{1}{2}BD.CM} = \frac{AL}{CM.}$$

$$\frac{AL}{CM} = \frac{\triangle ABD}{\triangle CBD} = \frac{W_1}{W_2}.$$

ஆனல் $\triangle AOL \,|||\, \triangle COM$ ஆகையால்,

$$\frac{AO}{OC} = \frac{AL}{CM} = \frac{W_1}{W_2}$$

இப்பொழுது $\triangle ABD$யின் புவியீர்ப்பு மையமானது A, B, D ஆகிய முனைகள் ஒவ்வொன்றிலும் $\frac{W_1}{3}$ எடை வீதம் வைக்கப்

பட்ட மூன்று சம எடைகளின் புவியீர்ப்பு மையத்துடன் பொருந்தும். இதுபோல் $\triangle$ *CBD*யின் புவியீர்ப்பு மையமானது *C*, *B*, *D* ஆகிய முனைகள் ஒவ்வொன்றிலும் $\frac{W_2}{3}$ எடை வீதம் வைக்கப்படும் மூன்று சம எடைகளின் புவியீர்ப்பு மையத்துடன் பொருந்தும்.

ஆகவே, நாற்கரம் *ABCD*யின் புவியீர்ப்பு மையமானது முறையே *A*; *B*, *C*, *D* என்ற முனைகளில் வைக்கப்படும் $\frac{W_1}{3}$ $\frac{W_1+W_2}{3}$, $\frac{W_2}{3}$, $\frac{W_1+W_2}{3}$ என்ற எடைகளின் புவியீர்ப்பு மையத்திற்குச் சமமாகும். இப்பொழுது *A*யில் $\frac{W_2}{3}$ என்னும் எடையையும், *C*யில் $\frac{W_1}{3}$ என்னும் எடையையும் கூடுதலாக வைக்கவும். இந்த அதிகப்படியான எடைகளை ஈடு செய்யும் பொருட்டு *A*யிலுள்ள $\frac{W}{3}$ எடை, *C*யிலுள்ள $\frac{W_1}{3}$ எடை ஆகியவற்றின் புவியிர்ப்பு மையத்தில்— $\left(\frac{W_1+W_2}{3}\right)$ என்னும் எடையை வைக்கவும். ஆனல் *A*யிலுள்ள $\frac{W_2}{3}$ எடை, *C*யிலுள்ள $\frac{W_1}{3}$ எடை ஆகியவற்றின் புவியீர்ப்பு மையம் *AC*ஐ

$$\frac{AO_1}{O_1C}=\frac{W_1\ l\ 3}{W_2\ l\ 3}=\frac{W_1}{W_2}$$

என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்கின்ற O_1 என்னும் புள்ளியாகும். ஆனல்,

$$\frac{AO.}{OC}=\frac{W_1}{W_2}$$

என்று நிறுவியுள்ளோமாகையால் O_1-ம், *O*-ம் ஒரே புள்ளியேயாகும். ஆகவே, நாற்கரத் தகடு *ABCD*யின் புவியீர்ப்பு மையமானது *A*, *B*, *C*, *D* என்னும் அதன் முனைகள் ஒவ்வொன்றிலும் வைக்கப்படும் $\frac{W_1+W_2}{3}$ என்னும் எடையும், அதன் மூலை விட்டங்களின் வெட்டுப் புள்ளியாகிய *O*–வில்

வைக்கப்படும்— $\left(\frac{W_1+W_2}{3}\right)$ எனினும் எடையும் சேர்ந்த ஐந்து எடைத் தொகுதியின் புவியீர்ப்பு மையத்துடன் பொருந்தும் என்று அறிகிறோம்.

இப்பொழுது சீரான நாற்கரத் தகட்டின் புவியீர்ப்பு மையம் காண்போம்.

நாற்கரம் $ABCD$யின் புவியீர்ப்பு மையமானது A, C ஆகிய மூலைகளில் முறையே $\frac{W_1}{3}$, $\frac{W_2}{3}$ ஆகிய எடைகளும் B,D ஆகிய மூலைகள் ஒவ்வொன்றிலும் $\frac{W_1+W_2}{3}$ என்ற எடையும் கொண்ட தொகுதியின் புவியீர்ப்பு மையத்திற்குச்சமம் என்று கண்டோம். இவற்றுள், Aயிலுள்ள $\frac{W_1}{3}$, Cயிலுள்ள $\frac{W_2}{3}$ ஆகியவற்றின் விளைவாகிய $\frac{W_1+W_2}{3}$ என்பது ACஐ

$$\frac{AE}{EC}=\frac{W_2/3}{W_1/3}=\frac{W_2}{W_1}=\frac{OC}{AO}$$

என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்கின்ற E என்னும் புள்ளி வழியே செயல்படும்.

$$\text{அதாவது, } \frac{AE+EC}{EC}=\frac{OC+AO}{AO}$$

$$\text{அதாவது, } \frac{AC}{EC}=\frac{AC}{AO}$$

$$\text{அல்லது } EC=AO$$

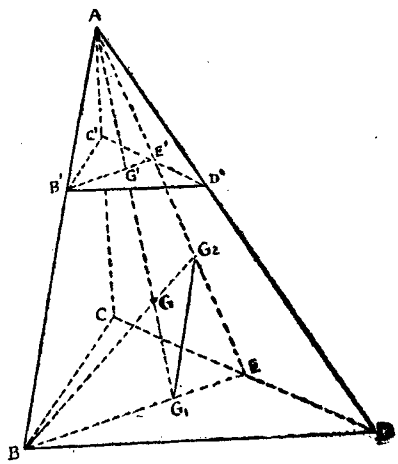
B, Dயிலுள்ள $\frac{W_1+W_2}{3}$, $\frac{W_1+W_2}{3}$ ஆகிய எடைகளின் விளைவாகிய $\frac{2}{3}(W_1+W_2)$ என்பது BDயின் நடுப்புள்ளியாகிய Fஇல் செயல்படும். ஆகவே, Eயிலுள்ள $\frac{W_1+W_2}{3}$ என்னும் எடை, Fஇலுள்ள $\frac{2}{3}(W_1+W_2)$ என்னும் எடை ஆகியவற்றின் விளைவு EFஐ 2: 1 என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளி வழியே செயல்படுமாகையால் நாற்கரத் தகடு $ABCD$யின் புவியீர்ப்பு மையமானது EFஐ 2: 1 என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்கின்ற G என்னும் புள்ளியாகும்.

(6) சீரான நான்முகத் திண்மம்: (Uniform Solid Tetrahedron)

$ABCD$ என்பது ஒரு சீரான நான்முகத்திண்மம். BCD என்ற முகத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் G எனில்;

$$BG_1 = 2\ G_1E$$

ஆகும். BCD முகத்திற்கு இணையான தளங்களால் நான்முகத் திண்மத்தை $B'C'D'$ போன்ற மெல்லிய முக்கோணத் தகடு



படம் 178

களாகப் பிரிக்கவும். $B'C'D'$ என்னும் தளம் AE, AGஐ முறையே E', G' என்ற புள்ளிகளில் வெட்டட்டும்.

E என்பது CDயின் நடுப்புள்ளி. மேலும், $C'D' \parallel CD$. ஆகையால், E^1 என்பது C^1D^1இன் நடுப்புள்ளியாகும். எனவே, B^1E^1 என்பது $\triangle B^1C^1D^1$இன் மையக் கோடாகும். மேலும், BE, B^1E^1 என்பன AB, AG_1, AE ஆகிய கோடுகளடங்கிய தளத்திலிருக்குமாகையால், G_1 என்பது AG_1இல் இருக்கும்.

$$B'G_1' \parallel BG_1$$

$$\therefore \triangle AB'G_1' \ ||| \ ABG_1$$

$$\therefore \frac{AG_1'}{AG_1} = \frac{B'G_1'}{BG_1} = \frac{B'G_1'}{2\ G_1E}$$

$$\therefore \frac{B'G_1'}{AG'_1} = \frac{2\ G_1\ E}{AG_1} = \frac{2\ G_1'\ E'}{AG_1'}$$

$$\therefore B'G_1' = 2\ G_1'E'$$

அதாவது G_1' என்பது $\triangle B'C'D'$ என்ற தகட்டின் புவி யீர்ப்பு மையமாகும். எனவே, BCDக்கு இணையான எல்லாத் தகடுகளின் புவியீர்ப்பு மையங்களும் AG_1 இல் இருக்குமென்றறி கிறோம். ஆகவே நான்முகத் திண்மத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் AG_1இல் இருக்கும்.

இதுபோல், G_2 என்பது ACD என்ற முகத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் BG_2 என்ற நேர்கோட்டிலும் இருக்குமென்று காண லாம். மேலும், AE என்பது $\triangle ACD$யின் ஒரு மையக் கோடா கையால் G_2 என்பது AEயிலுள்ள ஒரு புள்ளியாகும். ஆனால், AB, AG_1, AE ஆகையவை ஒரே தளத்திலிருப்பதால், AG_1ம், BG_2ம் ஒன்றையொன்று வெட்டிக் கொள்ளக்கூடிய நேர்கோடு களாகும். ஆகவே, AG_1, BG_2 ஆகியவற்றின் வெட்டுப்புள்ளி யாகிய G என்பதே நான்முகத் திண்மத்தின் புவியீர்ப்பு மைய மாகும்.

இப்பொழுது, G_1G_2ஐச் சேர்க்கவும்.

$$\frac{G_1E}{G_1B} = \frac{1}{2} = \frac{EG_2}{G_2A}$$

$$\therefore \quad G_1G_1 \parallel AB.$$

$$\text{ஆகவே,} \quad \frac{AB}{G_1G_2} = \frac{BE}{G_1E} = \frac{3}{1}$$

இப்பொழுது, $\triangle AGB ||| \triangle G_1GG_2$

$$\therefore \quad \frac{AG}{GG_1} = \frac{AB}{G_1G_2} = \frac{3}{1}$$

அல்லது, $AG = 3\,CG_1$

அல்லது $GG_1 = \frac{1}{4}AG_1$.

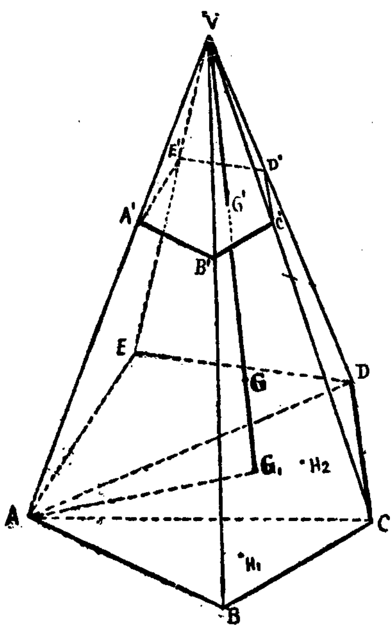
அதாவது, நான்முகந் திண்மத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் அலன் ஏதாவதொரு முகத்தின் பொருண்மை மையத்தினை எதிர் முனையுடன் சேர்க்கும் நேர்கோட்டை 1 : 3 என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளியாகும்.

குறிப்பு: ஒரு நான்முகத் திண்மத்தின் புவியீர்ப்பு மைய மானது அதன் முனைகளில் வைக்கப்படும் நான்கு சம எடை களின் புவியீர்ப்பு மையத்துடன் பொருந்து மென்பதை முன் போல் கண்டறியலாம்.

(7) சீரான திண்மைப் பட்டைக் கூம்பு (Uniform solid Pyramid)

V-ABCDE என்பது *V*ஐ உச்சியாகவும், *ABCDE*ஐ அடித் தளமாகவும் கொண்ட ஒரு திண்மப் பட்டைக் கூம்பு. G_1 என்பது அடித்தளத்தின் புவியீர்ப்பு மையம்.

VG_1 ஐச் சேர்க்கவும். அடிப்பாகத்திற்கு இணையாக வரையப்படும் தளங்களினால் பட்டைக் கூம்பை *A'B'C'D'E'* போன்ற எண்ணற்றப் பல் கோண வடிவத் தகடுகளாகப் பிரிக்கவும்.



படம் 179

A'B'C'D'E' என்னும் பல் கோணத் தகடு அடிப்பாகம் *ABCDE*யுடன் வடிவொத்ததாகவும். ஒரே மாதிரி வைக்கப்பட்ட தாகவுமிருப்பதால் அதன் புவியீர்ப்பு மையமாகிய $G_1{}^1$ என்பது VG_1இல் இருக்கும். இதுபோல் எல்லாத் தகடுகளின் புவியீர்ப்பு மையங்களும் VG_1 என்ற நேர்கோட்டின் மேலிருக்குமாகையால் பட்டைக் கூம்பின் புவியீர்ப்பு மையம் VG_1 இல் இருக்குமென்றறிகிறோம்.

இப்பொழுது அடிப்பாகம் *ABCDE*ஐ *ABC*, *ACD*, *ADE* என்ற முக்கோணங்களாகப் பிரிக்கவும். H_1, H_2, H_3 என்பன முறையே $\triangle ABC$, $\triangle ACD$, $\triangle ADE$ ஆகியவற்றின் புவியீர்ப்பு

மையங்களெனில், $VABC$, $VACD$, $VADE$ ஆகிய நான்முகத் திண்மங்களின் புவியீர்ப்பு மையங்கள் முறையே VH_1, VH_2, VA_3 ஆகிய நேர்கோடுகளில் அடிப்பாகத்திலிருந்து முறையே $\frac{1}{4}VH_1$, $\frac{1}{4}VH_2$, $\frac{1}{4}VH_3$ தூரங்களிலிருக்கும். எனவே, பட்டைக் கூம்பின் புவியீர்ப்பு மையம் VG_1 என்ற நேர்கோட்டில் G_1இலிருந்து $\frac{1}{4}VG_1$ தூரத்திலிருக்கும்.

(8) ஏதேனுமொரு அடித்தளம் கொண்ட ஒரு சீரான திண்மக் கூம்பு (A Uniform Solid Cone with any plane base)

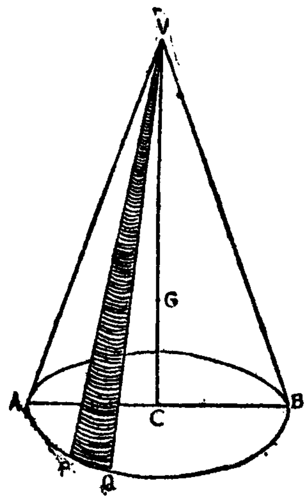
ஒரு பட்டைக் கூம்பின் அடிப்பாகத்தின் பக்கங்களின் எண்ணிக்கை எண்ணற்ற அளவில் அதிகரிக்கப்படும்போது அதன் அடித்தளம் ஒரு தொடர் வளைவினுள்ளடங்கிய தளமாக மாறுகிறது. ஆகவே பக்கங்களின் எண்ணிக்கை எண்ணற்ற அளவில் அதிகரிக்கப்பட்ட ஒரு பட்டைக் கூம்பின் எல்லை வடிவமே ஒரு கூம்பு என்று கொள்ளலாம். ஆகவே, V என்ற உச்சியைக்கொண்ட ஒரு திண்மக் கூம்பின் அடிப்பாகத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் G_1 எனில், அக்கூம்பின் புவியீர்ப்பு மையம் VG_1 என்ற நேர்கோட்டில், அடிப்பாகத்திலிருந்து $\frac{1}{4}VG_1$ தூரத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியாகும்.

குறிப்பு: கூம்பின் அடிப்பாகம் வட்டத்தளமாக யிருப்பின் அடிப்பாகத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் வட்டத்தின் மையமாகுமாகையால் h உயரமுள்ள ஒரு வட்டத்திண்மக் கூம்பின் (அல்லது ஒரு நேர்வட்டத் திண்மக் கூம்பின்) புவியீர்ப்பு மையம் அதன் அச்சின்மேல் (உச்சியையும் அடிப்பக்க மையத்தையும் சேர்க்கும் நேர்கோடு) அடிப்பாகத்திலிருந்து $\frac{h}{4}$ தூரத்திலிருக்கும்

(9) சீரான உள்ளீடற்ற நேர்வட்டக் கூம்பு (Hollow right circular cone)

VAB என்பது ஒரு சீரான உள்ளீடற்ற நேர்வட்டக் கூம்பு. அதன் அடிப்பக்க விளிம்பின்மேல் P, Q என்னும் இரு நெருக்கமான புள்ளிகளை எடுத்து அவற்றை Vயுடன் சேர்க்கவும். VPQ என்னும் இப்பகுதியை ஒரு முக்கோணப் பகுதியின் புவியீர்ப்பு மையம் அதன் திணிவு மையத்திலிருக்கும். அதாவது, PQ-விலிருந்து $\frac{1}{3}VP$ தூரத்திலிருக்கும் கூம்பின் வளைபரப்பின் மேல் எடுக்கப்படுகின்ற இதுபோன்ற எல்லா முக்கோணங்

களின் புவியீர்ப்பு மையங்களும் வளைபரப்பின்மேல் அடிப் பாகத்திலிருந்து $\frac{1}{3}$ VP தூரத்திலிருக்கும். அதாவது இப்புவியீர்ப்பு மையங்கள் யாவும் அடிப்பாகத்திலிருந்து $\frac{1}{3}$ VP தூரத்திலமைந்துள்ள வட்டத்தின் பரிதியின் மேலிருக்கும். எனவே, உள்ளீடற்ற கூம்பின் புவியீர்ப்பு மையம் இவ்வட்டத்தின்



படம் 180

மையமாகும். ஆனால் இந்த வட்டத்தின் மையமானது, இதன் தளம் கூம்பின் அச்சை வெட்டும் புள்ளியாகும். எனவே h உயரமுள்ள ஒரு உள்ளீடற்ற நேர்வட்டக் கூம்பின் புவியீர்ப்பு மையம் அதன் அச்சின்மேல் அதன் அடிப்பாகத்திலிருந்து $\frac{h}{3}$ உயரத்திலிருக்கும்.

மாதிரி 123: ஒரு சரிவகத்தின் புவியீர்ப்பு மையத்தைக் காண்க.

(சென்னை 1960 செப்., '64 ஏப்., '68 ஏப்.)

இணைப்பக்கங்களுள் ஒன்று மற்றதைப்போல் இருமடங்கு இருந்தால் இப்பக்கங்களிலிருந்து புவியீர்ப்பு மையங்களின் தூரங்களின் விகிதம் 4: 5 என்று காட்டு.

(சென்னை 1960 செப்.)

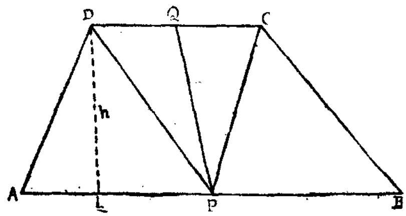
தீர்வு

$ABCD$ என்னும் சரிவகத்தில் $AB \parallel CD$.

$AB = 2a$, $CD = 2b$ என்று கொள்க. $(AB > CD)$

P, Q என்பன AB, CD ஆகிய பக்கங்களின் நடுப் புள்ளிகள்.

PC, PD, PQ ஆகியவற்றைச் சேர்க்கவும்.



படம் 181

இப்பொழுது, சரிவகமானது ADP, DPC, PCB ஆகிய மூன்று முக்கோணங்களாலானதாகக் கொள்ளலாம். இணைப்பக்கங் களுக்கிடையே தூரம் h என்க.

$$\triangle\ ADP = \tfrac{1}{2}\ AP.\ h = \tfrac{1}{2}\ ah.$$

$$\triangle\ DPC = \tfrac{1}{2}\ DC.\ h = bh.$$

$$\triangle\ PCB = \tfrac{1}{2}\ PC.h = \tfrac{1}{2}\ ah.$$

சரிவகத் தகட்டின் ஒரு அலகுப் பரப்பளவின் எடை W எனில், இம்முக்கோணங்களின் எடைகள் முறையே $\frac{1}{2}\ ahw$, bhw, $\frac{1}{2}\ ahw$ ஆகும். $\triangle\ ADP$யின் புவியீர்ப்பு மையம் அதன் முனைகள் ஒவ்வொன்றிலும் $\frac{1}{6}\ ahw$ எடையைக்கொண்டதொகுதி யின் புவியீர்ப்பு மையத்திற்குச் சமமாகும். $\triangle\ DCP$யின் புவி யீர்ப்பு மையம் அதன் முனைகள் ஒவ்வொன்றிலும் $\frac{1}{3}\ bhw$ எடை யைக் கொண்ட தொகுதியின் புவியீர்ப்பு மையத்திற்குச் சம மாகும். $\triangle\ PCB$யின் புவியீர்ப்பு மையம் அதன் முனைகள் ஒவ் வொன்றிலும் $\frac{1}{6}\ ah$ எடையைக் கொண்ட தொகுதியின் புவி யீர்ப்பு மையத்திற்குச் சமமாகும்.

ஆகவே, சரிவகத்தின் புவியீர்ப்பு மையமானது Aயில் $\frac{1}{6}\ ahw$, Dயில் $\frac{1}{6}(a+2b)\ wh$, Pயில் $(\frac{1}{6}\ ahw + \frac{1}{3}\ bhw + \frac{1}{6}\ ahw) = \frac{1}{3}(a+b)hw$, Cயில் $\frac{1}{6}\ (a+2b)wh$, Bயில் $\frac{1}{6}\ ahw$ ஆகிய எடைகளைக் கொண்ட தொகுதியின் புவியீர்ப்பு மையத்திற்குச் சமமாகும்.

ஆனால் A, B ஆகிய முனைகளிலுள்ள $\frac{1}{6}\ ahw$. $\frac{1}{6}\ ahw$ ஆகிய எடைகளின் விளைவு Pயில் வைக்கப்படக்கூடிய $\frac{1}{3}\ ahw$ எடைக் குச் சமமாகும்.

D, C ஆகிய முனைகளில் வைக்கப்படுகின்ற $\frac{1}{6}$ $(a+2b)$ wh, $\frac{1}{6}$ $(a+2b)$ wh ஆகிய எடைகளின் விளைவு Q வில் வைக்கப்படக் கூடிய $\frac{1}{3}$ $(a+2b)$ hw எடைக்குச் சமமாகும்.

ஆகவே, சரிவகத்தின் புவியீர்ப்பு மையமானது, Pயில் $\frac{1}{6}(a+b)$ $hw+\frac{1}{3}$ $ahw=\frac{1}{3}$ $(2$ $a+b)$ hw எடை, Qவில் $\frac{1}{6}$ $(a+2b)$ hw $+\frac{1}{6}$ $(a+2b)$ $hw=\frac{1}{3}$ $(a+2b)$ hw எடை ஆகியவற்றின் புவியீர்ப்பு மையத்திற்குச் சமமாகும்.

ஆனால் P, Q ஆகிய புள்ளிகளிலுள்ள இந்த எடைகளின் விளைவு PQ என்ற நேர்கோட்டில்

$PG: GQ=\frac{1}{3}$ $(a+2b)$ hw: $\frac{1}{3}$ $(2a+b)$ $hw=(a+2b)$: $(2$ $a+b)$ என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்கக்கூடிய G என்னும் புள்ளியில் செயல்படும்.

எனவே சரிவகத்தின் புவியீர்ப்பு மையமானது இணைப் பக்கங்களின் நடுப் புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நேர் கோடாகிய PQஐ

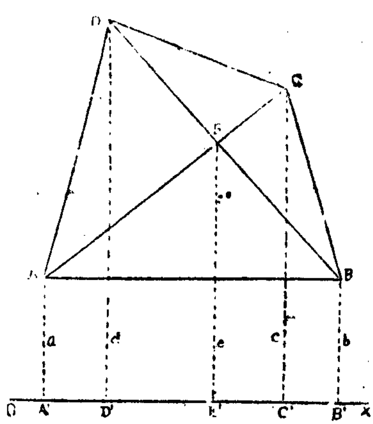
$$PG : GQ=(a+2b) : (2a+b)$$

என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்கக் கூடிய G என்னும் புள்ளியாகும்.

குறிப்பாக, $AB=2CD$ எனில், $2a=4b$ ஆகும்.

அதாவது, $a=2b$.

$$\therefore PG : GQ=(2b+2b) : (4b+b)=4b : 5b=4 ; 5.$$



படம் 182

மாதிரி 124 ஒரு நாற்கரத் தகட்டின் தளத்திலுள்ள OX என்னும் ஒரு நேர் கோட்டிலிருந்து நாற்கரத்தின் முனைகள்

மூலவிட்டங்களின் வெட்டுப்புள்ளி ஆகியவற்றின் தூரங்கள் முறையே $a, b, c. d, e$ ஆகும். அதே நேர்கோட்டிலிருந்து நாற்கரத்தின் புவியீர்ப்பு மையத்தின் $\frac{1}{3}(a+b+c+d-e)$ என்று காட்டுக.

தீர்வு

ABCD என்ற நாற்கரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் *E* என்னும் புள்ளியில் வெட்டுகின்றன. *OX* என்பது அதன் தளந்திலுள்ள ஒரு நேர்கோடு. *OX*இலிருந்து *A, B, C, D, E* ஆகியவற்றின் தூரங்கள் முறையே a, b, c, d, e ஆகும்.

நாற்கரம் *ABCD*யின் புவியீர்ப்பு மையமானது *A, B, C, D* ஆகிய மூலைகள் ஒவ்வொன்றிலும் *W* என்னும் எடையும் எடையும், *E*யில்—*W* என்னும் எடையும்கொண்ட தொகுதியின் புவியீர்ப்பு மையத்திற்குச் சமமாகும்.

*OX*இலிருந்து, நாற்கரத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் *G*யின் தூரம் $\bar{y}$ என்க.

*OX*ஐப் பற்றி மேற்கூறப்பட்ட எடைகளின் திருப்புத்திறன் சமன்பாடு காண்க.

*G*யில் செயல்படும் மொத்த எடை $4w-w=3w$.

$$\therefore 3w.\ \bar{y}=wa+wb+wc+wd-we.$$

$$=w(a+b+c+d-e)$$

$$\therefore \bar{y}=\frac{1}{3}(a+b+c+d-e).$$

மாதிரி 125: 2 மீட்டர் நீளப் பக்கங்களும் 12 கிலோ கிரோம் எடையும் கொண்ட *ABCD* என்னும் சதுரத் தகட்டின் *A, B, C, D* ஆகிய மூலைகளில் முறையே 2, 4, 6, 8 கி. கி. எடைகளுள்ள பொருட்கள் வைக்கப்பட்டுள்ளன. புவியீர்ப்பு மையத்தைக் காண்க.

தீர்வு:

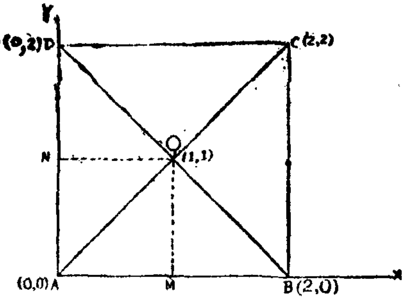
AB, AD ஆகிய பக்கங்களை முறையே x, y அச்சுக்களாகக் கொள்க. *O* என்பது மூலைவிட்டங்களின் வெட்டுப்புள்ளியெனில், சதுரத்தின் எடையாகிய 12 கி. கி. *O*–வில் செயல்படும்.

$$AB=BC=CD=DA=2 \text{ மீட்டர்}$$

$$\therefore\ A=(O, O),\ B=(2, O),$$

$O=(1, 1)$ ஆகும்.

இப்புள்ளிகளில் முறையே 2, 4, 6, 8. 12 கி. கி. எடைகள் செயல்படுகின்றன.



படம் 183

புவியீர்ப்பு மையம் $G(x, y)$ என்று கொள்க.

$$x = \frac{w_1x_1+w_2x_2+w_3x_3+w_4x_4+w_5x_5}{w_1+w_2+w_3+w_4+w_5}$$

$$= \frac{2(0)+4(2)+6(2)+8(0)+12(1)}{2+4+6+8+12}$$

$$= \frac{0+8+12+0+12}{32}$$

$$= 1.$$

$$y = \frac{w_1y_1+w_2y_2+w_3y_3+w_4y_4+w_5y_5}{w_1+w_2+w_3+w_4+w_5}$$

$$= \frac{2(0)+4(0)+6(2)+8(2)+12(1)}{2+4+6+8+12}$$

$$= \frac{0+0+12+16+12}{32}$$

$$= \frac{40}{32}$$

$$= \frac{5}{4}$$

$$\therefore G = \left(1, \frac{5}{4}\right)$$

மாதிரி 126: ஒரு ஒழுங்கு அறுகோணத்தின் ஒரு முக வரிசையிலெடுக்கப்பட்ட மூனைகளில் 5, 4, 6, 2, 7, x ஆகியவற்றிற்கு விகித சமமான எடைகள் வைக்கப்பட்டுள்ளன. புவியீர்ப்பு மையம் அறுகோணத்தின் மையத்திலிருந்தால் x-இன் மதிப்பைக் காண்க.

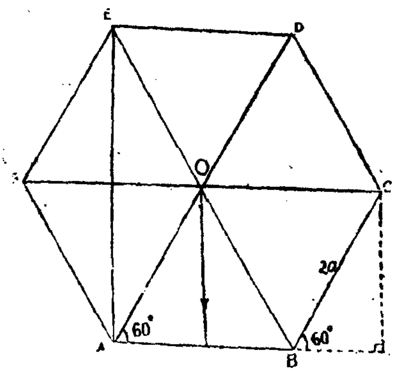
தீர்வு :

$ABCDEF$ என்பது ஒரு ஒழுங்கு அறுகோணம். அதன் மூலைவிட்டங்களின் வெட்டுப் புள்ளியாகிய O என்பது அதன் மையமாகும்.

A, B, C, D, E, F ஆகிய மூனைகளில் முறையே $5w$, $4w$, $6w$, $2w$, $7w$, xw ஆகிய எடைகள் வைக்கப்பட்டுள்ளன.

இவற்றின் புவியீர்ப்பு மையம் O-விலுள்ளது,

அறுகோணத்தின் பக்கதின் நீளம் $2a$ என்றுகொள்க.



படம் 184

AB, AE ஆகியவற்றை x, y அச்சுக்களாகக் கொள்க.

$\therefore A=(O, O)$, $B=(2a, O)$,

$C=(2a+2a\cos 60°, 2a\sin 60°)$

$=(3a, \sqrt{3}a)$

$D=(2a, 4a\sin 60°)$

$=(2a, 2\sqrt{3}a)$

$E=(o, 2\sqrt{3}a)$

$F=(-2a\cos 60°, 2a\sin 60°)$

$=(-a, \sqrt{3}a)$

$$O=(a,\ 2a,\ \sin 60).$$

$$=(a,\ \sqrt{3}a)=(\overline{x},\ \overline{y}).$$

$$x=\frac{w_1\ x_1+w_2\ x_2+w\ \ x_3+w_4\ x_4+w_5\ x_5+w_6\ x_6}{w_1+w_2+w_3+w_4+w_5+w_6}$$

$$\therefore a=\frac{5w(0)+4w\ \ (2a)+6w\ \ (3a)+2w\ \ (2a)+7w\ (0)+xw\ (-a)}{5w+4w+6w+2w+7w+xw}$$

$$=\frac{0+8a+18a+4a+0-xa}{24+x}$$

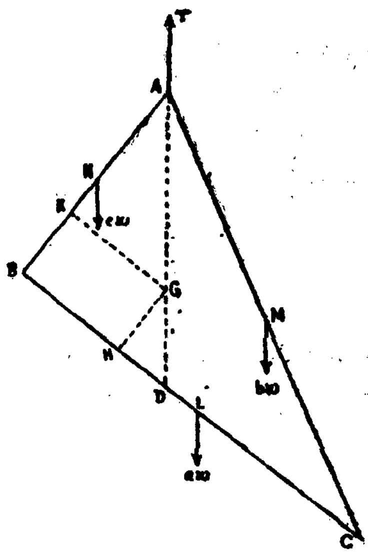
$$=\frac{(30-x)a}{24+x}$$

$$\therefore\ 24+x=30-x$$

$$2x=6$$

$$x=3$$

மாதிரி 127 : ஒரு சீரான கம்பியொன்று Bயில் நேர்



படம் 185

கோணத்தையுடைய ABC என்னும் நேர்கோண முக்கோண மாக வளைக்கப்பட்டு, Aயிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. A வழியேசெல்லும் நிலைக்குத்துக்கோடு BCஐ Dயில் வெட்டினால் $\frac{BD}{DC}=\frac{a+b}{a+c}$ என்று காட்டு.

(a, b, c என்பன முக்கோணத்தின் பக்கங்கள்)

தீர்வு

ஒரு அலகு நீளக் கம்பியின் எடை W என்று கொள்க.

எனவே, BC, CA, AB ஆகிய பக்கங்களின் எடைகள் முறையே aw bw cw ஆகும்.

இந்த எடைகள் அப்பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகளாகிய L, M, N ஆகியவற்றில் செயல்படும்.

Bஐ ஆதியாகவும், BC, BA ஆகியவற்றை முறையே x, y அச்சுக்களாகவும் கொள்க.

$$\therefore \quad L=\left(\frac{a}{2}, O\right), M=\left(\frac{a}{2}, \frac{c}{2}\right), N=\left(O, \frac{c}{2}\right).$$

முக்கோணத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் $G(x, y)$ எனில்,

$$x = \frac{aw\left(\frac{a}{2}\right) + lw\left(\frac{a}{2}\right) + cw(o)}{aw+lw+cw}$$

$$= \frac{\frac{a^2}{2} + \frac{ab}{2}}{a+b+c}$$

$$= \frac{a(a+b)}{2(a+b+c)}$$

$$y = \frac{aw(o)+bw\left(\frac{c}{2}\right)+cw\left(\frac{c}{2}\right)}{aw+bw+cw}$$

$$= \frac{\frac{bc}{2} + \frac{c^2}{2}}{a+b+c}$$

$$= \frac{c(b+c)}{2(a+b+c)}$$

முக்கோணம் சமநிலையிலிருப்பதால், Aவழி நிலைக்குத்துக் கோடு G வழியே செல்லும். இந்த நிலைக்குத்துக்கோடு BCஐ Dயில் வெட்டுவதாகக் கொள்க.

Gயிலிருந்து $GH \parallel AB$யும், $CK \parallel BC$யும் வரைக.

$$BH = \overline{x} = \frac{a\,(a+b)}{2\,(a+b+c)}$$

$$GH = \overline{y} = \frac{c\,(b+c)}{2\,(a+b+c)}$$

இப்பொழுது, $\triangle\, AKG \,|||\, \triangle\, ABD$

$$\therefore \frac{BD}{KG} = \frac{AB}{AK}$$

$$KG = BH = x = \frac{a\,(a+b)}{2\,(a+b+c)}$$

$$AK = AB - KB =$$

$$= c - \overline{y}$$

$$= c - \frac{c\,(b+c)}{2\,(a+b+c)}$$

$$= \frac{c(2a+2b+2c-b-c)}{2\,(a+b+c)}$$

$$= \frac{c(2a+b+c)}{2\,(a+b+c)}$$

இப்பொழுது, $BD = \dfrac{AB \cdot KG}{AK}$

$$= c\,\frac{a(b+c)}{2\,(a+b+c)} \cdot \frac{2\,(a+b+c)}{c\,(2a+b+c)}$$

$$= \frac{a(a+b)}{2a+b+c}$$

$$DC = a - BD$$

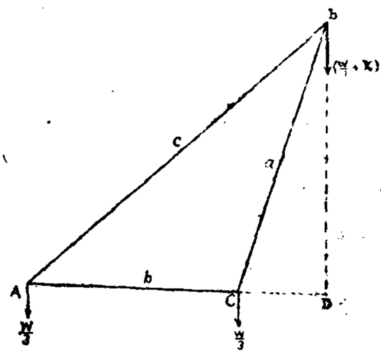
$$= a - \frac{a\,(a+b)}{2a+b+c}$$

$$= \frac{a(2a+b+c-a-b)}{2a+b+c}$$

$$= \frac{a(a+c)}{2a+b+c}$$

$$\therefore \frac{BD}{DC} = \frac{a+b}{a+c}\,.$$

மாதிரி 128 : Cயில் விரிகோணமுடைய ஒரு முக்கோணத் தகடு ஒரு வழவழப்பான மேசையின்மேல் அதன் பக்கம் AC தொடுகையிலிருக்குமாறு நிறுத்தப்பட்டுள்ளது. முக்கோணத் தகட்டின் W எனில், தகடு கவிழுமாறு Bயில் தொங்விடப் படக்கூடிய குறைந்தபட்ச எடை $\frac{1}{3} W \frac{a^2+3b^2-c^2}{c^2-a^2-b^2}$ என்று காட்டுக. (a, b, c என்பன முக்கோணத்தின் பக்கங்கள்)



படம் 186

தீர்வு

முக்கோணத்தின் புவியீர்ப்பு மையமானது A, B, C ஆகிய முனைகள் ஒவ்வொன்றிலும் வைக்கப்படும் $\frac{W}{3}$ எடை கொண்ட தொகுதியின் புவியீர்ப்பு மையத்திற்குச் சமமாகும்,

Bயில் தொங்கவிடப்படக்கூடிய குறைந்தபட்ச எடை x என்க.

இப்பொழுது A, B, C ஆகிய முனைகளில் முறையே $\frac{W}{3}, \left(\frac{W}{3}+x\right), \frac{W}{3}$ ஆகிய எடைகள் ↓ செயல்படுகின்றன.

தகடு கவிழும் நிலையிலிருக்கும்போது அது C யைச் சுற்றித் திரும்ப முயலுமாகையால், மேசையின் எதிர்விசை C வழியே செயல்படும். எனவே, C ஐப் பற்றித் திருப்புத்திறன் காண்க. $BO \perp AC$ எனில்,

$$\frac{1}{3}W.\, AC = \left(\frac{1}{3}\, W+x\right) CD.$$

$$\frac{1}{3} W.(b) = \left(\frac{1}{3} W+x\right) a \cos(180° - c)$$

$$\therefore \quad W\ b = (W+3x) \quad (-a \cos C)$$

$$= -a W \cos C - 3\ a\ x \cos C$$

$$\therefore \quad 3\ ax \cos C = -W b - a W \cos C$$

$$= -W(b + a \cos C)$$

$$3\ ax\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right) = -W\left(b+a.\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)$$

$$= -W\left[\frac{2b^2+a^2+b^2-c^2}{2b}\right]$$

$$3\ x\ (a^2+b^2-c^2) = -W(a^2+b^2-c^2)$$

$$\therefore\ x = \frac{1}{3} W\left(\frac{a^2+3b^2-c^2}{c^2-a^2-c^2}\right)$$

மாதிரி 129 : 24 செ. மீ. நீளமுள்ள சீரான கம்பியொன்று 3:4:5 என்ற விகிதங்களில் பக்கங்களைக் கொண்ட ஒரு முக்கோண வடிவமாக அமைக்கப்பட்டுள்ளது. அதன் முனைகளில் $p:q:r$ என்ற விகிதங்களில் எடைகள் வைக்கப்பட்ட பின்னரும் புவியீர்ப்பு மையம் மாறவில்லையெனில் $p:q:r$ = 9 : 8 : 7 என்று காட்டுக.

தீர்வு

ABC என்பது 24 செ. மீ. நீளக்கம்பியினால் செய்யப்பட்ட ஒரு முக்கோணச் சட்டம். அதன் பக்கங்கள் 3 : 4 : 5 என்ற விகிதங்களிருப்பதால் அது ஒரு செங்கோண முக்கோணமாகும்.

$C = 90°$ என்று கொள்க.

முக்கோணத்தின் சுற்றளவு 24 செ. மீ. ஆகையால், AC = 6 செ. மீ., $BC = 8$ செ. மீ., $AB = 10$ செ. மீ. என்று கொள்ளலாம். 1 செ. மீ. நீளக்கம்பியின் எடை w எனில், இப்பக்கங்களின் எடைகள் முறையே $6w$, $8w$, $10w$ ஆகும்.

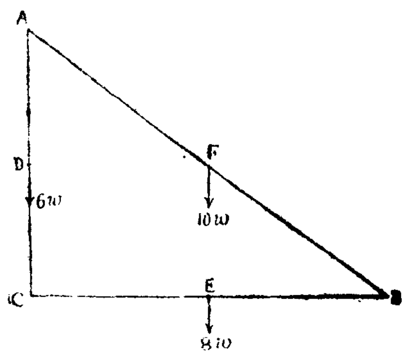
AC, BC, AB ஆகிய பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகள் முறையே D, E, F, எனில், Dயில் $6w$, Eயில் $8w$, Fஇல் $10w$ எடைகள் செயல்படும்.

இப்பொழுது, D யிலுள்ள $6w$ எடையை A யில் $3w$ எடையும், C யில் $3w$ எடையும் கொண்ட தொகுதியாக மாற்றலாம்.

E யிலுள்ளன $8w$ எடையை C யில் $4w$ எடையும், B யில் $4w$ எடையும் கொண்ட தொகுதியாக மாற்றலாம்.

F இலுள்ள $10w$ எடையை A யில் $5w$ எடையும், B யில் $5w$ எடையும் கொண்ட தொகுதியாக மாற்றலாம்.

ஆகவே, மூன்று பக்கங்களின் எடைகளையும் A யில் $8w$ E யில் $9w$, C யில் $7w$ எடைகளைக் கொண்ட தொகுதியாக மாற்றலாம்.



படம் 187

இப்பொழுது A, B, C ஆகிய மூலைகளில் pw, qw, rw என்னும் எடைகள் வைக்கப்பட்ட பின்னரும் புவியீர்ப்பு மையம் மாறவில்லை. அதாவது, A, B, C யில் முறையே $(8w+pw)$, $(9w+qw)$, $(7w+rw)$ எடைகளைக் கொண்ட தொகுதியானது. $(7w+rw)$ எடைகளைக் கொண்ட தொகுதியானது. அம்மூலைகளில் முறையே $8w$, $9w$, $7w$ எடைகளைக் கொண்ட தொகுதிக்குச் சமமாகும்.

$$\therefore (8w+pw) : (9w+qw) : (7w+rw) = 8w : 9w : 7w$$

அதாவது, $\dfrac{8+p}{8} = \dfrac{9+q}{9} = \dfrac{7+r}{7} = k$ (என்க.)

$$\therefore \frac{p}{8} = \frac{q}{9} = \frac{r}{7} = k-1$$

$$\therefore \quad p : q : r = 8 : 9 : 7.$$

பயிற்சி 16

(1) a நீளப்பக்கமுடைய ஒரு சதுரத்தில் முனைகளில் 1, 2, 3, 9 கிராம் எடைகள் வைக்கப்படுகின்றன. அவற்றின் புவியீர்ப்புமையம் மிகக் குறைந்த எடையிலிருந்து எவ்வளவு தூரத்திலிருக்குமென்று காண்க.

(2) Oஐ மையமாகக் கொண்ட a நீளப்பக்கமுடைய $ABCD$ என்னும் சதுரத்தின் A, B, C, D என்னும் முனைகளில் முறையே 3, 4. 5, 6 கிராம் எடைகளும், OA, OB, OC, OD ஆகியவற்றின் நடுப்புள்ளிகளில் முறையே 1, 2, 7, 8 கிராம் எடைகளும் வைக்கப்படுகின்றன. இந்த எட்டு எடைகளின் புவியீர்ப்பு மையத்தினைக் காண்க.

(3) 2 மீட்டர் பக்கமும், 12 கி. கி. எடையுமுள்ள $ABCD$ என்னும் சதுரத் தகட்டின் A, B, C, D என்ற முனைகளில் முறையே 2, 4, 6, 8 கி. கி எடைகள் வைக்கப்பட்டுள்ளன. புவியீர்ப்பு மையம் காண்க.

(4) ஒரு ஒழுங்கு அறுகோணத்தின் முனைகளில் 1, 2, 3, 4, 5, 6க்கு விகித சமமான எடைகள் வைக்கப்பட்டால், அறுகோணத்தின் சுற்றுவட்ட மையத்திலிருந்து புவியீர்ப்பு மையத்தின் தூரம் சுற்றுவட்ட ஆரையைப்போல் $\frac{1}{7}$ மடங்கு என்று காட்டுக.

(5) ஒரு இரு சம பக்கச் சரிவகத்தின் இணைப்பக்கங்களான CD, AB ஆகியவற்றின் நீளங்கள் முறையே 6 மீட்., 3 மீட். ஆகும். அவற்றிற்கிடையேயுள்ள செங்குத்துத் தூரம் 3 மீட். எனில், சரிவகத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் காண்க.

(6) 30 செ. மீ. நீளமுள்ள ஒரு கம்பியானது $AB = 12$ செ.மீ., $BC = 5$ செ.மீ., $CA = 13$ செ. மீ. பக்கங்களைக் கொண்ட ABC என்னும் முக்கோணச் சட்டமாக வளைக்கப்பட்டு, முனை Aயிலிருந்து தொடங்கவிடப்பட்டுள்ளது. சமநிலையில் நிலைக் குத்துடன் ABயின் சாய்வைக் காண்க.

(7) $5a$ நீளமுள்ள ஒரு சீரான கம்பியானது ஒரு ஒழுங்கு அறுகோணத்தின் ஐந்து பக்கங்களாக அமையுமாறு வளைக்கப் பட்டுள்ளது. அதன் புவியீர்ப்பு மையம் அதன் இருமுனைகளி லிருந்தும் $\frac{1}{10} a \sqrt{133}$ தூரத்திலிருக்குமென்று காட்டுக.

(8) $ABCD$ என்னும் செவ்வகத் தகட்டில் $AB=a$, $BC=b$; X என்பது ABயின் நடுப்புள்ளி; Y என்பது BCயின் நடுப்புள்ளி. $XYCD$ என்ற பகுதியின் புவியீர்ப்பு மையம் CD, CB ஆகிய பக்கங்களிலிருந்து எவ்வளவு தூரங்களிலிருக்குமென்று காண்க.

(9) சீரான கம்பியொன்று ABC என்ற முக்கோண வடிவிலிருக்குமாறு வளைக்கப்பட்டுள்ளது. அதன் புவியீர்ப்பு மையமானது A, B, C என்ற முனைகளில் வைக்கப்படும் $\frac{1}{2}(b+c)$, $\frac{1}{2}(c+a)$, $\frac{1}{2}(a+b)$ என்ற எடைகளின் புவியீர்ப்பு மையத்துடன் பொருந்துமென்று காட்டுக.

(10) ஒரு மெல்லிய முக்கோணச் சட்டத்தின் புவியீர்ப்பு மையமும், அதன் முனைகளில் வைக்கப்படும் $b+c$, $c+a$, $a+b$ எடைகளின் புவியீர்ப்பு மையமும் ஒன்றேயெனக் காட்டு.

(11) ஒவ்வொன்றும் a நீளமும் w எடையுமுள்ள இரு சமமான சீரான, நேரான கோல்கள் ஒரு சதுரத்தின் இரு அடுத்துள்ள பக்கங்களாக அமையுமாறு விறைப்பாக இணைக்கப்பட்டுள்ளன. இணைப்புப் புள்ளியிலிருந்து புவியீர்ப்பு மையத்தின் தூரம் $\frac{a}{2\sqrt{2}}$ என்று காட்டு.

(12) ஒரு சீரான முக்கோணத் தகட்டின் புவியீர்ப்பு மையம் அதன் உள் வட்ட மையத்திலிருந்தால் அது ஒரு சமபக்க முக்கோணமென்று காட்டுக.

(13) மூன்று அசம நீளக் கோல்கள் ABC என்னும் முக்கோணமாக அமையுமாறு இணைக்கப்பட்டுள்ளன. அவற்றின் எடைகள் சமமாயின் புவியீர்ப்பு மையம் முக்கோணத்தின் பரப்பின் புவியிர்ப்பு மையத்துடன் பொருந்துமென்று காட்டு. a, b, c ஆகிய பக்கங்களின் எடைகள் முறையே $b+c-a$, $c+a-b$ $a+b-c$ ஆகியவற்றுடன் விகித சமத்திலிருந்தால், புவியிர்ப்பு மையம் உள்வட்ட மையத்திலிருக்குமென்று காட்டு.

(14) $ABCD$ என்னும் சரிவகத்தில் AB, CD ஆகிய இணைப் பக்கங்களின் நீளங்கள் முறையே a, b ஆகும். இணைப்பக்கங்களுக்கிடையேயுள்ள தூரம் h எனில், பக்கம் ABயிலிருந்து சரிவகத்தின் புவியீர்ப்பு மையத்தின் தூரம் $\frac{1}{3}\left(\frac{a+2b}{a+b}\right)h$ என்று காட்டுக.

(15) $ABCD$ என்னும் நாற்கரத்தில் மூலைவிட்டம் BD யிலிருந்து A, Cயின் தூரங்கள் முறையே h_1, h_2 ஆகும். BD யிலிருந்து புவியீர்ப்பு மையத்தின் தூரம் $\left(\frac{h_1-h_2}{3}\right)$என்றுகாட்டு.

(16) ஒரு நாற்கரத்தின் புவியீர்ப்பு மையமும், அதன் நான்கு மூலைகளிலும் வைக்கப்படும் நான்கு சம எடைகளின் புவியீர்ப்பு மையமும் சமமாகயிருந்தால் அது ஒரு இணைகர மென்று நிறுவுக.

(17) ஒரு சீரான கம்பியானது a, b, c பக்கங்கள் கொண்ட ஒரு முக்கோணச் சட்டமாக வளைக்கப்பட்டுள்ளது. அதன் பக்கங்களிலிருந்து புவியீர்ப்பு மையத்தின் தூரங்கள் $\frac{b+c}{a}$ $\frac{c+a}{b}$: $\frac{a+b}{c}$ என்னும் விகிதத்திலிருக்குமென்று நிறுவுக

(18) சீரான கம்பியொன்று முக்கோண வடிவில் வளைக்கப் பட்டுள்ளது. அதன் பக்கங்களிலிருந்து புவியீர்ப்பு மையத் தின் தூரங்கள் x, y, z என்றும் முக்கோணத்தின் உள்வட்ட ஆரை r என்றும் தரப்பட்டிருந்தால்,

$$r^3+r^2\ (x+y+z)-4\ xyz=0$$

என்று காட்டுக.

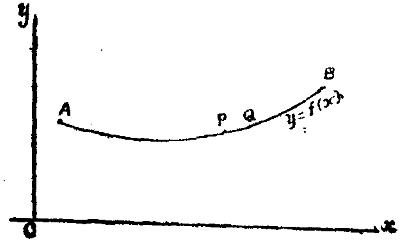
தொகையீட்டு முறையில் புவியீர்ப்பு மையம் காணல் (C. G. by Integration)

கட்டிறுக்கமான பொருட்களைத் தொடர்ச்சியான துகள் களாலானவையாகக் கருதலாம். இக் கட்டிறுக்கப் பொருட்கள் நேர்கோடு, வளைவு, பரப்பளவு, கன அளவு ஆகியவற்றுள் ஏதாவதொன்றின் வடிவத்தைப் பெற்றிருக்கலாம். இத்தகைய பொருளொன்றின் புவியீர்ப்பு மையமானது அப்பொருளி லடங்கியுள்ள தொடர்ச்சியான துகள்களின் புவியீர்ப்பு மையத் திற்குச் சமமாகுமாகையால், இப்பொருளின் புவியீர்ப்பு மையத் தினைத் தொகை நுண்கணித முறையில் மிக எளிதாகக் காண லாம்.

வளைவுகளின் புவியீர்ப்பு மையங்கள்

$y=f(x)$ என்னும் வளைவில் PQ என்பன இரு நெருங்கிய புள்ளிகள். A என்பது அவ்வளைவிலுள்ள ஒரு நிலையான

புள்ளி. வளைவு AP, வளைவு AQ ஆகியவற்றின் நீளங்கள் முறையே $S, S+\triangle S$ என்று கொள்க. எனவே, வில் $PQ=\triangle S$. P என்பது வளைவின் ஒரு அலகு நீள வில்லின் பொருண்மை யெனில், இச் சிறிய வில் PQ-வின் பொருண்மையானது Pயிலி ருப்பதாகக் கொள்ளலாம். ox, oy என்னும் யாதானுமிரு செங் குத்து அச்சுக்களைக் குறித்து Pயின் அச்சுத் தூரங்கள் (x, y) எனில், வளைவிலுள்ள எல்லாத் துகள்களின் புவியீர்ப்பு மையம் $(\bar{x}, \bar{y})$ என்பது,



படம் 188

$$\bar{x} = \frac{\int x\, dm}{\int dm}, \quad \bar{y} = \frac{\int y\, dm}{\int dm}$$

என்ற சூத்திரங்களின் மூலம் பெறப்படுமென்று கண்டோம். புவியீர்ப்பு மையம் காணவேண்டிய வில்லின் நீளத்திற்கேற்ப தொகையிட்டு எல்லைகளை யெடுத்துக்கொள்ள வேண்டும். $dm=\rho ds$ ஆகையால், வளைவு சீரானதெனில்,

$$\bar{x} = \frac{\int x \rho\, ds}{\int \rho\, ds} = \frac{P \int x ds}{P \int ds} = \frac{\int x\, ds}{\int ds},$$

$$\bar{y} = \frac{\int y \rho ds}{\int \rho ds} = \frac{\rho \int y ds}{\rho \int ds} = \frac{\int y ds}{\int ds}$$

ஆகும். ஆனால்,நுண் கணிதத்திலிருந்து $ds=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$ என்று நாமறிவோம். dsஇன் இச்சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி $\bar{x}, \bar{y}$இன் மதிப்புக்களைப் பெறலாம்.

துருவ ஆயத் தொலைகளின்படி (Polar Coordinates) $x = r \cos \theta, y=r \sin \theta$ எனில், வளைவின் சமன்பாடு $x=f(\theta)$ என் றும் $ds=\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$ என்றும் காணலாம். எனவே,

$$\bar{x} = \frac{\int r\cos\theta\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta}{\int\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta},$$

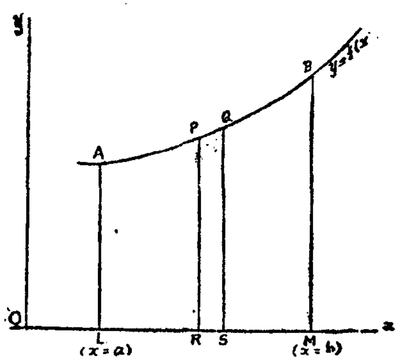
$$\bar{y} = \frac{\int r\sin\theta\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta}{\int\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta}$$

ஆகும்.

குறிப்பு: துணையலகுக் கூறுகளில் (Parametric Co-ordinates),

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,.\,dt$$

என்று பிரதியிடவும்.



படம் 189

பரப்பளவின் புவியீர்ப்பு மையம் (C. G. of an Area)

$y=f(x)$ என்னும் வளைவு, x-அச்சு, $x=a$, $x=b$ ஆகியவற்றி லுள்ள நிலைத் தூரங்கள் (Ordinates) ஆகியவற்றால் சூழப்பட்ட $ALMB$ என்னும் பரப்பளவின் புவியீர்ப்பு மையம் காண வேண்டுமெனக் கொள்வோம்.

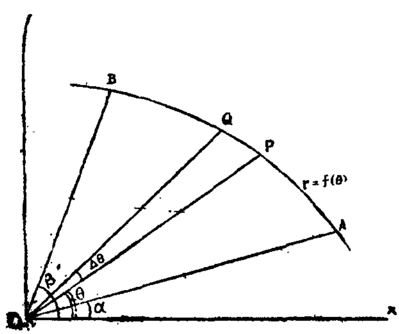
y-அச்சுக்கு இணையான $PQSR$ என்னும் செவ்வக வடிவ நுண்ணிய வரித்துண்டு ஒன்றையெடுத்துக் கொள்க. $P=(x, y)$ என்க. $PQ=\Delta x$ எனில், இச் சிறு வரித்துண்டின் பரப்பு $y\Delta x$-க்குச் சமமெனக் கூறலாம். ρ என்பது ஓர் அலகு பரப்

பளவின் பொருண்மையெனில் இச் சிறு வரித்துண்டின் பொருண்மை $\Delta m = \rho y \Delta x$ ஆகும். இவ் வரித்துண்டின் புவியீர்ப்பு மையம் அதன் நடுவிலிருக்குமாகையால், அதன் புவியீர்ப்பு மையத்தின் அச்சுத் தூரங்களை $(x, \frac{1}{2}y)$ என்று கொள்ளலாம். எனவே, கொடுக்கப்பட்டுள்ள பரப்பளவின் புவியீர்ப்பு மையம் $(\bar{x}, \bar{y})$ எனில்,

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x\, dm}{\int_a^b dm} = \frac{\int_a^b x \rho y dx}{\int_a^b \rho y dx} = \frac{\int_a^b x\, y dx}{\int_a^b y dx},$$

$$\bar{y} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b y dm}{\int_a^b dm} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b y\, \rho y dx}{\int_a^b \rho y dx} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b y^2 dx}{\int_a^b y dx}$$

இங்குக் கொடுக்கப்பட்டுள்ள பரப்பளவு சீரான பொருண்மையுடையதெனக் கொண்டு ρ ஒரு மாறிலியாகக் கருதப்பட்டுள்ளது.



படம் 190

குறிப்பு 1: வளைவின் சமன்பாடு துருவ அமைப்பில் $r = f(\theta)$ என்று கொடுக்கப்பட்டிருந்தால், $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ ஆகிய ஆரைத் திசையிக்கள், $r = f(\theta)$ என்ற வளைவு ஆகியவற்றால் சூழப்பட்ட வட்டக்கோணப் பகுதியின் புவியீர்ப்பு மையத்தினைப் பின்வரும் முறையில் கண்டறியலாம்.

$r = f(\theta)$ என்னும் வளைவின் AB என்னும் வில் $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ ஆகிய கோணங்களுடைய OA, OB என்னும் ஆரைத்தியிக்கள் ஆகியவற்றால் சூழப்பட்ட AOB என்னும் வட்டக் கோணப் பகுதியின் புவியீர்ப்பு மையம் காண வேண்டும்.

AB என்ற வில்லில் (r, θ), $(r+\Delta r, \theta+\Delta\theta)$ துருவ ஆயத் தொலைகள் கொண்ட P, Q என்னும் நெருங்கிய புள்ளிகளை யெடுத்துக்கொள்க. POQ என்னும் நுண்ணிய வட்டக்கோணப் பகுதியை $\frac{1}{2} r^2 \Delta\theta$ பரப்புடைய ஒரு முக்கோணமாகக் கருதலாம். இச் சிறு முக்கோண வரித்துண்டின் புவியீர்ப்பு மையம் அதன் திணிவு மையத்தில் இருக்குமாகையால், 0-விலிருந்து அதன் தூரம் $\frac{2}{3} r$ ஆகும். எனவே, அதன் ஆயத்தொலைகள்

$x = \frac{2}{3} r \cos\theta$, $y = \frac{2}{3} r \sin\theta$ ஆகும். ρ என்பது ஒரு அலகுப் பரப்பளவின் பொருண்மையெனில், இச் சிறு வட்டக் கோணப் பகுதியின் பொருண்மை $\Delta m = \frac{1}{2} r^2 \Delta\theta . \rho$ ஆகும்.

அதாவது, $dm = \frac{1}{2} r^2 d\theta . \rho$ ஆகும்.

எனவே, வட்டக் கோணப்பகுதி AOBயின் புவியீர்ப்பு மையம் $(\bar{x}, \bar{y})$ எனில்,

$$\bar{x} = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} x\, dm}{\int_{\alpha}^{\beta} dm} = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} \frac{2}{3} r \cos\theta . \frac{1}{2} r^2 d\theta . \rho}{\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2\, d\theta . \rho} = \frac{\frac{2}{3}\int_{\alpha}^{\beta} r^3 \cos\theta\, d\theta.}{\int_{\alpha}^{\beta} r^2\, d\theta.}$$

இதுபோல், $\bar{y} = \dfrac{\frac{2}{3}\int_{\alpha}^{\beta} r^3 \sin\theta\, d\theta}{\int_{\alpha}^{\beta} r^2\, d\theta}$ ஆகும். இங்கு வட்டக் கோணப்பகுதியின் பரப்பளவு சீரான பொருண்மையுடையதெனக் கருதப்பட்டுள்ளது.

குறிப்பு 2: வட்டக் கோணப் பகுதி AOBயானது சீரானதாக இல்லாமல் மாறுபட்ட அடர்த்தியுடன் கூடியதாகயிருப்பின், OPQ என்னும் நுண் வட்டக் கோணப் பகுதியின் பரப்பு $r\Delta\theta . \Delta r$ ஆகும். எனவே, $dm = r d\theta dr\ \rho$ ஆகும்.

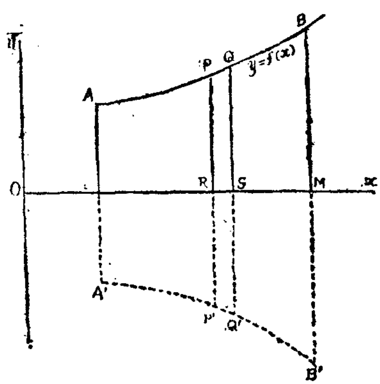
$$\therefore \bar{x} = \frac{\iint \rho r^2 \cos\theta \, d\theta \, dr}{\iint \rho r \, d\theta \, dr},$$

$$\bar{y} = \frac{\iint \rho r^2 \sin\theta \, d\theta \, dr}{\iint \rho r \, d\theta \, dr}$$

ஆகும். இங்கு பரப்பளவின் அடர்த்தியாகிய ρ என்பது r, θ ஆகியவற்றின் சார்பு ஆகும். r-ன் எல்லைகள் 0 முதல் $f(\theta)$ வரையிலும், θ-ன் எல்லைகள் α முதல் β வரையிலும் எடுத்துக் கொள்ளப்பட வேண்டும்.

சுற்றுத் திண்மப்பொருளின் புவியீர்ப்பு மையம் (C. G. of a solid of Revolution)

$y = f(x)$ என்ற வளைவு, x—அச்சு, $x = a$, $x = b$ ஆகிய நிலைத் தூரங்கள் ஆகியவற்றால் சூழப்பட்ட $ALMB$ என்னும் தளப்



படம் 191

பரப்பு x-அச்சின்மீது சுற்றுவதால் $AA'B'B$ என்னும் திண்மம் உண்டாவதாகக் கருதுக. $ALMB$ என்ற பரப்பில் $PQSR$ என்னும் y உயரமும், Δx அகலமும் கொண்ட செவ்வக நுண் வரித்துண்டு ஒன்றை எடுத்துக்கொள்க. இவ் வரித்துண்டை x-அச்சின்மீது சுற்றுவதால் ஒரு உருளை வடிவத் திண்மம் கிடைக்கும். $PP'Q'Q$ என்னும் இவ்வுருளைத் திண்மத்தின் ஆரை y ஆகும்; உயரம் Δx ஆகும். எனவே, இந்த நுண்ணுருளையின் கன அளவு $\pi y^2 \Delta x$ ஆகும். ρ என்பது ஒரு அலகு கன அளவின் பொருண்மையெனில், $\Delta m = \pi y^2 \Delta x \, \rho$ ஆகும்.

அதாவது, $dm = \pi y^2 dx. \, \rho$ ஆகும்.

இந்த நுண்ணுருளையின் புவியீர்ப்பு மையம் RSஇன் நடுப்புள்ளி யாகும். $P=(x, y)$, $PQ=\triangle x$ எனில், $\triangle x \to o$ ஆகும்போது, இந்த நுண்ணுருளையின் புவியீர்ப்பு மையம் (x, o) ஆகும்.

முழுத் திண்மத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் $(\bar{x}, \bar{y})$ எனில்,

$$\bar{x} = \frac{{}_a\int^b x\, dm}{{}_a\int^b dm} = \frac{{}_a\int^b x.\, \pi\, y^2 dx.\, \rho}{{}_a\int^b \pi\, y^2\, dx.\, \rho} = \frac{{}_a\int^b xy^2\, dx}{{}_a\int^b y^2\, dx},$$

$$\bar{y} = 0$$

ஆகும். இங்கு திண்மத்தின் கன அளவு சீரானதெனக் கருதி, ρ-ஐ மாறிலியாகக் கருதப்பட்டுள்ளது.

குறிப்பு : வளைவு ABயின் சமன்பாடு துருவ அமைப்பில் $r=f(\theta)$ என்று கொடுக்கப்பட்டிருந்தால், $x=r\ \cos\theta = f(\theta).\cos\theta$, $y=r\ \sin\theta=f(\theta).\sin\theta$ என்று கொள்க.

சுற்று மேற்பரப்பின் புவியீர்ப்பு மையம் (C.G. of a surface of Revolution)

$y=f(x)$ என்ற வளைவில் $x=a$, $x=b$ என்ற நிலைத் தூரங்களுக்கிடைப்பட்ட வில் ABயை x-அச்சின் மீது சுற்றுவதாலே ஏற்படும் $AA'B'B$ என்னும் திண்மத்தின் மேற்பரப்பினைக் கருதுக. அவ் வளைவிலுள்ள யாதானுமொரு நிலையான புள்ளியிலிருந்து முறையே S, $S+\triangle S$ வளைவுத் தூரங்களிலுள்ள P,Q என்னுமிரு நெருங்கிய புள்ளிகளையெடுத்துக் கொள்க. $\therefore PQ=\triangle S$ ஆகும். PQ என்னும் இந்த நுண்ணிய வில்லை x-அச்சைச் சுற்றிச் சுற்றுவதால், ஓர் உருளை வடிவத் திண்மத்தின் வளை பரப்புக் கிடைக்கிறது. இவ்வுருளையின் ஆரை y, உயரம் $\triangle S$ ஆகும். எனவே, $P=(x,y)$ எனில், இவ் வளைபரப்பை $2\pi y\triangle S$ என்று கொள்ளலாம். ρ என்பது ஒரு அலகு வளைபரப்பின் பொருண்மையெனில், இந்த நுண்வளைபரப்பின் பொருண்மை $\rho\, .\, 2\pi y.\ \triangle S$ ஆகும். மேலும், இவ் வளைபரப்பின் புவியீர்ப் மையம் அதன் அச்சாகிய x-அச்சின் மேல் RS-ல் இருக்கும். $\triangle S \to O$ ஆகும்போது, இப் புவியீர்ப்பு மையம் (x,o) ஆகும். எனவே, முழு மேற்பரப்பின் புவியீர்ப்பு மையம் $(\bar{x}, \bar{y})$ எனில்,

$$\bar{x} = \frac{{}_a\int^b x\, dm}{{}_a\int^b dm} = \frac{{}_a\int^b x.\,\rho.\,2\pi\, yds}{{}_a\int^b \rho.\,2\pi\, yds} = \frac{{}_a\int^b xy\, ds}{{}_a\int^b yds},$$

$$\bar{y} = 0$$

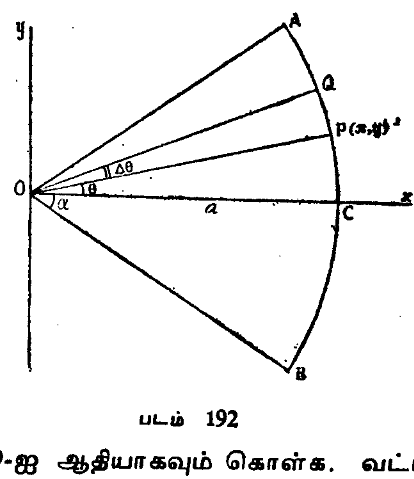
ஆகும். இங்கு மேற்பரப்பு சீரான பொருண்மையுடையதாகக் கருதப்பட்டுள்ளது.

மேற்கண்ட சூத்திரத்தில் $ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$ என்று பிரதியிட்டு, தொகையீடு செய்து புவியீர்ப்பு மையத்தினைக் காணலாம்.

துருவ ஆயத் தொலைகள் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால், $x = r \cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $ds = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$ என்ற பிரதியீடு களின் மூலம் தொகையீடு செய்து புவியீர்ப்பு மையத்தினைக் காணலாம்.

மாதிரி 130: மையத்தில் 2α கோணத்தைத் தாங்குகின்ற ஒரு வட்டவில்லின் புவியீர்ப்பு மையத்தைக் காண்க.

ABC என்னும் வட்டவில், வட்ட மையம் O-வில் 2α கோணத்தைத் தாங்குகிறது. வட்டத்தின் ஆரை a எண்க. வில் ABயின் நடுப்புள்ளி C வழியே செல்லும் ஆரை OCயை x–



படம் 192

அச்சாகவும், O-ஐ ஆதியாகவும் கொள்க. வட்டவில்லில் C யிலிருந்து முறையே S, $S+\Delta S$ தூரங்களில் P, Q என்னும் நெருங்கிய புள்ளிகளை எடுத்துக் கொள்க. எனவே, நுண்வில் $PQ = \Delta S$ ஆகும். O-ஐ ஆதியாகவும், OC-யைத் தொடக்கக் கோடாகவும் கொண்டு P, Q ஆகியவற்றின் துருவ ஆயத் தொலை

களை முறையே $(a,\theta),(a,\theta+\Delta\theta)$ என்க. எனவே, $\angle POQ=\Delta\theta$ ஆகும். $\therefore \Delta s=a\Delta\theta$. அல்லது $ds=ad\theta$ ஆகும். வில் சீரான பொருண்மையுடையதெனக் கருதி ஒரு அலகு நீள வில்லின் பொருண்மை ρ எனக் கருதுக. எனவே ρ ஒரு மாறிலியாகும். $\therefore dm=\rho.ds=\rho.ad\theta$. $P=(x,y)$ எனில்,

$$x=a\cos\theta,\ y=a\sin\theta$$

ஆகும். வில்லின் புவியீர்ப்பு மையம் $(\bar{x},\bar{y})$ எனில்,

$$\bar{x}=\frac{\int x\,dm}{\int dm}=\frac{\int x.\rho\,a\,d\theta}{\int \rho.a\,d\theta}=\frac{\int a\cos\theta.\rho\,a\,d\theta}{\int \rho\,a\,d\theta}=\frac{a\int\cos\theta\,d\theta}{\int d\theta}$$

C என்பது வில் ABயின் நடுப்புள்ளியாகையால், $\angle AOC=\angle COB=\propto$ ஆகும். எனவே, முனை Bயிலிருந்து முனை A வரை θ-வின் எல்லைகள் $-\propto$ முதல் $+\propto$ வரையாகும்.

$$\therefore \bar{x}=\frac{a\int_{-\propto}^{\propto}\cos\theta\,d\theta}{\int_{-\propto}^{\propto}d\theta}=\frac{a[\sin\theta]_{-\propto}^{\propto}}{[\theta]_{-\propto}^{\propto}}=\frac{a[2\sin\propto]}{2\propto}=\frac{a\sin\propto}{\propto}.$$

$$\bar{y}=\frac{\int_{-\propto}^{\propto}y\,dm}{\int_{-\propto}^{\propto}dm}=\frac{\int_{-\propto}^{\propto}a\sin\theta.\rho\,a\,d\theta}{\int_{-\propto}^{\propto}\rho\,a\,d\theta}=\frac{a\int_{-\propto}^{\propto}\sin\theta\,d\theta}{\int_{-\propto}^{\propto}d\theta}$$

$$=\frac{a\left[-\cos\theta\right]_{-\propto}^{\propto}}{\left[\theta\right]_{-\propto}^{\propto}}=\frac{a\left[-\cos\propto+\cos\propto\right]}{2\propto}=0.$$

$$\therefore \text{புவியீர்ப்பு மையம்}=\left[\frac{a\sin\propto}{\propto},0\right].$$

அதாவது, ஒரு சீரான வட்ட வில்லின் புவியீர்ப்பு மையம், அதன் நடுப்புள்ளி வழி ஆரையில் வட்ட மையத்திலிருந்து $\frac{a\sin\propto}{\propto}$ தூரத்திலிருக்கும். [இங்கு $\propto$ என்பது ஆரையன் (Radian) அளவு கொண்டதாகக் கருதப்படல் வேண்டும்.]

குறிப்பு: அரைவட்ட வில்லின் புவியீர்ப்பு மையம் காண $\propto=\frac{\pi}{2}$ என்று பிரதியிடுக.

$$\therefore \quad \bar{x} = \frac{a \sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2a}{\pi}$$

$\therefore$ அரைவட்ட வில்லின் புவியீர்ப்பு மையம் $= \left(\frac{2a}{\pi}, 0\right)$

மாதிரி 131 : மையத்தில் 2α கோணத்தைத் தாங்குகின்ற ஒரு சீரான வட்டக் கோணப் பகுதியின் புவியீர்ப்பு மையம் காண்க. (மாதிரி 130-ன் படத்தைப் பார்க்கவும்.)

தீர்வு : AOB என்னும் வட்டக் கோணப் பகுதி, வட்ட மையம் O-வில் 2α கோணத்தைத் தாங்குகிறது. வட்டத்தின் ஆரை a என்க. வில் ABயின் நடுப்புள்ளி C வழியே செல்லும் ஆரை OCஐ x-அச்சாகவும், O-ஐ ஆதியாகவும் எடுத்துக் கொள்க. C என்பது வில் ABயின் நடுப்புள்ளியாகையால் $\underline{|AOC} = \underline{|COB} = \alpha$ ஆகும்.

இப்பொழுது, O-ஐத் துருவமாகவும், OC-ஐத் தொடக்கக் கோடாகவும் கொண்டு, வில் ABயில் (a, θ), $(a, \theta + \Delta\theta)$ என்ற துருவ ஆயங்களைக் கொண்ட P, Q என்னும் நெருங்கிய புள்ளிகளை எடுத்துக்கொள்க. எனவே, $\underline{|POQ} = \Delta\theta$ ஆகும். POQ என்னும் இச் சிறு வட்டக் கோணப் பகுதியை ஓர் இரு சம பக்க முக்கோணமாகக் கருதலாம்.

$\therefore$ POQ என்னும் நுண்ணிய முக்கோணத் துண்டின் பரப்பு $= \frac{1}{2} a^2 . \Delta\theta$.

ρ என்பது ஒரு அலகு பரப்பளவின் பொருண்மையெனில், இச் சிறு முக்கோணத் துண்டின் பொருண்மை $\Delta m = \frac{1}{2} a^2 \Delta\theta . \rho$ ஆகும்.

அதாவது, $dm = \frac{1}{2} a^2 d\theta . \rho$.

இந்த நுண்ணிய முக்கோணத் துண்டின் புவியீர்ப்பு மையம் O-விலிருந்து $\frac{2}{3} a$ தூரத்திலிருக்கும். இப் புவியீர்ப்பு மையத்தின் ஆயத்தொலைகள் (x, y) எனில்,

$$x = \frac{2}{3} a \cos\theta, \; y = \frac{2}{3} a \sin\theta.$$

ஆகும். எனவே, வட்டக் கோணப் பகுதியின் புவியீர்ப்பு மையம் $(\bar{x}, \bar{y})$ எனில்,

$$\bar{x} = \frac{\int x\,dm}{\int dm} = \frac{\int \frac{2}{3}a \cos\theta . \frac{1}{2}a^2 d\theta . \rho}{\int \frac{1}{2}a^2 d\theta . \rho} = \frac{\frac{2}{3}a \int \cos\theta d\theta}{\int d\theta.}$$

$\underline{|AOC} = \underline{|COB} = \alpha$ ஆகையால், θ-ன் எல்லை மதிப்புகள் $\theta = -\alpha$ முதல், $\theta = +\alpha$ வரையாகும்.

$$\therefore \bar{x} = \frac{\frac{2}{3}a\int_{-\alpha}^{\alpha}\cos\theta d\theta}{\int_{-\alpha}^{\alpha} d\theta} = \frac{\frac{2}{3}a\,[\sin\theta]_{-\alpha}^{\alpha}}{[\theta]_{-\alpha}^{\alpha}} = \frac{\frac{2}{3}a\,[2\sin\alpha]}{2\alpha}$$

$$= \frac{2a\sin\alpha}{3\alpha}$$

இதுபோல், $\bar{y} = \frac{\int y dm}{\int dm}$

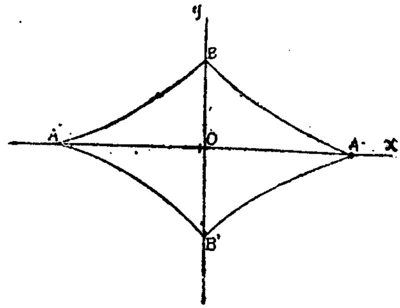
$$= \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{2}{3}a\sin\theta . \frac{1}{2}a^2 d\theta . \rho}{\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{1}{2}a^2 d\theta . \rho}$$

$$= \frac{\frac{2}{3}a\int_{-\alpha}^{\alpha}\sin\theta\, d\theta}{\int_{-\alpha}^{\alpha} d\theta} = \frac{\frac{2}{3}a\,[-\cos\theta]_{-\alpha}^{\alpha}}{[\theta]_{-\alpha}^{\alpha}} = \frac{0}{2\alpha} = 0$$

$\therefore$ வட்டக் கோணப் பகுதியின் புவியீர்ப்பு மையம் $= \left[\frac{2a\sin\alpha}{3\alpha}, 0\right]$ அதாவது, a ஆரையும், மையத்தில் 2α கோணமும் தாங்குகின்ற ஒரு வட்டக் கோணப் பகுதியின் புவியீர்ப்பு மையம், அதன் நடு ஆரையின் மேல் மையத்திலிருந்து $\frac{2a\sin\alpha}{3\alpha}$ தூரத்திலிருக்கும்.

குறிப்பு: a ஆரையுடைய ஓர் அரை வட்டத் தகட்டின் புவியீர்ப்பு மையம் அதன் நடு ஆரையின் மேல், மையத்தி

லிருந்து $\frac{2a \sin \pi/2}{3\pi/2} = \frac{4a}{3\pi}$ தூரத்திலிருக்கும்.



படம் 193

மாதிரி 132: $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$ என்ற வளைவரையின் முதற் கால்வட்டப் பகுதியிலுள்ள வில்லின் புவியீர்ப்பு மையம் காண்க.

தீர்வு: சமன்பாட்டில் $y = 0$ என்று பிரதியிட $x = \pm a$ என்றும், $x = 0$ என்று பிரதியிட $y = \pm a$ என்றும் காணலாம். எனவே, கொடுக்கப்பட்டுள்ள வளைவரையானது $A(a,o)$, $B(o,a)$, $A'(-a,o)$, $B'(o,-a)$ ஆகிய புள்ளிகளில் அச்சுகளை வெட்டுகிறது. இவ் வளைவரையின் முதற் கால்வட்டப் பகுதியிலுள்ள வில் BA ஆகும். $G(\bar{x}, \bar{y})$ என்பது இவ் வில்லின் புவியீர்ப்பு மையமெனில், ஒரு அலகு வில்லின் பொருண்மை ρ எனக் கொண்டால், $\bar{x} = \frac{\int \rho x ds}{\int \rho ds}$, $\bar{y} = \frac{\int \rho y ds}{\int \rho ds}$ என்று நாமறிவோம்.

$x = a \sin^3 t$, $y = a \cos^3 t$ என்பவை இவ் வளைவரையிலுள்ள யாதானுமொரு புள்ளியின் துணையலகுக் கூறுகளாகும்.

$$\therefore \frac{dx}{dt} = 3a \sin^2 t \cos t, \quad \frac{dy}{dt} = -3a \cos^2 t \sin t$$

$$\therefore \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

$$= 9a^2 \sin^4 t \cos^2 t + 9a^2 \cos^4 t \sin^2 t$$

$$= 9a^2 \sin^2 t \cos^2 t \, [\sin^2 t + \cos^2 t]$$

$$= 9a^2 \sin^2 t \cos^2 t$$

$$\therefore \frac{ds}{dt} = 3a \sin t \cos t$$

அல்லது, $ds = 3a \sin t \cos t \, dt.$

$$\bar{x} = \frac{\int \rho x ds}{\int \rho ds}$$

$$= \frac{\int x ds}{\int ds}$$ (வளைவரை சீரானதாகையால் ρ மாறிலியாகும்.

$$= \frac{\int a \sin^3 t . \, 3a \sin t \cos t \, dt}{\int 3a \sin t \cos t \, dt}$$

$$= \frac{a \int \sin^4 t \cos t \, dt}{\int \sin t \cos t \, dt}$$

இங்கு x-ன் எல்லைகள் B-யிலிருந்து A வரையாகும். எனவே, Bயில் $x=0$ ஆகையால், $a \sin^3 t = 0$ அல்லது $t=0$ ஆகும்; Aயில் $x=a$ ஆகையால், $a \sin^3 t = a$, அல்லது $t = \pi/2$ ஆகும். அதாவது, t-யின் எல்லைகள் $t=0$ முதல் $t = \frac{\pi}{2}$ வரையாகும்.

$$\therefore \bar{x} = \frac{a \int_0^{\pi/2} \sin^4 t . \cos t \, dt}{\int_0^{\pi/2} \sin t \cos t \, dt}$$

$$= \frac{a \left[\frac{\sin^5 t}{5} \right]_0^{\pi/2}}{\left[\frac{\sin^2 t}{2} \right]_0^{\pi/2}}$$

$$= \frac{a . \frac{1}{5}}{\frac{1}{2}} = \frac{2a}{5}.$$

வளைவரையின் முதற் கால்வட்ட விற்பகுதியானது x, y அச்சு களுடன் சமச் சீருடன் அமைந்திருப்பதால் $\bar{y} = \frac{2a}{5}$ என்று காணலாம்.

எனவே, $G = \left(\frac{2a}{5}, \frac{2a}{5} \right)$

மாதிரி 133: $r = a \, (1 + \cos \theta)$ என்னும் நெஞ்சுவளை யின் (cardioid) தொடக்கக் கோட்டிற்கு மேலுள்ள விற்பகுதி யின் புவியீர்ப்பு மையம் காண்க.

தீர்வு : நெஞ்சுவளையானது தொடக்கக் கோட்டின் இரு புறமும் சமச்சீருடன் அமைந்துள்ளது. மேலும், தொடக்கக் கோட்டிற்கு மேலுள்ள வில் $\theta=0$ முதல் $\theta=\pi$ வரை அமைந்துள்ளது.

$$r=a(1+\cos\theta)$$

$$\therefore \frac{dr}{d\theta}=-a\sin\theta.$$

$$\therefore \left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2=r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2$$

$$=a^2(1+\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta$$

$$=a^2(1+2\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta)$$

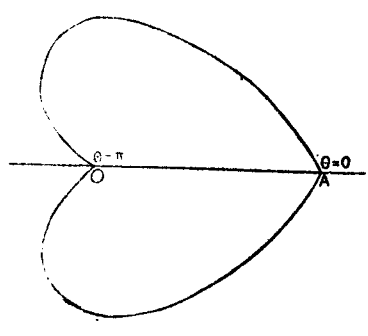
$$=2a^2(1+\cos\theta)$$

$$=4a^2\cos^2\frac{\theta}{2}$$

$$\therefore \frac{ds}{d\theta}=2a\cos\frac{\theta}{2}$$

$$ds=2a\cos\frac{\theta}{2}d\theta.$$

தொடக்கக் கோட்டிற்கு மேற்புறமுள்ள வில்லின் புவியீர்ப்பு மையம் $G=(\bar{x},\bar{y})$ எனில்,



படம் 194

$$\bar{x}=\frac{\int_0^\pi \rho\, xds}{\int_0^\pi \rho ds}=\frac{\int_0^\pi xds}{\int_0^\pi ds} \text{ என்றும்,}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_0^{\pi} \rho y ds}{\int_0^{\pi} \rho ds} = \frac{\int_0^{\pi} y ds}{\int_0^{\pi} ds}$$ என்றும் அறிவோம்.

ஆனல், $x = r \cos\theta$, $y = r\sin\theta$ ஆகும்.

$$\therefore \quad \bar{x} = \frac{\int_0^{\pi} r\cos\theta .\ 2a\cos\frac{\theta}{2}\, d\theta}{\int_0^{\pi} 2a\cos\frac{\theta}{2}\, d\theta}$$

$$= \frac{\int_0^{\pi} a(1+\cos\theta).\cos\theta.\cos\frac{\theta}{2} d\theta}{\int_0^{\pi} \cos\frac{\theta}{2}.\ d\theta}$$

இப்பொழுது, $\int_0^{\pi} a(1+\cos\theta)\cos\theta\cdot\cos\frac{\theta}{2}\, d\theta =$

$$= a\int_0^{\pi} 2\cos^2\frac{\theta}{2}\left(2\cos^2\frac{\theta}{2}-1\right)\cos\frac{\theta}{2} d\theta$$

$$= 2a\int_0^{\pi}\cos^3\frac{\theta}{2}\left(2\cos^2\frac{\theta}{2}-1\right) d\theta$$

$$= 4a\int_0^{\pi}\cos^5\frac{\theta}{2} d\theta - 2a\int_0^{\pi}\cos^3\frac{\theta}{2} d\theta$$

$\left(\frac{\theta}{2} = t \text{ என்று பிரதியிடுக}\right)$

$$= 4a\int_0^{\pi/2}\cos^5 t.\ 2dt - 2a\int_0^{\pi/2}\cos^3 t.\ 2dt$$

$$= 8a\int_0^{\pi/2}\cos^5 t dt - 4a\int_0^{\pi/2}\cos^3 t\, dt$$

$$= 8a.\left[\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\right] - 4a\left[\frac{2}{3}\right]$$

$$= \frac{64a}{15} - \frac{8a}{3}$$

$$= \frac{24a}{15} = \frac{8a}{5}$$

$$\int_0^{\pi} \cos\frac{\theta}{2}\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \cos t\, 2\cdot dt$$

$$= 2\,[\sin t]_0^{\pi/2}$$

$$= 2$$

$$\therefore\ \bar{x} = \frac{8a/5}{2} = \frac{4a}{5}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_0^{\pi} y\,ds}{\int_0^{\pi} ds} = \frac{\int_0^{\pi} r\sin\theta.\, 2a\cos\frac{\theta}{2}\,.\,d\theta}{\int_0^{\pi} 2a\cos\frac{\theta}{2}\, d\theta}$$

$$= \frac{\int_0^{\pi} a(1+\cos\theta)\sin\theta\cos\frac{\theta}{2}\, d\theta}{\int_0^{\pi} \cos\frac{\theta}{2}.\, d\theta}$$

இப்பொழுது, $\int_0^{\pi} a(1+\cos\theta)\sin\theta\cos\frac{\theta}{2}\, d\theta$

$$= a\int_0^{\pi}\left(2\cos^2\frac{\theta}{2}\right).\,2\sin\frac{\theta}{2}.\cos\frac{\theta}{2}.\cos\frac{\theta}{2}\, d\theta$$

$$= 4a\int_0^{\pi}\cos^4\frac{\theta}{2}.\sin\frac{\theta}{2}\, d\theta$$

$\left(\frac{\theta}{2} = t \text{ என்று பிரதியிடுக}\right)$ $= 4a\int_0^{\pi/2}\cos^4 t.\sin t.\, 2dt$

$$= 8a\int_0^{\pi/2}\cos^4 t.\sin t\, dt$$

$$= -8a\int_0^{\pi/2}\cos^4 t\, d(\cos t)$$

$$= -8a\left[\frac{\cos^5 t}{5}\right]_0^{\pi/2}$$

$$= -8a\left[0 - \tfrac{1}{5}\right]$$

$$= \frac{8a}{5}$$

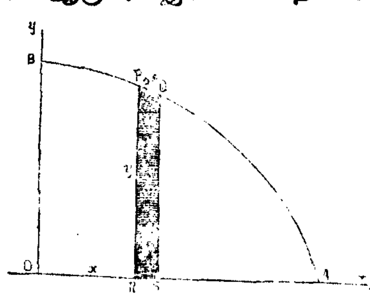
$$\therefore \ \bar{y} = \frac{8a/5}{2} = \frac{4a}{5}$$

$$\therefore G = (\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{4a}{5}, \frac{4a}{5}\right)$$

குறிப்பு : $r = a\,(1+\cos\theta)$ என்ற நெஞ்சுவளையின் புவியீர்ப்பு மையம் காண்க. நெஞ்சுவளையானது தொடக்கக் கோட்டைச் சுற்றி சமச் சீருடனிருப்பதால், $\bar{y} = o$ என்றறியலாம்; மேலும், தொடக்கக் கோட்டிற்கு மேற்புறமுள்ள வில்லின் புவியீர்ப்பு மையமும், முழு வளைவரையின் புவியீர்ப்பு மையமும் ஒன்றாகவே இருக்குமாகையால், $\bar{x} = \frac{4a}{5}$ ஆகும். $\therefore G = \left(\frac{4a}{5}, 0\right)$

மாதிரி 134: ஒரு நீள்வட்டத்தின் (ellipse) கால்வட்டப் பகுதி வடிவிலமைந்த சீரான அடர்த்தியுடன் கூடிய தகட்டின் புவியீர்ப்பு மையம் காண்க.

தீர்வு: AOB என்பது ஒரு நீள்வட்டத்தின் கால் வட்டப் பகுதி. நீள்வட்டத்தின் சமன்பாடு $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ எனில், $OA = a$, $OB = b$ ஆகும். இக் கால் நீள்வட்டத் தகட்டின்



படம் 195

விளிம்பில் $P(x,y)$ என்னும் புள்ளியை எடுத்து, PR என்னும் நிலைத்தூரத்தை வரைக. PRஐ நீளமாகவும், $PQ = \delta x$ஐ அகல

மாகவும் கொண்ட $PQSR$ என்னும் நுண்ணிய செவ்வக வடிவ நீள்வரித்துண்டு ஒன்றைக் கருதுக. இவ் வரித்துண்டின் பரப்பு $y\delta x$ ஆகும். ஆகவே, P என்பது ஒரு அலகு பரப்பளவின் பொருண்மையெனில், இந்த நுண்வரித் துண்டின் பொருண்மை $\delta m = \rho y dx$ ஆகும். நீள்வட்டப் பகுதித் தகடானது இது போன்ற எண்ணற்ற வரித்தகடுகளாலானதெனக் கருதி அவற்றின் பொதுப் புவியீர்ப்பு மையத்தைத் தொகையீட்டு முறையில் கணக்கிட்டுக் கால் நீள்வட்டத் தகட்டின் புவியீர்ப்பு மையத்தைக் காணலாம். தகட்டின் வளைவுப் பகுதி B-லிருந்து A வரை இருப்பதால், x-ன் எல்லை மதிப்புகள் $x=0$ முதல் $x=a$ வரையிலிருக்குமென்றறியலாம். இந்த நுண்வரித் துண்டின் புவியீர்ப்பு மையம் அதன் மையத்திலிருக்குமாகையால் அதன் அச்சுத் தூரங்கள் $\left(x, \frac{y}{2}\right)$ ஆகும்.

$$\therefore\ \bar{x} = \frac{\int x dm}{\int dm},\ \bar{y} = \frac{\int \frac{y}{2} dm}{\int dm} \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore\ \bar{x} = \frac{\int_0^a x\ dm}{\int_0^a dm} = \frac{\int_0^a x\, y\, dx.\, \rho}{\int_0^a y\, dx.\, \rho} = \frac{\int_0^a xy\, dx}{\int_0^a y\, dx.}$$

இப்பொழுது, $x = a\cos\theta$, $y = b\sin\theta$ என்று பிரதியிடவும்.

$\therefore\ dx = -a\sin\theta\, d\theta$ ஆகும்.

$x = 0$ எனில், $\theta = \pi/2$ ஆகும்; $x = a$ எனில், $\theta = 0$ ஆகும். எனவே, θ-வின் எல்லைகள் $\theta = \pi/2$ முதல் $\theta = 0$ ஆகும்.

$$\therefore\ \bar{x} = \frac{\int_{\pi/2}^{0} a\cos\theta.\ b\sin\theta.\ (-a\sin\theta\, d\theta)}{\int_{\pi/2}^{0} b\sin\theta.\ (-a\sin\theta)\, d\theta}$$

$$= \frac{a\int_0^{\pi/2} \cos\theta.\ \sin^2\theta\, d\theta}{\int_0^{\pi/2} \sin^2\theta\, d\theta}$$

$$= \frac{a\left[\frac{\sin^3\theta}{3}\right]_o^{\pi/2}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{a.\ \frac{1}{3}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{4a}{3\pi}$$

$$\overline{y} = \frac{\frac{1}{2}\int_o^a y\,dm}{\int_o^a dm} = \frac{\frac{1}{2}\int_o^a y.\,y\,dx\,\rho}{\int_o^a y\ dx.\,\rho} = \frac{\frac{1}{2}\int_o^a y^2\,dx}{\int_o^a y\,dx}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{0} b^2\sin^2\theta\,(-a\sin\theta\,d\theta)}{\frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{0} b\sin\theta\,(-a\sin\theta\,d\theta)}$$

$$= \frac{\frac{b}{2}\int_o^{\pi/2}\sin^3\theta\,d\theta}{\int_o^{\pi/2}\sin^2\theta\,d\theta}$$

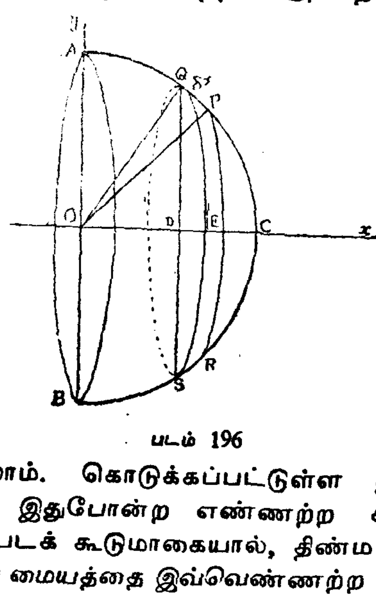
$$= \frac{\frac{b}{2}\cdot\left[\frac{2}{3}\right]}{\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{4b}{3\pi}$$

$$\therefore\ G = \left[\frac{4a}{3\pi},\frac{4b}{3\pi}\right]$$

மாதிரி 135: *சீரான அடர்த்தியுள்ள ஒரு திண்ம அரைக் கோளத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் காண்க.*

தீர்வு: ACB என்பது O-ஐ மையமாகக் கொண்ட a ஆரையுள்ள ஒரு சீரான திண்ம அரைக்கோளம். C என்பது வளைபரப்பின் மையம். O-ஐ ஆதியாகவும், OC, OA-யை முறையே x, y அச்சுக்களாகவும் எடுத்துக் கொள்க. இவ் வரைக் கோளமானது, AOC என்னும் கால் வட்டப் பகுதியை OC-யின் மீது சுற்றுவதாலேற்படும் திண்மமெனக் கொள்ளலாம்: AOC என்னும் வில்லை $x^2+y^2=a^2$ என்னும் வட்டத்தின் கால் வட்ட வில்லெனக் கருதலாம். இவ் வில்லின் மேல் $P(x, y)$ என்னும் ஏதேனுமொரு புள்ளியை எடுத்துக் கொள்க. P வழியே, அரைக் கோளத்தின் அடிப்பாகத்திற்கு இணையாக δx கனமுள்ள $PRSQ$ என்னும் வட்டத் தகடு ஒன்றினைக் கருதுக. இச் சீவலின் பரப்பளவு πy^2 என்றும், கன அளவு $\pi y^2 \delta x$ என்றும் காணலாம். ஒரு அலகு கன அளவின் பொருண்மை P எனில், இச் சீவலின் பொருண்மை $\delta m = \pi y^2 \delta x \; P$ ஆகும். இச் சீவலின் புவியீர்ப்பு மையம் அதன் மையத்தில், அதாவது DE-யின் நடுப்புள்ளியில், இருக்குமாகையால், $\delta x \to 0$ ஆகும் போது, இப் புவியீர்ப்பு மையத்தின் அச்சுத் தூரங்கள் $(x, 0)$



படம் 196

என்று காணலாம். கொடுக்கப்பட்டுள்ள திண்ம அரைக் கோளமானது இதுபோன்ற எண்ணற்ற சீவல்களினாலானதெனக் கருதப்படக் கூடுமாகையால், திண்ம அரைக்கோளத்தின் புவியீர்ப்பு மையத்தை இவ்வெண்ணற்ற சீவல்களின் புவியீர்ப்பு மையங்கள் O-விலிருந்து C வரை பரவியிருக்குமாகையால் xஇன் எல்லை மதிப்புக்கள் $x=0$ முதல் $x=a$ வரையாகும்

$$\therefore \overline{x} = \frac{\int_o^a x\, dm}{\int_o^a dm}$$

$$= \frac{\int_o^a x.\, \pi y^2 dx.\ \rho}{\int_o^a \pi y^2 dx.\ \rho}$$

$$= \frac{\int_o^a xy^2 dx}{\int_o^a y^2 dx} \quad [\text{ஆனல், } y^2 = (a^2 - x^2)]$$

$$= \frac{\int_o^a x\,(a^2 - x^2)\, dx}{\int_o^a (a^2 - x^2)\, dx}$$

$$= \frac{\left[a^2\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_o^a}{\left[a^2x - \frac{x^3}{3}\right]_o^a}$$

$$= \frac{\left[\frac{a^4}{2} - \frac{a^4}{4}\right]}{\left[a^3 - \frac{a^3}{3}\right]}$$

$$= \frac{a^4/4}{2a^3/3}$$

$$= \frac{3a}{8}$$

$y = o$ ஆகையால் $\bar{y} = \dfrac{\int y dm}{\int dm} = o$ ஆகும்.

$\therefore$ திண்ம அரைக் கோளத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் $= \left(\frac{3a}{8}, o\right)$

மாதிரி 136: ஒரு சீரான அரைக்கோள மேற்பரப்பின் புவியீர்ப்பு மையம் காண்க. (மாதிரி 135இன் படத்தைப் பார்க்கவும்.)

ABC என்பது Oஐ மையமாகவும் a ஆரையுமுள்ள ஒரு அரைக் கோள மேற்பரப்பு. C என்பது வளை பரப்பின் மையம். O-ஐ ஆதியாகவும், OC, OA ஆகியவற்றை முறையே x, y அச்சுக்களாகவும் எடுத்துக் கொள்க. எனவே, ACB என்ற வில்லானது $x^2 + y^2 = a^2$ என்ற வட்டத்தின் அரை வட்ட வில்லாகும். APC என்றும் கால வட்டவில்லை OC-யின் மீது சுற்றுவதால் இந்த அரைக்கோள மேற்பரப்புப் பிறப்பிக்கப்படுவதாகக் கருதலாம். வில் AC-யின் மேல் $P(x, y)$ என்னும் புள்ளியை எடுத்து அதன் வழியே y அச்சுக்கு இணையாக $PQ = \delta S$ கனமுள்ள ஒரு தளத்தினுல் வெட்டப்படும் $PQSR$ என்னும் வளையத்தினைக் கருதுக. $\angle POC = \theta$, $\angle QOC = (\theta + \delta\theta)$ எனில், $\delta S = a\delta\theta$ ஆகும். எனவே, இவ்வளையத்தின் வளை பரப்பு $2\pi y$. $\delta S = 2\pi y a \delta S$ ஆகும். ஒரு அலகு பரப்பளவின் பொருண்மை P எனில், இவ்வயத்தின் வளைபரப்பின் பொருண்மை $\delta m = 2\pi y a \delta\theta$. P ஆகும். மேலும் இவ்வளையத்தின் மேற்பரப்பின் புவியீர்ப்பு மையம் அதன் மையத்தில், அதாவது DE-யின் நடுப்புள்ளியிலிருக்குமாகையால், $\delta S \to O$ ஆகும்போது, அதன் புவியீர்ப்பு மையம் (x, o) என்று கொள்ளலாம். அரைக்கோள மேற்பரப்பானது இதுபோன்ற எண்ணற்ற வளையங்களின் மொத்தமாகக் கருதினுல், அரைக்கோள மேற்பரப்பின் புவியீர்ப்பு மையத்தை இவ்வளையங்களின் மேற்பரப்புக்களின் புவியீர்ப்பு மையங்களைத் தொகையீடு செய்து காணலாம். ஆகவே அரைக்கோள மேற்பரப்பின் புவியீர்ப்பு மையம் $(\bar{x}, o)$ ஆகும்.

$$\bar{x} = \frac{\int x\, dm}{\int dm}$$

x-இன் எல்லைகள் $x = o$ முதல் $x = a$ வரையிருக்குமாகையால்,

$$\bar{x} = \frac{\int_o^a x.\, 2\pi\, y\, a\, d\theta.\, \rho}{\int_o^a 2\pi\, ya\, d\theta.\, \rho}$$

$$= \frac{\int_o^a xy\, d\theta}{\int_o^a y\, d\theta}$$

இப்பொழுது, $x = a \cos\theta$, $y = a \sin\theta$ என்று பிரதியீடு செய்க. எனவே, θஇன் எல்லை மதிப்புக்கள் $\theta = \frac{\pi}{2}$ முதல் $\theta = o$ வரையாகும்.

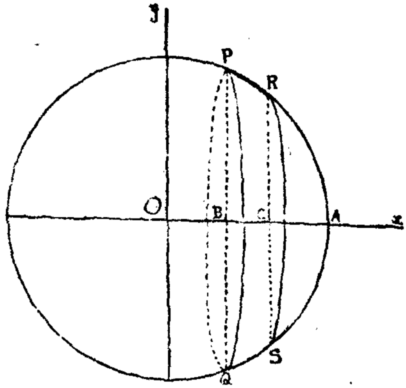
$$\therefore \bar{x} = \frac{\int_{\pi/2}^{o} o \cos\theta.\, a \sin\theta\, d\theta}{\int_{\pi/2}^{o} a \sin\theta\, d\theta}$$

$$= \frac{a\left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_{\pi/2}^{o}}{\left[-\cos\theta\right]_{\pi/2}^{o}}$$

$$= \frac{a\,[-\frac{1}{2}]}{[-1]}$$

$$= \frac{a}{2}$$

எனவே, அரைக்கோள மேற்பரப்பின் புவியீர்ப்பு மையம் $=\left(\frac{a}{2}, o\right)$.



படம் 197

மாதிரி 137 a ஆரையுள்ள ஒரு சீரான கோளத்தில், அதன் மையத்திலிருந்து b, c தூரங்களிலமைந்துள்ள இரு இணைத் தளங்களுக்கிடைப்பட்ட திண்மப் பகுதியின் புவியீர்ப்பு மையம் காண்க.

தீர்வு: $PRSQ$ என்பது, Oஐ மையமாகவும், a ஆரையும் கொண்ட ஒரு சீரான திண்மக் கோளத்தில் PQ, RS என்னும் இரு இணைத் தளங்களுக்கிடையில் வெட்டியெடுக்கப்பட்ட ஒரு வெட்டுத்துண்டு ஆகும். எனவே, PQ, RS என்பன இத் துண்டின் இரு வட்ட முகங்களாகும். இவற்றின் மையங்கள் B, C எனில், $OB=b$, $OC=c$ ஆகும். இத் துண்டின் கன அளவானது, $PBCR$ என்னும் பரப்பை BC-யின் மீது சுற்றுவதால் ஏற்படும் திண்மமெனக் கருதலாம்.

PR என்னும் வில் $x^2+y^2=a^2$ என்னும் வட்டத்தைச் சேர்ந்த விற்பகுதியால், இவ்வெட்டுத் துண்டின் புவியீர்ப்பு மையம் $(\bar{x}, \bar{y})$ என்பது

$$\bar{x} = \frac{\int_b^c xy^2\,dx}{\int_b^c y^2\,dx}, \quad \bar{y} = 0$$

என்ற சூத்திரங்களின் மூலம் பெறப்படும். ஆனால், $y^2 = a^2 - x^2$ ஆகையால்,

$$\bar{x} = \frac{\int_b^c x(a^2 - x^2)\,dx}{\int_b^c (a^2 - x^2)\,dx}$$

$$= \frac{\left[a^2\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_b^c}{\left[a^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_b^c}$$

$$= \frac{\left(\frac{a^2 c^2}{2} - \frac{x^3}{4}\right) - \left(\frac{a^2 b^2}{2} - \frac{b^4}{4}\right)}{\left(a^2 c - \frac{c^3}{3}\right) - \left(a^2 b - \frac{b^3}{3}\right)}$$

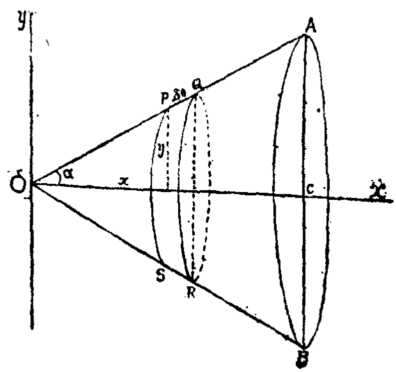
$$= \frac{\frac{a^2}{2}(c^2 - b^2) - \frac{1}{4}(c^4 - b^4)}{a^2(c - b) - \frac{1}{3}(c^3 - b^3)}$$

$$= \frac{\frac{a^2}{2}(c+b) - \frac{1}{4}(c+b)(c^2+b^2)}{a^2 - \frac{1}{3}(c^2+cb+b^2)}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}(c+b)\left[2a^2 - c^2 - b^2\right]}{\frac{1}{3}(3a^2 - c^2 - cb - b^2)}$$

ஆகவே, வெட்டுப் பகுதி $PQSR$ இன் புவியீர்ப்பு மையம்
$$\left[\frac{3(b+c)(2a^2-b^2-c^2)}{4(3a^2-b^2-c^2-bc)}, 0\right]$$ ஆகும்.

குறிப்பு: $b=o$, $c=a$ என்று பிரதியிட்டு திண்ம அரைக் கோளத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் $\left(\frac{3a}{8}, o\right)$ என்று காணலாம்.



படம் 198

மாதிரி 138. h உயரமுள்ள ஒரு சீரான கூம்பின் மேற் பரப்பின் புவியீர்ப்பு மையம் காண்க.

தீர்வு: OAB என்ற நேர்வட்டக் கூம்பின் உயரம் $OC=h$. Oஐ ஆதியாகவும் $OC=$ஐ $x-$ அச்சாகவும் எடுத்துக்கொள்க. கூம்பின் அடிப்பாகத்திற்கு இணையான δs கனமுள்ள $PQSR$ என்னும் வட்டச் சீவலைக் கருதுக. $P=(x, y)$ எனில், இச் சீவலின் மேற்பரப்பு $2\pi y.\delta s$ ஆகும். P என்பது ஒரு அலகு மேற்பரப்பின் பொருஅமையெனில், இச்சீவலின் மேற்பரப்பின் பொருண்மை $2\pi y\,\delta s.\rho$ ஆகும்.

$$\because\ \delta m=2\pi y.\delta s.\rho.$$

இச் சிறு சீவல் வட்ட வளையமாகயிருக்கும். இவ்வட்ட வளையத்தின் புவியீர்ப்பு மையத்தில் அதாவது DEயின் நடுப் புள்ளியிலிருக்கும். எனவே, $\delta s\to o$ ஆகும்போது, இப்புவி யீர்ப்பு மையத்தின் அச்சுத்தூரங்கள் (x, o) ஆகும். உள்ளீ டற்ற இக் கூம்புவை இதுபோன்ற எண்ணற்ற மெல்லிய வளையங்களாகப் பிரிப்போமானல், இவ்வளையங்களின்

புவியீர்ப்பு மையங்கள் யாவும் x – அச்சின் மேல், அதாவது கூம்பின் அச்சின் மேலேயிருக்குமென்று காணலாம். எனவே, கூம்பின் வளைபரப்பின் புவியீர்ப்பு மையம் $(\bar{x}, o)$ ஆகும். மேலும், எல்லா வளையங்களின் புவியீர்ப்பு மையங்களும் O முதல் C வரை பரவியிருக்குமாதலின், x இன் எல்லைகள் o முதல் h வரையாகும்,

$$\therefore \bar{x} = \frac{\int_o^h x \; dm}{\int_o^h dm}$$

$$= \frac{\int_o^h x . 2\pi y \; ds . \rho}{\int_o^h 2\pi y \; ds . \; \rho}$$

$$= \frac{\int_o^h xy \; ds}{\int_o^h y \; ds}$$

கூம்பின் உச்சிக்கோணம் 2α எனில், $P = (x, y)$ ஆகையால்,

$y = x \tan a$ ஆகும்.

$$\because \frac{dy}{dx} = \tan \alpha$$

ஆனால், $ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx$

$$= \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} \, . dx$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{\int_o^h x.x \tan \alpha . \sec \alpha . \, dx}{\int_o^h x \tan \alpha . \sec \alpha \, dx}$$

α என்பது மாறிலியாகையால்,

$$\bar{x} = \frac{\int_o^y x^2 \, dx}{\int_o^h x \, dx}$$

$$= \frac{\left[\frac{x^3}{3}\right]_o^h}{\left[\frac{x^2}{3}\right]_o^h}$$

$$= \frac{h^3/3}{h^2/2}$$

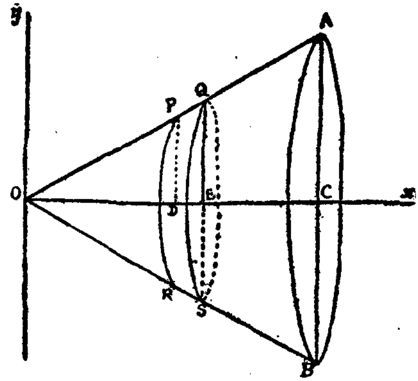
$$= \frac{2h}{3}.$$

மேலும் $\bar{y} = o$ ஆகையால், புவியீர்ப்பு மையம் $= \left(\frac{2h}{3}, o\right)$

மாதிரி 139. *h* உயரமுடைய ஒரு சீரான திண்ம நேர் வட்டக் கூம்பின் புவியீர்ப்பு மையம் காண்க.

தீர்வு: *OAB* என்பது *h* உயரமுள்ள ஒரு திண்மக் கூம்பு. *O* என்பது அதன் உச்சி; *OC* என்பது அதன் அச்சு. *O*ஐ ஆதியாகவும், *OC*-ஐ *x*-அச்சாகவும் கொள்க. கூம்பின் மேற் பரம்பின் மேல் $P(x, y)$ என்னும் புள்ளியின் வழியே அதன் அடிப்பாகம் *AB*-க்கு இணையாக *PQRS* என்னும் மெல்லிய சீவல் ஒன்றைக் கருதுக. இது ஒரு வட்டத் துண்டாகயிருக்கும். $PQ = \delta s$ என்க. இவ்வட்டத் துண்டின் கன அளவு $\pi y^2 \delta s$ ஆகும். எனவே, *P* என்பது ஒரு அலகு கன அளவின் பொருண்மையெனில், இவ்வட்டத் துண்டின் பொருண்மை $\delta m = \pi y^2 \delta s . \rho$ ஆகும். இவ்வட்டத்துண்டின் புவியீர்ப்பு மையம்

அதன் மையத்திலிருக்குமாகையால். $\delta s \to o$ ஆகும்போது, அதன் புவியீர்ப்பு மையம் (x, o) என்று காணலாம். திண்மக்



படம் 199

கூம்பானது இதுபோன்ற எண்ணற்ற மெல்லிய சீவல்களாலானது எனக் கருதினால், அவற்றின் புவியீர்ப்பு மையங்கள் யாவும் கூம்பின் அச்சாகிய OCயில் (x-அச்சின் மேல்) இருக்குமாகையால், திண்மக் கூம்பின் புவியீர்ப்பு மையத்தை தொகையீடு செய்து காணலாம்.

$y = o$ ஆகையால், $\bar{y} = o$ ஆகும்.

மேலும், சீவல்களின் புவியீர்ப்பு மையங்கள் யாவும் Oவிலிருந்து C வரை பரவியிருக்குமாதலின், x இன் எல்லை மதிப்புக்கள் $x = o$ முதல் $x = h$ வரையாகும்.

$$\therefore \bar{x} = \frac{\int_o^h x \, dm}{\int_o^h dm}$$

$$= \frac{\int_o^h x.\pi y^2 \, ds.\rho}{\int_o^h \pi y^2 \, ds.\rho}$$

$$= \frac{\int_o^h xy^2 \, ds}{\int_o^h y^2 \, ds}$$

ஆனல், $P = (x, y)$ ஆதலின், $y = x \tan \propto$ ஆகும்.

$$\because \frac{dy}{dx} = \tan \propto.$$

$$\therefore ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \,.\, dx$$

$$= \sqrt{1+\tan^2 \propto}.dx$$

$$= \sec \propto.dx.$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{\int_o^h x.x^2 \tan^2 x. \sec \propto dx}{\int_o^h x^2 \tan^2 \propto \sec \propto dx},$$

$\propto$ என்பது மாறிலியாதலின்,

$$\bar{x} = \frac{\int_o^h x^3 \, dx}{\int_o^h x^2 \, dx}$$

$$= \frac{\left[\frac{x^4}{4}\right]_o^h}{\left[\frac{x^3}{3}\right]_o^h}$$

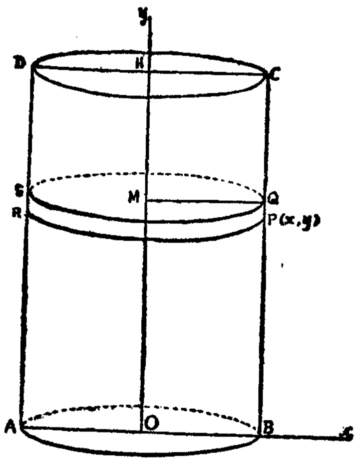
$$= \frac{h^4/4}{h^3/3}$$

$$= \frac{3h}{4}$$

$\therefore$ கூம்பின் புவியீர்ப்பு மையம் $= \left[\frac{3h}{4}, 0\right]$

அதாவது, ஒரு திண்மக் கூம்பின் புவியீர்ப்பு மையம் அதன் அச்சின் மேல், உச்சியிலிருந்து $\frac{3h}{4}$ தூரத்திலிருக்கும்.

மாதிரி 140 h உயரமுள்ள ஒரு சீரான திண்ம நேர்வட்ட உருளையின் புவியீர்ப்பு மையம் காண்க.



படம் 200

தீர்வு: O என்பது h உயரமுள்ள $ABCD$ என்னும் திண்ம நேர்வட்ட உருளையின் அடிப்பக்க மையம். Oஐ ஆதியாகவும், உருளையின் அச்சை $-y$ அச்சாகவும் எடுத்துக் கொள்க. உருளையின் வளைபரப்பில் $P(x,y)$ என்னும் புள்ளி வழியே அடிப் பாகத்திற்கு இணையாக $PQ = \delta y$ என்னும் கனமுள்ள ஒரு வட்டச் சீவலைக் கருதுக. உருளையின் ஆரை r எனில், இச் சீவலின் கன அளவு $\pi r^2 \delta y$ ஆகும். P என்பது ஒரு அலகு கன அளவின் பொருண்மையெனில், இச்சீவலின் பொருண்மை $\pi r^2 \delta y\ P$ ஆகும். இச்சீவலின் புவியீர்ப்பு மையம் அதன் மையம் Mஇல் இருக்கும். $\delta s \to o$ ஆகும் போது இச்சீவலின் புவியீர்ப்பு மையம் (o,y) என்று காணலாம். உருளையானது இது போன்ற எண்ணற்ற மெல்லிய சீவல்களினலானதெனக் கருதினல், அவைகளின் புவியீர்ப்பு மையங்கள் யாவும் உருளையின் அச்சின் மேலிருக்குமாதலின், தொகையீடு செய்து, உருளையின் புவியீர்ப்பு மையம் $(o, \bar{y})$ ஐக் காணலாம். மேலும்,

இச்சீவல்களின் புவியீர்ப்பு மையங்கள் O முதல் H வரை பரவியிருக்குமாதலின், yஇன் எல்லைகள் o முதல் h வரையாகும்.

$$\because \ \bar{y} = \frac{\int_o^h y\, dm}{\int_o^h dm}$$

$$= \frac{\int_o^h y\, \pi y^2 dy.\ \rho}{\int_o^h \pi r^2 dy\ \rho}$$

r, ρ என்பவை மாறிலிகளாதலின்,

$$\bar{y} = \frac{\int_o^h y dy}{\int_o^h dy}$$

$$= \frac{\left[\frac{y^2}{2}\right]_o^h}{\left[\ y\ \right]_o^h}$$

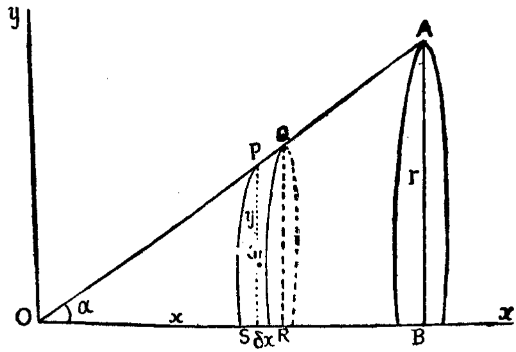
$$= \frac{h^2/2}{h}$$

$$= \frac{h}{2}$$

$\therefore$ உருளையின் புவியீர்ப்பு மையம் $= \left(O, \frac{h}{2}\right)$

அதாவது, ஒரு திண்ம நேர்வட்ட உருளையின் புவியீர்ப்பு மையம் அதன் அச்சின் நடுப்புள்ளியாகும்.

மாதிரி 141 ஒரு திண்ம அரைவட்டக் கூம்பின் புவியீர்ப்பு



படம் 201

மையம் காண்க.

OAB என்பது, Oஐ உச்சியாகவும், BOயை அச்சாகவும் கொண்ட ஒரு திண்ம அரை வட்டக் கூம்பு ஆகும். அதன் அடிப்பக்க ஆரை r என்க; அரையுச்சிக் கோணம் α என்க. இவ்வரை வட்டக் கூம்பானது $\triangle OAB$யை OBயின்மீது 180° கோணத்திற்குச் சுற்றுவதால் பிறப்பிக்கப்படும் திண்மம் என்று கருதலாம். Oஐ ஆதியாகவும், OBஐ x– அச்சாகவும் கொள்க. OAயில் $P\ (x,y)$ என்னும் ஏதேனுமொரு புள்ளியையெடுத்து, அதன் வழியே அடிப்பாகம் ABக்கு இணையாக δx கனமுள்ள $PQRS$ என்னும் ஒரு அரை வட்டச் சீவலைக் கருதுக. இதன் அரை y என்று கருதி, இதன் கன அளவு $\pi y^2 \delta x$ என்று கொள்ளலாம். P என்பது ஒரு அலகு கன அளவின் பொருண்மையெனில் இவ்வரைவட்டச் சீவலின் கபாருண்மை $\delta m = \pi y^2 = dx \rho$ ஆகும். இவ்வரை வட்டச் சீவலின் புவியீர்ப்பு மையம் OBயிலிருந்து $\frac{4y}{3\pi}$ தூரத்திலிருக்கும். எனவே, $\delta x \to o$ ஆகும்போது, இவ்வரை வட்டச் சீவலின் புவியீர்ப்பு மையம் $G1 = \left(x, \frac{4y}{3\pi} \right)$ ஆகும். அரை வட்டக் கூம்பானது இது போன்ற எண்ணற்ற மெல்லிட சீவல்களாலானதெனக் கருதி, தொகையீடு செய்து அரை வட்டக் கூம்பின் புவியீர்ப்பு மையம் $G\ (\bar{x}, \bar{y})$ ஐப் பின்வருமாறு காணலாம்.

$$\bar{x} = \frac{\int x\, dm}{\int dm} = \frac{\int x \pi y^2\ dx\ \rho}{\int \pi y^2\ dx\ \rho} = \frac{\int x y^2\ dx}{\int y^2\ dx}$$

xன் எல்லைகள் $x=o$ முதல் $x=h$ வரையாகும். மேலும் $y=x$ $\tan\alpha$ ஆதலின்,

$$\bar{x} = \frac{\int_o^h x.x^2\tan^2\alpha.dx}{\int_o^h x^2\tan^2\alpha dx}$$

$$= \frac{\int_o^h x^3\, dx}{\int_o^h x^2\, dx} \text{ (ஏனெனில் } \alpha \text{ ஒரு மாறிலி)}$$

$$= \frac{\left[\frac{x^4}{4}\right]_o^h}{\left[\frac{x^3}{3}\right]_o^h}$$

$$= \frac{h^4/4}{h^3/3}$$

$$= \frac{3h}{4}.$$

$$\bar{y} = \frac{\int \frac{4y}{3\pi}\,.\, dm}{\int dm}$$

$$= \frac{\frac{4}{3\pi}\int y.\,\pi y^2\, dx.\,\rho}{\int \pi y^2 dx.\,\rho}$$

$$= \frac{4}{3\pi}\frac{\int y^3\, dx}{\int y^2\, dx}$$

ஆனால், $y = x \tan \alpha$; x இன் எல்லைகள் o முதல் h வரை யாதலின்,

$$\bar{y} = \frac{\frac{4}{3\pi} \int_o^h x^3 \tan^3 \alpha . dx}{\int_o^h x^2 \tan^2 \alpha \, dx}$$

$$= \frac{\frac{4}{3\pi} \tan \alpha . \int_o^h x^3 \, dx}{\int_o^h x^2 \, dx}$$

$$= \frac{\frac{4}{3\pi} \tan\alpha . \left[\frac{x^4}{4} \right]_o^h}{\left[\frac{x^3}{3} \right]_o^h}$$

$$= \frac{4}{3\pi} \tan \alpha \frac{h^4/4}{h^3/3}$$

$$= \frac{4}{3\pi} \tan \alpha . \frac{3h}{4}$$

$$= \frac{h \tan \alpha}{\pi}$$

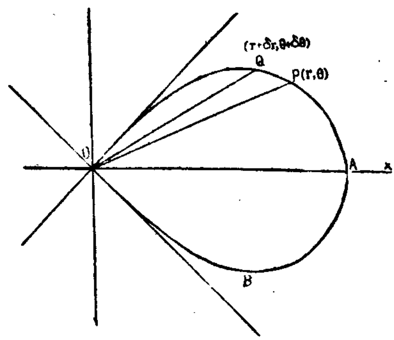
ஆனல், $\tan \alpha = \frac{r}{h}$ $\therefore h \tan \alpha = r$.

$\therefore \bar{y} = \frac{r}{\pi}$.

$\therefore$ அரை வட்டக் கூம்பின் புவியீர்ப்பு மையம் $= \left(\frac{3h}{4}, \frac{r}{\pi}\right)$.

மாதிரி **142:** $r = a\cos 2\theta$ என்ற வளைவரையின் ஒரு வளையத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் காண்க.

தீர்வு: $r = o$ என்று பிரதியிட, $\theta = \pm\dfrac{\pi}{4}$ என்று கிடைக்கிறது. ஆகவே, வளைவரையின் ஒரு வளையம் $\theta = -\dfrac{\pi}{4}$-யிலிருந்து $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ வரை பரவியுள்ளது. $O\ B\ A\ P\ Q$ என்பது இந்த வளையத்தைக் குறிப்பிடுகிறது. $P(r, \theta)$, $Q(r + \delta r, \theta + \delta\theta)$ என்



படம் 202

னும் இரு நெருங்கிய புள்ளிகளை எடுத்துக் கொள்க. $O\ P\ Q$ ஐ ஒரு வட்ட கோணப் பகுதியாகக் கருதி அதன் பரப்பு $\frac{1}{2}r^2\delta\theta$ என்று எடுத்துக் கொள்ளலாம். எனவே, ρ என்பது ஒரு அலகு பரப்பளவின் பொருண்மையெனில் $\delta m = \frac{1}{2}r^2\delta\theta \cdot \rho$ ஆகும். $\delta r \to O$ ஆகும்போது Qவானது Pயுடன் பொருந்தி விடுமாகையால், இதன் புவியீர்ப்பு மையம் O-விலிருந்து $\frac{2}{3}r$ தூரத்திலிருப்பதாகக் கொள்ளலாம்.

எனவே, $O\ P\ Q$-வின் புவியீர்ப்பு மையம் (x, y) எனில்

$$x = \tfrac{2}{3} r\cos\theta,\ y = \tfrac{2}{3} r\sin\theta \text{ ஆகும்.}$$

எனவே, முழு வளையத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் $(\bar{x}, \bar{y})$ என்பது $\bar{x} = \dfrac{\int \frac{2}{3} r\cos\theta\, dm}{\int dm}$, $\bar{y} = \dfrac{\int \frac{2}{3} r\sin\theta\, dm}{\int dm}$ என்ற சூத்திரங்களிலிருந்து பெறப்படுகிறது. ஆனல், வளையமானது ox இன் இரு புறமும் சமச் சீருடனிருப்பதால், $\bar{y} = O$ என்று காணலாம்

$$\overline{x} = \frac{\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{2}{3} r \cos\theta \ \frac{1}{2} r^2 \, d\theta \ \rho}{\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{2} r^2 \, d\theta . \ \rho}$$

$$= \frac{\frac{2}{3} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} r^3 \cos\theta \, d\theta}{\int_{-\pi/4}^{\pi/4} r^2 \, d\theta}$$

$$= \frac{\frac{2}{3} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} a^3 \cos^3 2\theta . \cos\theta \, d0}{\int_{-\pi/4}^{\pi/4} a^2 \cos^2 2\theta \, d}$$

$$= \frac{\frac{2}{3} . 2a \int_{0}^{\pi/4} \cos^3 2\theta \cos\theta \, d\theta}{2 \int_{0}^{\pi/4} \cos^2 2\theta \, d\theta}$$

$\int_{0}^{\pi/4} \cos^3 2\theta \cos\theta \, d\theta$ ஐக் கருதுக.

$\cos^3 2\theta \cos\theta = (1 - 2\sin^2\theta)^3 \cos\theta$

இப்பொழுது, $\sqrt{2} \sin\theta = \sin x$ என்று பிரதியிடுக.

$$\sqrt{2} \cos\theta \, d\theta = \cos x \, dx$$

$$1 - 2\sin^2\theta = 1 - \sin^2 x = \cos^2 x$$

$$\therefore \cos^3 2\theta \cos\theta \, d\theta = \cos^6 x . \frac{\cos x \, dx.}{\sqrt{2}}$$

$\theta = o$ எனில் $x = o$: $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ எனில் $x = \dfrac{\pi}{2}$

$$\therefore \int_{o}^{\pi/4} \cos^{8} 2z.\cos\theta\, d\theta = \int_{o}^{\pi/2} \cos^{8} x.\frac{\cos x\, dx}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{6}{7}.\ \frac{4}{5}.\ \frac{2}{3}$$

$$= \frac{16}{35\sqrt{2}}$$

$\int_{0}^{\pi/4} \cos^{3} 2\theta\, d\theta$ ஐக் கருதுக. $2\theta = t$ என்று பிரதியிடுக.
$\therefore d\theta = \frac{1}{2} dt$

$\theta = o$ எனில், $t = o$; $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ எனில் $t = \dfrac{\pi}{2}$

$$\therefore \int_{o}^{\pi/4} \cos^{2} 2\theta\, d\theta = \int_{o}^{\pi/2} \cos^{2} t.\frac{dt}{2}$$

$$= \tfrac{1}{2}.\ \tfrac{1}{2}.\frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{\pi}{8}$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{\frac{2}{3}.\ 2a\ \frac{16}{35\sqrt{2}}}{2.\frac{\pi}{8}}$$

$$= \frac{128\sqrt{2}\,a}{105\,\pi}$$

புவியீர்ப்பு மையம் $= \left(\dfrac{128\sqrt{2}\,a}{105\,\pi}, 0\right)$

மாதிரி 143 $y^2(a+x)=x^2(a-x)$ என்ற வளைவரையின் ஒரு வளையத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் காண்க.

தீர்வு

வளைவரையின் சமன்பாட்டிலிருந்து வளையமானது x அச்சின் இருபுறமும் சமச் சீருடனிருப்பதைக் காணலாம். எனவே, புவியீர்ப்பு மையம் x அச்சின் மேலேயே இருக்கும். அதாவது $\bar{y}=0$. $y=0$ என்று பிரதியிட, $x=0$ அல்லது $x=a$ என்று காண்கிறோம். எனவே வளையமானது $x=0$ இலிருந்து $x=a$ வரை பரவியுள்ளது.

வளையின் மேலுள்ள $P(x, y)$ என்னும் புள்ளியின் வழியே y அச்சுக்கு இணையாக δx அகலமுள்ள ஒரு நுண் வரித்துண்டு ஒன்றைக் கருதுக. இவ்வரித்துண்டின் பரப்பு $2y\,\delta x$ ஆகும். ρ என்பது ஒரு அலகு பரப்பளவின் பொருண்மை யெனில், $\delta m=2y\,\delta x.\,\rho$ ஆகும்.

$$\therefore\ \bar{x}=\frac{\int_0^a x\,dm}{\int_0^a dm}$$

$$=\frac{\int_0^a x\,2y\,dx\,\rho}{\int_0^a 2y\,dx\,\rho}$$

$$=\frac{\int_0^a xy\,dx}{\int_0^a y\,dx}$$

ஆனால், $y^2=\dfrac{x^2(a-x)}{a+x}$ $\quad\therefore y=x\dfrac{\sqrt{a-x}}{a+x}=\dfrac{x(a-x)}{\sqrt{a^2-x^2}}$

$$\therefore\ \int_0^a xy\,dx=\int_0^a\frac{x^2(a-x)}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx.$$

$x = a \sin \theta$ என்று பிரதியிடுக.

$\therefore dx = a \cos \theta \, d\theta.$

$$\frac{x^2 (a-x)}{\sqrt{a^2-x^2}} \cdot dx = \frac{a^2 \sin^2 0. \, a \, (1-\sin \theta). \, a \cos \theta \, d\theta}{a \cos \theta}$$

$$= a^3 \sin^2 \theta \, (1-\sin \theta) \, d\theta$$

$$= a^3 \, (\sin^2 \theta - \sin^3 \theta) \, d\theta.$$

$x = 0$ எனில், $\theta = 0$; $x = a$ எனில் $\theta = \pi/2$

$$\therefore \int_0^a xy \, dx = \int_0^{\pi/2} a^3 \, (\sin^2 \theta - \sin^3 \theta) \, d\theta$$

$$= a^3 . \left[\frac{1}{2} \; \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right]$$

$$= a^3 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}\right)$$

$$= \frac{a^3}{12} (3\pi - 8)$$

$$\int_0^a y dx = \int_0^a \frac{x (a-x)}{\sqrt{a^2-x^2}} \, dx.$$

$x = a \sin \theta$ என்று பிரதியிடவும்.

$$\frac{x (a-x)}{\sqrt{a^2-x^2}} \; dx = \frac{a \sin \theta . \, a \, (1-\sin \theta)}{a \cos \theta} . \, a \cos \theta \, d\theta$$

$$= a^2 \, (\sin \theta - \sin^2 \theta) \, d\theta.$$

$x = 0$ எனில் $\theta = 0$; $x = a$ எனில் $\theta = \pi/2$

$$\therefore \int_0^a y dx = \int_0^{\pi/2} a^2 \, (\sin \theta - \sin^2 \theta) \, d\theta$$

$$= a^2 . \left(1 - \frac{1}{2} . \; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{a^2}{4}(4-\pi)$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{\frac{a^3}{12}(3\pi-8)}{\frac{a^2}{4}(4-\pi)}$$

$$= \frac{a(3\pi-8)}{3(4-\pi)}$$

$\therefore$ வளையத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் $= \left[\frac{a(3\pi-8)}{3(4-\pi)}, 0\right]$

பயிற்சி 17

(1) $y = \sin x$ என்ற வளை வரையில் $x = 0$க்கும் $x = \pi$க்கு மிடையே யுள்ள வளைவின் புவியீர்ப்பு மையம் காண்க.

(2) $x^2/3 + y^2/3 = a^2/3$ என்ற வளை வரைக்கும் அச்சுக் களுக்கு மிடையே சூழப்பட்ட பரப்பளவின் புவியீர்ப்பு மையம் காண்க.

(3) $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ என்ற வளை வரையின் ஒரு வளையத் தினுல் சூழப்பட்ட பரப்பளவின் புவியீர்ப்பு மையம் காண்க,

(4) $r = a(1+\cos\theta)$ என்ற நெஞ்சு வளையினுல் சூழப்பட்ட பரப்பளவின் புவியீர்ப்பு மையம் காண்க.

(சென்னை பி.எஸ் ஸி. '70 ஏப்.)

(5) O என்பது $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ என்ற வளை வரையில் துருவ மாகும். G என்பது இவ் வளை வரையின் AB என்னும் வில்லின் புவியீர்ப்பு மையம். $\angle AOB$ஐ OG இரு சமபாகங்களாகப் பிரிக்குமென்று காட்டு.

(6) $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1-\cos\theta)$ என்ற உருள் வளை (cycloid) யின் முதற்கால் வட்ட வில்லின் புவியீர்ப்பு மையம் காண்க.

(7) $y^2 = 4ax$ என்ற பர வளையம், x-அச்சு, $x = h$ என்ற நிலைத்தூரம் ஆகியவற்றினுல் சூழப்பட்ட பரப்பளவின் புவி யீர்ப்பு மையம் காண்க.

(8) $x^2=4y$ என்ற வளை வரை, $y=x$ என்ற நேர்கோடு ஆகியவற்றிற்கிடையே சூழப்பட்ட பரப்பின் புவியீர்ப்பு மையம் காண்க.

(9) $y^2=ax$, $x^2=by$ ஆகிய வளை வரைகளுக்கிடைப்பட்ட பரப்பின் புவியீர்ப்பு மையம் காண்க,

(10) a ஆரையுள்ள ஒரு கோணத்தின் மையத்தில் $2x$ கோணத்தைத் தாங்கக்கூடிய நாணை விட்டமாகக் கொண்ட கோள மூகட்டின் மேற் பரப்பின் புவியீர்ப்பு மையம் காண்க.

(11) a ஆரையுள்ள ஒரு கோணத்தில் மையத்திலிருந்து c தூரத்தில் செல்லும் ஒரு தளத்திஞல் வெட்டப்பட்ட வெட்டுப் பகுதியின் மேற் பரப்பு, கன அளவு ஆகியவற்றின் புவியீர்ப்பு மையங்களைக் காண்க.

(12) a ஆரையுடைய ஒரு வட்டத்தின் இரு இணை நாண்கள் மையத்தில் 2α, 2β கோணங்களைத் தாங்குகின்றன. இவ்விரு நாண்களுக்குமிடையேயுள்ள தகட்டின் புவியீர்ப்பு மையம் வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து

$$\frac{2a^3(\text{Sin}^3\alpha - \text{Sin}^3\beta)}{3S}$$

தூரத்திலிருக்குமென்று காட்டு. (S என்பது தகட்டின் பரப்பளவு)

(13) $r=a\,\text{Sin}\,2\theta$ என்ற வளைவரையின் முதற் கால்பகுதியிலுள்ள வளையத்தின் புவியீர்ப்பு மையத்தினைக் காண்க. (வளைவரை சீரான அடர்த்தியுள்ளதெனக் கொள்ளப்படுகிறது)

(14) $x=a(\theta+\text{Sin}\theta)$, $y=a(1-\cos\theta)$ என்னும் உருள்வளை, அதன் அடிப் பாகம், y - அச்சு ஆகியவற்ருல் சூழப்படும் பரப்பளவின் புவியீர்ப்பு மையம் காண்க.

(15) ஒரு நீள்வட்டத்தின் பேரச்சு, சிற்றச்சு ஆகியவற்றின் முனைகளைச் சேர்க்கும் நேர்கோட்டிற்கும், அதன் வளைவரைக்கும் இடைப்பட்ட சிறிய பகுதியின் பரப்பளவின் புவியீர்ப்பு மையம் காண்க.

(16) ஒரு நீள்வட்டத்தின் ஒரு கால் பகுதியை அதன் சிற்றச்சின் மீது சுற்றுவதாலுண்டாகும் திண்ம உருவத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் காண்க.

(17) $y^2=4ax$ என்ற பர வளையம், $x-$ அச்சு, செல்வகலம் latus rectum ஆகியவற்றால் சூழப்பட்ட பரப்பளவைச் செவ்வகலத்தின் மீது சுற்றுவதாலுண்டாகும் கன அளவின் புவியீர்ப்பு மையம் காண்க.

(19) ஓர் உள்ளீடற்ற கோளத்தின் மையத்திலிருந்து l, c தூரங்களில் செல்லும் தளங்களினால் வெட்டப்பட்ட வலயத்தின் (Zone) புவியீர்ப்பு மையம் காண்க.

(20) a ஆரையுள்ள ஒரு கோளத்தில் ஒன்றுக்கொன்று 2α கோணச் சாய்விலுள்ள இரு விட்டத் தளங்களினால் வெட்டியெடுக்கப்படுகின்ற பிறை வடிவத்தின் (lune) புவியீர்ப்பு மையம் கோளத்தின் மையத்திலிருந்து $\frac{1}{4}\pi \dfrac{a \text{ Sin } \alpha}{\alpha}$ தூரத்திலிருக்கு மென்று காட்டு.

(22) $r^2=a\ (1+\cos 2\theta)$ என்ற வளைவரையின் ஒரு வளையத்தை அதன் தொடக்கக் கோட்டின் மீது சுற்றுவதாலுண்டாகும் உருவத்தின் மேற்பரப்பின் புவியீர்ப்பு மையத்தினைக் காண்க.

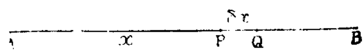
(22) $r=a\ (1+\cos\theta)$ என்ற நெஞ்சு வளையத்தை அதன் அச்சின் மீது சுற்றுவதாலுண்டாகும் உருவத்தின் மேற் பரப்பின் புவியீர்ப்பு மையம் காண்க.

(23) ஒரு உள்ளீடற்ற நேர் வட்டக் கூம்பு அதன் அச்சுக்குச் செங்குத்தான இரு தளங்களினால் வெட்டப்பட்டுள்ளது. வெட்டுப் பகுதியின் இரு முனை வட்டங்களின் மையங்கள் A, B; ஆரைகள் r_1, r_2. இவ் வெட்டுப் பகுதியின் புவியீர்ப்பு மையம் ABயை (r_1+2r_2): (r_2+2r_1) என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்கிறதென்று காட்டு.

சீரற்ற அடர்த்தியுள்ள பொருட்களின் புவியீர்ப்பு மையங்கள் காணல்

மாதிரி 144 ஒரு கோலின் அடர்த்தியானது அதன் ஒரு முனையிலிருந்து அதன் துகள்களின் தூரங்களுக்கேற்ப மாறுபடுகிறது. கோலின் புவியீர்ப்பு மையத்தைக் காண்க.

தீர்வு. AB என்பது a நீளமுள்ள ஒரு கோல். P என்பது Aயிலிருந்து x தூரத்திலுள்ள ஒரு துகள். எனவே, Pயின் அடர்த்தி xக்கு விகித சமமாயிருக்கும். அதாவது, Pயின் அடர்த்தி kx என்க. (k என்பது விகிதசம மாறிலி) இப்பொழுது Pயில் δx நீளமுள்ள PQ என்னும் கோலின் நுண்ணிய பகுதி ஒன்றைக் கருதுக. இந்த நுண்ணிய துண்டிலுள்ள துகள்கள் யாவும் Pயின் அடர்த்தியாகிய kxஐக் கொண்டதாகக் கருதப் படுகின்றன. எனவே, PQவின் பொருண்மை $\delta m = kx\,\delta x$



படம் 203

ஆகும். இச் சிறு துண்டின் புவியீர்ப்பு மையம் $\delta x \to o$ ஆகும் போது Pயிலிருக்குமாகையால், Aயை ஆதியாகவும், ABயை x-அச்சாகவும் கொண்ட நேர் குத்து அச்சுக்களைக் குறித்து, இச் சிறு துண்டின் புவியீர்ப்பு மையம் (x, o) எனலாம். எனவே, கோலுன் புவியீர்ப்பு மையம் $(\overline{x}, o)$ ஆகும்.

$$\overline{x} = \frac{\int x\,dm}{\int dm} = \frac{\int x\,(kx)\,dx}{\int kx\,dx} = \frac{\int x^2 dx}{\int x\,dx}.$$

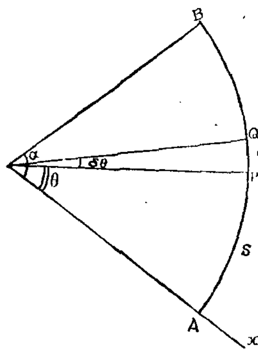
x ஆனது Aயிலுருந்து B வரை பரவியிருப்பதால், xஇன் எல்லை மதிப்புக்கள் o முதல் a வரையாகும்.

$$\therefore \overline{x} = \frac{\int_o^a x^2\,dx}{\int_o^a x\,dx} = \frac{\left[\frac{x^3}{3}\right]_o^a}{\left[\frac{x^2}{2}\right]_o^a} = \frac{a^3/3}{a^2/2} = \frac{2}{3}\,a.$$

மாதிரி 145 AB என்னும் வட்ட வில்லின் அடர்த்தி அதன் முனை Aயிலிருந்து வில்லின் துகள்களின் வளைவு தூரங்களுக் கேற்ப மாறுபடுகிறது. வில்லின் புவியீர்ப்பு மையத்தினைக் காண்க.

தீர்வு: AB என்பது Oஐ மையமாகவுடைய கரு வட்ட வில் வட்டத்தின் ஆரை a என்க. Oஐ ஆதியாகவும், OA-யை x-அச்சாகவும் கொண்டு வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2+y^2=a^2$ என்க. வில்லில் $P\,(x,y)$ என்னும் துகளைக் கருதுக. வில் $AP = s$ என்க. எனவே, Pயின் அடர்த்தி sக்கு விகித சமமாகும்.

அதாவது, k என்பது விகித சம மாறிலியாயின், Pயின் அடர்த்தி $=ks$ ஆகும். இப்பொழுது δs நீளமுள்ள PQ என்னும் மிக நுண்ணிய விற் பகுதியைக் கருதுக. மிக நுண்ணிய பகுதியா யிருப்பதால் இதிலுள்ள துகள்களின் அடர்த்தியை ksக்குச் சம



படம் 204

மாகக் கருதலாம். எனவே, இந்த நுண்ணிய விற் பகுதியின் பொருண்மை $ks\ \delta s$ ஆகும். அதாவது, $\delta m = ks\ \delta s$. மேலும் இதன் புவியீர்ப்பு மையம் $P\ (x.y)$ யிலிருப்பதாகக் கொள்ள லாம். ஆகவே; முழு வில்லின் புவியீர்ப்பு மையம் $(\bar{x},\bar{y})$ எனில்,

$$\bar{x} = \frac{\int x\, dm}{\int dm} = \frac{\int x\, ks\, ds}{\int ks\, ds} = \frac{\int x\, s ds}{\int s ds}$$

$$\bar{y} = \frac{\int y\, dm}{\int dm} = \frac{\int yksds}{\int ks\, ds} = \frac{\int ysds}{\int s\, ds}$$

ஆனால், $\angle POA = \theta$, எனில், s = வில் $AP = a\theta$.

$$\therefore\ \delta s = a\ \delta\theta$$

அல்லது, $ds = a\, d\theta$.

மேலும், $x = a\cos\theta,\ y = a\sin\theta$.

வில் Aயிலிருந்து B வரையிருப்பதால், Bஇன் எல்லைகள் $\theta = 0$ முதல் $\theta = \alpha$ வரையாகும்.

$$\therefore \bar{x} = \frac{\int_o^{\propto} x\, s\, ds}{\int_o^{\propto} s\, ds}$$

$$= \frac{\int_o^{\propto} a \cos\theta\, (a\theta) a d\theta}{\int_o^{\propto} a\theta .\, a d\theta}$$

$$= \frac{a \int_o^{\propto} \theta \cos\theta\, d\theta}{\int_o^{\propto} \theta\, d\theta}$$

$$= \frac{a \int_o^{\propto} \theta\, d(\sin\theta)}{\left[\frac{\theta^2}{2} \right]_0^{\propto}}$$

$$= \frac{a \left[\theta \sin\theta - (-\cos\theta) \right]_o^{\propto}}{\frac{\propto^2}{2}}$$

$$= \frac{2a}{\propto^2} \left[a \sin \propto + \cos\propto - 1 \right]$$

$$\bar{y} = \frac{\int_0^{\propto} y\, s\, ds}{\int_0^{\propto} s\, ds}$$

$$= \frac{\int_0^{\alpha} a \sin\theta \, a\theta \, a d\theta}{\int_0^{\alpha} \alpha \, a\theta \, a d\theta}$$

$$= \frac{a \int_0^{\alpha} \sin\theta . \theta \, d\theta}{\int_0^{\alpha} \theta \, d\theta}$$

$$= \frac{\int_0^{\alpha} \theta d(-\cos\theta)}{\left[\frac{\theta^2}{2} \right]_0^{\alpha}}$$

$$= \frac{a \left[-\theta \cos\theta + \sin\theta \right]_0^{\alpha}}{\frac{\alpha^2}{2}}$$

$$= \frac{2a}{\alpha^2} \left[\sin\alpha - \alpha\cos\alpha \right]$$

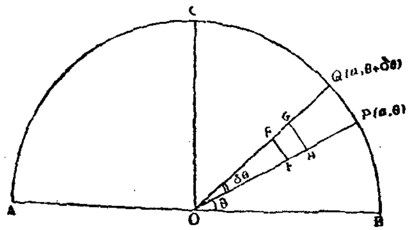
இருமாறித் தொகையீடு மூலம் புவியீர்ப்பு மையம் காணல்

மாதிரி 146 மையத்திலிருந்து தூரத்தின் வர்க்கத்திற்கேற்ப மாறும் அடர்த்தியுடன் கூடிய அரைவட்டத் தகட்டின் புவியீர்ப்பு மையம் காண்க.

தீர்வு :

வட்டத்தின் மையம் O-ஐத் துருவமாகவும், சூழும் விட்டம் ABயைத் தொடக்கக் கோடாகவும் கொண்டு வட்டத்

தின் துருவச் சமன்பாட்டை $r=a$ என்று கூறலாம். இங்கு a என்பது வட்டத்தின் ஆரை. வளைவு ஓரத்தின் மேல் $P(a,\theta)$, $Q(a, \theta+\delta\theta)$ என்னும் நெருங்கிய புள்ளிகளையெடுத்துக் கொள்க. OPQ என்னும் நுண் வட்ட கோணப் பகுதியிலுள்ள $EFGH$ என்னும் நுண்ணிய பரப்பளவைக் கருதுக.



படம் 205

$E=(r, \theta)$, $G=(r+\delta r, \theta+\delta\theta)$ எனில், $EF=r$ ஆரையுள்ள சிறு வில்லின் நீளம் $=rd\theta$; $FG=dr$,

$$\therefore EFGH \text{இன் பரப்பு} = EF.FG = rd\theta.dr.$$

$\delta r \to O$, $\delta\theta \to O$ ஆகும் போது இந்த நுண்ணிய பரப்பானது மையத்திலிருந்து r தூரத்தில் Eயிலுள்ள மிகநுண்ணிய பரப்பளவாகும். எனவே, இதன் அடர்த்தி kr^2 ஆகும் (k என்பது விகித சம மாறிலி). எனவே, இந்த நுண்ணிய பரப்பளவின் பொருண்மை $kr^2.r\delta\theta.\delta r=\delta m$ ஆகும். இப்பரப்பளவின் புவியீர்ப்பு மையம் Eஆகும். O-ஐ ஆதியாகவும், OB-யை x-அச்சாகவும் கொண்ட நேர்குத்து அச்சுக்களைக் குறித்து இப்புவியீர்ப்பு மையத்தின் அச்சுத் தூரங்கள் $x=r\cos\theta$, $y=\sin\theta$ ஆகும். rஇன் எல்லைகள் Oமுதல் aவரையிலும் θஇன் எல்லைகள் Oமுதல் πவரையிலுமாகும். அரை வட்டத் தகட்டின் புவியீர்ப்பு மையம் $(\bar{x},\bar{y})$ என்க. வட்டத் தகடானதுOCயைச் சுற்றி சமச் சீருடன் இருப்பதால் $\bar{x}=O$ ஆகும்.

$$\bar{y} = \frac{\int_0^{\pi}\int_0^{a} y\,dm}{\int_0^{\pi}\int_0^{a} dm}$$

$$= \frac{\int_0^{\pi}\int_0^{a} r\sin\theta\, kr^2 . rd\theta\, dr}{\int_0^{\pi}\int_0^{a} kr^2\, rd\theta\, dr}$$

$$= \frac{\int_0^{\pi}\int_0^{a} r^4\, dr.\sin\theta d\theta}{\int_0^{\pi}\int_0^{a} r^4 dr.d\theta}$$

$$= \frac{\int_0^{\pi}\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^a \sin\theta\, d\theta}{\int_0^{\pi}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^a d\theta}$$

$$= \frac{\frac{a^5}{5}\int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta}{\frac{a^4}{4}\int_0^{\pi} d\,\theta}$$

$$= \frac{4a}{5}\frac{\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi}}{\left[\theta\right]_0^{\pi}}$$

$$= \frac{4a}{5\pi}\left[1+1\right]$$

$$= \frac{8a}{5\pi}$$

புவியீர்ப்பு மையம் $= \left(O,\ \frac{8a}{5\pi}\right.$

மாதிரி 147 ஒரு அரை வட்டத் தகட்டின் அடர்த்தி அதன் விட்டத்திலிருந்து தூரத்தின் வர்க்கத்திற்கேற்ப மாறுபடுவதாயிருப்பின் அதன் புவியீர்ப்பு மையத்தினைக் காண்க.

தீர்வு (மாதிரி 146ஐயும், அதன் படத்தையும் கவனிக்கவும்)

Eயிலுள்ள ஒரு நுண்ணிய பரப்பின் பொருண்மை $\delta m = \rho . r\delta\theta . \delta\theta$ ஆகும். ஆனால் P என்பது விட்டம் ABயிலிருந்து Eயின் தூரத்தின் வர்க்கத்திற்கு விகிதசமமாதலின், k என்பது விகித சமமாறிலியாயின்,

$$P = k(r\sin\theta)^2 = kr^2\sin^2\theta$$

$$\therefore \delta m = kr^2\sin^2\theta . r\delta\theta . \delta r = kr^3\delta r . \sin^2\theta\,\delta\theta.$$

முன் போல் $(\bar{x}, \bar{y})$ என்பது அரைவட்டத் தகட்டின் புவியீர்ப்பு மையமெனில்,

$$\bar{x}, = o;\ \bar{y} = \frac{\int_o^{\pi}\int_o^{a} y\,dm}{\int_o^{\pi}\int_o^{r} dm}$$

$$= \frac{\int_0^{\pi}\int_0^{a} r\sin\theta . kr^3dr . \sin^2\theta\ d\theta}{\int_0^{\pi}\int_0^{a} kr^3dr\ \sin\theta^2\ d\theta}$$

$$= \frac{\int_0^{\pi}\int_0^{a} r^4dr . \sin^3\theta\ d\theta}{\int_0^{\pi}\int_0^{a} r^3dr . \sin^2\theta d\theta}$$

$$= \frac{\int_0^{\pi}\left[\frac{r^5}{5}\right]_o^a \sin^3\theta\ d\theta}{\int_0^{\pi}\left[\frac{r^4}{4}\right]_o^a \sin^2\theta d\theta}$$

$$= \frac{a^5/5}{a^4/4} \frac{\int_0^{\pi} \sin^3 \theta \, d\theta}{\int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta \, d\theta}$$

$$= \frac{4a}{5} \frac{2\int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta d\theta}{\int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta}$$

$$= \frac{4a}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{\pi}$$

$$= \frac{32a}{15\pi}$$

$\therefore$ புவியீர்ப்பு மையம் $= \left(O, \frac{32a}{15\pi} \right)$.

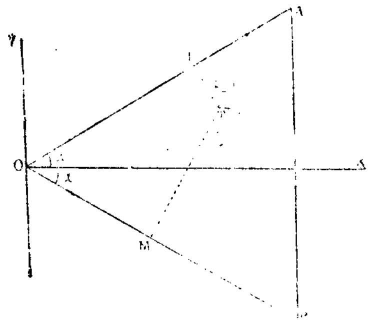
மாதிரி **148** ஒரு இருசம பக்க முக்கோணத் தகட்டில் எந்தப் புள்ளியிலும் அடர்த்தியானது, இரண்டு சமபக்கங்களி லிருந்தும் அப் புள்ளியின் தூரங்களின் மொத்தத்துக்கு விகித சமத்திலிருந்தால், முக்கோணத் தகட்டின் புவியீர்ப்பு மையம் முக்கோணத்தின் உச்சியிலிருந்து முக்கோணத்தின் முக்கால் உயரத் தூரத்திலிருக்குமென்று காட்டு.

தீர்வு

OAB என்ற இருசம பக்க முக்கோணத்தில் $OA = OB$; $OC \perp AB$ வரைக. $|\underline{AOC} = |\underline{BOC} = \alpha$ என்க. $OC = h$. Oஐ ஆதியாகவும், OCயை x- அச்சாகவும் எடுத்துக் கொள்க.

முக்கோணத் தகட்டின் மேல் $P\ (x,y)$ என்னும் ஏதேனுமொரு புள்ளியை எடுத்துக் கொள்க. அதில் x, y அச்சுக்களுக்கு இணையாக δx, δy பக்கங்களையுடைய $PQRS$ என்னும் நுண்ணிய செவ்வகப் பரப்பளவை எடுத்துக் கொள்க. இதன் பரப்பு δx, δy ஆகும். $\delta x \to 0$, $\delta y \to 0$ ஆகும்போது P என்னும் புள்ளியாக மாறுகிறது.

OA-யில் (x, y) என்பது ஏதேனுமொரு புள்ளியாயின் $y = x \tan \alpha$ ஆகும். இது போல OBயில் (x, y) என்பது ஏதேனுமொரு



படம் 206

புள்ளியாயின், $y = -x \tan \alpha$ ஆகும். எனவே, OA, OB ஆகிய பக்கங்களின் சமன்பாடுகள் $y = \pm x \tan \alpha$ ஆகும்.

$PL \perp OA$, $PM \perp OB$ வரைக.

$P = (x, y)$ எனில்,

$$PL = \frac{y - x \tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{y - x \tan \alpha}{\sec \alpha}.$$

$$PM = \frac{y + x \tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{y + x \tan \alpha}{\sec \alpha}.$$

$$\therefore PL + PM = \frac{2y}{\sec \alpha}$$

ஆனல், Pயில் அடர்த்தி $(PL + PM)$க்கு விகித சமமாகையால் k என்பது விகித சம மாறிலியெனில், $\rho = \frac{2ky}{\sec.}$

$\therefore PQRS$ என்னும் நுண் பரப்பின் பொருண்மை $\delta m = \rho \, \delta x \, \delta y = \frac{2ky}{\sec \alpha} \delta x \, \delta y$.

மேலும், $y = x \tan \alpha$ என்றும், x இன் எல்லைகள் $x = o$ முதல் $x = h$ வரையென்று மறிவோமாகையால்,

$$\bar{x} = \frac{\int_0^h \int_0^{x \tan \alpha} x \, dm}{\int_0^h \int_0^{x \tan \alpha} dm}$$

$$= \frac{\int_0^h \int_0^{x \tan \alpha} \frac{2ky}{\sec \alpha} dx\, dy}{\int_0^h \int_0^{x \tan \alpha} \frac{2ky}{\sec \alpha} dx\, dy}$$

$$= \frac{\int_0^h \int_0^{x \tan \alpha} xy \, dx\, dy}{\int_0^h \int_0^{x \tan \alpha} xy \, dx\, dy}$$

$$= \frac{\int_0^h \left[\int_0^{x \tan \alpha} y\, dy \right] x\, dx}{\int_0^h \left[\int_0^{x \tan \alpha} y\, dy \right] dx}$$

$$= \frac{\int_0^h \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{x \tan \alpha} x dx}{\int_0^h \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{x \tan \alpha} dx}$$

$$= \frac{\int_0^h \frac{1}{2} x^2 \tan^2 \alpha \; x dx}{\int_0^h \frac{1}{2} x^2 \tan^2 \alpha . \, dx}$$

$$=\frac{\int_0^h x^3\,dx}{\int_0^h x^2\,dx}$$

$$=\frac{\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^h}{\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h}$$

$$=\frac{h^4/4}{h^3/3}$$

$$=\frac{3h}{4}.$$

மேலும் முக்கோணமானது $x-$ அச்சைச் சுற்றி (OC-ஐச் சுற்றி) சமச் சீருடன் இருப்பதால் $\overline{y}=o$ ஆகும். எனவே, முக் கோணத் தகட்டின் புவியீர்ப்பு மையம் அதன் குத்துயரத்தில்

உச்சியிலிருந்து $\frac{3h}{4}$ தூரத்திலுள்ளது.

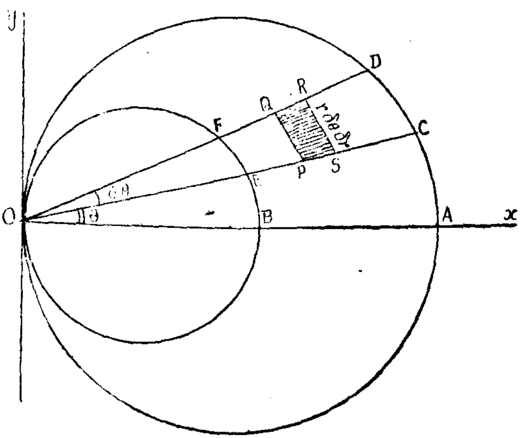
மாதிரி 149: $x^2+y^2-2ax=o$, $x^2+y^2-abx=o$ என்ற வளைவரைகளுக்கிடையே $x-$ அச்சின் நேர் பக்கத்திலுள்ள பரப்பளவின் புவியீர்ப்பு மையத்தினைக் காண்க.

தீர்வு: கொடுக்கப்பட்டுள்ள வளைவரையிரண்டும் ஆதி o-வழியே செல்லும் இருவட்டங்களாகும். மேலும் இரு வட்டங் களின் மையங்களும் $x-$ அச்சின் மேலிருக்கின்றன. எனவே இரு வட்டங்களும் o-வில் தொடுகையுள்ள, ஒரே விட்டத் துடன் கூடிய வட்டங்களாகும். o ஐத் துருவமாகும், ox-ஐத் தொடக்க கோடாகவும் கொண்டு இவற்றின் துருவச் சமன்பாடு களை முறையே

$$r=2a\cos\theta,$$

$$r=2b\cos\theta$$

என்று கூறலாம். $P=(r, \theta)$, $R=(r+\delta r; \theta+\delta\theta)$ என்னுமிரு நெருங்கிய புள்ளிகளையெடுத்து $P\ Q\ R\ S$ என்னும் மிக நுண்ணிய பரப்பளவைக் கருதுக. இப் பரப்பளவு $r\delta\theta\ \delta r$ ஆகும். OP, OR என்னும் ஆரைத் திசையிக்கள் இரு வட்டங்களையும் முறையே C, D; E, F ஆகிய புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன. இரு வட்டங்களையும் தொடக்கக் கோடு A, B என்ற புள்ளியில் வெட்டுகின்றது. OA = முதல் வட்டத்தின் விட்டம் $=2a$; OB = இரண்டாவது வட்டத்தின் விட்டம் $=2h$ புவியீர்ப்பு மையம்



படம் 207

காணப்பட வேண்டிய பகுதி $O\ F\ E\ B\ A\ C\ D\ O$ ஆகும். பரப்பளவு சீரான பொருண்மையுடைய தெனக் கருதி, ஒரு அலகு பரப்பளவின் பொருண்மை ρ என்க. $\therefore \delta m=\rho .\ r\theta\ \delta r$.

இந்த நுண்ணிய பரப்பளவின் புவியீர்ப்பு மையம் $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ ஆகும். இப் பரப்பளவு EB முதல் CD வரை பரவியிருப்பதால், r-இன் எல்லை மதிப்புக்கள் OE முதல் OC வரையாகும்; அதாவது $2b\cos\theta$ முதல் $2a\cos\theta$ வரை. மேலும் இரு வட்டங்களின் ஆரைத் திசையிக்களும் நேர் கால வட்டப் பகுதியில் OX முதல் OY வரை திரும்புவதால் θ-வின் எல்லைகள் θ முதல் $\frac{\pi}{2}$ வரையாகும். எனவே, பரப்பளவு $Q\ F\ B\ A\ D\ O$-வின் புவியீர்ப்பு மையம் $(\bar{x}, \bar{y})$ எனில்,

$$\bar{x}=\frac{\iint x\ dm}{\iint dm},\ \bar{y}=\frac{\iint y\ dm}{\iint dm}\ \text{ஆகும்.}$$

$$\bar{x} = \frac{\int_{0}^{\pi/2}\int_{OE}^{OC} r\cos\theta.\ \rho.\ r\,d\theta\,dr}{\int_{0}^{\pi/2}\int_{OE}^{OC} \theta.\ r d\theta\,dr}$$

$$= \frac{\int_{0}^{\pi/2}\int_{OE}^{OC} r^2 dr.\ \cos\theta d\theta}{\int_{0}^{\pi/2}\int_{OE}^{OC} r\,dr.\ d\theta}$$

$$= \frac{\int_{0}^{\pi/2}\left[\frac{r^3}{3}\right]_{2b\cos\theta}^{2a\cos\theta}.\ \cos\theta\,d\theta}{\int_{0}^{\pi/2}\left[\frac{r^2}{2}\right]_{2b\cos\theta}^{2a\cos\theta} d\theta}$$

$$= \frac{\int_{0}^{\pi/2} \frac{8}{3}(a^3-b^3).\ \cos^4\theta\,d\theta}{\int_{0}^{\pi/2} 2(a^2-b^2).\ \cos^2\theta\,d\theta}$$

$$= \frac{\frac{8}{3}(a^3-b^3).\ \frac{3}{4}.\ \frac{1}{2}.\ \frac{\pi}{2}}{2(a^2-b^2).\ \frac{1}{2}.\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{a^3-b^3}{a^2-b^2}$$

$$= \frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_0^{\pi/2}\int_{OE}^{OC} r \sin\theta \cdot r d\theta\, dr}{\int_0^{\pi/2}\int_{OE}^{OC} r\, d\int dr}$$

$$= \frac{\int_0^{\pi/2}\int_{OE}^{OC} r^2\, dr. \sin\theta\, d\theta}{\int_0^{\pi/2}\int_{OE}^{OC} rdr.\, d\theta}$$

$$= \frac{\int_0^{\pi/2}\left[\frac{r^3}{3}\right]_{2b \text{ ccs } \theta}^{2a\cos\theta} . \sin\theta\ d\theta}{\int_0^{\pi/2}\left[\frac{r^2}{2}\right]_{2b\cos\theta}^{2a\cos\theta} .\ d\theta}$$

$$= \frac{\int_0^{\pi/2} . \frac{8}{3}\cos^3\theta. \sin\theta\, d\theta}{\int_0^{\pi/2} 2(a^2-b^2)\cos^2\theta\, d\theta}$$

$$= \frac{4}{3}\ \frac{(a^3-b^3)}{(a^2-b^2)}\ \frac{\int_0^{\pi/2}\cos^3\theta. \sin\theta\, d\theta}{\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\, d\theta}$$

$$= \frac{4}{3}\ \frac{(z^3-b^3)}{(a^2-b^2)} . \frac{\left[\frac{-\cos^4\theta}{4}\right]_0^{\pi/2}}{\frac{1}{2}. \frac{\pi}{2}}$$

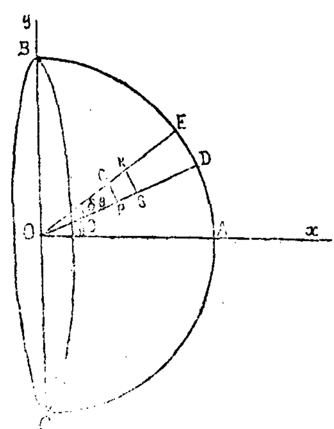
$$=\frac{4}{3}\cdot\frac{(a^3-b^3)}{(a^2-b^2)}\cdot\frac{1/4}{\pi/4}$$

$$=\frac{4}{3\pi}\left(\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}\right)$$

மாதிரி 150 : ஒரு அரைக் கோளத்தின் அடர்த்தி அதன் மையத்திலிருந்து துகள்களின் தூரங்களின் n அடுக்குகளுக்கு விகித சமத்திலிருந்தால் அதன் புவியீர்ப்பு மையத்தினைக் காண்க.

தீர்வு : O-ஐ மையமாகவும் OA-ஐ அச்சாகவும் கொண்ட ABC என்னும் அரைக் கோளத்தைக் கருதுக. O-ஐ ஆதியாகவும், OA, OB ஆகியவற்றை முறை x, y அச்சுக்களாகவும் அரைக் கோளமானது கால்வட்டப் பகுதி AOBயை OAயின் மீது சுற்றுவதாலுண்டாகும் உருவமெனக் கொள்ளலாம். அரைக் கோளத்தின் ஆரை a எனில், Oஐத் துருவமாகவும், OA-ஐத் தொடக்கக் கோடாகவும் கொண்டு இக் கால்வட்டப் பகுதியின் துருவச் சமன்பாட்டை $r=a$ என்று கூறலாம்.

$P(r, \theta)$, $R(r+\delta r, \theta+\delta\theta)$ என்பன ஏதேனுமிரு நெருங்கிய புள்ளிகளென்க. $PQRS$ என்பது மிக நுண்ணிய பரப்பளவு



படம் 208

எனில், இதன் பரப்பளவை $r\delta\theta.\ \delta r$ என்று கூறலாம். இப்பரப்பளவை OAஐ அச்சாகக் கொண்டு சுற்றினால் $r\delta\theta\delta r$ அகலமுள்ள ஒரு வளையம் கிடைக்கும். இவ்வளையத்தின் ஆரையானது Pயிலிருந்து OAக்கு வரையப்படும் செங்குத்துத் தூரத்

திற்குச் சமமாகயிருக்குமென்பதாலும் $P=(r, \theta)$ என்பதாலும் இவ்வளையத்தின் ஆரை $r \sin\theta$ ஆகும். எனவே, வளயத்தின் சுற்றளவு $2\pi r \sin\theta$ என்றும், வளையத்தின் கன அளவு $2\pi r \sin\theta .\ r\delta\theta\,\delta r$ என்றும் காணலாம். ஆனல் Pயிலுள்ள ஒரு துகளின் அடர்த்தியானது $OP=r$இன் n அடுக்கு விகித சமத்தி லிருப்பதால், k என்பது விகித சமமாறிலியாயின் Pயிலுள்ள துகளின் அடர்த்தி kr^n ஆகும். எனவே, மேற்கூறப்பட்ட வளையத்தின் பொருண்மை $\delta m=kr^n.\ 2\pi r \sin\theta .\ r\delta\theta . \delta r$ ஆகும். மேலும் $PQRS$இன் புவியீர்ப்பு மையம் Pயிலிருக்கு மாகை யாலும், வளையமானது OAஐச் சுற்றி சமச்சீராக யிருப்பதாலும், வளையத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் OAயின் மேல் Oவிலிருந்து $OP \cos\theta$ தூரத்திலிருக்கும். அதாவது வளையத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் OAயின் மேல் Oவிலிருந்து $OP\cos\theta$ தூரத்திலிருக்கும். அதாவது வளையத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் $x=r\cos\theta,\ y=o$ ஆகும். எனவே, அரைக் கோளத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் $(\bar{x}, \bar{y})$ எனில்,

$$\bar{x}=\frac{\iint x\,dm}{\iint dm},\ \bar{y}=0$$

ஆகும். இங்கு Pயானது Oவிலிருந்து Dவரை பரவியிருக்கக் கூடுமாகையால் r இன் எல்லைகள் o முதல் a வரையாகும். ஆரைத் திசை OAயிலிருந்து OBவரை திரும்பக் கூடுமாகையால்,

θவின் எல்லைகள் O முதல் $\frac{\pi}{2}$ வரையாகும்,

$$\bar{x}=\frac{\int_0^{\pi/2}\int_0^{a} r\cos\theta\ \ kr^n\,2\pi r\sin\theta\ \ r\,d\theta\,dr}{\int_0^{\pi/2}\int_0^{a} kr^n .\ 2\pi r\sin\theta .\ r\,d\theta\,dr}$$

$$=\frac{\int_0^{\pi/2}\int_0^{a} r^{n+3}dr.\cos\theta\sin\theta\,d\theta}{\int_0^{\pi/2}\int_0^{a} r^{n+2}dr.\sin\theta\,d\theta}$$

$$= \frac{\int_0^{\pi/2} \left[\frac{r^{n+4}}{n+4}\right]_0^a \cos\theta \sin\theta \, d\theta}{\int_0^{\pi/2} \left[\frac{r^{n+3}}{n+3}\right]_0^a . \sin\theta \, d\theta}$$

$$= \frac{n+3}{n+4} . a \frac{\int_0^{\pi/2} \sin\theta \; d(\sin\theta)}{\int_0^{\pi/2} \sin\theta \, d0}$$

$$= \frac{n+3}{n+4} a \frac{\left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2}}{\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi/2}}$$

$$= \frac{n+3}{n+4} \, a . \frac{1/2}{1}$$

$$= \frac{(n+3)\, a}{2\,(n+4)}$$

ஆகவே, அரைக்கோளத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் $= \left[\frac{(n+3)a}{2(n+4)}, 0\right]$

குறிப்பு : $OA - \bar{x} = a - \frac{n+3}{n+4} . \frac{a}{2} = \frac{a\,[2n+8-n-3\,]}{2\,(\,n+4)} = \frac{(n+5)a}{2\,(n+4)}$

∴ அரைக்கோளத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் G எனில்,

$$OG = x = \frac{(n+3)\,a}{2\,(n+4)}, \; GA = \frac{(u+5)\,a}{2\,(n+4)}$$

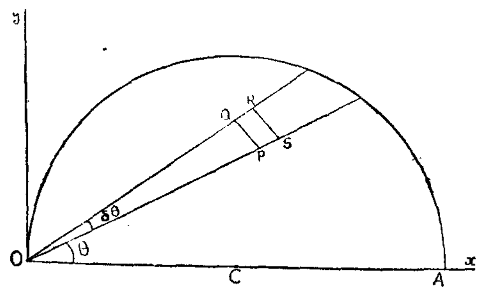
$$\therefore OG : GA = (n+3) : (n+5)$$

அதாவது, அரைக்கோளத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் அதன் அச்சை $(n+3) : (n+5)$

மாதிரி 151: ஒரு திண்மக்கோளத்தின் அடர்த்தியானது, அதன் மேற்பரப்பிலுள்ள ஒரு நிலையான புள்ளியிலிருந்து துகள்களின் தூரங்களின் வர்க்கங்களுக்கு நேர்மாறு விகித சமத்திலிருந்தால், அதன் புவியீர்ப்பு மையம் அப்புள்ளி வழி ஆரையை இரு சமக் கூறிடுமெனக் காட்டுக.

தீர்வு

O என்பது a ஆரையுள்ள ஒரு கோளத்தின் மேற்பரப்பின் மேலுள்ள ஒரு நிலையான புள்ளி. C என்பது அதன் மையம். Oஐ ஆதியாகவும், O வழிவிட்டம் OAயை X அச்சாகவும் கொள்க. OA மேலுள்ள அரை வட்டத்தை OAயின் மீது சுற்றுவதால் கிடைக்கப்பெறும் உருவமே கோளமாகும். Dஐத் துருவ



படம் 209

மாகவும், OAஐத் தொடக்கக் கோடாகவும் கொண்டு $P(r, \theta)$, $R(r+\delta r, \theta+\delta\theta)$ என்னும் நெருக்கமான புள்ளிகளை யெடுத்து, அதைச் சுற்றி $PQRS$ என்னும் நுண்ணிய பரப்பளவை யெடுத்துக்கொள்க. இதன் பரப்பளவு $r\delta\theta.\delta r$ ஆகும். இப்பரப்பளவை OAஐ அச்சாகக் கொண்டு சுற்றுவதாலுண்டாகும் வளையத்தின் ஆரை $r\sin\theta$ ஆகையால், அவ்வளையத்தின் கன அளவு $2\pi r\sin\theta.\ r\delta\theta\ \delta r$ ஆகும். Pயிலுள்ள துகளின் அடர்த்தி $OP^2=r^2$க்கு நேர்மாறு விகித சமத்திலிருக்குமாகையால், k என்பது விகித சமமாறிலியாயின், Pயிலுள்ள துகளின் அடர்த்தி $\frac{k}{r^2}$ ஆகும். எனவே, வளையத்தின் பொருண்மை $\delta m=\frac{k}{r^2}$. $2\pi r\sin\theta\ r\delta\theta\ \delta r=k.2\pi\sin\theta\delta\theta.\delta r$ ஆகும். இவ்வளையத்தின் புவியீர்ப்பு வையம் அதன் மையத்திலிருக்குமாகையால், அதன் அச்சுத் தூரங்கள் $(OP\cos\theta, 0)$ ஆகும். அதாவது,

$$x=r\cos\theta,\ y=0.$$

எனவே, முழுக்கோளத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் $(\bar{x}, \bar{y})$ எனில்

$$\bar{x}=\frac{\iint x\,dm}{\iint dm},\ \bar{y}=0$$

ஆகும். வட்டத்தின் துருவச் சமன்பாடு $r=2o\cos\theta$ ஆகையால், r இன் எல்லைகள் $r=o$ முதல் $r=2a\cos\theta$ வரையாகும். θ இன் எல்லைகள் $\theta=0$ முதல் $\theta=\frac{\pi}{2}$ வரையாகும்.

$$=\frac{\int_0^{\pi/2}\int_0^{2a\cos\theta} r\cos\theta\ k.2\pi.\sin\theta.d\theta.dr}{\int_0^{\pi/2}\int_0^{2a\cos\theta} k.2\pi.\sin\theta.d\theta.dr.}$$

$$=\frac{\int_0^{\pi/2}\int_0^{2a\cos\theta} rdr.\cos\theta\sin\theta.d\theta}{\int_0^{\pi/2}\int_0^{2a\cos\theta} dr\ \sin\theta\ d\theta}$$

$$=\frac{\int_0^{\pi/2}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{2a\cos\theta}\cos\theta\sin\theta.d\theta}{\int_0^{\pi/2}[r]_0^{2a\cos\theta}\sin\theta.d\theta}$$

$$=\frac{\int_0^{\pi/2} 2a^2.\cos^2\theta.\cos\theta.\sin\theta.d\theta}{\int_0^{\pi/2} 2a\cos\theta.\sin\theta.d\theta}$$

$$=\frac{a.\int_0^{\pi/2}\cos^3\theta.\sin\theta.d\theta}{\int_0^{\pi/2}\cos\theta.\sin\theta d\theta}$$

$$= \frac{a.\left[-\frac{\cos^4\theta}{4}\right]_0^{\pi/2}}{\left[-\frac{\cos^2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2}}$$

$$= \frac{a.\ [1/4]}{[1/2]}$$

$$= \frac{a}{2}.$$

ஆகவே, புவியீர்ப்பு மையம் $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$. அதாவது, புவியீர்ப்பு மையானது O வழி ஆரையாகிய OCயை இருசம பாகங்களாகப் பிரிக்கின்றது.

பயிற்சி 18

(1) ஒரு வட்ட வில் வடிவமான கம்பியின் ஏதேனுமொரு புள்ளியில் அடர்த்தியானது அவ்வில்லின் நடு ஆரையிலிருந்து அப்புள்ளியின் தூரத்திற்கு விகித சமத்திலிருந்தால், வில்லின் புவியீர்ப்பு மையம் அந்த நடு ஆரையின் மேல் வில்லுக்கும் அதன் நாணுக்கும் நடுவிலிருக்குமென்று காட்டு.

(2) ஒரு அரை வட்டத் தகட்டின் அடர்த்தியானது அதன் விட்டத்தின் ஒரு முனையிலிருந்து துகள்களின் தூரங்களுக் கேற்ப மாறுபடின் அத் தகட்டின் புவியீர்ப்பு மையம் காண்க.

(3) ஒரு அரை வட்டத் தகட்டின் அடர்த்தியானது அதன் மையத்திலிருந்து துகள்களின் தூரங்களின் முப்படிகளுக்கு விகித சமத்திலிருந்தால் அத் தகட்டின் புவியீர்ப்பு மையம் காண்க.

(4) ஒரு வட்டத் தகட்டின் அடர்த்தியானது அதன் பரிதியின் மேலுள்ள o என்னும் புள்ளியிலிருந்து துகள்களின் தூரங்களின் n அடுக்குகளுக்கு விகித சமமாயின் அத் தகட்டின் புவியீர்ப்பு மையம் o வழி விட்டத்தை $(n+2) : 2$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்குமென்று காட்டு.

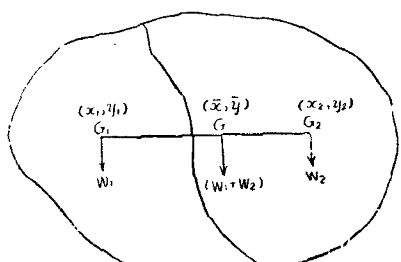
(5) ஒரு நீள்வட்டத்தின் கால் பகுதி வடிவிலுள்ள AOB என்னும் தகட்டின் அடர்த்தியானது OA, OBயிலிருந்து துகள்

களின் தூரங்களின் பெருக்கத்திற்கு ஏற்ப மாறுபடின் அதன் புவியீர்ப்பு மையத்தினைக் காண்க.

(6) ஒரு திண்ம அரைக்கோளத்தின் அடர்த்தியானது கோள மையத்திலிருந்து துகள்களின் தூரங்களின் வர்க்கங்களுடன் விகித சமத்திலிருந்தால், அதன் புவியீர்ப்பு மையத்தினைக் காண்க.

இரு பகுதிகளாலான கூட்டுப் பொருளின் புவியீர்ப்பு மையம்

W_1, W_2 எடைகளுள்ள இரு பகுதிகளாலான கூட்டுப் பொருளொன்றைக் கருதுக. இப்பகுதிகளின் புவியீர்ப்பு மையங்கள் G_1 G_2 எனில், W_1, W_2 ஆகிய எடைகள் இப்புவியீர்ப்பு மையங்களின் வழியே நிலைக் குத்தாகக் கீழ்நோக்கிச்



படம் 210

செயல்படும். கூட்டுப் பொருளின் புவியீர்ப்பு மையம் G எனில், எடையாகிய (W_1+W_2) ஆனது G வழியே நிலைக்குத்தாகக் கீழ்நோக்கிச் செயல்படும். இம்மூன்று விசைகளும் ஒரு திசை இணைவிசைகள் என்பதோடு, (W_1+W_2) என்பது W_1, W_2 ஆகிய இரு விசைகளின் விளைவு விசையாகும். மேலும், G_1, G_2, G ஆகிய மூன்று புள்ளிகளும் ஒரே நேர் கோட்டிலிருக்கும்.

இப்பொழுது, இம்மூன்று விசைகளும் செயல்படும் தளத்தில் Ox, Oy என்னும் ஏதேனுமொரு செங்குத்து அச்சுக்களையெடுத்து, G_1, G_2, G ஆகியவற்றின் அச்சுத் தூரங்களை முறையே (x_1, y_1), (x_2, y_2), $(\bar{x}, \bar{y})$ எனக் கொள்க.

y அச்சைப் பற்றி இவ்விசைகளின் திருப்புத் திறன் சமன்பாடு காண்க:

W_1, W_2 ஆகியவற்றின் திருப்புத்திறன்களின் மொத்தம் $= (W_1+W_2)$இன் திருப்புத் திறன்.

$$W_1x_1+W_2x_2 = (W_1+W_2)\bar{x}$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{W_1x_1+W_2x_2}{W_1+W_2}$$

இதுபோல், x-அச்சைப் பற்றி இவ்விசைகளின் திருப்புத் திறன் சமன் பாட்டிலிருந்து

$$\bar{y} = \frac{W_1y_1+W_2y_2}{W_1+W_2}$$

என்று காணலாம். இவ்வாறு, கூட்டுப்பொருளின் புவியீர்ப்பு மையத்தின் நிலையை நிர்ணயிக்கலாம்.

குறிப்பு 1 கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஒரு பொருளானது, $W_1, W_2, W_3, \ldots, W_n$ எடைகள் கொண்ட n பகுதிகளின் கூட்டுப் பொருளெனில், இப்பகுதிகளின புவியீர்ப்பு மையங்களாகிய G_1 (x_1, y_1), G_2 (x_2, y_2) G_3 $(x_3, y_3), \ldots\ldots$, G_n (x_n, y_n) ஆகிய வற்றிலிருந்து கூட்டுப் பொருளின் புவியீர்ப்பு மையம் $G(\bar{x}, \bar{y})$ஐ

$$\bar{x} = \frac{W_1x_1+W_2+W_3x_3+\ldots+W_nx_n}{W_1+W_2+W_3+\ldots+W_n},$$

$$\bar{y} = \frac{W_1y_1+W_2y_2+W_3y_3+\ldots+W_ny_n}{W_1+W_2+W_3+\ldots+W_n}$$

என்ற சூத்திரங்களின் மூலம் பெறலாம்.

குறிப்பு 2 ஒரு கூட்டுப் பொருளிலடங்கியுள்ள பல பகுதிகளின் புவியீர்ப்பு மையங்களாகிய G_1, G_2, $G_3, \ldots$, G_nம் கூட்டுப் பொருளின் புவியீர்ப்பு மையமாகிய G-ம் ஒரே நேர் கோட்டி லிருப்பின், அந்நேர் கோட்டிலுள்ள O என்னும் நிலையான புள்ளியிலிருந்து இப்புவியீர்ப்பு மையங்களின் தூரங்களாகிய d_1, d_2, $d_3, \ldots d_n$ மூலந் கூட்டுப் பொருளின் புவியீர்ப்பு மையத் தின் தூரமாகிய $\bar{x}$ஐ

$$\bar{x} = \frac{W_1d_1+W_2d_2+W_3d_3+\ldots+W_n}{W_1+W_2+W_3+\ldots+W_n}$$

என்ற சூத்திரத்தின் மூலம் பெறலாம்.

ஒரு பகுதி நீக்கப்பட்ட பொருளின் புவியீர்ப்பு மையம்

W எடையுள்ள ஒரு பொருளிலிருந்து W_1 எடையுள்ள ஒரு பகுதி நீக்கப்பட்டுள்ளதாகக் கருதுக. எஞ்சியுள்ள எடை W_2 எனில், $W_2 = W - W_1$ ஆகும். இரு பகுதிகளின் புவியீர்ப்பு

மையங்களை முறையே G_1 G_2 என்றும், முழுப் பொருளின் புவியீர்ப்பு மையத்தை G என்றும் கொள்க. W_1, W_2, W ஆகிய எடைகள் முறையே G_1, G_2, G ஆகிய புள்ளிகளின் வழியே நிலைக் குத்தாகக் கீழ்நோக்கிச் செயல்படும். இவ்விசைகள் செயல்படும் தளத்தில் அப்பொருளில் O என்னும் ஏதேனுமொரு புள்ளி வழியே ox, oy என்னும் செங்குத்து அச்சுக்களையெடுத்து, அவை குறித்து, அவை குறித்து G_1, G_2, G ஆகியவற்றின் அச்சுத் தூரங்களை முறையே (x_1, y_1), (x_2, y_2), $(\bar{x}, \bar{y})$ என்க. W என்பது W_1, W_2 ஆகியவற்றின் திருப்புத் திறன்களின் மொத்தம், y- அச்சு பற்றிய Wஇன் திருப்புத் திறனுக்குச் சமமாகும்

அதாவது, $$w_1 x_1 + w_2 x_2 = w\bar{x}$$

அல்லது, $$w_2 x_2 = w\bar{x} - w_1 x_1$$

$$\therefore x_2 = \frac{w\bar{x} - w_1 x_1}{w_2} = \frac{w\bar{x} - w_1 x_1}{w - w_1}$$

இதுபோல், x - அச்சு பற்றிய திருப்புத் திறன் சமன்பாட்டிலிருந்து, $y_3 = \dfrac{w\bar{y} - w_1 y_1}{w - w_1}$ என்று காணலாம்.

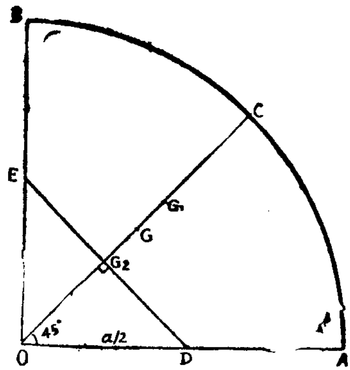
மாதிரி 152 : l நீளமுள்ள ஒரு கம்பியானது இரு ஆரைகளுடன் கூடிய ஒரு கால்வட்டப் பகுதியாக வளைக்கப்பட்டுள்ளது. அதன் புவியீர்ப்பு மையம் வட்ட மையத்திலிருந்து $\dfrac{6\sqrt{2}\,l}{(4+\pi)^2}$ தூரத்திலிருக்குமென்று காட்டு.

தீர்வு :

AOB என்ற வட்டப் பகுதியின் ஆரை a என்று கொள்க.

$$\therefore l = OA + OB + \text{வில் } ACB$$
$$= a + a + \frac{1}{4} \cdot 2\pi a$$
$$= a\left(2 + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$= \frac{a(4+\pi)}{2}$$
$$\therefore a = \frac{2l}{(4+\pi)}.$$

C என்பது வில் ABயின் நடுப்புள்ளியெனில், வில் ABயின் புவியீர்ப்பு மையம் G_1 ஆனது OCயில் $OG_1 = \dfrac{a.\sin\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}}$



படம் 211

$= a.\dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{4}{\pi} = \dfrac{2\sqrt{2}\,a}{\pi}$ தூரத்திலிருக்கும் $\left(\right.$ வில் மையத்தில் தாங்கும் கோணம் $2\alpha = \dfrac{\pi}{2} \therefore \alpha = \dfrac{\pi}{4}\left.\right)$

OA, OB ஆகிய பகுதிகளின் புவியீர்ப்பு மையங்கள் அவற்றின் நடுப்புள்ளிகளாகிய D, E ஆகும். இவ்விரு பகுதிகளும் சமமானவையாகையால், இவற்றின் கூட்டுப் புவியீர்ப்பு மையம் G_2 ஆனது DGயின் நடுப்புள்ளியில், அதாவது DE, OC ஆகியவற்றின் வெட்டுப்புள்ளியிலிருக்கும்.

$\angle AOC = 45°$ ஆகையால், $OG_2 = OD \cos 45° = \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$. ஆகவே, OA, OB ஆகிய இரு பகுதிகளின் கூட்டுப் பகுதியின் புவியீர்ப்பு மையம் G_2 எனவும், வில் ABயின் புவியீர்ப்பு மையம் G_1 எனவும் கண்டோம். ω என்பது ஒரு அலகு நீளக் கம்பியின் எடையெனில், G_2 வழியே $2a\omega$ எடையும், G_1

வழியே $\frac{\pi a \omega}{2}$ எடையும் செயல்படுகின்றன. இவற்றின் கூட்டுப் புவியீர்ப்பு மையம் G_1, G_2 இன்மேல் G என்னும் புள்ளியாகயிருக்கும். இவற்றின் மொத்த எடையாகிய lw ஆனது Gயில் செயல்படும். $OG = \bar{x}$ என்க.

$$\therefore \bar{x} = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2}{w_1 + w_2}.$$

$W_1 =$ வில் ABயின் எடை $= \frac{\pi a \omega}{2}$, $x_1 = OG_1 = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} a$;

$W_2 = OA, OB$ஆகியவற்றின் மொத்த எடை $= 2a\omega$; $x_2 = OG_2 = \frac{a}{2\sqrt{2}}$

$W_1 + W_2 = l\omega$.

$$\bar{x} = \frac{\pi a}{2}\omega . \frac{2\sqrt{2}}{\pi} a + 2a\omega \frac{a}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}a^2 + \frac{a^2}{\sqrt{2}}}{l}$$

$$= \frac{3a^2}{\sqrt{2}l}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{2}l} \cdot \frac{4l^2}{(4+\pi)^2}$$

$$= \frac{6\sqrt{2}}{(4+\pi)^2}.$$

மாதிரி 153 a விட்டமுள்ள ஒரு சீரான வட்டத் தகட்டிலிருந்து, அதன் ஒரு ஆரத்தை மூலைவிட்டமாகக் கொண்ட சதுரத் துண்டு ஒன்று வெட்டியெடுக்கப்பட்டுள்ளது. எஞ்சிய பகுதியின் புவியீர்ப்பு மையம் வட்ட மையத்திலிருந்து $\frac{a}{8\pi - 4}$ தூரத்திலிருக்கு மென்று காட்டு.

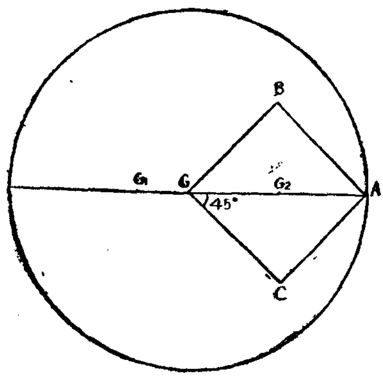
தீர்வு

ஒரு அலகுள்ள பரப்பளவின் எடையை ω என்க.

வட்டத்திட் பரப்பு $\frac{\pi a^2}{4}$ ஆகையால்,

$$W = \frac{\pi a^2}{4} \omega$$

G = வட்டத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் = வட்ட மையம்.



படம் 212

சதுரத்தின் மூலைவிட்டம் = ஆரை = $\frac{a}{2}$

$\therefore$ சதுரத்தின் பக்கம் = $\frac{a}{2} \cos 45° = \frac{a}{2\sqrt{2}}$

சதுரத்தின் பரப்பு = $\frac{a^2}{8}$

$\therefore W_2$ = சதுரத் துண்டின் எடை = $\frac{a^2}{8} \omega$.

G_2 = சதுரத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் = GAயின் நடுப்புள்ளி.

$\therefore GG_2 = \frac{a}{4}$.

W_1 = எஞ்சிய பகுதியின் எடை = $W - W_2 = \frac{\pi a^2}{8}\omega - \frac{a^2}{8}\omega$

$= (2\pi - 1)\frac{a^2}{8} \omega$.

G என்பது எஞ்சிய பகுதியின் புவியீர்ப்பு மையமெனில், G ஆனது GG_2 நேர் கோட்டின் மேலிருக்கும்.

Gஐ ஆதியாகவும், GAஐ x அச்சாகவும் கொள்க.

$\therefore (\bar{x},\bar{y}) = (0, 0);$

$(x_2,y_2) = (GG_2, 0) = \left(\frac{a}{4}, 0\right)$

$(x_1,y_1) = (GG_1, 0)$

$$x_1 = \frac{W\bar{x} - W_2x_2}{W - W_2}$$

$$= \frac{\frac{\pi a^2}{4}\,\omega\,(0) - \frac{a^2}{8}\,\omega\left(\frac{a}{4}\right)}{(2\pi - 1)\frac{a^2}{8}\,\omega}$$

$$= \frac{-\,a/4}{(2\pi - 1)}$$

$$= \frac{-a}{8\pi - 4.}$$

அதாவது, எஞ்சிய பகுதியின் புவியீர்ப்பு மையம் வெட்டியெடுக்கப்பட்ட சதுரத் துண்டின் மூலைவிட்டம் அமைந்துள்ள நேர் கோட்டின் மேல் வட்ட மையத்திலிருந்து $\frac{a}{8\pi - 4}$ தூரத்திலுள்ளது.

மாதிரி 154 R ஆரையுள்ள ஒரு சீரான கோளத்திலிருந்து r ஆரையுள்ள கோளமொன்று வெட்டியெடுக்கப் பட்டுள்ளது. இரு கோளங்களின் மையங்களுக்கிடையேயுள்ள தூரம் c எனில், எஞ்சிய பகுதியின் புவியீர்ப்பு மையம் காண்க;

(சென்னை பி.எஸ்ஸி.63 ஏப்)

தீர்வு

பெரிய கோளத்தின் மையம் C என்றுப் சிறிய கோளத்தின் மையம் C_2 என்றும் கொள்க. W என்பது ஒரு அலகு கன அளவின் எடையெனில்,

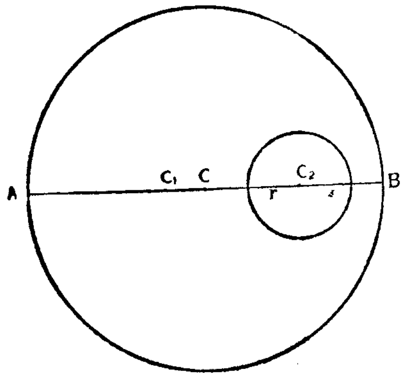
W = பெரிய கோளத்தின் எடை = $\frac{4}{3}\pi R^3\,\omega$

W_2 = சிறிய கோளத்தின் எடை = $\frac{4}{3}\pi r^3\omega.$

W_1 = எஞ்சிய பகுதியின் எடை = $W - W_2 = \frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3\omega).$

$CC_2 = c$ (கொடுக்கப்பட்டுள்ளது)

எஞ்சிய பகுதியின் புவியீர்ப்பு மையம் C, ஆனது C_2C நேர் கோட்டிலிருக்கும். Cஐ ஆதியாகவும், CC_2ஐ x அச்சாகவும் கொள்க.



படம் 213

$\therefore \bar{x} = o;\ x_2 = CC_2 = c;\ x_1 = CC_1.$

$$x_1 = \frac{Wx - W_2x_2}{W - W_2}$$

$$= \frac{W(o) - \frac{4}{3}\pi r^3 \omega(c)}{\frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)\omega}$$

$$= \frac{-r^3 c}{R^3 - r^3}$$

அதாவது எஞ்சிய பகுதியின் புவியீர்ப்பு மையம் இருகோளங்களின் மையக் கோட்டின் மேல் மறு பக்கத்தில் பெரிய கோளத்தின் மையத்திலிருந்து $\dfrac{r^3C}{R^3 - r^3}$ தூரத்திலிருக்கும்

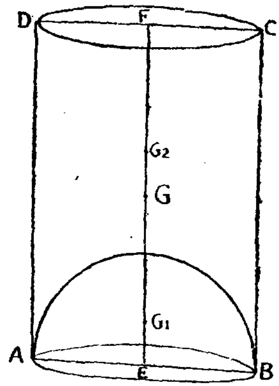
மாதிரி 155 h உயரமும், r ஆரையுமுள்ள ஒரு திண்ம நேர் வட்ட உருளையிலிருந்து, உருளையின் அடிப்பாகத்தையே அடிப்பாகமாகக் கொண்ட ஒரு அரைக் கோளப் பகுதி கடைந்தெடுக்கப் பட்டுள்ளது. எஞ்சிய பகுதியின் புவியீர்ப்பு மையம் காண்க.

தீர்வு

EF என்பது $ABCD$ என்ற உருளையின் அச்சு. ω என்பது ஒரு அலகு கனஅளவின் எடையெனில், w = உருளையின் எடை $= \pi r^2 h\omega$.

W_1 = அரைக் கோளத்தின் எடை $= \frac{2}{3}\pi r_3 \omega$.

W_2 = எஞ்சிய பகுதியின் எடை $= w - w_2$



படம் 214

$$= \pi r^2 h\omega - \frac{2}{3}\pi r^3 \omega$$

$$= \pi r^2 \omega (h - \frac{2}{3} r)$$

G = உருளையின் புவியீர்ப்பு மையம் $= EF$இன் நடுப்புள்ளி.

G_1 = அரைக் கோளப் பகுதியின் புவியீர்ப்பு மையம்

$$\therefore EG_1 = \frac{3r}{8}$$

$$\therefore GG_1 = GE - G_1E = \frac{h}{2} - \frac{3r}{8} = \frac{4h - 3r}{8}$$

G_2 என்பது எஞ்சிய பகுதியின் புவியீர்ப்பு மையமெனில் G_2-ம் EFஇன் மேலேயேயிருக்கும். மேலும், W ஆனது W_1 W_2 ஆகியவற்றின் விளைவு ஆகையால், $\frac{G_2G}{GG_1} = \frac{W_1}{W_2}$

$$= \frac{\frac{2}{3}\pi r^3 \omega}{\pi r^2 \omega (h - \frac{2}{3} r)}$$

$$= \frac{2r}{3h-2r}$$

$$\therefore G_2G = \frac{2r}{3h-2r} \cdot GG_1$$

$$= \frac{2r}{3h-2r} \cdot \frac{4h-3r}{8}$$

$$= \frac{r(4h-3r)}{4(3h-2r)}$$

$$\therefore EG_2 = GE + GG_2$$

$$= \frac{h}{2} + \frac{r(4h-3r)}{4(3h-2r)}$$

$$= \frac{6h^2-4hr+4hr-3r^2}{4\ (3h-2r)}$$

$$= \frac{3\ (h^2-r^2)}{4\ (3h-2r)}$$

எஞ்சிய பகுதியின் புவியீர்ப்பு மையம், உருளையின் அடிப்பாகத்திலிருந்து அச்சின் மேல் $\frac{3\ (h^2-r^2)}{4\ (3h-2r)}$ உயரத்திலிருக்கும்.

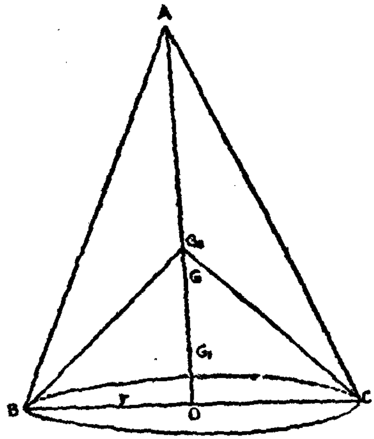
மாதிரி 156 ஒரு திண்ம நேர்வட்டக் கூம்பிலிருந்து, அதன் அடிப்பாகத்தை அடிப்பாகமாகக் கொண்ட ஒரு நேர்வட்டக் கூம்பு வடிவப் பகுதி கடைந்தெடுக்கப்படுகிறது. எஞ்சியுள்ள பகுதியின் புவியீர்ப்பு மையம் கடைந்தெடுக்கப்பட்ட கூம்பு வடிவப் பகுதியின் உச்சியுடன் பொருந்த வேண்டுமாயின் எவ்வளவு பகுதி கடைந்தெடுக்கப்பட வேண்டும்?

(பி.எஸ்ஸி. சென்னை'65 ஏப்)

தீர்வு

Aஐ உச்சியாகவும், Oஐ அடிப்பக்க மையமாகவும் கொண்ட கூம்பின் அடிப்பக்க ஆரை r என்றும், உயரம் h என்றும் கொள்க. எனவே, கூம்பின் புவியீர்ப்பு மையம் G யானது OAயில் O-விலிருந்து $\frac{h}{4}$ தூரத்திலிருக்கும். அதாவது $OG = \frac{h}{4}$. ஒரு அலகு கனஅளவின் எடை w எனில்,

W = கூம்பின் எடை $= \frac{1}{3}\pi r^2 h\omega$. G_2BC என்பது வெட்டியெடுக்



படம் 215

கப்பட்ட கூம்பு எனில் அதன புவியீர்ப்புமையம் Gஆனது. OG_2 இல் Oவிலிருந்து $\frac{1}{4}$ OG_1 தூரத்திலிருக்கும்.

$OG_2 = x$ எனில், $OG_1 = \frac{1}{4}x$.

$$\therefore GG_1 = OG - OG_1 = \frac{h}{4} - \frac{x}{4} = \frac{1}{4}(h-x)$$

$$GG_2 = OG_2 - OG = x - \frac{h}{4} = \frac{1}{4}(4x-h)$$

w_1 = வெட்டியெடுக்கப்பட்ட கூம்பின் எடை $= \frac{1}{3}\pi r^2 x.\omega$.

w_2 = எஞ்சிய பகுதியின் எடை $= w - w_1 = \frac{1}{3}\pi r^2\omega\,(h-x)$

W என்பது W_1, W_2 ஆகியவற்றின் விளைவு ஆதலால்,

$$\frac{G_1G}{GG_2} = \frac{W_2}{W_1}$$

அதாவது, $$\frac{\frac{1}{4}(h-x)}{\frac{1}{4}(4x-h)} = \frac{\frac{1}{3}\pi r^2\omega\,(h-x)}{\frac{1}{3}\pi r^2 x\omega}$$

$$\frac{h-x}{4x-h} = \frac{h-x}{x}$$

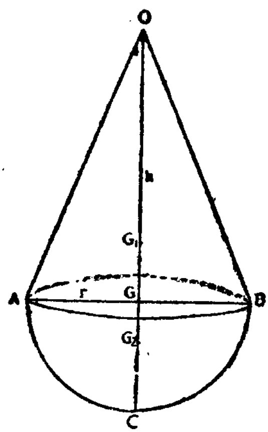
$$4x-h = x$$

$$3x = h$$

$$x = \frac{h}{3}.$$

அதாவது, கூம்பின் அடிப்பாகத்திலிருந்து $\frac{1}{3}$ உயர ஆழத்திற்கு கூம்பு வடிவப் பகுதி வெட்டியெடுக்கப்பட வேண்டும்.

மாதிரி 157: ஒரு திண்மக் கூம்பும், ஒரு திண்ம அரைக் கோளமும் ஒரு பொதுவான அடிப்பக்கத்தின் மேலமைந்துள்ளன. இக் கூட்டுத் திண்மத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் பொது அடிப்பக்கத்தின் மையத்திலிருக்க வேண்டுமெனில், கூம்பின் உயரத்துக்கும், பொது அடிப்பக்கத்தின் ஆரைக்குமுள்ள விகிதம் எவ்வாறு இருக்க வேண்டும்? (மதுரை 1972 ஏப்.)



படம் 216

தீர்வு:

OAB என்னும் கூம்பு ACB என்னும் அரைக் கோளத்தின் அடிப்பாகத்தின் மேலமைந்துள்ளது. பொது அடிப்பாகத்தின் ஆரை r என்றும் கூம்பின் உயரம் h என்றும் கொள்க. இரண்டும் ஒரே அடிப்பாகத்தின் மேலிருப்பதால் இரண்டும் ஒரே பொது அச்சுடையதாகயிருக்கும். பொது அடிப்பாகத்தின்

மையம் G என்க. கூம்பு, அரைக்கோளம் ஆகியவற்றின் புவியீர்ப்பு மையங்கள் முறையே G_1, G_2 எனில் இவை பொது அச்சின் மேலிருக்கும். மேலும் $G_1 G = \frac{h}{4}$, $G_1G_2 = \frac{3r}{8}$ ஆகும். ω என்பது ஒரு அலகு கன அளவின் எடையெனில்,

$w_1 =$ கூம்பின் எடை $= \frac{1}{3} \pi r^2 h\, \omega$

$w_2 =$ அரைக் கோளத்தின் எடை $= \frac{1}{2} \pi r^3\, \omega.$

கூட்டுத் திண்மத்தின் எடை இவ்விரு எடைகளின் விளைவு ஆகும். மேலும், கூட்டுத் திண்மத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் G யிலிருப்பதால்,

$$\frac{G_1\ G}{G\ G_2} = \frac{w_2}{w_1}.$$

$$\frac{h/4}{3r/8} = \frac{\frac{2}{3}\pi r^3\ \omega}{\frac{1}{3}\pi r^2 h\ \omega}$$

$$\frac{2h}{3r} = \frac{2r}{h}$$

$$h^2 = 3r^2$$

$$h = \sqrt{3}\,r$$

அல்லது, $h : r = \sqrt{3} : 1$

மாதிரி 158 : ஒரு திண்ம நேர்வட்டக் கூம்பின் அடிப்பாகத்திற்கு இணையான ஒரு தளத்தினல் கூம்பின் மேற்பகுதி வெட்டியெறியப்பட்டுள்ளது. எஞ்சியுள்ள வெட்டுத்துண்டின் இணையான வட்டக் குறுக்கு வெட்டுகளின் ஆரைகள் R, r ஆகும். வெட்டுத்துண்டின் உயரம் h எனில், அதன் புவியீர்ப்பு மையம் அடிப்பாகத்திலிருந்து $\frac{h}{4} \cdot \frac{R^2 + 2Rr + 3r^2}{R^2 + Rr + r^2}$ உயரத்திலிருக்குமென்று காட்டு.

தீர்வு :

R அடிப்பக்க ஆரையுள்ள ABC என்னும் திண்ம நேர் வட்டக் கூம்பின் உயரம் H என்க. எனவே, ω என்பது ஒரு அலகு கன அளவின் எடையெனில், $w =$ கூம்பின் எடை $=$ $\frac{1}{3} \pi R^2 H \cdot \omega$. அடிப்பாகம் BCக்கு இணையான தளம் ஒன்று கூம்புவை DE என்னும் வட்டக் குறுக்கு வெட்டில் வெட்டு

கிறது. வெட்டுத்துண்டு $BCDE$-யின் உயரம் h. வெட்டுத்துண்டின் மேல்பாக வட்டத்தின் ஆரை r ஆகையால், வெட்டியெறியப்பட்ட கூம்பின் எடை $w_1 = \frac{1}{3}\pi r^2(H-h)\omega$.

∴ வெட்டுத்துண்டின் எடை $w_2 = w - w_1$

$$= \frac{1}{3}\pi R^2 H\omega - \frac{1}{3}\pi R^2(H-h)\omega$$

$$= \frac{1}{3}\pi\omega (R^2 H - r^2 H + r^2 h)$$

$$= \frac{1}{3}\pi\omega \left[(R^2 - r^2) H + r^2 h \right]$$

G, G_1, G_2 என்பன முறையே பெரிய கூம்பு, சிறிய கூம்பு, வெட்டுத்துண்டு ஆகியவற்றின் புவியீர்ப்பு மையங்களெனில்,

$$AG = \frac{3}{4}H, \quad AG_1 = \frac{3}{4}(H-h).$$

$$\therefore G_1 G = AG - AG_1$$

$$= \frac{3}{4}(H - H + h)$$

$$= \frac{3}{4}h.$$

$$\frac{G_1 G}{GG_2} = \frac{w_2}{w_1}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\pi r^2 (H-h)\omega}{\frac{1}{3}\pi\omega\left[(R^2 - r^2)H + r^2 h)\right]} \cdot \frac{3}{4}h$$

$$= \frac{3 r^2 h (H-h)}{\left[4 (R^2 - r^2)H + r^2 h\right]}$$

இப்பொழுது, கூம்பின் அரையுச்சிக் கோணம் α எனில்,

$$\tan\alpha = \frac{R}{H} = \frac{r}{H-R}$$

$$\therefore RH - Rh = rH$$

$$H(R-r) = Rh$$

$$\therefore H = \frac{Rh}{R-r.}$$

$$\therefore H - h = \frac{Rh}{R-hr} - h = \frac{Rh - Rh + rh}{R-r} = \frac{h}{R-r.}$$

$$(R^2 - r^2)H + r^2h = (R^2 - r^2)\ Rh\ \frac{Rh}{R-r} + r^2h$$

$$= (R + r)\ Rh + r^2h$$

$$= h\,[R^2 + Rr + r^2]$$

$$\therefore GG_2 = \frac{3r^2h \cdot \frac{rh}{R-r}}{4h(R^2+Rr+r^2)}$$

$$= \frac{3r^3h}{4\,(R^2+Rr+r^2)\,(R-r)}$$

$$= \frac{3r^3h}{4(R^3-r^3)}$$

$$\therefore G_2M = GM - GG_2$$

$$= \frac{1}{4}H - \frac{3r^3h}{4\,(R^3-r^3)}$$

$$= \frac{Rh}{4\,(R-r)} - \frac{3r^3h}{4\,(R^3-r^3)}$$

$$= \frac{Rh\,(R^2+Rr+r^2) - 3r^3h}{4\,(R^3-r^3)}$$

$$= \frac{h\,[(R^3-r^3)+r(R^2-r^2)+r^2(R-r)]}{4\,(R^3-r^3)}$$

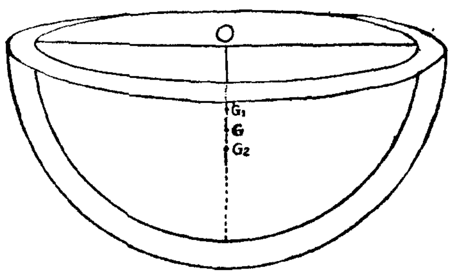
$$= \frac{h\,[R^2+Rr+r^2+Rr+r^2+r^2]}{4\,(R^2+Rr+r^2}$$

$$= \frac{h}{4}\left[\frac{R^2+2Rr+3r^2}{R^2+Rr+r^2}\right]$$

மாதிரி 159 ஒரு அரைக்கோளக் கிண்ணத்தின் உள், வெளி ஆரைகள் முறையே a, b ஆகும். அதன் புவியீர்ப்பு மையம் கிண்ணத்தின் வட்ட விளிம்பின் வடிவியல் மையத்திலிருந்து $\frac{3\,(a+b)\,a^2+b^2)}{8\,(a^2+ab+b^2)}$ என்று காட்டு.

தீர்வு

O என்பது கிண்ணத்தின் வட்ட விளிம்பினுடைய வடிவியல் மையம். இக்கிண்ணமானது b ஆரையுடைய ஒரு திண்ம அரைக் கோளத்திலிருந்து a ஆரையுடைய ஒரு திண்ம அரைக்



படம் 217

கோளத்தைக் கடைந்தெடுத்தது போக எஞ்சியுள்ள பகுதியெனக் கருதலாம். ஒரு அலகு கன அளவின் எடை w எனில்,

$$W = b \text{ ஆரையுள்ள அரைக்கோளத்தின் எடை} = \frac{2}{3}\pi b^3 w.$$

$$W_1 = a \text{ ஆரையுள்ள அரைக்கோளத்தின் எடை} = \frac{2}{3}\pi a^3 w.$$

$$W_2 = \text{அரைக்கோளக் கிண்ணத்தின் எடை} = \frac{3}{3}\pi w\ (b^3 - a^3)$$

G, G_1, G_2 என்பன முறையே b ஆரையுள்ள திண்ம அரைக் கோளம், a ஆரையுள்ள திண்ம அரைக்கோளம், அரைக் கோளக்கிண்ணம் ஆகியவற்றின் புவியீர்ப்பு மையங்களெனில்,

$$OG = \frac{3b}{8},\ OG_1 = \frac{3a}{8}.$$

M என்பது W_1, W_2 ஆகியவற்றின் விளைவு ஆதலின், Oஐப் பற்றிய திருப்புத்திறன் சமன்பாடு காண்க.

$$W_1 . OG_1 + W_2 . OG_2 = W . OG$$

$$\therefore W_2 . OG_2 = W.OG - W_1 . OG_1$$

$$\frac{2}{3}\pi w\,(b^3-a^3)\;OG_2=\frac{2}{3}\pi b^3w.\,\frac{3b}{8}-\frac{2}{3}\pi a^3w.\,\frac{3a}{8}$$

$$(b^3-a^3)\;OG_2=\frac{3b^4}{8}-\frac{3a^4}{8}$$

$$=\frac{3}{8}(b^4-a^4)$$

$$(b-a)\,(b^2+ab+a^2).\;OG_2=\frac{3}{8}\,(b-a)\,(b+a)\,(b^2+a^2)$$

$$\therefore OG_2=\frac{3\,(a+b)\,(a^2+b^2)}{8\,(a^2+ab+b^2)}$$

பயிற்சி 19

(1) ABC என்பது Bயில் நேர் கோணத்தையுடைய ஒரு நேர்கோண முக்கோணம்; $C=30°$, ACயின் மேல் Bக்கு மறு பக்கத்தில் ஒரு சதுரம் வரையப்பட்டுள்ளது: இவ்வாறு அமை யப்பெற்ற உருவத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் ACயிலிருந்து $\frac{15\,AB}{16+2\sqrt{3}}$ தூரத்திலிருக்குமென்று காட்டுக.

(2) $2a$ நீளப் பக்கங்களையுடைய ஒரு சதுரத்தின் ஒரு பக்கத்தின் மேல் சதுரத்தின் உட்புறமாக ஒரு சமபக்க முக்கோணமும் சேர்ந்த கூட்டுத்தளத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் சதுரத்தின் மையத்திலிருந்து $\frac{1}{13}\,(1+3\sqrt{3})a$ தூரத்திலிருக்குமென்று காட்டுக.

(3) D, E, F என்பன $\triangle ABC$யின் பக்கங்களின் நடுப் புள்ளிகள்; G அதன் திணிவு மையம். $CEGD$ என்ற நாற்கரத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் CFஐ $7:11$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்குமென்று காட்டு.

(4) ABC என்பது ஒரு சீரான முக்கோணத் தகடு. D என்பது BCயின் நடுப்புள்ளி. அதன் புவியீர்ப்பு மையம் Gயின் வழியே BCக்கு இணையாக வரையப்படும் ஒரு நேர்கோடு AB, ACயை முறையே E, Fஇல் வெட்டுகின்றது. $BCFE$ என்ற நாற்கரத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் ADயின் மேல் Dயிலிருந்து $\frac{7}{45}AD$ தூரத்திலிருக்குமென்று காட்டு.

(5) b உயரமுள்ள ஒரு நேர்வட்ட உருளையின் மேல் அதன் மேற் தளத்தை அடிப்பாகமாகக் கொண்டு a உயர முள்ள ஒரு நேர்வட்டக் கூம்பு ஒன்று அமைக்கப்பட்டுள்ளது. இக்கூட்டுத் திண்மத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் கூம்பின் அடிப் பாகத்திலிருந்தால், $a=\sqrt{6}\,b$ என்று காட்டு.

(6) h உயரமுள்ள ஒரு சீரான நேர்வட்டக் கூம்பு அதே உயரமுள்ள ஒரு நேர் வட்ட உருளையுடன் அவைகளுக்கு ஒரு பொதுவட்டத் தளமிருக்குமாறு இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இக் கூட்டுப் பொருளின் புவியீர்ப்பு மையம் அவற்றின் பொதுத் தளத்திலிருந்து $\frac{5}{16}h$ தூரத்திலிருக்குமென்று காட்டு.

(7) 10 அடி நீளப் பக்கங்களுடைய சதுர அடிப் பாகங் கொண்ட 10 அடி உயரமான ஒரு சீரான திண்மப்பட்டைக் கூம்பின் அடிப்பர்கத்துடன் 10 அடி நீள ஓரமுடைய கனசதுர மொன்று இணைக்கப்பட்டுள்யது. கூட்டுத் திண்மத்தின் புவி யீர்ப்பு மையம் பட்டைக் கூம்பின் உச்சியிலிருந்து $\frac{105}{8}$ அடி தூரத்திலிருக்குமென்று காட்டு.

(8) h உயரமும், r அடிப்பக்க ஆரையுமுள்ள ஒரு சீரான திண்ம நேர்வட்டக் கூம்பு அதே உயரமும் ஆரையுமுள்ள ஒரு உருளையின் உச்சியின் மேல் வைக்கப்பட்டுள்ளது. கூட்டுத் திண்மத்தின் புவியிர்ப்பு மையம் அவற்றின் பொது அச்சின் மேல் அடிப்பாகத்திருந்து $\frac{3h}{4}$ உயரத்திலிருக்குமென்று காட்டு.

(9) ஒரு சீரான உருளையிலிருந்து அதன் அடிப் பாகத் தையே அடிப்பாகமாகக்கொண்ட கூம்பு ஒன்று கடைந்தெடுக் கப்பட விருக்கிறது. எஞ்சியுள்ள பகுதியின் புவியீர்ப்பு மையம் கூம்பின் உச்சியுடன் பொருந்த வேண்டுமாயின் கூம்பின் உயரம் உருளையின் உயரத்தைப் போல் $(2-\sqrt{2})$ மடங்கு என்று காட்டு.

(மதுரை 1969 செப்., 70' ஏப்.)

(10) ஒரு நேர் வட்டக் கூம்பின் வளை பரப்பு அடிப் பரப்பு ஆகியவற்றின்புவியீர்ப்பு மையம் அக் கூம்பின் கன அளவின் புவியீர்ப்பு மையத்துடன் பொருந்த வேண்டுமாயின் கூம்பின்

உச்சிக் கோணம 2 $\sin^{-1}(\frac{1}{3})$ ஆகயிருக்க வேண்டுமென்று காட்டு. (மதுரை பி.எஸ்.ஸி'71 ஏப்.)

(11) ஒரு இரு சமபக்க நேர் கோண முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் ஒவ்வொன்றின் மேலும் வெளிப்புறமாகச் சதுரங்கள் வரையப்பட்டுள்ளன. இவ்வாறு கிடைக்கப் பெறும் உருவத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் கர்ணத்திற்கு வரையப்படும் நடுக்கோட்டை 26 : 1 என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்க வேண்டுமென்று காட்டு.

(12) ஒரு மெல்லிய சீரான கம்பியொன்று ABC என்னும் சமபக்க முக்கோணத்தின் AB, BC என்னும் இரு பக்கங்களும் ACயின் மேல் வரையப்படும் ஒரு அரை விட்டமுமாக அமையுமாறு வளைக்கப்பட்டுள்ளது. அதன் புவியீர்ப்பு மையம் AC யிலிருந்து $\left(\frac{\sqrt{3}-1}{4+\pi}\right) AB$ தூரத்திலிருக்குமென்று காட்டு.

(13) h உயரமும், r அடிப் பக்க ஆரைமுள்ள திண்மக் கூம்பு ஒன்று அதே ஆரையுள்ள ஒரு திண்ம அரைக் கோளத்தின் தள அடிப் பாகத்தின் மேல் பொருத்தப்பட்டுள்ளது. இக் கூட்டுத திண்மத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் அரைக் கோளத்தின் மேற் பரப்பின மையத்திலிருந்து பொது அச்சின் மேல் $\frac{1}{4}\,\frac{5r^2+4hr+h^2}{2r+h}$ தூரத்திலிருக்குமென்று காட்டு.

(14) 6 அடி ஆரையுள்ள ஒரு வட்டத் தகட்டிலிருந்து 12 அங்குல ஆரையுள்ள வட்டப் பகுதி வெட்டியெடுக்கப்பட்டுள்ளன. துவாரத்தின் மையம் வட்டத் தகட்டின் மையத்திலிருந்து 3 அடி தூரத்திலிருந்தால், எஞ்சிய பகுதியின் புவியீர்ப்பு மையம் வட்டத் தகட்டின் மையத்திலிருந்து துவாரத்தின் மையம் $\frac{3}{?}$ a தூரத்திலிருக்குமென்று காட்டு.

(17) a ஆரையுள்ள வட்ட வடிவமான ஒரு சீரான தளத் தகட்டில் l ஆரையுள்ள ஒரு வட்ட வடிவமான துவாரமுள்ளது. துவாரத்தின் மையம் வட்டத் தகட்டின் மையத்திலிருந்து c தூரத்திலிருந்தால், தகட்டின் புவியீர்ப்பு மையம் அதன் வட்ட மையத்திலிருந்து $\frac{b^2c}{a^2-b^2}$ தூரத்திலிருக்குமென்று காட்டு.

(18) $3a$ ஆரையுள்ள ஒரு சீரான வட்டத் தகட்டிலிருந்து a ஆரையுள்ள வட்ட வடிவமான பகுதி வெட்டியெடுக்கப் பட்டுள்ளது. எஞ்சிய பகுதியின் புவியீர்ப்பு மையம் வட்டத் தகட்டின் மையத்திலிருந்து $\frac{1}{8}a$ தூரத்திலிருந்தால் துவாரத்தின் மையம் தகட்டின் மையத்திலிருந்து $\frac{4}{3}a$ தூரத்திலிருக்குமென்று காட்டு.

(19) $60°$ உச்சிக் கோணமுடைய ஒரு சீரான நேர் வட்டக் கூம்பிலிருந்து சாத்தியமான அளவில் மீப்பெரு கோளமொன்று கடைந்தெடுக்கப்படுகிறது. எஞ்சிய பகுதியின் புவியீர்ப்பு மையம் கூம்பின் அச்சை $11:20$ என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்கு மென்று காட்டு.

(20) குறுக்கு வெட்டு வட்டமாகவுள்ள l நீளக்கோலொன்று அதன் ஒரு முனையில் பென்சில் போன்று கூம்பு வடிவமாக, கோலின் அச்சின் நீளம் குறையாதவாறு சீவப் பட்டுள்ளது சீவப்பட்ட கூம்பு வடிவத்தின் உயரம் h எனில், கோலின் புவியீர்ப்பு மையம் $\frac{h(4l-3h)}{4(3l-2h)}$ தூரத்திற்கு இடம் பெயர்ந்துள்ளதென்று காட்டு.

(21) a ஆரையுள்ள ஒரு சீரான திண்மக் கோளத்திலிருந்து அதனுடன் தொடுகையிலிருக்குமாறு அமைந்துள்ள x $(<a)$ ஆரையுள்ள கோளப் பகுதி வெட்டியெடுக்கப்படுகிறது. எஞ்சியுள்ள பகுதியின் புவியீர்ப்பு வையம் முக்கோணத்தின் மையத் மையத்திலிருந்து $\frac{x^3}{a^2+ax+x^2}$ தூரத்திலிருக்குமென்று காட்டு. $x = \frac{3}{5}a$ எனில், எஞ்சிய பகுதியின் புவியீர்ப்பு மையம் கோளத்தின் குழிவான பகுதியிலிருக்குமென்று காட்டு.

(22) $5\frac{1}{2}''$ உயரமும், $3''$ விட்டமுமுள்ள ஒரு மூடியில்லாத உருளைக் குவளையின் அடிப் பாகம் அதே உலோகத்திலான தகட்டினால் மூடப்பட்டுள்ளது. குவளையின் புவியீர்ப்பு மையம் அதன் அடிப் பாகத்திலிருந்து $\frac{121''}{50}$ உயரத்திலிருக்குமென்று காட்டு.

(23) 12 செ. மீ. நீளப் பக்கங்களுடைய ABC என்னும் சமபக்க முக்கோண வடிவமான ஒரு தாளின் முனை A யானது பக்கம் BCயின் நடுப் புள்ளியுடன் பொருந்துமாறு மடிக்கப்

பட்ட தாளின் புவியீர்ப்பு மையம் மூலை Aயின் முந்திய நிலையிலிருந்து $\frac{9\sqrt{3}}{2}$செ மீ. தூரத்திலிருக்குமென்று காட்டு.

(24) $ABCD$ என்னும் சதுரத் தாளின் மூலை A யானது சதுரத்தின் மையத்துடன் பொருந்துமாறு மடிக்கப்பட்டுள்ளது. சதுரத்தின் மூலை விட்டம் 12 செ. மீ. என்றால், மடிக்கப்பட்ட தாளின் புவியீர்ப்பு மையம் மூலை c யிலிருந்து $5\frac{3}{4}$ செ. மீ. தூரத்திலிருக்குமென்று காட்டு.

(25) 6 செ. மீ நீளப் பக்கங்களுடைய ABC என்னும் சமபக்க முக்கோணத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் O OBC $\triangle$ நீக்கப்பட்ட பின் எஞ்சிய பகுதியின் புவியீர்ப்பு மையம் A யிலிருந்து $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ செ. மீ. தூரத்திலிருக்குமென்று காட்டு.

(26) Aயில் நேர் கோணமும், $BG=a$ அளவுமுடைய ABC என்னும் இருசம பக்க முக்கோணத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் G. இம் முக்கோணத்திலிருந்து GBC என்னும் பகுதி வெட்டிவெறியப்படுகிறது; எஞ்சிய பகுதியின புவியீர்ப்பு மையம் A யிலிருந்து $\frac{5a}{18}$ தூரத்திலிருக்குமென்று காட்டு.

(27) $ABCD$ என்னும் செவ்வகத்தகடு முறையே w_1, w_2 எடைகளுடன் கூடிய ABC, ADC என்னும் இரு சீரான முக்கோணப் பகுதிகளுடன் அமைந்துள்ளது. E. F என்பன முறையே AB, BC ஆகியவற்றின் நடுப்புள்ளிகள். $\triangle BEF$ நீக்கப்பட்டபின் எஞ்சியுள்ள பகுதியின் புவியீர்ப்பு மையம் செவ்வகத்தின் மூலைவிட்டங்களின் வெட்டுப்புள்ளியிலிருந்தால் $w_1 = w_2$ என்று காட்டு.

(28) a நீளப்பக்கமுடைய ஒரு சதுரத்திலிருந்து, அதன் ஒரு பக்கத்தை அடிப்பக்கமாகக் கொண்ட h உயரமுள்ள இரு சமபக்க முக்கோணம் ஒன்று நீக்கப்பட்டுள்ளது. எஞ்சிய பகுதியின் புவியீர்ப்பு மையம் முக்கோணத்தின் அடிப்பாகத்தின் நடுப்புள்ளியிலிருந்து அதன் உச்சியை நோக்கி $\frac{3a^2 - h^2}{3(2a-h)}$ என்னும் தூரத்திலிருக்குமென்று காட்டு.

(29) ABC என்பது ஒரு மெல்லிய கனமான முக்கோணத் தகடு; AD என்பது அதன் நடுக்கோடு; G அதன் புவியீர்ப்பு மையம். BCக்கு இணையான ஒரு நேர்கோடு AB, ACயை

முறையே E, F இல் வெட்டுகிறது. AEF என்னும் பகுதி நீக்கப் பட்டபின் புவியீர்ப்பு மையம் GDயின் நடுப் புள்ளியிலிருந் தால், $BE = \frac{7-\sqrt{17}}{8} AB$ என்று காட்டுக.

(30) $ABCD$ என்னும் சதுரத்தில் E, F என்பன முறையே BC, CD ஆகிய பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகள். CEF என்ற பகுதி நீக்கப்பட்டபின் எஞ்சிய பகுதியின் புவியீர்ப்பு மையம் சதுரத்தின் மையத்திலிருந்து $\frac{\sqrt{2}}{21} a$ தூரத்திலிருக்குமென்று காட்டு.

(31) ABC என்ற சீரான முக்கோணத் தகட்டின் புவியீர்ப்பு மையம் G. BGC என்னும் பகுதி நீக்கப்பட்டபின் எஞ்சிய பகுதியின் புவியீர்ப்பு மையம் AGயை $5:1$ என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்குமென்று காட்டு.

(32) மெல்லிய உலோகத் தகட்டினல் செய்யப்பட்ட வெற்றுக் கூம்பு வடிவப் பாத்திரத்தின் அடிப்பாகம் மூடப் பட்டுள்ளது. அதன் அடிப்பாகத்திற்கு இணையான ஒரு தளத்தினல் அதன் குத்துயரத்தில் பாதி உயரத்தில் அது குறுக்கே வெட்டப்பட்டு, அதற்கு மேலுள்ள கூம்புப் பகுதி நீக்கப்பட்டுள்ளது மூலக் கூம்பின் அடிப்பக்க ஆரை உயரம் h, சாய்வு உயரம் l எனில், எஞ்சிய பகுதியின் புவியீர்ப்பு மையம் அடியிலிருந்து $\frac{\frac{3}{3}lh}{3l+4r}$ தூரத்திலிருக்குமென்று காட்டு

(33) h உயரமுள்ள ஒரு நேர் வட்டக் கூம்பு அதன் அச்சின் நடுப்புள்ளி வழியே அடிப்பாகத்திற்கு இணையான ஒரு தளத்தினல் வெட்டப்படுகிறது. எஞ்சிய வெட்டுத் துண்டின் புவியீர்ப்பு மையம் அதன் அடிப் பாகத்திலிருந்து $\frac{11}{28} h$ தூரத்தில் இருக்குமென்று காட்டு.

(34) நேர் வட்டத் திண்மக் கூம்பு ஒன்றின் வெட்டுத் துண்டின் உயரம் h அதன் இருவட்ட முனைகளின் ஆரைகள் r_1, r_2; அவற்றின் மையங்கள் முறையே A, B. வெட்டுத் துண்டின் புவியீர்ப்பு மையம் G எனில்,

$$\frac{AG}{GB} = \frac{r_1^2+2r_1r_2+3r_2^2}{3r_1^2+2r_1r_2+r_2^2}$$

என்று காட்டு.

(35) a ஆரையுள்ள ஒரு வட்டத் தகட்டின் ஏதேனுமொரு புள்ளியில் அடர்த்தியானது தகட்டின் மையத்திலிருந்து அப் புள்ளியின் தூரத்திற்கேற்ப மாறுபடுகிறது. அத்தகட்டிலிருந்து ஒரு ஆரையை விட்டமாகக் கொண்ட ஒரு வட்டம் வெட்டியெடுக்கப்படுகிறது. எஞ்சிய பகுதியின் புவியீர்ப்பு மையம் தகட்டின் மையத்திலிருந்து $\frac{6a}{15\pi - 10}$ தூரத்திலிருக்குமென்று காட்டு.

(36) a ஆரையுள்ள ஒரு வட்டத் தகட்டின் ஏதேனுமொரு புள்ளியில் அடர்த்தியானது தகட்டின் மையத்திலிருந்து அப் புள்ளியின் தூரத்திற்கேற்ப மாறுபடுகிறது. அத் தகட்டிலிருந்து தகட்டின் மையம் வழியே செல்லுகின்ற b ஆரையுள்ள ஒரு வட்டப் பகுதி வெட்டியெடுக்கப்பட்டால், எஞ்சிய பகுதியின் புவியீர்ப்பு மையம் தகட்டின் மையத்திலிருந்து $\frac{6b^4}{15\pi a^3 - 10b^3}$ தூரத்திலிருக்குமென்று காட்டு.

(37) a ஆரையுள்ள ஒரு கோளத்தின் ஏதேனுமொரு புள்ளியில் அடர்த்தியானது கோளமையத்திலிருந்து அப்புள்ளியின் தூரத்திற்கேற்ப மாறுபடுகிறது. அக்கோளத்திலிருந்து அதன் ஆரையை விட்டமாகக் கொண்ட கோளமொன்று வெட்டியெடுக்கப் படுகிறது. எஞ்சிய பகுதியின் புவியீர்ப்பு மையம் கோள மையத்திலிருந்து $\frac{4}{63}a$ தூரத்திலிருக்கு மென்று காட்டு.

(38) மெல்லிய சீரான கோலொன்று, ஒரு நுனியில் அரை வட்டக் கைப்பிடியுடன் கூடிய கைத்தடி போன்று வளைக்கப் பட்டுள்ளது. அதன் நேரான பகுதி ABயானது $2l$ நீளத்துடனும் அரைவட்டப் பகுதி BCயானது a $(<l)$ ஆரையுடையதாகவு முள்ளன. அரை வட்டக் கைப்பிடியின் முனைகளான B, Cயைச் சேர்க்கும் நேர்கோடு ABக்குச் செங்குத்தாகவுள்ளது. கோலானது ஒரு கிடைத்தள மேசையின்மீது முனை Cயால் தாங்கப்பட்டுத் தொங்குகிறது. கோலின் நேரான பகுதி நிலைக் குத்துடன் θ கோணச் சாய்விலிருந்தால்,

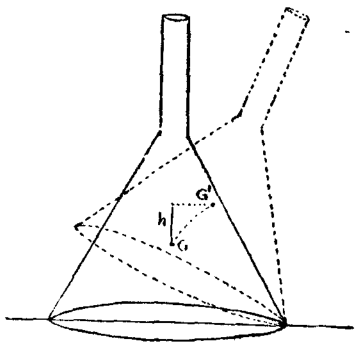
$$\tan\theta = \frac{a(\pi a + 4l)}{2(l^2 - a^2)}$$

என்று காட்டு.

8. நிலைப்புத்தன்மை

(STABILITY)

ஒரு கிடைத்தள மேசையின் மேல் ஒரு புனலை அதன் வட்ட மூக அடிப்பாகம் மேசையின் மேல் தொடுகையிலிருக்குமாறு வைக்கவும். இப்போது புனலைச் சிறிது அசைத்தாலும் அது தன்னிலை பிறழாது முன்னிருந்த நிலையிலேயே யிருப்பதைக் காணலாம். இப்பொழுது, புனலின் அடிப்பக்க ஓரத்தின் ஒரு

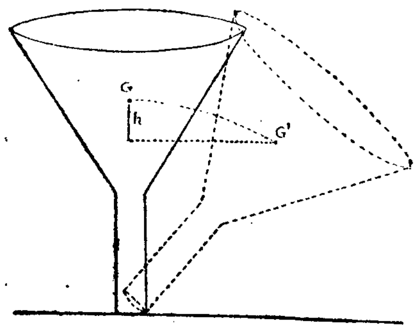


படம் 219

புள்ளிமட்டும் மேசையின் மேல் தொடுகையிலிருக்குமாறு புனல் காம்பின் உச்சியை ஒரு விரலால் தள்ளவும். இவ்வாறு தூக்கிய நிலையில், புனலின் புவியீர்ப்பு மையம் முன்னிருந்த நிலையை விட சற்று உயர்ந்திருப்பதைக் காணலாம். இப்பொழுது புனலை விட்டுவிட்டால் புனல் முன்னிருந்த நிலைக்குத் திரும்பி விடுவதைக் காணலாம். இவ்வாறு, சமநிலையிலிருக்கும் ஒரு பொருளானது அதன் சமநிலையிலிருந்து சிறிதளவு அசைக்கப் பட்டபோதும் மீண்டும் தன்னுடைய மூல நிலைக்கே திரும்பு மானால், அப்பொருள் உறுதிச் சமநிலை (stable equilibrium) யிலிருப்பதாகச் சொல்லப்படுகிறது. ஆகவே, உறுதிச் சமநிலை

யிலிருக்கும் ஒரு பொருள் சிறிதளவு அசைக்கப் பட்டால், அதன் புவியீர்ப்பு மையத்தின் நிலை சிறிதளவு உயர்த்தப்படுகிற தென்று அறிகிறோம்.

இப்பொழுது மேசையின் மேல் புனலின் காம்பு தொடுகையி லிருக்குமாறு புனலை நிலைக்குத்தாக வைக்கவும். இப்பொழுது புனல் சம நிலையிலிருக்கும். இச் சமநிலை சற்றுபிறழுமாறு, புனல் காம்பின் நுனியின் ஒரு புள்ளி மேசையின் மேல்

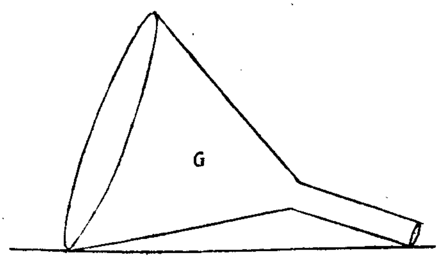


படம் 220

தொடுகையிலிருக்கு மாறு சற்று சாய்ந்த நிலையில் புனலைப் பிடித்துக் கொள்ளவும். இந் நிலையில் புனலின் புவியீர்ப்பு மையத்தின் நிலை முன்னிருந்த நிலையைவிடச் சற்றுத் தாழ்ந்திருப் பதைக் காணலாம். இப்பொழுது புனலைச் சாய்த்தும் பிடித் திருந்த பிடியை விட்டு விட்டால், புனல் முன்னிருந்த நிலைக்குத் திரும்பாது மேசையின் மேல் படுக்கை வசத்தில் விழுந்து விடு வதைக் காணலாம். இவ்வாறு, சம நிலையிலிருக்கும் ஒரு பொருள் அதன் சமநிலையிலிருந்து சிறிது அசைக்கப் பட்ட போது மீண்டும் தன் மூல நிலையை அடையாது மூலநிலையி லிருந்து பெரிதும் மாறுபட்ட நிலையை அடையுமானல், அப் பொருளின் மூலநிலையானது "உறுதியற்ற சமநிலை" (unstable equilibrium) எனப்படும். மேலும், இத்தகைய உறுதியற்ற சம நிலையிலிருக்கும் ஒரு பொருள் சிறிதளவு அசைக்கப்பட்டால் அதன் புவியீர்ப்பு மையத்தின் நிலை சிறிதளவு தாழ்த்தப் படுகிற தென்பதைக் கவனிக்கவும்.

இப்பொழுது புனலை மேசையின்மீது படுக்கை வசத்தில், அதாவது, புனலின் வட்ட விளிம்பின் ஒரு ஓரமும், காம்பின் நுனியும் மேசையின் மேல் தொடுகையிலிருக்குமாறு வைக்க வும். இந் நிலையில் புனலை எப்படி அசைத்தாலும் அது மேசை

யின் மீது உருளுவதைக் காணலாம். இவ்வாறு உருளும்போது எந்த நிலையிலும் அதன் புவியீர்ப்பு மையம் மேசையிலிருந்து ஒரே உயரத்திலேயே யிருப்பதோடு, எப்பொழுதும் அது படுக்கை வசத்திலேயே, அதாவது தன் மூல நிலையிலேயே, இருக்குமென்பதைக் காணலாம். இவ்வாறு, சமநிலையிலிருக்கும் ஒரு பொருள் அதன் நிலையிலிருந்து சிறிது அசைக்கப்பட்ட



படம் 221

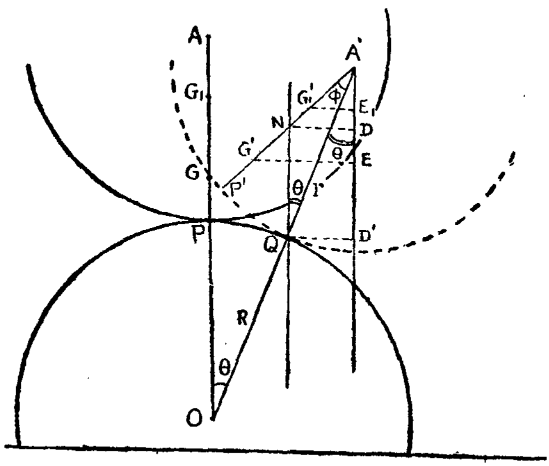
போது, அதன் மூலச் சம நிலை சிறிதும் மாறுபடாத நிலையிலேயே இருக்குமானல் அப் பொருள் நடுநிலைச் சமநிலை (neutral equilibrium) யிலிருப்பதாகச் சொல்லப்படுகிறது. ஆகவே, நடுநிலைச் சம நிலையிலிருக்கும் ஒரு பொருளைச் சிறிது அசைத்தாலும் அதன் புவியீர்ப்பு மையம் மேல் நோக்கியோ அல்லது அல்லது கீழ் நோக்கியோ நகராமல் முன்னிருந்த நிலையிலேயே நிலைத்து நிற்குமென்று அறிகிறோம்.

ஒரு நிலையான பொருளின் மேல் சம நிலையிலிருக்கும் ஒரு கட்டிறுக்கமான திண்மப் பொருளின் நிலைப்புத் தன்மை

ஒரு கனமான கட்டிறுக்கப் பொருள் மற்றொரு கட்டிறுக்கப் பொருளின் மேல் சம நிலையிலிருப்பதாகக் கொள்க. மேலேயுள்ள பொருள் நழுவி விடாமலிருக்குமளவிற்கு பொருட்களிடையே உராய்வு இருப்பதாகக் கொள்க. கீழேயுள்ள பொருள், மேலேயுள்ள பொருள் ஆகிய இரண்டிலும், தொடுகைப் புள்ளி Pயைச் சுற்றியுள்ள பரப்புக்கள் முறையே O, Aயை மையங்களாகவும், R, r ஐ ஆரங்களாகவும் கொண்ட கோளங்களின் மேற் பரப்புக்களின் பகுதிகளெனக் கருத்துக. G என்பது மேலேயுள்ள பொருளின் புவியீர்ப்பு மையம்.

சம நிலையில் G யானது நிலைக்குத்தாக நிற்கும் OA என்னும் மையக் கோட்டின் மேலிருக்கும். இப்பொழுது மேலேயுள்ள பொருளைக் கீழேயுள்ள பொருளின் மீது சிறிது நகர்த்தவும். A^1, P^1, G^1 என்பன முறையே A, P, G, ஆகியவற்றின் புதிய நிலை

களெனக் கொள்க. Q என்பது புதியதொடு புள்ளி. Q வழியே வரையப்படும் நிலைக்குத்துக் கோடு A^1G^1ஐ Nஇல் சந்திக்கட்டும். மேலேயுள்ள பொருள் நகர்த்தப்பட்டதன் காரணமாக, அதன் நிலைக்குத்து ஆரை θ கோணத்தில் திரும்பியுள்ளதாகக் கொள்க. எனவே, $\angle POQ = \theta$; $\angle P^1A^1Q = \phi$ என்க. வில் PQ = வில் P^1Q ஆகையால், $R\theta = r\phi$ ஆகும்.



படம் 222

இப்பொழுது மேலேயுள்ள பொருள் மீண்டும் அதன் மூல நிலைக்குத் திரும்ப வேண்டுமானால் புவியீர்ப்பு மையத்தின் புதிய நிலை G^1 இப்போதைய தொடு புள்ளி வழி நிலைக்குத்துக் கோடாகிய QNக்கு இடது புறமிருக்க வேண்டும்; மேலேயுள்ள பொருள் கீழேயுள்ள பொருள் மீது உருண்டு கீழே விழ வேண்டுமானால் G^1 ஆனது QNக்கு வலது புறமிருக்க வேண்டும். அதாவது‘ G^1 ஆனது QNக்கு இடப் புறமாகவோ, வலது புறமாகவோ இருப்பதற்கேற்ப மேலேயுள்ள பொருளின் சம நிலை உறுதிச் சம நிலையாகவோ, உறுதியற்ற சம நிலையாகவோ யிருக்கும். A^1 வழியே செல்லும் நிலைக்குத்துக் கோட்டிற்கு G^1E, ND என்ற செங்குத்துக் கோடுகள் வரைக. G^1 ஆனது QNக்கு இடது பக்கமிருந்தால் $G^1E>ND$ ஆகவும், வலது பக்கமிருந்தால் $G^1E<ND$ ஆகவுமிருக்கும். ஆகவே, $G^1E \gtrless ND$ என்பதற்கேற்ப சம நிலை உறுதிச் சம நிலையாகவோ, அல்லது உறுதியற்ற சம நிலையாகவோயிருக்கும்.

$$\text{ஆனால் } ND = QD^1 = r\sin\theta.$$

$$G^1E = A^1G^1\sin(\theta+\phi)$$

$$PG = h \text{ எனில், } A^1G^1 = A^1P^1 - G^1P^1 = (r-h)$$

∴ மேலேயுள்ள பொருள் உறுதிச் சம நிலையிலோ அல்லது உறுதியற்ற சம நிலையிலோ இருக்க வேண்டுமாயின்

$$(r-h)\sin(\theta+\phi) \gtrless r\sin\theta \text{ ஆகயிருக்க வேண்டும்.}$$

θ-ம், $(\theta+\phi)$ம் மிகச் சிறியனவாகயிருப்பதால், $\sin(\theta+\phi)$, $\sin\theta$ ஆகியவற்றை முறையே $(\theta+\phi)$, θ ஆகிய எல்லை மதிப்புக்களாக மாற்றி எழுதலாம்.

$$\therefore (r-h)(\theta+\phi) \gtrless r\theta$$

அதாவது, $\dfrac{r-h}{h} \gtrless \dfrac{\theta}{\theta+\phi}$

ஆனால், $R\theta = r\phi$ ஆகையால்

$$\frac{\theta}{\phi} = \frac{r}{R}$$

$$\frac{\theta}{\theta+\phi} = \frac{r}{R+r}$$

எனவே, மேலேயுள்ள பொருள் உறுதிச் சமநிலையில் அல்லது உறுதியற்ற சமநிலையிலிருக்க வேண்டுமாயின்

$$\frac{r-h}{r} \gtrless \frac{r}{R+r} \text{ ஆகயிருக்க வேண்டும்.}$$

அதாவது, $(R+r)(r-h) \gtrless r^2$

$$Rr - h\ (R+r) + r^2 \gtrless r^2$$

$$Rr \gtrless h\,(R+r)$$

$$\frac{Rr}{R+r} \gtrless h$$

$$\frac{R+r}{Rr} \lessgtr \frac{1}{h}$$

$$\frac{1}{r}+\frac{1}{R} \lessgtr \frac{1}{h}$$

ஆகவே, $\frac{1}{r}+\frac{1}{R} \lessgtr \frac{1}{h}$க்கேற்ப சமநிலை உறுதியாகவோ அல்லது உறுதியற்றதாகவோயிருக்கும்.

அதாவது, $\frac{1}{h} > \frac{1}{r}+\frac{1}{R}$ எனில் மேலேயுள்ள பொருள் உறுதிச் சமநிலையிலும், $\frac{1}{h} < \frac{1}{r}+\frac{1}{R}$ எனில், மேலேயுள்ள பொருள் உறுதியற்ற சமநிலையிலுமிருக்கு மென்றறிக.

மாதிரி 160 ஒரு அரைக்கோளம் ஒரு நிலையான சம ஆரையுள்ள கோளத்தின் மேல் சமநிலையிலுள்ளது. அரைக்கோளத்தின் தட்டைப்பரப்பு கோளத்தின் மேலிருக்கும்போது சமநிலை உறுதியானதாகவும், வளைபரப்பு கோளத்தின் மேலிருக்கும் போது சமநிலை உறுதியற்றதாகவுமிருக்கு மென்று காட்டு.

தீர்வு

r என்பது பொது ஆரையென்க. அரைக்கோளத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் தட்டைப் பரப்பின் மையத்திலிருந்து $\frac{3}{8}r$ ஆழத்திலிருக்கும். எனவே, தட்டைப்பரப்பு கோளத்தின் மேலிருக்கும்போது $h=\frac{3}{8}r$ ஆகும். இங்கு $R=r$ அரைக்கோளத்தின் தட்டைப் பாகம் கோளத்தின் மேலிருப்பதால், தொடு புள்ளியைச் சுற்றியுள்ள பரப்பை ∞ ஆரையுள்ள ஒரு கோளத்தின் மேற் பரப்பின் பகுதியாகக் கொள்ளலாம். அதாவது, $r=\infty$.

$$\therefore \frac{1}{R}+\frac{1}{r}=\frac{1}{r}+\frac{1}{\infty}=\frac{1}{r}+O=\frac{1}{r}$$

$$\frac{1}{h}=\frac{8}{3r}>\frac{1}{r}$$

அதாவது, $\frac{1}{h}>\frac{1}{R}+\frac{1}{r}$ ஆகையால், அரைக்கோளம் உறுதிச் சமநிலையிலிருக்கும்,

அரைக்கோளத்தின் வளைபரப்பு கோளத்தின் மேலிருந்தால்,

$$r=r;\ R=r;\ h=r-\frac{3r}{8}=\frac{5r}{8}$$

$$\therefore \frac{1}{R}+\frac{1}{r}=\frac{1}{r}+\frac{1}{r}=\frac{2}{r};$$

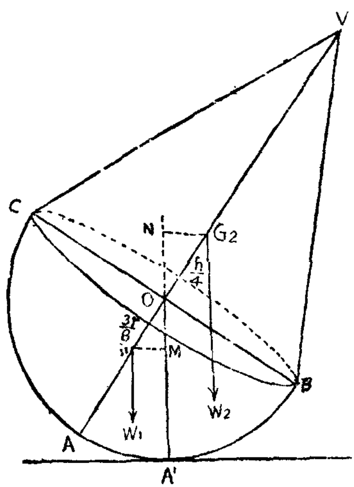
$$\frac{1}{R}=\frac{8}{5r}<\frac{2}{r}$$

அதாவது $\frac{1}{h}<\frac{1}{R}+\frac{1}{r}$. எனவே, அரைக்கோளம் உறுதியற்ற சமநிலையிலிருக்கும்.

மாதிரி 161 ஒரு திண்ம அரைக்கோளமும், அதன் தட்டைப் பக்கத்தின் மேல் நிற்கும் சம ஆரையுள்ள அடிப்பக்கத்துடன் கூடிய ஒரு கூம்பும் சேர்ந்த கூட்டுத் திண்மப் பொருளொன்று ஒரு கிடைத்தள மேசையின்மேல் அரைக்கோளத்தின் வளைபரப்பு தொடுகையிலிருக்குமாறு வைக்கப்படுகிறது: சமநிலை உறுதியானதாகயிருக்க வேண்டுமாயின் கூம்பின் அதிகபட்ச உயரத்தைக் காண்க. (சென்னை 1966 ஏப்.)

தீர்வு

CAB என்ற அரைக்கோளமும், VCB என்ற கூம்பும் சேர்ந்த கூட்டுப் பொருளின் பொது அடிப்பாகமாகிய BCயின் மையம் O ஆகும். இப்பொழுது வட்ட அடிப்பாகத்தின் ஆரை r என்க.



படம் 223

எனவே, அரைக் கோளத்தின் ஆரை r ஆகும். h என்பது கூம்பின் உயரம். G_1, G_2 என்பன முறையே அரைக்கோளம், கூம்பு ஆகியவற்றின் புவியீர்ப்பு மையங்களெனில், $OG_1=\frac{3r}{8}$, $OG_2=\frac{h}{4}$ ஆகும்.

இக்கூட்டுப் பொருள் இலேசாக அசைக்கப்பட்டதும் மேசையின் மேல் A^1 என்னும் புள்ளியில் தொடுகையிலிருப்பதாகக் கொள்க. A^1 இல் மேசையின் நேர்குத் தெதிர்விசை நிலைக்குத்தாகயிருக்கும். ஆனால், A^1இல் அரைக்கோளத்தின் நேர்குத்துக் கோடு அதன் மையம் O வழியே செல்லுமாகையால் A^1 இல் மேசையின் நேர்குத் தெதிர்விசை O வழியே செல்லும். ஆகவே, சமநிலையானது உறுதியானதாகவோ அல்லது உறுதியற்றதாகவோயிருக்க வேண்டுமாயின் கூட்டுப் பொருளின் புவியீர்ப்பு மையம் A^1Oக்கு இடப்புறமாகவோ, அல்லது வலப்புறகாகவோயிருக்க வேண்டும்; அதாவது Oக்குக் கீழேயோ அல்லது மேலேயோ இருக்க வேண்டும். ஆகவே, இக்கூட்டுப் பொருள் உறுதிச் சமநிலையிலும், கூம்பின் உயரப் அதிகபட்ச உயரம் கொண்டதாயுமிருக்க வேண்டுமாயின் பொருளானது உறுதிச் சமநிலையின் எல்லையிலிருக்க வேண்டும். அதாவது, கூட்டுப் பொருளின் புவியீர்ப்பு மையம் Oவில் இருக்க வேண்டும். அதாவது, W_1, W_2 என்பன முறையே அரைக்கோளம், கூம்பு ஆகியயற்றிள் எடைகளெனில்,

$$\frac{G_1O}{OG_2}=\frac{W_2}{W_1}$$

ஆகும். w என்பது ஒரு அலகு கன அளவின் எடையெனில்,

$$W_1=\frac{2}{3}\pi r^3 w;\quad W_2=\frac{1}{3}\pi r^2 hw$$

$$\therefore \frac{\frac{3r}{8}}{\frac{h}{4}}=\frac{\frac{1}{3}\pi r^2 hw}{\frac{2}{3}\pi r^3 w}$$

$$\frac{3r}{2h}=\frac{h}{2r}$$

$$h^2=3r^2$$

$$h=\sqrt{3}r.$$

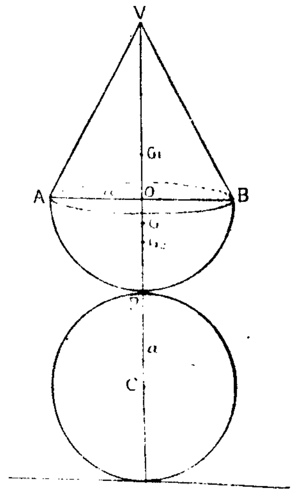
கூம்பின் அதிகபட்ச உயரம் $\sqrt{3}r$ ஆகும்.

மாதிரி **162** a ஆரையுள்ள வட்ட அடிப்பாகமும், h உயரமும் கொண்ட ஒரு திண்ம நேர்வட்டக் கூம்பு அதே உலோகத்தால் செய்யப்பட்ட a ஆரையுள்ள திண்ம அரைக்கோய்த்

துடன் இரு திண்மங்களின் வட்ட முகப்புகளும் தொடுகையி லிருக்குமாறு பொருத்தப்பட்டுள்ளது. இக்கூட்டுப் பொரு ளானது a ஆரையுள்ள ஒரு நிலையான உராய்வுடைய கோளத் தின் உச்சியில் சமநிலையில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. சமநிலை உறுதியானதாவென சோதிக்கவும்.

தீர்வு

$VAPB$ என்பது VAB என்ற கூம்பும், APB என்ற அரைக் கோளமும் சேர்ந்த கூட்டுப் பொருள். O என்பது அவற்றின் பொது வட்ட முகப்பின் மையம். a என்பது இப்பொது வட்ட



படம் 224

முகப்பின் ஆரை. h என்பது கூம்பின் உயரம். G_1, G_2, G என்பன முறையே கூம்பு, அரைக் கோளம், கூட்டுப் பொருள் ஆகியவற்றின் புவியீர்ப்புமையங்கள் $\therefore OG_1 = \frac{h}{4}$; $OG_2 = \frac{3a}{8}$

$$\therefore G_2P = \frac{5a}{8}$$

$$\therefore G_1G_2 = G_1O + G_2O$$

$$= \frac{h}{4} + \frac{3a}{8}$$

$$= \frac{2h+3a}{8}$$

ω என்பது ஒரு அலகு கன அளவின் எடையெனில்,

$W_1 =$ கூம்பின் எடை $= \frac{1}{3}\pi a^2 h.\omega$.

$W_2 =$ அரைக் கோளத்தின் எடை $= \frac{2}{3}\pi a^3 \omega$.

$$\frac{G_1G}{GG_2} = \frac{W_2}{W_1} = \frac{\frac{2}{3}\pi a^3\omega}{\frac{1}{3}\pi a^2 h\omega} = \frac{2a}{h}$$

அதாவது, $\dfrac{G_1G_2 - GG_2}{GG_2} = \dfrac{2a}{h}$

$$\frac{G_1G_2}{GG_2} - 1 = \frac{2a}{h}$$

$$\frac{G_1G_2}{GG_2} = 1 + \frac{2a}{h} = \frac{h+2a}{h}$$

$$\therefore GG_2 = \frac{h}{h+2a} . G_1G_2$$

$$= \frac{h}{h+2a} . \frac{2h+3a}{8}$$

$$= \frac{h\,(2h+3a)}{8\,(h+2a)}$$

$$\therefore GP = GG_2 + G_2P$$

$GP = H$ எனில், $H = \dfrac{h\,(2h+3a)}{8\,(h+2a)} + \dfrac{5a}{8}$

$$= \frac{h\,(2h+3a)+5a\,(h+2a)}{8\,(h+2a)}$$

$$= \frac{2h^2 + 8ah + 10a^2}{8\,(h+2a)}$$

$$= \frac{h^2 + 4ah + 5a^2}{4\,(h+2a)}$$

சமநிலை உறுதியானதாகயிருக்க வேண்டுமெனில்,

$$\frac{1}{H} > \frac{1}{R} + \frac{1}{r}$$

இங்கு $R=r=a$. எனவே, சமநிலை உறுதியானதாக இருக்க வேண்டுமெனில்,

$$\frac{4\,(h+2a)}{h^2+4ah+5a^2} > \frac{1}{a}+\frac{1}{a}$$

$$> \frac{2}{a}$$

$$\therefore\ 2ah+4a^2 \quad > h^2+4ah+5a^2.$$

$$O \quad > h^2+2ah+a^2$$

$$> (h+a)^2$$

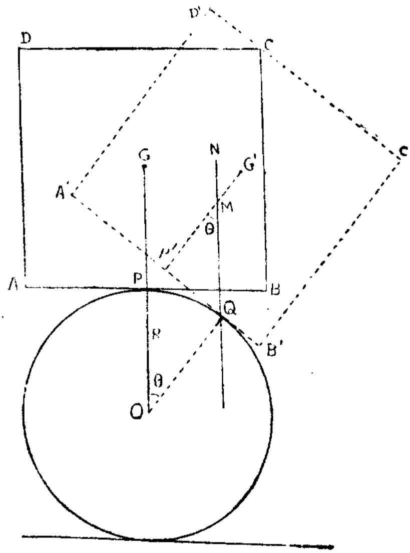
ஆனால் $O > (h+a)^2$ ஆகயிருக்க முடியாதாகையால், சமநிலை உறுதியானதாக யிருகக முடியாது. எனவே, சமநிலை உறுதி யற்றதாகும்.

மாதிரி 163 a நீள ஓரங்களையுடைய ஒரு சீரான கனசதுரப் பெட்டியானது ஒரு கோளத்தின் உச்சியில், கனசதுரத்தின் ஒரு முகப்பின் மையம், தொடுகையில் இருக்குமாறு வைக்கப் பட்டுள்ளது உறுதிச் சமநிலை சாத்தியமாக வேண்டுமாயின் கோளத்தின் குறைந்தபட்ச ஆரை $\frac{a}{2}$ ஆகயிருக்கவேண்டும்.

தீர்வு

$ABCD$ என்னும் கனசதுரப் பெட்டி Oஐ மையமாகவுடைய ஒரு கோளத்தின் மேல் அதன் முகப்பு ABயின் மையம் P, கோளத்தின் உச்சியிலிருக்குமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது. கன சதுரத்தின் மையம் G எனில் OPG என்பது நிலைக்குத்தாக யிருக்கும். கனசதுரமானது சிறிது அசைக்கப்பட்டதால் $A'B'C'D'$ என்னும் புதியநிலையில் கோளத்துடன் Q-வில் தொட்டுக் கொண்டு நிற்கிறது. QN என்பது Qவழியே செல்லும் நிலைக் குத்துக் கோடு. G' என்பது புதியநிலையில் பெட்டியின் மைய மாகும். P'என்பது Pயின் புதியநிலை. QN-ம், $G'P'$-ம் Mஇல் வெட்டிக் கொள்ளுகின்றன. G' என்பது QNக்கு இடது பக்கமோ அல்லது வலதுபக்கமோ இருப்பதற்கேற்ப பெட்டி யானது உறுதிச் சமநிலையிலோ அல்லது உறுதியற்ற சம

நிலையிலோ இருக்கும். சமநிலை உறுதியானதாகவும், கோளத்தின் ஆரை மீச் சிறியதாகவுமிருக்கவேண்டுமாயின், G' ஆனது QN இன் மேலிருக்க வேண்டும். அதாவது, G' ஆனது M இல் இருக்கவேண்டும். $\therefore MP' = G'P' = a/2;$



படம் 225

$\underline{|POQ} = \theta$ என்க. $\therefore \underline{|P'MQ} = \theta$. கோளத்தின் ஆரை R எனில்,

$$P'Q = \text{வில் } PQ = R\theta$$

$$\frac{P'Q}{P'M} = \frac{R\theta}{a/2}$$

அதாவது, $\tan\theta = \dfrac{R\theta}{a/2}$

அல்லது $= \dfrac{R.\theta}{\tan\theta} = \dfrac{a}{2}$

θ சிறியதாகயிருக்கும் போது, $\dfrac{\theta}{\tan\theta} = 1$ ஆகையால், R இன் மிகச்சிறிய மதிப்பு $\dfrac{a}{2}$ ஆகும்.

நிலைப்புத் தன்மைக்கு ஆற்றல் சோதனை (Energy test for Stability)

இயக்கவியல் விதியின்படி இயக்க ஆற்றல், நிலை ஆற்றல் ஆகியவற்றின் மொத்தம் ஒரு மாறிலியாகும். (பார்க்கவும்: இயந்திரவியல் இரண்டாம் பாகம் "இயக் விசையியல்'.—"வேலை, சக்தி, ஆற்றல்"). ஒரு பொருள் சம நிலையிலிருக்கும் போது அதன் இயக்க ஆற்றல் (Kinetic Energy) பூச்சியமாகும். ஆகவே, அப் பொருளின் நிலை ஆற்றல் (Potential Energy) ஒரு மாறிலியாகும். ஆகவே, அதன் நிலையாற்றல் மீப்பெரு மதிப்புடனோ அல்லது மீச்சிறு மதிப்புடனோ இருக்கும்.

இப்பொழுது, சம நிலையிருக்கும் ஒரு பொருள் சிறிதளவு அசைக்கப்பட்ட போது அதன் நிலையாற்றல் ஒரு மாறிலியாக யிருப்பின், அச்சிறு இடப் பெயர்ச்சியின் போது ஒரு வேலையும் செய்யப்படவில்லையாதலின், கற்பித வேலைத் தத்துவத்தின் மறுதலையின்படி பொருளானது சம நிலையிலிருப்பதாக அறிந்து கொள்ளலாம்.

இப்பொழுது, மீப்பெரு நிலையாற்றலுடன் சம நிலையிலிருக்கும் ஒரு பொருள் இலேசாக அசைத்து விடப்படுவதாகக் கொள்வோம். அசைவின் காரணமாகப் பொருளின் நிலையாற்றல் குறைந்து, இயக்க ஆற்றல் அதிகமாவதால் பொருளானது மீப்பெரு நிலையாற்றல் நிலையிலிருந்து வெகு தூரத்திற்குச் சென்றுவிடுமாகையால், மீண்டும் மீப்பெரு நிலையாற்றல் நிலையை அடைய இயலாது போய் விடுகிறது. எனவே. மீப்பெரு நிலையாற்றலுடன் சம நிலை யிலிருக்கும் பொருளின் சம நிலையின் நிலைப்புத் தன்மை உறுதியற்றதாகும்.

மாறாக, மீச்சிறு நிலையாற்றலுடன் சம நிலையிலிருக்கும் ஒரு பொருள் இலேசாக அசைத்து விடப்படுவதாகக் கொள்வோம். பொருளானது மீச்சிறு நிலையாற்றல் நிலையிலிருந்து அசைத்து விடப்படுவதால் அதன் நிலையாற்றல் அசைவின் காரணமாக அதிகமாகும். நிலையாற்றல் அதிகமாவதால் அதன் இயக்க ஆற்றல் குறைய வேண்டும். இது சாத்தியமன்று. எனவே: பொருளானது மீண்டும் மீச்சிறு நிலையாற்றல் நிலைக்கே திரும்பி விடுவதால் அதன் சம நிலையின் நிலைப்புத் தன்மை உறுதியானதாகும்.

ஆகவே. சம நிலையிலிருக்கும் ஒரு பொருளின் நிலைப்புத் தன்மையைக் காண, ஒரு நிலையான கிடைத்தளத்திலிருந்து அப்

பொருளின் புவியீர்ப்பு மையத்தின் உயரம் Zஐ ஏதேனுமொரு சாராமாறி (θ என்க)யின் சார்பலனுகக் குறிப்பிடவும்.

$\frac{dZ}{d\theta} = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலங்களை $\theta = \alpha, \beta, \gamma$, ... என்ற வடிவில் காணவும். பின், $\frac{d^2Z}{d\theta^2}$ ஐக் கணக்கிட்டு அதில் $\theta = \alpha$ஐப் பிரதியிடவும். $\theta = \alpha$ என்ற பிரதியீட்டின் காரணமாக $\frac{d^2Z}{d\theta^2}$ என்பது நேரடையாளமுடையதாகயிருப்பின் $\theta = \alpha$ என்ற மதிப்புக்குரிய சமநிலையானது மீச்சிறு நிலையாற்றல் நிலையைக் குறிப்பிடுமாதலின் பொருளின் உறுதிச் சமநிலையைக் காணலாம்.

இதுபோல் $\theta = \beta$ என்ற பிரதியீட்டின் காரணமாக $\frac{d^2Z}{d\theta^2}$ என்பது எதிரடையாளமுடையதாகயிருப்பின், $\theta = \beta$ என்ற மதிப்புக்குரிய சம நிலையானது மீப்பெரு நிலையாற்றல் நிலையைக் குறிப்பிடுமாதலின் பொருளின் உறுதியற்ற சமநிலையைக் காணலாம்.

பின் வரும் மாதிரிகளைக் கவனிக்கவும்.

மாதிரி 164 சீரான சமமான இரண்டு கோல்கள் அவற்றிற்கிடையேயுள்ள கோணம் α ஆகயிருக்குமாறு அவற்றின் முனைகளில் விறைப்பாக இணைக்கப்பட்டுள்ளன. அவை r ஆரையுள்ள ஒரு வழவழப்பான கோளத்தின் மேல் ஒரு நிலைத் தளத்தில் ஓய்விலுள்ளன, கோல்களின் நீளம் $>$ அல்லது $< 4r \operatorname{cosec} \alpha$ என்பதற்கேற்ப அவை உறுதியான அல்லது உறுதியற்ற சமநிலையிலிருக்குமென்று காட்டுக.

தீர்வு

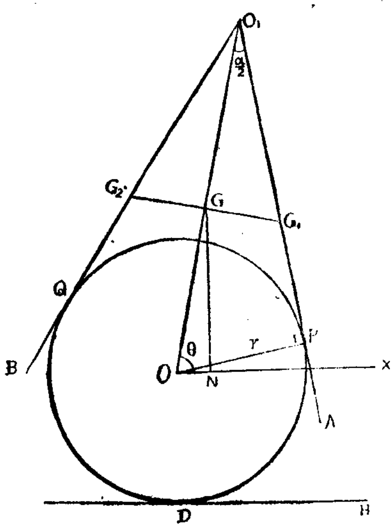
AO_1, BO_1 என்னும் இரு சம நீளக் கோல்கள் O_1 இல் இணைக்கப்பட்டுள்ளன.

$\angle AO_1B = \alpha$.

அவை, Oஐ மையமாகவுடைய ஒரு வழவழப்பான கோளத்தின் மேல் P, Q ஆகிய புள்ளிகளில் தொட்டுக் கொண்டிருக்குமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளன.

G_1, G_2 என்பன முறையே AO_1, BO_1 என்ற கோல்களின் புவியீர்ப்பு மையங்கள். ∴ இணைக்கப்பட்ட இரு கோல்களின் புவியீர்ப்பு மையம் G ஆனது G_1G_2 இன் நடுப் புள்ளியாகும்.

கோலின் நீளம் $2a$ என்க.



படம் 226

அதாவது, $O_1A = O_1B = 2a$ $\angle OO_1A = \angle OO_1B = \frac{\alpha}{2}$

OX என்பது O வழியே வரையப்பட்ட கிடைக் கோடு.

$GN \perp OX$ வரைக. ஆகவே, GN என்பது OX என்னும் நிலையான கிடைக் கோட்டின் மேல் Gயின் உயரமாகும், இதை z என்று குறிப்பிடுக.

$\angle O_1OP = \theta$ என்க.

$$Z = GN$$

$$= OG \text{ Sin } \theta$$

$$= (OO_1 - O_1G) \text{ Sin } \theta$$

$$= \left(OP \operatorname{cosec} \frac{\alpha}{2} - O_1G \cos \frac{\alpha}{2} \right) \sin \theta$$

$$= (r \text{ cosee} \frac{\alpha}{2} - a \cos \frac{\alpha}{2}) \text{ Sin } \theta.$$

$$\because \frac{dZ}{d\theta} = (r \text{ cosce } \frac{\alpha}{2} - a \cos \frac{\alpha}{2}) \cos \theta.$$

$$\frac{d^2 z}{dz^2} = -(r \text{ cosec} \frac{\alpha}{2} - a \cos \frac{\alpha}{2}) \sin \theta.$$

Z இன் மீப்பெரு அல்லது மீச்சிறு மதிப்புக்கு $\frac{dZ}{d\theta} = o.$

$\therefore \cos \theta = O$

அல்லது $\theta = \pi/2.$

$\theta = \frac{\pi}{2}$ ஆகயிருக்கும் போது $\frac{d_2 z}{d\theta^2} >$ அல்லது $< O$ ஆக யிருக்க வேண்டுமாயின்,

$$a \cos \frac{\alpha}{2} > \text{ அல்லது } < r \text{ cosec} \frac{\alpha}{2}$$

அதாவது, $2a \cos \frac{\alpha}{2} >$ அல்லது $< 2r \text{ cosce } \frac{\alpha}{2}$

$$2a \cos \frac{\alpha}{2} > \text{ அல்லது } < \frac{2r}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

அதாவது, $2a \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} >$ அல்லது $< 2r$

$$a \sin \alpha > \text{அல்லது} < 2r$$

$$\text{அல்லது } a > \text{அல்லது} < \frac{2r}{\sin \alpha}$$

$$a > \text{அல்லது} < 2r \text{ cosec } \alpha$$

அதாவது $2o >$ அல்லது $< 4r$ cosec α.

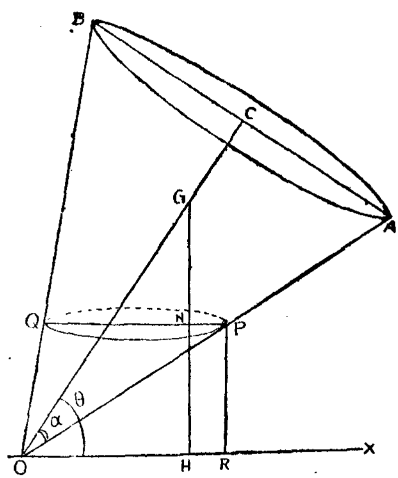
ஆகவே, கோலின் நீளம் $>$ அல்லது $< 4r$ cosec α என்பதற் கேற்ப பொருளானது உறுதியான அல்லது உறுதியற்ற சமநிலை யிலிருக்கும்.

மாதிரி 165 h உயரமும், 2α உச்சிக் கோணமுடைய ஒரு துவாரத்தினுள் அதன் அச்சுநிலைக் குத்தாகயிருக்குமாறு ஒய்வி

லுள்ளது, $16a>3h \sin 2\alpha$ எனில் சமநிலை உறுதியானதென்றும் இது தவிர வேறு இரு உறுதியற்ற சமநிலைகளுள்ளன வென்றும் காட்டுக. $16\,a<3h \sin 2\,\alpha$ எனில் சமநிலை உறுதியற்றதென்றும்) அச்சுநிலைக் குத்தாகவுள்ள நிலைமட்டுமே சமநிலையிலிருக்கக் கூடிய நிலையென்றும் காட்டுக, (சென்னை எம். எஸ்ஸி. 1965)

தீர்வு

OAB என்னும் கூம்பு PQ என்னும் வட்டத்துவாரத்தினுள் சமநிலையிலுள்ளது.



படம் 227

OC = கூம்பின் உயரம் $=h$

α = கூம்பின் அரையுச்சிக்கோணம். a = வட்டத் துவாரத்தின் ஆரை. G = கூம்பின் புவியீர்ப்பு மையம்.

$$\therefore OG=\frac{3h}{4}.$$

OX என்பது O வழியே செல்லும் கிடைக்கோடு. P, Qஐ நிலையான கிடைக்கோடாக எடுத்துக்கொள்க.

$Z = PQ$க்கு மேலே Gயின் உயரம்

$= GN$

$= GO - PR$

OX உடன் கூம்பின் அச்சின் சாய்வு θ எண்க.

$\therefore GA = AG \sin\theta = \dfrac{3h}{4}\sin\theta.$

$PH = OP\sin(\theta - \alpha)$

$\triangle OPQ$வில் $\angle POQ = 2\alpha$. $\angle OPB = (\theta - \alpha)$

$\therefore \angle OQP = 180^\circ - 2\alpha - (\theta - \alpha)$

$= 180^\circ - (\theta + \alpha)$

$$\frac{OP}{\sin\angle OQP} = \frac{PQ}{\sin\angle POQ}$$

$$\frac{OP}{\sin[180^\circ - (\theta + \alpha)]} = \frac{2a}{\sin 2\alpha}$$ ($PQ =$ துவாரத்தின் விட்டம்)

$$\frac{OP}{\sin(\theta + \alpha)} = \frac{2a}{\sin 2\alpha}$$

$$\therefore OP = \frac{2o\sin(\theta + \alpha)}{\sin 2\alpha}$$

$\because PR = OP\sin(\theta - \alpha)$

$$= 2a\frac{\sin(\theta + \alpha)}{\sin 2\alpha}.\ \sin(\theta - \alpha)$$

$$= \frac{\sin 2\alpha}{2a}(\sin^2\theta - \sin^2\alpha)$$

$\therefore Z = GH - PR$

$$= \frac{3h}{4}\sin\theta - \frac{2a}{\sin 2\alpha}(\sin^2\theta - \sin^2\alpha)$$

$$\therefore \frac{dz}{d\theta} = \frac{3h}{4}\cos\theta - \frac{2a}{\sin 2\alpha}(\sin 2\theta)$$

$$\frac{d^2z}{d\theta^2} = -\frac{3h}{4}\sin\theta - \frac{4a}{\sin 2\alpha}\cos 2\theta$$

சமநிலைக்கு $\frac{dz}{d\theta}=o$. ஆகையால்,

$$\frac{3h}{4}\cos\theta-\frac{2a}{\sin 2\alpha}z\sin\theta\cos\theta=o$$

$$\cos\theta\left[\frac{3h}{4}-\frac{4a}{\sin 2\alpha}.\sin\theta\right]=o.$$

$$\cos\theta\left[3h-\frac{16a}{\sin 2\alpha}\sin\theta\right]=o.$$

$\therefore \cos\theta=o$ அல்லது $3h\sin 2\alpha=16a\sin\theta$.

$\therefore \theta=\frac{\pi}{2}$ அல்லது $\sin\theta=\frac{3h\sin 2\alpha}{16a}$.

ஆகவே, $\frac{3h\sin 2\alpha}{16a}<1$ எனில் $\sin\theta<1$ ஆகுமாகுமாகையால் இது சாத்தியமான மதிப்பாகும்.

$\therefore 3h\sin 2\alpha<16a$ எனில். $\sin\theta=\frac{3h\sin 2\alpha}{16a}$ என்ற தொடர்பிலிருந்தும், $\sin(180°=\theta)=\frac{3h\sin 2\alpha}{16a}$ என்ற தொடர்பிலிருந்தும் பெறக்கூடிய θஇன் இரு மதிப்புகளுக்குரிய சமநிலைகளும், $\theta=\pi/2$க்குரிய சமநிலையும் ஆக மூன்று சமநிலைகளுள்ளன.

$\theta=\pi/2$ என்பது அச்சு நிலைக்குத்தாகக் கொண்ட சமநிலை. ஏனைய இருசம நிலைகளும் நிலைக்குத்துக்கு இருபுறமும் சாய்ந்த நிலையிலுள்ள சமநிலையாகும்.

$3h\sin\alpha>16a$ எனில் $\theta=\pi/2$ என்பது மட்டுமே ஒரேயொரு சமநிலையைத்தருகின்ற நிலையாகும்.

சமநிலைகளின் தன்மைகள்

$$\frac{d^2z}{d\theta^2}=-\frac{3h}{4}\sin\theta-\frac{4a}{\sin 2\alpha}\cos 2\theta$$

$\theta=\pi/2$ எனில், $\frac{d^2z}{d\theta^2}=-\frac{3h}{4}+\frac{4a}{\sin 2\alpha}$

$$= \frac{-3h\sin 2\alpha + 16a}{4\sin 2\alpha}$$

$\therefore\ 16a > 3h \sin 2\alpha$ எனில் $\frac{d^2Z}{d\theta^2} > O$,

$\therefore\ 16a < 3h \sin 2\alpha$ எனில் $\frac{d^2Z}{d\theta^2} < O$.

$\therefore\ \theta = \frac{\pi}{2}$ ஆகயிருக்கும் போது,

$16a >$ அல்லது $< 3h \sin 2\alpha$ என்பதற்கேற்ப சமநிலை யானது உறுதியுள்ளதாகவோ அல்லது உறுதியற்றதாகவோ யிருக்கும்.

மேலும், $\frac{d^2Z}{d\theta^2} = -\left[\frac{3h}{4}\sin\theta + \frac{4a}{\sin 2\alpha}\cos 2\theta\right]$

$$= -\left[\frac{3h}{4}\sin\theta + \frac{4a}{\sin 2\alpha}(1 - 2\sin^2\theta)\right]$$

$\therefore \sin\theta = \frac{3h\sin 2\alpha}{16a}$ எனில்,

$$\frac{d^2Z}{d\theta^3} = -\left[\frac{3h}{4}\frac{3h\sin 2\theta}{16a} + \frac{4a}{\sin 2\alpha}\left(\frac{1 - 2.9h^2\sin^2 2\alpha}{256\, a^2}\right)\right]$$

$$= -\frac{9h^2\sin 2\alpha}{64a} - \frac{4a}{\sin 2\alpha} + \frac{9h^2\sin^2 2\alpha}{32a\sin 2\alpha}$$

$$= \frac{-9h^2\sin^2 2\alpha - 256a^2 + 18h^2\sin^2 2\alpha}{64a\sin 2\alpha}$$

$$= \frac{9h^2\sin^2 2\alpha - 256a^2}{64a\sin 2\alpha}$$

ஆகவே, $3h \sin 2\alpha < 16a$ எனில் $9h^2 \sin^2 2\alpha < 256a^2$ ஆதலின்

$$\frac{d^2Z}{d\theta^2} < O.$$

$\therefore$ சாய்வாகவுள்ள இருசமநிலைகளும் உறுதியற்றவையாகும்

பயிற்சி 20

(1) a ஆரையுள்ள ஒரு நிலையான கோளத்தின் உச்சியின் மேல் b ஆரையும், w எடையுமுள்ள ஒரு அரைக்கோளக் கிண்ணம் சமநிலையிலுள்ளது. கிண்ணம் வழுக்கிவிடாமலிருக்கு மளவிற்கு கோளமானது உராய்வுடையதாக இருக்கின்றது. கிண்ணத்தினுள்ளே w எடையுள்ள ஒரு சிறு கோளம் வைக்கப் பட்டுள்ளது. $w < W.\frac{a-b}{2b}$ யாக யிருந்தாலன்றி சமநிலை உறுதி யானதாக யிருக்காதென்று காட்டு.

(2) r ஆரையுள்ள ஒரு சீரான திண்ம அரைக்கோளத்தின் தட்டையான அடிப் பக்கத்தின் மேல் அதே உலோகத்தினல் செய்யப்பட்ட அதே அடிப்பக்க ஆரையுள்ள கூம்பு ஒன்று பொருத்தப்பட்டுள்ளது. இக்கூட்டுப் பொருளாது, கூம்பின் அச்சு நிலைக்குத்தாகயிருக்குமாறு R ஆரையுள்ள ஒரு நிலையான கோளத்தின் மேற்பரப்பின் மேல் வைக்கப்படுகிறது. சிறு அசைப்பிலும் உறுதிச் சமநிலையில் இருத்தற்குத் தேவையான கூம்பின் அதிகபட்ச உயரம் $\frac{r}{R+r}(\sqrt{(3R+r)(R-r)}-2r)$ என்று காட்டு.

(3) ஒரு திண்ம நேர்வட்டக் கூம்பு, கொடுக்கப்பட்ட ஆரையுள்ள ஒரு நிலையான, உராய்வுடைய கோளத்தின் மேல் அதன் அடிப்பாகம் இருக்குமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது. உறுதிச் சமநிலை சாத்தியமாக வேண்டுமாயின் கூம்பின் அதிக பட்க உயரம் கோளத்தின் ஆரையைப் போல் நான்கு மடங்கு என்று காட்டு.

(4) ஒரு திண்ம அரைக்கோளத்தின் தட்டை முகப்பின் மேல் அதே ஆரையுள்ள உருளையொன்று பொருத்தப்பட் டுள்ளது. இக்கூட்டுப் பொருளானது ஒரு கிடைத்தளத்தின் மேல் கோளத்தின் மேற்பரப்பு தொடுகையிலிருக்குமாறு வைக் கப்பட்டால், கூட்டுப்பொருள் நடுநிலைச் சமநிலையிலிருக்க உருளையின் உயரமும் ஆரையும் $1 : \sqrt{2}$ என்னும் விகிதத்திலி ருக்க வேண்டுமென்று காட்டு.

(5) r ஆரையுள்ள ஒரு இலேசான கோளம் அதன் உச்சிப் புள்ளியின் மேல் w என்னும் எடையைத் தாங்குகிறது. இது ஒரு பெரிய அரைக்கோளக் கிண்ணத்தினுள்ளே வைக்கப்ப

கிறது. இது உறுதிச் சமநிலையிலிருக்க வேண்டுமாயின் கிண்ணத்தின் அதிகபட்ச ஆரையானது கோளத்தின் ஆரையைப் போல் இரு மடங்கு இருக்க வேண்டுமென்று காட்டு.

(6) ABC என்னும் இரு சமபக்க முக்கோணத்தகடு c இடைவெளியில் கிடைமட்டத்தில் அமைந்துள்ள இரு முளைகளின் மேல் அதன் சம பக்கங்களாகிய ABயும் ACயும் தொடுகையிலிருக்குமாறு ஓய்விலிருக்கிறது. BCயின் Aயிலிருந்து வரையப்படும் AD என்னும் செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம் h. சமநிலையிலிருக்கக் கூடிய மூன்று நிலைகளுள்ளனவென்றும் $h< 3c$ cosec A எனில், அவற்றுள் ADஐ நிலைக்குத்தாகக் கொண்ட சமநிலை மட்டுமே உறுதியானதென்றும் மற்றவை உறுதியற்றவையென்றும் காட்டுக. $h>3c$ cosec A எனில் உறுதி நிலையிலுள்ள ஒரேயொரு சமநிலை மட்டிலுமே உண்டென்று காட்டுக.

(7) h உயரமும் 2α உச்சிக் கோணமுடைய ஒரு சீரான நேர்வட்டக் கூம்பு d இடைவெளியிலுள்ள இழை கிடைத்தள இணையான கிராதிக் கம்பிகளுக் கிடையே அதன் உச்சி கீழ்முகமாகவும் அச்சு நிலைக்குத்தாகவுமிருக்குமாறு வைக்கப்படுகிறது. $h<\frac{4}{3}\ d$ cosec 2α எனில், கிராதிக் கம்பிகளுக்கு இணையான நிலைத்தளத்தில் செய்யப்படுகின்ற சிறு கோண இடப் பெயர்ச்சிகளின்போது சமநிலை உறுதியாகயிருக்குமென்று காட்டுக

(சென்னை எம். எஸ்ஸி. 1968)

(8) a, b என்ற அரையச்சுக்களுடன் கூடிய ஒரு நீள்வட்டத் தகடு, ஒன்றுக்கொன்று நேர்குத்தாக ஒரே நிலைத்தளத்திலமைந்துள்ள OP, OQ என்னும் இரு வழ வழப்பான கோல்களை எப்பொழுதும் தொட்டுக் கொண்டிருக்குமாறு ஒரு நிலைத்தளத்தில் நழுவிக் கொண்டிருக்கிறது. உறுதிச் சமநிலைகளில் தகட்டின் பேரச்சு ஏதாவதொரு கோலுக்கு இணையாகயிருக்குமென்றும், உறுதியற்ற சமநிலையில் அதன் பேரச்சு OPயுடன் θ கோணத்தில் சாய்ந்திருக்குமென்றும்.

$$\sin^2\theta=\frac{a^2\sin^2\alpha-b^2\cos^2\alpha}{a^2-b^2}$$

காட்டுக. α என்பது நிலைக்குத்துடன் OPயின் சாய்வு.

(சென்னை எம். எஸ்ஸி. 1966)

(9) உராய்வுக் கோணத்தைவிடக் குறைவான சாய்விலுள்ள ஒரு உராய்வுடைய சாய்தளத்தின் மேல் ஒரு நீள்வட்ட

உருளையானது அதன் அச்சுக் கிடையாக இருக்குமாறு வைக்கப்படுகிறது. a, b என்பன அதன் நீள்வட்டக் குறுக்கு வெட்டின் அரையச்சுக்கள். சாய் தளத்தின் சாய்வு $\sin^{-1}\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$ ஐவிட அதிகமாயிருபபின் உருளை ஓய்விலிருக்க முடியாதென்றும், தடத்தின் சாய்வு $\sin^{-1}\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$ க்குச் சமமாக இருப்பின் முதல் தோராய மதிப்பிற்கு அது நடுநிலைச் சமநிலையிலிருக்குமென்றும் காட்டுக. (ஐ.ஏ.ஏ.எஸ், 1939)

(10) M பொருண்மையுள்ள சதுரப் பலகையொன்று ஓரே கிடை மட்டத்திலுள்ள இரு வழவழப்பான முளைகளின் மேல் ஒரு நிலைத்தளத்தில் தாங்கப்படுகிறது. முளைகளுக்கிடையேயுள்ய தூரம் a; சதுரத்தின் மூலைவிட்டம் $D\ (>4a)$. ஒரு மூலவிட்டம் நிலைக்குத்தாகவும் அதன் கீழ் முனையில் m என்னும் பொருண்மை இணைக்கப்பட்டுமருந்தால், $4am > M\ (D-4a)$ எனில் சமநிலை உறுதியானதாகயிருக்குமென்று காட்டுக.

(சென்னை எம். எஸ்ஸி. 1963,

(11) ஒரு திண்ம அரைக்கோளத்தின் விளிம்பிலுள்ள ஒரு வழவழப்பான நிலைக்குத்துச் சுவரிலுள்ள ஒரு புள்ளியுடன் ஒரு நூலினால் இணைக்கப்பட்டு, சுவருடன் அரைக்கோளத்தின் வளைபரப்புத் தொடுகையிலிருக்குமாறு அவ்வரைக் கோளம் தாங்கப்படுகிறது. நிலைக்குத்துடன் நூல், அரைக் கோளத்தின் சமதள முகம் ஆகியவற்றின் சாய்வுகள் முறையே θ. ϕ எனில்,

$$\tan\phi = \frac{3}{8} + \tan\theta$$

என்று நிறுவுக.

(12) அச்சு நிலைக்குத்தாகவும், உச்சி குவியத்திற்குக் கீழேயுமிருக்குமாறு அமைந்துள்ள ஒரு பரவளைவின் குவியத்தில் பொருந்தப்பட்டுள்ள ஒரு சிறு வளையத்தின் வழியே செல்லும் ஒரு சீரான வழவழப்பான கோல் அதன் ஒரு முனை பரவளையத்தின் மேலிருக்குமாறு ஓய்விலுள்ளது. பரவளையின் செவ்வகலம் $4a$; கோலின் நீளம் $2c$ ஆகும். $\cos^4\frac{\theta}{2} = \frac{a}{2c}$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலம் பெறப்படுகின்ற θ என்னும் கோணத்தில் கோலானது நிலைக்குத்துடன் சாய்ந்திருந்தால் அது சமநிலையிலிருக்குமென்று காட்டுக.

இந்த நிலையில் சமநிலையின் நிலைப்புத் தன்மையை ஆராய்க.

(சென்னை எம். எஸ்ஸி. 1967)

(சமநிலை உறுதியானது)

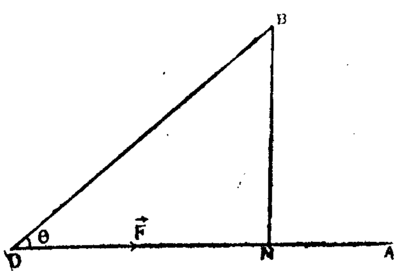
(13) ஒரு செவ்வக வடிவப் படமானது ஒரு ஆணியின் வழியே செல்லும் l நீள நூலின்மூலம் அதன்மேல் ஓரத்தில் c இடைவெளியில் சமச்சீராக அமைந்துள்ள இரு புள்ளிகளில் இணைககப்பட்டுத் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. படத்தின் உயரம் a ஆகும். $la<\sqrt{c^2+a^2}$ எனில் படத்தின் ஒரு பக்கம் சாய்ந்த நிலையில் சமநிலையிலிருக்க முடியாதென்றும், $la<\sqrt{c^2+a^2}$ எனில் படம் சமநிலையிலிருக்கக் கூடிய இரு நிலைகளுள்ளனவென்றும் அவ்விரு சமநிலைகளுமே உறுதியானவையென்றும் காட்டுக.

9. கற்பித வேலை

(VIRTUAL WORK)

வேலை (Work)

ஒரு கனமான பொருளை ஒரு தளத்தின் மீது ஒரு மனிதன் இழுக்கும் போது அல்லது ஒரு கனமான பொருளை ஒரு மனிதன் மேல் நோக்கித் தூக்கும் போது அம் மனிதன் வேலை செய்வதாகக் கூறுகிறோம். முதல் வகையில், பொருளின் இயக்கத்திற்கு எதிராகச் செயல்படும் உராய்வுத் தடை மாறிலி யென்ற தற்கோலின் கீழ், செய்யப்பட்ட வேலையின் அளவு தளத்தினால் செயல்படுத்தப்படும் தடையின் அளவுக்கும், அப்பொருள் அத்தளத்தின் மீது இழுக்கப்பிட்டுள்ள தூரத்திற்கும் விகித சமத்திலிருக்கும். இரண்டாவது வகையில், செய்யப்பட்ட வேலையின் அளவு மேலே உயர்த்தப்பட்ட பொருளின் எடைக்கும், உயர்த்தப்பட்டுள்ள உயரத்திற்கும் விகித சமத்திலிருக்கும். ஆகவே, ஒரு பொருளின் மீது செயல்படுத் ஒரு விசையின் இடுபுள்ளி நகரும் போது அவ் விசை வேலை செய்வதாகக் கூறப்படுகிறது.



படம் 228

$\vec{F}$ என்னும் விசை O என்னும் துகளின்மீது OA என்னும் திசையில் செயல்பட்டு, அத்துகளை B என்னும் நிலைக்கு நகர்த்து

வதாகக் கொள்வோம். இவ்விடப் பெயர்ச்சியின் போது விசை $\vec{F}$ ஆல் செய்யப்பட்ட வேலையின் அளவு W என்பது, அத்துகளின் இடப் பெயர்ச்சி OB, அத்துகள் நகர்ந்துள்ள திசையில் அவ் விசையின் கூறு ஆகியவற்றின் பெருக்கம் என்று வரையறுக்கப் படுகிறது. விசை $\vec{F}$ செயல்படும் திசையாகிய OAக்கும், துகள் நகர்ந்துள்ள திசையாகிய OBக்குமிடையேயுள்ள கோணம் θ எனில், OB திசையில் F இன் கூறு $F \cos \theta$ அளவுடையதாகும்.

ஆகவே, இந்த இடப் பெயர்ச்சியின் போது விசை $\vec{F}$ ஆல் செய்யப்பட்ட வேலையின் அளவு

$$W = F \cos \theta . OB = F . OB \cos \theta = F . OM.$$

ஆகும். ஆனால் $F \cos \theta . OB = F . OB . \cos \theta = \vec{F} . \vec{OB}$ ஆகையால், செய்யப்பட்ட வேலையின் அளவு $\vec{F} . \vec{OB}$ என்ற புள்ளிப் பெருக்கமாகும்.

இரு புள்ளியின் இடப் பெயர்ச்சியானது செயல்படும் விசையின் திசையிலேயே இருக்குமாயின் விசையினால் செய்யப் பட்ட வேலையின் அளவு நேரடையாளமுள்ளதாகவும், விசை யின் திசைக்கு எதிர்த் திசையிலிருக்குமாயின் செய்யப்பட்ட வேலையின் அளவு எதிரடையாளமுடையதாகவும் கொள்ள வேண்டும். ஆகவே, ω என்னும் எடை h உயரத்திற்கு உயர்த்தப்பட்டால், புவியீர்ப்பு விசையினால் செய்யப்பட்ட வேலையின் அளவு $W = -\omega h$ என்றும், h உயரத்திற்குத் தாழ்த் தப்பட்டால் புவியீர்ப்பு விசையால் செய்யப்பட்ட வேலையின் அளவு $W = +\omega h$ என்றும் அறிந்து கொள்க.

$\vec{F}$ என்னும் விசையினால் செயல்படுத்தப்படட O என்னும் துகள் $\vec{F}$ இன் திசைக்குச் செங்குத்துத் திசையில் B என்னும் நிலைக்கு நகருமானால், விசையின் திசைக்கும், இடப் பெயர்ச்சி திசைக்குமிடையேயுள்ள கோணம் நேர் கோணமாயிருப்பதால், அவ் விசையினால் செய்யப்பட்ட வேலையின் அளவு

$$W = \vec{F} . \vec{OB} . = F . OB . \cos 90^\circ = 0.$$

அதாவது, துகள் நகர்ந்துள்ள திசைக்குச் செங்குத்துத் திசையிலுள்ள விசைப் பிரிவினால் வேலையேதும் செய்யப்படவில்லையென்றறிகிறோம்.

தேற்றம்: ஒரு துகளின் மீது செயல்படும் எவ்வெண்ணிக்கையிலுமான விசைகளினால் செய்யப்பட்ட வேலைகளின் மொத்த அளவு அவ்விசைகளின் விளைவு விசையினால் செய்யப்படும் வேலையின் அளவுக்குச் சமமாகும்.

$\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \ldots\ldots, \vec{F}_n$ என்னும் விசைகள் O என்னும் புள்ளியிலுள்ள ஒரு துகளின் மீது செயல்பட்டு, அத் துகளை B என்னும் நிலைக்கு நகர்த்துவதாகக் கொள்வோம். இவ் விசைகளினால் செய்யப்பட்டுள்ள வேலைகளின் அளவுகள் முறையே $\vec{F}_1 . \vec{OB}, \vec{F}_2 . \vec{OB}, \vec{F}_3 \ \vec{OB}, \ldots, \vec{F}_n . \vec{OB}$ ஆகும். இவ்விசைகளின் விளைவு விசை $\vec{F}$ எனில்,

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots + \vec{F}_n$$

ஆகும். இவ் விளைவு விசையினால் செய்யப்பட்ட வேலையின் அளவு $\vec{F} . \vec{OB}$.

$$\therefore \vec{F} . \vec{OB} = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots + \vec{F}_n) . OB$$

$$= \vec{F}_1 . \vec{QB} + \vec{F}_2 . \vec{OB} + \vec{F}_3 \vec{OB} \ldots + \vec{F}_n . OB$$

ஆகவே, விளைவு விசையினால் செய்யப்பட்டுள்ள வேலையின் அளவு = எல்லா விசைகளினாலும் செய்யப்பட்டுள்ள வேலைகளின் மொத்த அளவு ஆகும்.

குறிப்பு O என்னும் புள்ளியிலுள்ள ஒரு துகளின் மீது செயல்படும் $\vec{F}$ என்னும் விசை முதலில் அத்துகளை O-விலிருந்து B என்னும் நிலைக்கும், பின் Bயிலிருந்து C என்னும் நிலைக்கும் நகர்த்தினால், இவ்விரு இடப் பெயர்ச்சிகளின்போதும் அவ் விசையினால் செய்யப்பட்ட வேலைகளின் மொத்த அளவு, அத் துகளை O விலிருந்து Cக்கு நேரடியாக நகர்த்தும் போது அவ் விசையினால் செய்யப்படும் வேலையின் அளவுக்குச் சமமாகும்.

எவ்வாறெனில், இரு இடப் பெயர்ச்சிகளின் போதும் செய்யப் பட்ட வேலைகளின் மொத்த அளவு

$$= \vec{F}. \vec{OB} + \vec{F}. \vec{BC}$$

$$= \vec{F}. \left(\vec{OB} + \vec{BC}\right)$$

$$= \vec{F} \; \vec{OC}$$

= Oவிலிருந்து Cக்கு நேரடியாக நகர்த்தும் போது செய்யப்படும் வேலையின் அளவு.

வேலையின் அலகு

ஒரு அலகு விசை ஒரு துகளின் மீது செயல்பட்டு அத் துகளை அதன் திசையில் ஒரு அலகு தூரத்திற்கு இடம் பெயரச் செய்யுமானால் அவ் விசையினால் செய்யப்பட்ட வேலையின் அளவு ஒரு அலகு வேலையாகும். அ. ரா. வி. முறையில் விசை யின் அலகு ஒரு ராத்தல் என்றும், இடப் பெயர்ச்சியின் அலகு ஒரு அடி என்றும் கொண்டால் வேலையின் அலகு ஒரு அடி-ராத்தல் ஆகும் அதாவது, ஒரு அடி ராத்தல் என்பது ஒரு துகளின் மீது செயல்பட்டு, அத் துகளை அவ் விசையின் திசை யில் ஒரு அடி தூரத்திற்கு நகர்த்தும் போது செய்யப்படும் வேலையின் அளவு ஆகும் இது போல விசையின் அலகு ஒரு ராத்தலி என்றும், இடப் பெயர்ச்சியின் அலகு ஒரு அடி யென் றும் எடுத்துக் கொண்டால், வேலையின் அலகு ஒரு அடி-ராத்தல் ஆகும். ஆனால் ஒரு ராத்தல் என்பது g ராத்தலிகளுக்குச் (32 ராத்தலிகள்) சமமாகையால்,

1 அடி ராத்தல் = g அடி - ராத்தலிகள் = 32 அடி–ராத்தலி கள். செ. கி. வி. முறையில், தனியலகு வேலை யென்பது ஒரு எர்க் (Erg) ஆகும். அதாவது, ஒரு எர்க் என்பது ஒரு டைன் விசை ஒரு துகளின் மீது செயல் பட்டு, அத்துகளை அவ் விசை யின் திசையில் ஒரு சென்டி மீட்டர் தூரத்திற்கு நகர்த்தும்போது செய்யப்படும் வேலையின் அளவு ஆகும். புவியீர்ப்பு அலகு முறையில் ஒரு அலகு வேலை யென்பது ஒரு சென்டி மீட்டர்-கிராம் ஆகும் அதாவது, ஒரு சென்டி மீட்டர் கிராம் என்பது ஒரு கிராம் பொருண்மையை ஒரு சென்டி மீட்டர் நிலைக் குத்து உயரத்திற்குத் தூக்கும் போது செய்யப்படும் வேலையாகும்.

ஒரு எர்க் என்பது மிக மிகச் சிறிய அளவாகயிருப்பதால் 10 மில்லியன் எர்க்குகள் சேர்ந்த ஜௌல் (Joule) என்னும்

அலகு பயன்படுத்தப்படுகிறது. அதாவது, 1 ஜௌல் = 10 மில்லியன் எர்க்குகள் = 10^7 எர்க்குகள். மேலும் ஒரு அடி-ராத்தலி யென்பது 421, 400 எர்க்குகளுக்குச் சமமாகும்.

மாதிரி 166: ஒரு பொருளை ஒரு நேர்கோட்டின் மேல் (3, 2, −1) என்ற நிலையிலிருந்து (2, −1, 4) என்ற நிலைக்கு $\vec{F} = 4j - 3j + 2k$ என்னும் விசையினால் நகர்த்தும்போது செய்யப்படும் வேலையின் அளவைக் காண்க.

தீர்வு :

$$P = 3i + 2j - k,\ Q = 2i - j + 4k \text{ எனில்}$$

இடப்பெயர்ச்சி $\vec{PQ} = (2i - j + 4k) - (3i + 2j - k)$

$$= -i - 3j + 5k$$

செய்யப்பட்ட வேலை $= \vec{F}.\vec{PQ}$

$$= (4i - 3j + 2k).(-i - 3j + 5k)$$

$$= -4 + 9 + 10$$

$= 15$ அலகுகள்.

மாதிரி 167: $4i + j - 3k$, $3i + j - k$ என்னும் விசைகளினால் செயல்படுத்தப்பட்ட ஒரு துகள் $i + 2j + 3k$ என்னும் புள்ளியிலிருந்து $5i + 4j + k$ என்னும் புள்ளிக்கு இடம் பெயருகிறது. விசைகளினால் செய்யப்பட்ட முழு வேலையின் அளவினைக் காண்க.

தீர்வு

$$\vec{F_1} = 4i + j - 3k,\ \vec{F_2} = 3i + j - k$$

இவற்றின் விளைவு விசை $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$

$$= (4i + j - 3k) + (3i + j - k)$$

$$= 7i + 2j - 4k$$

$P = i + 2j + 3k,\ Q = 5i + 4j + k$ எனில்,

இடப்பெயர்ச்சி $= \vec{PQ} = (5i + 4j + k) - (i + 2j + 3k)$

$$= 4i + 2j - 2k$$

∴ மொத்தம் செய்யப் பட்ட வேலை $= \vec{F} \cdot \vec{PQ}$

$= (7i+2j-4k).(4i+2j-2k)$

$= 28+4+8$

$= 40$ அலகுகள்.

மாதிரி 168 5, 3, 1 அலகு அளவுகள் கொண்ட விசைகள் முறையே $6i+2j+3k$, $3i-2j+6k$, $2i-3j-6k$ ஆகிய திசையிக் களின் வழியே ஒரு துகளின் மீது செயல்பட்டு, அத் துகளை $A\,(2i-j-4k)$யிலிருந்து, $B\,(5i-j+k)$க்கு இடம் பெயரச் செய் கின்றன. அவ்விசைகளினால் செய்யப்பட்ட மொத்தவேலை யின் அளவைக் காண்க.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்டுள்ள திசையிக்களின் திசையிலுள்ள திசையி அலகுகள் முறையே, $\dfrac{6i+2j+3k}{\sqrt{36+4+9}} = \dfrac{6i+2j+3k}{7}$,

$$= \frac{3i-2j+6k}{\sqrt{9+4+36}} = \frac{3i-2j+6k}{7},$$

$$\frac{2i-3j-6k}{\sqrt{4+9+36}} = \frac{2i-3j-6k}{7} \text{ அலகு.}$$

எனவே, $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}$ என்பன இத்திசைகளில் முறையே, 5, 3, 1 அலகுகள் கொண்ட விசைகளெனில்,

$\vec{F_1} = \frac{5}{7}(6i+2j+3k)$, $\vec{F_2} = \frac{3}{7}(3i-2j+6k)$,

$\vec{F_3} = \frac{1}{7}(2i-3j-6k)$ ஆகும். இவற்றின் விளைவு விசை $\vec{F}$ எனில்,

$$\vec{F} = \tfrac{1}{7}[30i+10j+15k+9i-6j+18k+2i-3j-6k]$$
$$= \tfrac{1}{7}(41i+j+27k)$$

இடப் பெயர்ச்சி $\vec{AB} = (5i-j+k)-(2i-j-3k)$

$= 3i+0j+4k$

$$\therefore \text{ மொத்த வேலையளவு } = \vec{F} \cdot \vec{AB}$$
$$= \tfrac{1}{7}(41\mathbf{i} + \mathbf{j} + 27\mathbf{k}) \cdot (3\mathbf{i}+0\mathbf{j}+4\mathbf{k})$$
$$= \tfrac{1}{7}(123 + 0 + 108)$$
$$= \frac{231}{7}$$
$$= 33 \text{ அலகுகள்.}$$

கற்பித வேலை (Virtual work)

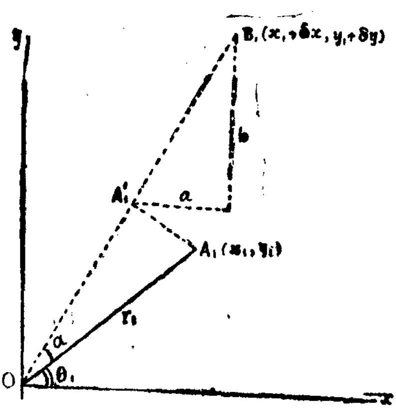
எவ் வெண்ணிக்கையிலுமான பல விசைகள் ஒரு பொருளின் மீது செயல்பட்டு அப்பொருளைச் சிறிது தூரம் இடப் பெயர்ச்சி அடையச் செய்யுமானால், அவ்விசைகளினால் சிறிதளவு வேலை செய்யப்படுகிற தென்பது நாமறிந்ததே. ஆனால், இவ்விசைகளின் தாக்குதல்களுக்குட்பட்ட அப் பொருள் சமநிலையிலிருக்குமானால், அப்பொருள் இடப் பெயர்ச்சி யேதுமடையாதாகையால் அவ்விசைகளினால் வேலை யேதும் செய்யப்படவில்லையென்று தெரிந்து கொள்ளலாம். இவ்வாறு, பலவிசைகளின் தாக்குதல்களுக்குட்பட்டுச் சமநிலை யிலிருக்கும் ஒரு பொருளின் சமநிலை பற்றிய தன்மைகளை நிர்ணயிப்பதற்கு "கற்பித வேலை தத்துவம்" (Principle of Virtual Work) பயன்படுகிறது. பல விசைகளின் தாக்குதல் களுக்குட் பட்ட ஒரு பொருள் சமநிலையிலிருந்த போதிலும், அப்பொருளானது மிக மிகச் சிறிய அளவில் இடப் பெயர்ச்சி யடைவதாகக் கற்பனை செய்து கொண்டு, இக்கற்பனை இடப் பெயர்ச்சியின் காரணமாக அவ்விசைகளினால் செய்யப்படும் கற்பனையான வேலையின் அளவைக் கணக்கிடலாம். அப் பொருள் சமநிலையிலிருக்க வேண்டுமாயின் இக்கற்பனை வேலை யின் அளவு பூச்சியமாக்க வேண்டும். இவ்வாறு ஒரு பொருளில் ஏற்படுவதாகக் கற்பனை செய்து கொள்ளப்படும் இடப் பெயர்ச்சி "கற்பித இடப் பெயர்ச்சி" (Virtual displacement என்றும், இக்கற்பித இடப் பெயர்ச்சியின் காரணமாக அப் பொருளின் மேல் செயல்படுகின்ற விசைகளினால் செய்யப் படுவதாகக் கற்பனை செய்து கொள்ளப்படும் வேலை "கற்பித வேலை" (Virtual Work) என்றும் அழைக்கப்படுகின்றன. இக் கற்பித வேலை தத்துவமானது ஸ்டீவின் (Stevin 1548 – 1620), கலீலியோ (Gallileo 1564 – 1642) ஆகியோரால் விரிவாக்கப் பட்டன. இருப்பினும் கி.பி.1717இல் தான் ஜான் பெர்னௌலி (John Bernoulli) எனபவர் வாரினன் (Varignon) என்பவருக்குத்

தான் எழுதிய கடிதத்தில் (ஜனவரி 26, 1717) இத்தத்துவத்தை அதன் பொதுமையான அமைப்புடன் கூறியிருக்கிருர்.

கற்பித வேலை தத்துவம் (Principle of Virtual work)

பல விசைகளின் தாக்குதல்களுக்குட்பட்டுச் சமநிலையிலிருக்கும் ஒரு பொருளில் அவ்விசைத் தொகுதியின் வடிவியல் நிபந்தனைகளுக்கிசைந்தவாறு ஒரு சிறு கற்பித இடப் பெயர்ச்சி கொடுக்கப்பட்டால், அவ்விசைகளினுல் செய்யப்படும் கற்பித வேலைகளின் மொத்தம் பூச்சியமாகும். மறுதலையாக, பலவிசைகளின் தாக்குதல்களுக்குட்பட்ட ஒரு பொருளில் கொடுக்கப்படுகின்ற எல்லாவித சிறிய கற்பித இடப்பெயர்ச்சிகளுக்கும் அவ்விசைகளினுல் செய்யப்படும் கற்பித வேலைகளின் மொத்தம் பூச்சியமானுல் அவ்விசைகள் யாவும் சமநிலையிலிருக்கும்.

நிறுவல் $F_1, F_2, F_3, \ldots, F_n$ என்பன ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின் மேல் $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ என்னும் புள்ளிகளில் செயல்படும் ஒருதள விசைகள். இவ்விசைகளின் தாக்குதல்களுக்குட்பட்ட அப்பொருள் சமநிலையிலிருப்பதாகக் கொள்க. இப்பொழுது, இவ்விசைகளின் வடிவியல் நிபந்தனைகளுக்கு இசைந்தவாறு அப்பொருளுக்கு ஒரு சிறு இடப்பெயர்ச்சி கொடுக்கவும். ஆனுல் ஒரு பொருளுக்குக் கொடுக்கப்படக்



படம் 229

கூடிய ஒரு சிறு இடப் பெயர்ச்சியின் போது, அப்பொருளிலுள்ள ஏதேனுமொரு அடிப்படைப் புள்ளி O-ஐச் சுற்றி ஒரு சிறு கோணத்தில் சுழலுகின்ற சுழற்சியும், ஏதேனுமொரு திசையில் நகருகின்ற இடப்பெயர்ச்சியும் சேர்ந்து ஏற்படுமென்று நாமறி

வோம். இச்சுழற்சி மையத்தை ஆதியாகக் கொண்டு Ox, Oy என்னும் செங்குத்து அச்சுக்களையெடுத்துக் கொள்க. ஆகவே, அப்பொருளின் மீது செயல்படும் ஒவ்வொரு விசையினாலும் அப்பொருளானது O-ஐ மையமாகக் கொண்டு ஒரு சிறு சுழற்சியையும், பொருள் நகரும் திசையில் சிறிதளவு இடப் பெயர்ச்சியும் பெறுகிறது. இச்சிறு இடப் பெயர்ச்சியை Ox, Oy ஆகிய திசைகளில் கூறுகளாகப் பிரிக்கலாமாகையால், ஒவ்வொரு விசையின் தாக்குதலின் காரணமாகவும் அப்பொருள் O-ஐ மையமாகக் கொண்ட ஒரு சிறு சுழற்சியையும் Ox, Oy ஆகிய திசைகளுக்கு இணையான சிறு இடப் பெயர்ச்சிகளையும் பெறுகிறது. மேலும் பொருளானது கட்டிறுக்கமானதாகையால், எல்லாவிசைகளின் சுழற்சியும் இடப் பெயர்ச்சிகளும் சம அளவுடையதாகயிருக்கும். O-வில் ஏற்படும் சுழற்சிக் கோணம் α என்றும், Ox, Oy ஆகிய திசைகளுக்கு இணையான இடப் பெயர்ச்சிகளை முறையே a, b என்றும் கொள்க. F. செயல்படுகின்ற இடுபுள்ளி A_1 இன் அச்சுத் தூரங்கள் (x_1, y_1) என்று கொள்க. O-ஐத் துருவமாகவும், Oxஐத் தொடக்கக் கோடாகவும் கொண்டு இதன் துருவ ஆயத் தொலைகள் (r_1, θ_1) என்க.

$$\therefore x_1 = r_1 \cos\theta_1,\ y = r_1 \sin\theta_1.$$

O-வில் αகோணத்தில் ஏற்படும் சுழற்சியின் காரணமாக A_1 என்ற புள்ளி A'_1 என்ற நிலைக்கு மாறுகிறது; பின்பு, Ox, Oy ஆகிய திசைகளில் ஏற்படுகின்ற a, b என்னும் இடப் பெயர்ச்சிகளின் காரணமாக A'_1 என்ற நிலை B_1 என்ற நிலையை அடைகிறது. அதாவது, பொருளுக்குக் கொடுக்கப் பட்ட கற்பித இடப் பெயர்ச்சியின் காரணமாக A_1 என்னும் இடு புள்ளி B_1 எனினும் நிலையை அடைகிறது.

$$B_1 = (x_1 + \delta x,\ y_1 + \delta y) \text{ எனில்,}$$

$$x_1 + \delta x = r_1 \cos(\theta_1 + \alpha) + a,$$

$$y_1 + \delta y = r_1 \sin(\theta_1 + \alpha) + b.$$

அதாவது, $x_1 + \delta x = r_1 (\cos\theta_1 \cos\alpha - \sin\theta_1 \sin\alpha) + a$

ஆனல் $\alpha \to o$ ஆகும் போது, $\cos\alpha \to 1$, $\sin\alpha \to \alpha$.

$$\therefore x_1 + \delta x = r_1 (\cos\theta_1 - \alpha \sin\theta_1) + a$$

$$= r_1 (\cos\theta_1 - \alpha \sin\theta_1 + a$$

$$= x_1 - \alpha y_1 + a.$$

$$\therefore \delta x \quad = a - \alpha\, y_1.$$

$$y_1+\delta y = r_1(\sin\theta_1\cos\alpha+\cos\theta_1\sin\alpha)+b$$
$$= r_1(\sin\theta_1+\alpha\cos\theta_1)+b$$
$$= r_1\sin\theta_1+\alpha\, r_1\cos\theta_1+b$$
$$= y_1+\alpha\, x_1+b$$
$$\therefore \delta y = b+\alpha\, x_1$$

X_1, Y_1 என்பன Ox, Oy திசைகளுக்கு இணையான திசைகளில் F_1 என்ற விசையின் பிரிவுகளெனில்,

F_1ஆல் செய்யப்பட்ட கற்பித் வேலை$=X_1$, Y_1 ஆகிய விசைப் பிரிவுகளினுல் செய்யப்பட்ட கற்பித வேலைகளின் மொத்தம்

$$= X_1\,\delta x+Y_1\,\delta y.$$
$$= X_1(a-\alpha y_1)+Y_1(b+\alpha x_1)$$
$$= aX_1+bY_1+\alpha(x_1Y_1-y_1X_1)$$

இதுபோல் மற்ற எல்லா விசைகளினுலும் செய்யப்பட்ட கற்பித வேலைகளின் மொத்தம் $\delta W=a\sum X_1+b\sum Y_1+\alpha\sum(x_1Y_1-y_1X_1)$ ஆனல் எல்லா விசைகளும் சமநிலையிலிருப்பதால்,

$$\sum X_1=o,\ \sum Y_1=o,\ \sum(x_1Y_1-y_1X_1)=o$$

என்று நாமறிவோம்.

$$\therefore \delta W=a(o)+b(o)+\alpha(o)$$
$$=o.$$

அதாவது, எல்லா விசைகளின் கற்பித வேலைகளின் மொத்தம் பூச்சியமாகும்.

மறுதலை

எல்லா விசைகளினுலும் செய்யப்பட்ட கற்பித வேலைகளின் மொத்தம் பூச்சியமாயின், பொருளானது சமநிலையிலிருக்கு மென்று நிறுவ வேண்டும். கற்பித வேலைகளின் மொத்தம்$=$ $\delta W=a\sum x_1+b\sum Y_1+\alpha(x_1Y_1-y_1X_1)=o$. இத்தொடர்பானது a, b, α ஆகியவற்றின் எல்லா மதிப்புக்களுக்கும் உண்மையாகும். எனவே, $b=o$, $\alpha=o$, $a\neq o$ என்று கொள்க. அதாவது, கற்பித இடப் பெயர்ச்சியின் காரணமாகப் பொருளானது சுழற்சி ஏதுமின்றி Ox திசைக்கு இணையான திசையில் மட்டும் நகர்வதாகக் கொள்க.

$$\therefore o\sum X_1 = O$$

அல்லது, $\sum X_1 = O$

இதுபோல் $a=o,\ \propto=o,\ b\neq o$ என்று கொண்டால், $\sum Y=O$. என்றும், $a=o,\ b=o,\ \propto\neq O$ என்று கொண்டால் $\sum(x_1Y_1-y_1X_1)=o$ என்று காணலாம். ஆகவே, செயல்படும் விசைகளினால் செய்யப்படும் கற்பித வேலைகளின் மொத்தம் பூச்சியமானால்,

$$\sum X_1=O\ \sum Y_1=O,\ \sum(x_1Y_1-y_1X_1)=O$$

என்று காண்கிறோம். ஆனால் இவையாவும் அவ்விசைகள் சம நிலையிலிருப்பதற்குக் தேவையான நிபந்தனைகளாகும். எனவே, கொடுக்கப்பட்டுள்ள விசைகள் யாவும் சம நிலையிலிருப்பதாக அறிந்து கொள்ளலாம்.

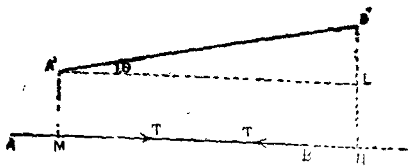
குறிப்பு $\delta W=a\sum X+b\sum Y+\propto\sum(xY-yX)=O$ என்பது கற்பித வேலைச் சமன்பாடு என்றழைக்கப்படுகிறது.

கற்பித வேலைச் சமன்பாடு அமைக்கும் போது விடப்படக் கூடிய விசைகள்

இரண்டு அல்லது இரண்டிற்கு மேற்பட்ட கட்டிறுக்கப் பொருட்கள் சமநிலையிலிருக்கும் ஒரு தொகுதியாக அமையும் போது, அப்பொருட்கள் நூல் அல்லது கயிறுகளின் மூலமாகவோ, அல்லது இலேசான கோல்கள் மூலமாகவோ அல்லது பிணையல்களின் மூலமாகவோ இணைக்கப் பட்டிருக்கும்; அல்லது அவை ஒன்றின் மேலொன்று தொடுகையிலிருக்கலாம். இத்தகைய இணைப்புக்களும் தொடுகைகவிம் அப்பொருட்களுக்கிடையே சாரியக்கத்தை அநுமதிக்கலாம் அல்லது தவிர்க்கலாம். இத்தகைய கூட்டுத் தொகுதிகளின் கற்பித வேலைச் சமன்பாட்டை அமைக்கும் போது எல்லாப்புற விசைகளையும், இணைப்புகளின் மூலம் ஏற்படுகின்ற எதிர் விசைகள், இழு விசைகள் யாவற்றையும் நாம் சேர்த்துக் கொள்ள வேண்டியிருக்கிறது. இவற்றுள் சில எதிர் விசைகளும் இழுவிசைகளும் எவ்வித வேலையும் செய்வதில்லையாதலின் கற்பித வேலைச் சமன்பாட்டில் இடம் பெறுவதில்லை. இவ்வாறு எவ்வித வேலையும் செய்யாமல் கற்பிதச் சமன்பாட்டில் இடம் பெறாத சில விசைகள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

(i) மீள் சக்தியின்றிய நூலின் இழுவிசை (Tension of an inelastic string)

ஒரு விறைப்பான மீள் சக்தியற்ற நூலினால் இணைக்கப்பட்ட இரு கட்டிறுக்கப் பொருட்கள் ஒரு தொகுதியாகக் கருதப்பட்டால், அந் நூலின் இழுவிசை எந்த வேலையும் செய்யாது.



படம் 230

AB என்பது இரு பொருட்களை இணைக்கும் விறைப்பான மீள் சக்தியற்ற நூல். நூலின் இழு விசை T யானது Aயில் AB திசையிலும், Bயில் BA திசையிலும் செயல்படும். சிறு இடப் பெயர்ச்சியின் காரணமாக நூலின் நிலை ABயிலிருந்து $A'B'$ ஆக மாறுகிறதென்று கொள்க.

$A'M \perp AB$; $B'N \perp A'L \perp B'N$ வரைக.

இடப் பெயர்ச்சி காரணமாக ஏற்பட்ட சிறு சுழற்சிக் கோணம் θ எனில், θ என்பது ABக்கும் $A'B'$ச்குமிடையேயுள்ள கோணமாகும். அதாவது, $\angle B'A'L = \theta$. இடப் பெயர்ச்சி மிக மிகச் சிறிய அளவிலிருப்பதால் θ மிக மிகச் சிறியதாயிருக்கும். இந்த இடப் பெயர்ச்சியின் காரணமாக இழு விசையினால் செய்யப்பட்ட வேலையின் மொத்த அளவு, Aயிலுள்ள இழு விசை Tயினால் செய்யப்பட்ட வேலை, Bயிலுள்ள இழு விசை Tயினால் செய்யப்பட்ட வேலை ஆகியவற்றின் மொத்தமாகும்.

அதாவது, $T.\,AM - T.\,BF,$

$$= T.\,(AM - BN)$$
$$= T\,[(AB - MB) - (MN - MB)]$$
$$= T\,(AB - MN)$$
$$= T\,(AB - A'L)$$
$$= T\,(AB - A'B' \cos\theta)$$

ஆனால் நூல் மீள் சக்தியற்றதாகையால், $AB = A'B$.

$\therefore$ A, Bயிலுள்ள இழு விசைகளின் வேலைகளின் மொத்தம்

$$= T\,(AB - AB\cos\theta)$$
$$= T.\,AB\,(1 - \cos\theta$$

ஆனால் θ மிக மிகச் சிறியதாகையால் θ இன் முதற்படித் தோராயத்திற்கு $\cos\theta$ இன் மதிப்பு 1 ஆகும்.

எனவே, A, Bயிலுள்ள இழு விசைகளின் மொத்தம்

$$= T.AB(1-1)$$

$$= O$$

அதாவது, இழு விசையினால் செய்யப்பட்ட வேலை பூச்சியமாகும்.

குறிப்பு நூல் மீள் சக்தியுடையதாகயிருப்பின், நூலின் இழு விசையினால் செய்யப்பட்ட வேலையின் அளவு $= T.(AB-MN)$ ஆகும். ஆனால் $MN = A'L = A'B.\ \cos\theta$. θ என்பது மிக மிகச் சிறியதாகையால் $\cos\theta \to 1$.

$\therefore MN = A'B' =$ நீட்சி பெற்ற நூலின் நீளம். நூலின் இயல்பான நீளம் $AB = x$ என்றும், நீட்சி பெற்ற நீளம் $A'B' = (x+\delta x)$ என்றும் கொண்டால் $AB - MN = AB - A'B' = x - (x+\delta x) = -\delta x$ ஆகும். ஆகவே, மீள் சக்தியுடைய நூலின் இழு விசையினால் செய்யப்பட்ட வேலையின் அளவு $-T.\ \delta x$ ஆகும்.

(ii) பொருள் தொடுகையிலிருக்கின்ற வழவழப்பான மேற்பரப்பில் நேர்குத்தெதிர் விசை

ஒரு வழவழப்பான தளத்தின் மேல் P என்னும் ஒரு புள்ளியில் ஒரு பொருள் தொடுகையிலிருந்தால், தளத்தின் எதிர் விசை R தொடு புள்ளி Pயில் தளத்திற்குச் செங்குத்தாகயிருக்கும். சிறு இடப் பெயர்ச்சியின் காரணமாக எதிர் விசையின் இரு புள்ளியாகிய P யானது பொதுத் தொடு கோட்டின்மேல் இடம் பெயருமாகையால், இடப் பெயர்ச்சி Rஇன் திசைக்குச் செங்குத்துத் திசையிலிருக்கும். எனவே, நேர்குத்தெதிர் விசை R ஆல் செய்யப்படும் வேலை பூச்சியமாகிறது.

(iii) பொருளானது நழுவாமல் உருளுகின்ற மேற் பரப்பில் பொருளின் தொடு புள்ளி வழியே செயல்படும் எதிர் விசை

பொருளானது தளத்தின்மேல் உருளுவதால், தளத்துடன் பொருளின் தொடு புள்ளி நொடிப் பொழுது ஓய்விலிருப்பதாகக் கொள்ளலாம். எனவே, அத் தொடு புள்ளியின் இடப் பெயர்ச்சி பூச்சியுமாகும். எனவே, தொடு புள்ளியில் செயல்படும் நேர்குத்தெதிர் விசை, உராய்வு விசை ஆகியவற்றிற்கு இடப் பெயர்ச்சி இல்லையாதலின் இவற்றினால் செய்யப்படும் கற்பித வேலைகள் பூச்சியமாகும்.

(iv) தொடுகையிலுள்ள இரு வழவழப்பான பொருட்களிடையே செயல்படும் நேர் குத்தெதிர் விசைகள்.

தொடுகையிலுள்ள இரு வழவழப்பான பொருட்களுக்கு ஒரு சிறு கற்பித இடப் பெயர்ச்சி கொடுக்கப்பட்டால், இரு பொருட்களும் கற்பிதச் சமன்பாடு அமைப்பில் சேர்த்துக் கொள்ளப்படுமாயின். நேர்குத்தெதிர் விசைகளினால் செய்யப்படும் மொத்தக் கற்பித வேலை பூச்சியமாகும்; ஏனெனில், நியூட்டனின் மூன்றுவது விதியின் படி இரு பொருட்களுக்குமிடையேயுள்ள எதிர் விசைகள் சமமாகவும், எதிராகவுமிருப்பதோடு அவற்றின் இரு புள்ளிகளும் சம தூரங்களுக்கு இடம் பெயரும்.

(v) பிணையலின் மூலம் இணைக்கப்பட்ட இரு கோள்களின் பிணியலில் செயல்படும் எதிர் விசைகள்.

இரு கோல்கள் ஒரு வழவழப்பான பிணையலினால் இணைக்கப்பட்டிருந்தால், அப் பிணையலில் இரு கோல்களின் எதிர் விசைகளும் நியூட்டனின் மூன்றுவது விதியின்படி. சமமாகவும், எதிராகவுமிருப்பதோடு அவற்றின் இரு புள்ளிகளின் இடப் பெயர்ச்சிகளும் சமமாகயிருக்குமாகையால், இரு கோல்களின் எதிர் விசைகளின் மொத்தக் கற்பித வேலை பூச்சியமாகும்.

(vi) கற்பித வேலைச் சமன்பாடு அமைக்கும் போது பின்வருபவனவற்றைக் கவனத்திற் கொள்க.

(1) l நீளமுள்ள ஒரு நூலில் செயல்படும் இழுவிசை T யினால் செய்யப்படும் கற்பித வேலை எதிரடையாளமுடையதாகவும், $-T\times$(கற்பித இடப்பெயர்ச்சியின் காரணமாக நூலில் ஏற்படும் சிறு கற்பித நீட்சி) $= -T.\delta l$. ஆகவுமிருக்கும்.

(2) ஒரு மெல்லிய கோலில் செயல்படும் அழுத்தம் R ஆல் செய்யப்படும் கற்பித வேலை நேரடையாளமுடையதாகவும். $R\times$ (கற்பித இடப் பெயர்ச்சியின் காரணமாகக் கோலில் ஏற்படும் சிறு கற்பித நீட்சி) $= R\cdot\delta l$ ஆகவுமிருக்கும்.

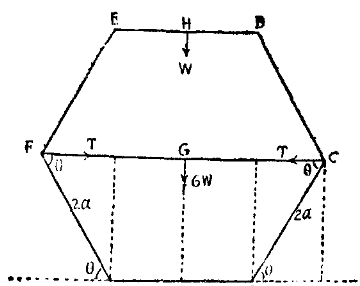
(3) ஏதேனும் ஒரு நிலையான புள்ளி அல்லது நிலையான நேர்கோட்டைவயடுத்துக் கொண்டு அப்புள்ளி அல்லது தொகுதியைச் சேர்ந்த விசைகள் செயல்படும் புள்ளிகளின் தூரங்களைக் கணக்கிடுக. ஒரு விசையானது செயல்படும் திசையும், அந்நிலையான புள்ளி அல்லது நேர்கோட்டிலிருந்து அவ்விசை செயல்படும் புள்ளியின் தூரம் அளவிடப்படும் திசையும் ஒன்றுகயிருப்பின் அவ்விசையினால் செய்யப்படும்

கற்பித வேலை நேர் அடையாளமுடைய தெனவும், எதிர்த் திசைகளாகயிருப்பின் கற்பித வேலை எதிரடையாள முடையதாகவும் கொள்ள வேண்டும்.

மாதிரி 169 ஆறு சமமான, கனமான கோல்கள் ஒன்றுடன் ஒன்றுக இணைக்கப்பட்டு *ABCDEF* என்னும் ஒழுங்கு அறு கோணமாக அமைக்கப்பட்டுள்ளன. *C*, *F* என்னும் எதிர் முனைகள் ஒரு கிடையான நூலினுல் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. பக்கம் *AB* யானது ஒரு கிடைத் தளத்தின் மேல் தொடுகையிலுள்ளது. W' என்னும் ஒரு எடை *DE*யின் நடுப் புள்ளியில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. ஒவ்வொரு கோலின் எடையும் *W* எனில் நூலின் இழு விசை $\frac{1}{\sqrt{3}}(3W+W^1)$ என்று காட்டு.

தீர்வு

அறுகோணத்தின் பக்கம் $2a$ என்க. ஆறுகோள்களின் மொத்த எடையாகிய $6W$, அறுகோணத்தின் மையம் *G*யில் ↓ செயல்படும்: பக்கம் *AB*யானது ஒரு நிலையான கிடைத்தளத்தின்மேலிருக்கிறது. *BC*, *AF* ஆகிய அடுத்துள்ள பக்கங்கள் இந்நிலைத்தளத்துடன் θ கோணச்சாய்விலிருப்பதாகக் கொள்க.



படம் 231

எனவே, *AB* என்னும் நிலைத்தளத்திற்கு மேல் *G*யின் உயரம் $2a \sin\theta$ ஆகும். *DE*யின் நடுப்புள்ளி *H*இல் வைக்கப்பட்டுள்ள எடை W^1 ஆனது இந்நிலைத் தளத்திலிருந்து $4a \sin\theta$ உயரத்திலிருக்கும் நூலின் நீளம் $= CF = 2a + 4a\cos\theta$.

இப்பொழுது, இந்த அறுகோணத் தொகுதிக்குக் கொடுக்கப்படும் சிறு இடப் பெயர்ச்சியினுல் θ என்பது $(\theta+\delta\theta)$ ஆக மாறுவதாகக் கொள்க. எனவே, நூலின் நீளம் *CF*ம் மாறு ந-

$6W$, W^1, T ஆகிய மூன்று விசைகளைக் கொண்டு கற்பிதவேலைச் சமன்பாடு அமைக்கவும். G, H ஆகிய புள்ளிகளில் $6W$, W^1 என்னும் எடைகள் கீழ் நோக்கிச் செயல்படுவதாலும், ABயி லிருந்து இவற்றின் உயரங்கள் மேல் நோக்கி அளவிடப்படுவ தாலும் இவ்விசைகளினால் செய்யப்படும் கற்பித வேலைகள் எதிரடையாளமுடையதாகயிருக்கும். நூலின் இழுவிசை F இலும் Cயிலும் உள்நோக்கிச் செயல்படுவதாலும், நூல் வெளி நோக்கி நீளும் இயல்புடையதாலும் நூலின் இழுவிசை செய்யும் வேலையும் எதிரடையாளமுடையதாகயிருக்கும். எனவே,

$$6W.\delta\,(2a\sin\theta)-W^1\delta\,(4a\sin\theta)-T\,\delta(2a+4a\cos\theta=0$$

அதாவது, $-6W\,(2a\;\cos\theta\delta\theta)-W^1(4a\cos\theta\delta\theta)-T(-4a\sin\theta\delta\theta)=0.$

அதாவது, $-12aW\cos\theta\delta\theta-4aW^1\cos\theta\delta\theta+4a.T\sin\theta\delta\theta=0$ ஆனால், $\delta\theta\neq0.$

$$\therefore -12W\cos\theta-4W'\cos\theta+4T\sin\theta=0$$

$$T\sin\theta=3W\cos\theta+W'\cos\theta$$

$$=(3W+W')\cos\theta$$

$$\therefore T=(3W+W^1)\cot\theta.$$

அறுகோணத்தின் கோணம் ஒவ்வொன்றும் $120°$ ஆகையால், $\theta=60°$ ஆகும்.

$$\therefore T=(3W+W^1)\cot 60°$$

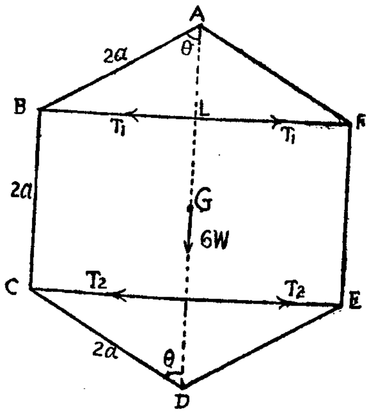
$$=\frac{3W+W^1}{\sqrt{3}}$$

மாதிரி 179 ஆறு சமமான, கனமான கோல்கள் அவற்றின் முனைகளில் தாராளமாக இணைக்கப்பட்டு $ABCDEF$ என்னும் ஒழுங்கு அறுகோணமாக அமைகின்றது. Aயில் தொங்கவிடப் பட்டுள்ள அது BF, CE என்னும் இலேசான கோல்களினால் தன்னுடைய அமைப்பை மாற்றிக்கொள்ள முடியாதவாறு செய் யப்பட்டுள்ளது. W என்பது ஒவ்வொரு கோலின் எடை யெனில், இக்கோல்களிலுள்ள அழுத்தங்கள் $\frac{5\sqrt{3}}{2}W$, $\frac{\sqrt{3}}{2}W$ என்று நிருபி. (சென்னை எம். எஸ்ஸி. 1967)

தீர்வு

அறுகோணம் Aயில் தொங்கவிடப்பட்டுச் சமநிலையிலிருப் பதால், ADயானது நிலைக்குத்தாகயிருக்கும். இந்நிலைக்குத்

துடன் சாய்வு பக்கங்களின் சாய்வு θ என்க. அறுகோணத்தின் பக்கம் $2a$ என்க. BF, CE ஆகிய இலேசான கோல்களின் அழுத்தங்கள் முறையே T_1, T_2 என்க. ஆறு கோல்களின்



படம் 232

மொத்த எடையாகிய $6W$ என்பது அறுகோணத்தின் மையம் Gயில் ↓ செயல்படும். A என்பது நிலையான புள்ளியாகையாலும் ஒரு சிறு இடப்பெயர்ச்சியானது Aயிலிருந்து Oயின் தூரத்தைச் சிறிது மாற்றுமென்பதாலும் AGயின் நீளத்தைக் கணக்கிடுக. இதுபோல், சிறு இடப்பெயர்ச்சியின் காரணமாக BF, CE ஆகிய கோல்களின் அழுத்தங்கள் மாறுபடுமாகையால் BF, CE ஆகியவற்றின் நீளங்களைக் கணக்கிடுக. இவற்றிலிருந்து AG, BF, CE ஆகியவற்றின் கற்பித இடப்பெயர்ச்சிகளைக் கணக்கிட்டு-கற்பித வேலைச் சமன்பாட்டினை அமைக்கலாம்.

$$AG = AD + LG = 2a \cos\ \theta + a.$$

$$BF = CE = 4a \sin\ \theta.$$

இப்பொழுது இத்தொகுதிக்கு ஒரு இடப்பெயர்ச்சி கொடுக்கப்பட்டால், θ என்பது $\theta + \delta\theta$ ஆக மாறுகிறதென்று கொள்வோம். எனவே, AG, BF, CE ஆகிய தூரங்களும் மாறும். ஆகவே, கற்பித வேலைச் சமன்பாடு வருமாறு, T_1, T_2 ஆகியவை வெளி நோக்கிச் செயல்படுமாகையால் அவற்றின் கற்பித வேலைகள் நேரடையாளமுடையதாகயிருக்கும்.

$$6W.\delta\ (2a \cos\theta + a) + T_1 \delta\ (4a \sin\ \theta) + T_2 \delta\ (4a \sin\ \theta) = o.$$

அதாவது, $6W\ \ (-2a \sin\ \theta\delta\theta) + T_1\ \ (4a \cos\ \theta\delta\theta)\ +$ $T_2\ (4a, \cos\ \theta\delta\theta) = o.$ ஆனால் $\delta\theta \neq o.$

$$\therefore -3W\sin\theta+T_1\cos\theta+T_2\cos\theta=o.$$

$$(T_1+T_2)\cos\theta \quad =3W\sin\theta$$

அல்லது, $T_1+T_2 \quad =3W\tan\theta.$

ABCDEF என்பது ஒழுங்கு அறுகோணமாகையால் $\theta=60^\circ$

$$\therefore T_1+T_2 \quad =3W\tan 60^\circ=3\sqrt{3}\,W$$

இப்பொழுது மேலேயுள்ள *AB,AF* என்ற கோல்களும், *BF*. என்ற இலேசான கோலும் மட்டுமே அசையுமாறு *AD*யைப் பற்றி ஒரு இடப்பெயர்ச்சி கொடுக்கப்படுவதாகக் கொள்க. *AB,AF* ஆகியவற்றின் எடைகள் அவற்றின் நடுப்புள்ளிகன் வழியே செயல்படும். *A*யிலிருந்து இந்த நடுப்புள்ளிகள் ஒவ்வொன்றின் தூரமும் $a\cos\theta$ ஆகும். எனவே, கற்பித வேலைச் சமன்பாடு வருமாறு.

$$W.\delta(a\cos\theta)+W.\delta(a\cos\theta)+T_1\,\delta(4a\sin\theta)=O$$

அதாவது, $-Wa\sin\delta\theta+Wa\sin\theta\,\delta\theta+4a\,T_1\cos\theta\,\delta\theta=O$

$\delta\theta\neq O\ \therefore\ -2W\sin\theta+4T_1\cos\theta=O$

$$T_1=\frac{W}{2}\tan\theta$$

$$=\frac{W}{2}\tan 60^\circ$$

$$=\frac{W}{2}\sqrt{3}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}W$$

$T_1+T_2=3\sqrt{3}\,W$ ஆகையால், $T_2=3\sqrt{3}\,W-T_1$

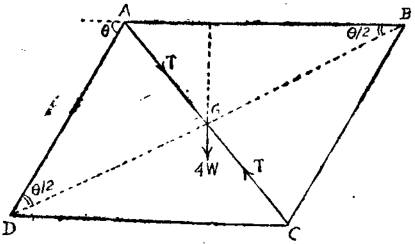
$$=3\sqrt{3}\,W-\frac{\sqrt{3}}{2}W$$

$$=\frac{5\sqrt{3}}{2}W$$

மாதிரி 171 b நீளமும், W எடையுமுள்ள நான்கு சீரான கோல்களின் இணைப்பின் மூலம் அமையப்பெற்ற ஒரு சாய் சதுரத்தின் குட்டையான மூலைவிட்டமாக a நீளமான ஒரு நூல் அமைகின்றது. கோல்களுள் ஒன்று கிடைநிலையில் தாங்கப்படுகிறதெனில், நூலின் இழுவிசை $\dfrac{2W\,(2b^2-a^2)}{b\sqrt{4b^2-a^2}}$ என்று காட்டு.

தீர்வு

ABCD என்னும் சாய்சதுரம் அதன் பக்கம் *AB* கிடைநிலையிலிருக்குமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது. *AC* என்பது *a* நீளமுள்ள



படம் 233

நூலினுலான குட்டையான மூலைவிட்டம். பக்கம் *AD*யானது கிடைக்கோட்டுடன் θ கோணச் சாய்விலிருப்பதாகக் கொள்க.

$\therefore \underline{|ABD} = \underline{|ADB} = \frac{\theta}{2}$ நான்கு கோல்களின் மொத்த எடையாகிய $4W$ சாய்சதுரத்தின் மையமாகிய *G*யில் ↓ செயல்படும். *AB* என்னும் நிலைக்கோட்டிலிருந்து *G*யின் தூரம் $\frac{1}{2}b \sin\theta$ ஆகும். நூலின் நீளம் $AC = 2b \sin\frac{\theta}{2}$. இப்பொழுது இத்தொகுதிக்கு ஒரு சிறிய இடப்பெயர்ச்சி கொடுத்து கற்பித வேலைச் சமன்பாடு அமைப்பில் சேர்த்துக் கொள்ளப்படக் கூடிய விசைகள் $4W$, T ஆகும். எனவே, கற்பித வேலைச் சமன்பாடு வருமாறு: இடப்பெயர்ச்சியின் காரணமாக θ ஆனது $\theta+\delta\theta$ ஆகமாறுமெனில்,

$$4W\delta\left(\tfrac{1}{2}b\sin\theta\right) - T.\delta\left(2b\sin\frac{\theta}{2}\right) = O$$

$$4W\left(\tfrac{1}{2}b\cos\theta\,\delta\theta\right) - T\left(2b.\tfrac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}.\,\delta\theta\right) = O$$

$\delta\theta \neq O$ ஆகவே, $2W\,b\cos\theta - T\,b\cos\frac{\theta}{2} = O$

$$T = \frac{2W\cos\theta}{\cos\frac{\theta}{2}}$$

ஆனால் சமநிலையில். நேர்கோண முக்கோணம் *AGB*யிலிருந்து,

$$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{AG}{AB}=\frac{\frac{1}{2}a}{b}=\frac{a}{2b}.$$

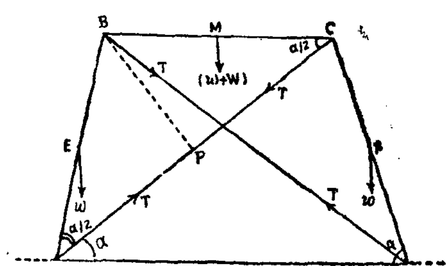
$$\cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{1-\sin^2\frac{\theta}{2}}=\sqrt{1-\frac{a^2}{4b^2}}=\frac{1}{2b}\sqrt{\frac{4b^2-a^2}{2b}}$$

$$\cos\theta=1-2\sin^2\frac{\theta}{2}=1-2.\frac{a^2}{4b^2}=\frac{2b^2-a^2}{2b^2}$$

$$\therefore T=\frac{2W\left(\frac{2b^2-a^2}{2b^2}\right)}{\frac{1}{2b}\sqrt{4b^2-a^2}}$$

$$=\frac{2W}{b}\frac{(2b^2-a^2)}{\sqrt{4b^2-a^2}}$$

மாதிரி 172 ஒவ்வொன்றும் ω எடையுள்ள AB, BC, CD என்னும் மூன்று சமமான சீரான கோல்கள் Bயிலும் Cயிலும் தாரளமாக இணைக்கப்பட்டு, முனைகள் Aயும் Dயும் ஒரு வழ வழப்பான கிடையான மேசையின் மேலிருக்குமாறு நிலைக் குத்துத் தளத்தில் நிறுத்தப்பட்டுள்ளன. AC, BD என்பன சமமான மெல்லிய நூற்களினல் இணைக்கப்பட்டு, AB, CD ஆகியவை கிடைத்தளத்துடன் $\propto$ கோணச் சாய்விலிருக்குமாறு சட்டத்தை தாங்கி நிற்கின்றன. BCயின் நடுப் புள்ளியில் W என்னும் வைக்கப்பட்டால் ஒவ்வொரு நூலின் இழுவிசையும் $(\omega+\frac{1}{2}W)\cos\propto\operatorname{cosec}\frac{\propto}{2}$ அளவிலிருக்குமென்று காட்டு.



படம் 234

தீர்வு

AB, BC, CD ஆகியவை மூன்று சமமான கோல்கள்; ω என்பது ஒவ்வொன்றின் எடை. AC, CD என்பன சம நீள

நூற்கள். BCயின் நடுப் புள்ளி Mஇல் W என்னும் எடை வைக்கப்பட்டுள்ளது. AB, BC ஆகியவற்றின் நடுப் புள்ளி களில் அவற்றின் எடைகள் ω, ω ↓ செயல்படுகின்றன. BD யின் நடுப் புள்ளி Mஇல் $(\omega+W)$ என்னும் எடை ↓ செயல்படு கிறது. இரு நூற்களிலும் இழு விசை சமமாகயிருக்கும். T என்பது இச் சம இழு விசை.

$$\underline{|BAD} = \underline{|CDA} = \alpha \text{ (கொடுக்கப்பட்டுள்ளது)}$$

$$AB = BC \text{ ஆகையால், } \underline{|BAC} = \underline{|BCA} = \frac{\alpha}{2}.$$

AD என்பது நிலையான கிடைக் கோடாகையால், AD யிலிருந்து E, F ஆகிய நடுப் புள்ளிகள் $\frac{1}{2}AP \sin\alpha$, $\frac{1}{2}CD \sin\alpha$ உயரத்திலிருக்கும். கோல்களின் நீளம் $2a$ எனில், ADயிலிருந்து E, F ஆகியவற்றின் உயரம் $a \sin\alpha$ ஆகும். ADயிலிருந்து M இன் உயரம் $2a \sin\alpha$

ABC ஒரு இரு சம பக்க முக்கோணமாகையால், B யிலிருந்து ACக்கு வரையப்படும் செங்குத்து ACயை இரு சம பாகமாக்கும்.

$$\therefore\ AC = 2AP = 2.\ 2a\cos\frac{\alpha}{2} = 4a\cos\frac{\alpha}{2} = BD.$$

ஒரு சிறு கற்பித இடப் பெயர்ச்சியின் காரணமாக α ஆனது $\alpha+\delta\alpha$ ஆக மாறுமென்று கொள்க. கற்பித வேலைச் சமன் பாட்டில் சேர்த்துக் கொள்ளப்பட வேண்டிய விசைகள் Eயி லுள்ள F இலுள்ள ω, Mஇலுள்ள $(\omega+W)$, இரு நூற்களிலுள்ள T ஆகும். எனவே, கற்பித வேலைச் சமன்பாடு வருமாறு.

$$-\omega\,\delta(a\sin\alpha) - \omega\delta\,(a\sin\alpha) - (\omega+W)\,\delta(2a\sin\alpha)$$

$$-2T\ \delta\left(4a\cos\frac{\alpha}{2}\right) = 0$$

$$\delta\alpha \neq 0\ \therefore\ -\omega\cos\alpha - (\omega+W)\cos\alpha + 2T\sin\frac{\alpha}{2} = 0$$

$$2T\sin\frac{\alpha}{2} = (2\omega+W)\cos\alpha$$

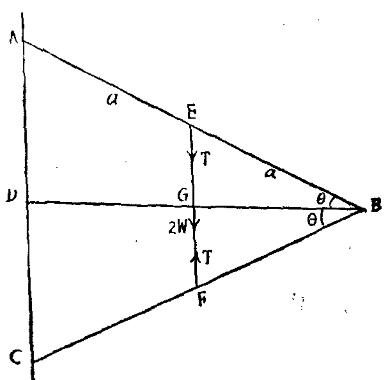
$$T = \left(\frac{2\omega+W}{2}\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$= (\omega+\tfrac{1}{2}W)\cos\alpha.\operatorname{cosec}\frac{\alpha}{2}.$$

மாதிரி 173: $2a$ நீளமும் W எடையுமுள்ள AB என்னும் சீரான கோல் ஒன்றின் ஒரு முனை Aயானது ஒரு வழவழப்பான நிலைக்குத்துச் சுவருடன் ஒரு உராய்வற்ற இணைப்பினாலும், மறு முனை Bயானது BC என்னும் மற்றொரு சமமான கோலுடன் ஒரு வழவழப்பான இணைப்பினாலும் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. கோல்களின் நடுப்புள்ளிகள் இயல்பான நீளம் a யும், மீள்தன்மைக் குணகம் (modulus of elasticity) $4W$ம் கொண்ட ஒரு மீளியல்புடைய நூலினால் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. இத்தொகுதியானது ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் முனை C யானது சுவரில் Aக்குக் கீழேயிருக்குமாறும், கோல்களுக் கிடையேயுள்ள கோணம் $2\sin^{-1}(\frac{3}{4})$ இருக்குமாறும் சமநிலையிலிருக்க முடியுமென்று காட்டு.

தீர்வு

E, F என்பன AB, BC ஆகியவற்றின் நடுப்புள்ளிகளெனில் இரு கோல்களின் மொத்த எடை $2W$ ஆனது EFஇன் நடுப் புள்ளி Gயில் செயல்படும், $AB = BC = 2a$.



படம் 235

A ஒரு நிலையான புள்ளியாகும். $BD \perp AC$ எனில், ABயும் BCயும் BDயின் இரு புறமும் சமச் சீருடன் அமைந்திருக்கும். $\angle ABD = \angle DBC = \theta$ என்க.

Aக்குக் கீழே Gயின் தூரம் $= AD = 2a \sin\theta$ நூலின் நீளம் $= EF = 2EG = 2a \sin\theta$. நூலின் இழுவிசை T என்க.

இப்பொழுது இத்தொகுதிக்குக் கொடுக்கப்படும் ஒரு சிறு கற்பித இடப்பெயர்ச்சியின் காரணமாக θ ஆனது $(\theta+\delta\theta)$ ஆக மாறுமென்று கொள்க. கற்பித வேலைச் சமன்பாட்டில் சேர்த்துக் கொள்ளப்பட வேண்டிய விசையின் Gயில் செயல்படும் $2W$-ம், நூலில் செயல்படும் Tம் ஆகும். Gயில் செயல்படும் $2W$ கீழ் நோக்கிச் செயல்படுவதாலும் Aயிலிருந்து Gயின் தூரமும் கீழ் நோக்கி அளவிடப்படுவதாலும் $2W$இன் கற்பிதவேலை நேரடையாளமுடனிருக்கும்.

$$\therefore 2W.\delta\,(AD) - T.\delta\,(EF) = o.$$

$$2W.\delta\,(2a \sin\theta) - T.\delta\,(2a \sin\theta) = o,$$

$$2W.\,(2a \cos\theta\,\delta\theta) - T\,(2a \cos\theta\,\delta\theta) = o.$$

$\delta\theta \neq o \therefore$ $$2W.\,(2a \cos\theta) - T\,(2a \cos\theta) = o.$$

$$\therefore T = 2W.$$

ஹூக்கின் விதி (Hooke's Law)யின் படி,

$$T = \lambda\left(\frac{2a \sin\theta - a)}{a}\right)$$

இங்கு λ = மீள்தன்மைக் குணகம் $= 4W$.

$$\therefore T = 4W\left(\frac{2 \sin\theta - 1}{1}\right)$$

$$\therefore 2W = 4W\,(2 \sin\theta - 1)$$

$$4 \sin\theta - 2 = 1$$

$$4 \sin\theta = 3$$

$$\sin\theta = \tfrac{3}{4}$$

$$\therefore \theta = \sin^{-1}(\tfrac{3}{4})$$

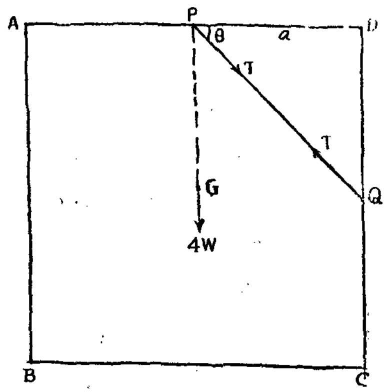
கோல்களுக்கிடையேயுள்ள கோணம் $= 2\theta = 2 \sin^{-1}(\frac{3}{4})$

மாதிரி 174 Wஎடையுள்ள நான்கு சமமான சீரான கோல்கள் $ABCD$ என்னும் சதுரமாக அமையுமாறு இணைக்கப்பட்டுள்ளன. பக்கம் ABயானது நிலைக்குத்தாக Aமேலேயிருக்கும்படி நிலையாக வைக்கப்பட்டுள்ளது. இவ்வமைப்புக்

குலையாதவாறு AD, DC ஆகியவற்றின் நடுப் புள்ளிகள் ஒரு நூலில் இணைக்கப்பட்டுள்ளன, நூலின் இழுவிசையைக் காண்க.

தீர்வு

$ABCD$ என்னும் சதுரச் சட்டம் பக்கம் AB நிலைக் குத்தாகவும், A மேலேயும் இருக்குமாறு நிறுத்தப்பட்டுள்ளது. AD, CD ஆகியவற்றின் நடுப் புள்ளிகள் Pயும் Qவும் ஒரு நூலினால்



படம் 236

கட்டப்பட்டுள்ளது. சம நிலையில் பக்கம் AD கிடையாகயிருக்கிறது.

A வழிக் கிடைக் கோட்டுடன் நூலின் சாய்வுக் கோணம் θ என்க. நூலின் இழு விசை T என்க. நான்கு கோல்களின் மொத்த எடையாகிய $4W$ சட்டத்தின் மையத்தின் வழியே ↓ செயல்படும்.

A வழியே செல்லும் கிடைக் கோட்டை நிலையான கோடாக எடுத்துக் கொள்க. இந் நிலையான கோட்டிலிருந்து Gயின் தூரம் PG ஆகும். கோல் ஒவ்வொன்றின் நீளம் $2a$ எனில்,

$$PG = DQ = PD \tan \theta = a \tan \theta.$$

நூலின் நீளம் $PQ = a \sec \theta$.

இப்பொழுது இச் சட்டத்திற்கு ஒரு சிறு இடப் பெயர்ச்சி கொடுக்கவும். இவ்விடப் பெயர்ச்சியின் காரணமாக θ ஆனது

$(\theta+\delta\theta)$ ஆக மாறும். நூலின் நீளம் சிறிது மாறுபடுவததோடு, A வழி கிடைக்கோட்டிலிருந்து Gயின் தூரமும் அதிகரிக்கும். எனவே, கற்பித இடப் பெயர்ச்சியின் காரணமாக $4W$ செய்யும் கற்பித வேலை நேரடையாளமுடையதாகவும், இழு விசையின் கற்பித வேலை எதிரடையாளமுடையதாகவுமிருக்கும்.

$$\therefore 4W.\delta\,(a \tan\theta) - T\,\delta\,(a \sec\theta) = O.$$

$$4W\,(a \sec^2\theta\;\delta\theta) - T\,(a \sec\theta \tan\theta\;\delta\theta) = O$$

$$\delta\theta \neq O \;\therefore\; 4W\,(a \sec^2\theta) - T\,(a \sec\theta \tan\theta) = O$$

$$4W \sec\theta - T \tan\theta = O.$$

$$\therefore T = \frac{4W \sec\theta}{\tan\theta}$$

ஆனால், கோல்கள் யாவும் சமமாயிருப்பதால், $\theta = 45°$ ஆகும்.

$$\therefore T = \frac{4W \sec 45°}{\tan 45°}$$

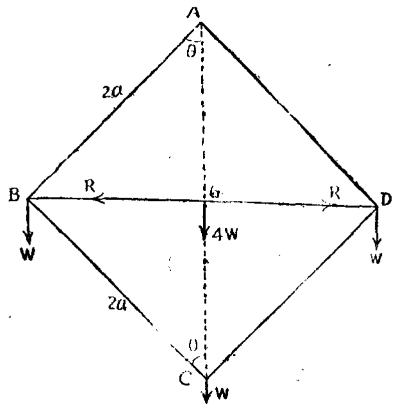
$$= 4\sqrt{2}\,W$$

மாதிரி 175: W எடையுள்ள நான்கு சமமான சீரான கோல்களினலான சதுரச் சட்டமொன்று அதன் ஒரு முனையின் மூலம் தொங்கவிடப் பட்டுள்ளது. அதன் மற்ற முனைகள் ஒவ்வொன்றிலிருந்தும் w என்னும் எடை தொங்கவிடப் பட்டுள்ளது. சதுரத்தின் அமைப்புக் குலையாதவாறு கிடைத்தள மூலைவிட்டத்தின் வழியே இலேசான கோலொன்று பொருத்தப் பட்டுள்ளது. இக்கோலின் மீதுள்ள அழுத்தத்தைக் காண்க.

தீர்வு

$ABCD$ என்ற சதுரச் சட்டம் Aயிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. B, C, D ஆகிய முனைகள் ஒவ்வொன்றிலிருந்தும் W என்னும் எடை தொங்குகிறது. சதுரச் சட்டத்தின் எடையாகிய $4a$ அதன் மையம் G வழியே கீழ்நோக்கிச் செயல்படும். மற்றும். B, C, D ஆகியவற்றிலுள்ள எடைகளும் நிலைக்குத்தாகக் கீழ்நோக்கிச் செயல்படும். மெல்லிய கோல் BDயின் அழுத்தம் R ஆனது வெளி நோக்கிச் செயல்படும். சட்டமானது Aயிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டுள்ளதால் Aயை நிலையான புள்ளியாகக் கொள்க, சதுரத்தின் பக்கம் $2a$ என்றும்

A வழி நிலைக்குத்துடன் பக்கங்களின் சாய்வுக் கோணம் θ என்றும் கொள்க. எனவே, நிலையான புள்ளியாகிய *A*யிலிருந்து *G*, *B*, *C*, *D* ஆகிய புள்ளிகளின் கீழ்நோக்கிய தூரங்கள் முறையே $2a \cos\theta$, $2a\cos\theta$, $4a\cos\theta$, $2a\cos\theta$ ஆகும்,



படம் 237

இலேசான கோல் *BD*யின் நீளம் $4a\sin\theta$ ஆகும்.

இப்பொழுது சட்டத்திற்கு ஒரு சிறு கற்பித இடப்பெயர்ச்சி கொடுக்கவும். இக்கற்பித இடப்பெயர்ச்சியின் காரணமாக θ ஆனது $(\theta+\delta\theta)$ ஆக மாறுவதாகக் கொள்க. இப்புள்ளிகளில் செயல்படும் விசைகள் யாவும் கீழ்நோக்கிச் செயல்படுவதாலும் நிலையான புள்ளி *A*யிலிருந்து இப்புள்ளிகளின் தூரங்களும் கீழ் நோக்கியே அளவிடப்படுவதாலும், இப்புள்ளிகளில் செயல படும் விசைகளால் செய்யப்படும் கற்பிதவேலைகள் நேர் அடையாளமுடையவனவாக யிருக்கும். *BD* என்னும் கோலில் அழுத்தம் இரு முனைகளிலும் வெளி நோக்கிச் செயல்படுவதாலும், கோலின் நீட்சி வெளி நோக்கியே ஏற்படக் கூடுமாகையாலும், இக்கோலின் அழுத்தத்தினால் செய்யப்படும் கற்பித வேலையும் நேரடையாள முடையதாகவேயிருக்கும். எனவே, கற்பித வேலைச் சமன்பாடு வருமாறு,

$4W\delta\,(2a\cos\theta)+W.\delta\,(4a\cos\theta)+W,\delta\,(2a\cos 0)+R.\delta\,(4a\sin\theta)=O.$

$4W\,(-2a\sin\theta\delta\theta)+W\,(-2a\sin\theta\delta\theta)+W.\,(-4a\sin\theta\delta\theta)+W\,(-2a\sin\theta\delta 0)+R,\,(4a\cos\theta\delta\theta)=O.$

ஆனால், $\delta\theta\pm O.$

$\therefore -16a.W\sin\theta+4a.R.\cos\theta=O.$

$\therefore R=4W\tan 0$

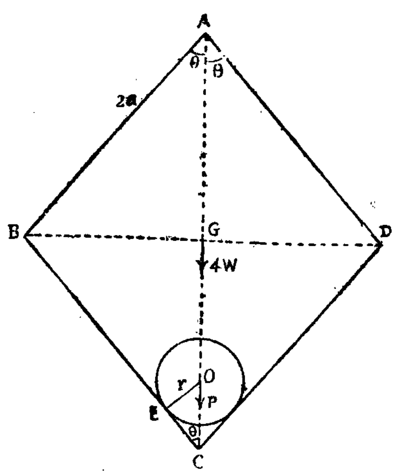
ஆனால் சமநிலையில் $\theta = 46^\circ$ இருக்குமாகையால்,

$$R = 4W \tan 45^\circ$$
$$= 4W.$$

மாதிரி 176 W எடையுள்ள நான்கு சமமான சீரான கோல்கள் ஒரு சாய் சதுர அமைப்பில் இணைக்கப்பட்டு, ஒரு முனையின் மூலம் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளன. இச் சட்டம் குலைந்துவிடாதவாறு சாய் சதுரத்தினுள்ளே இரு கோல்களுக்கிடையில் P எடையுள்ள கோளமொன்று வைக்கப்பட்டுள்ளது தொங்கவிடப்பட்டுள்ள முனையிலுள்ள கோணம் சமநிலையில் 2θ எனில்,

$$\frac{\sin^3\theta}{\cos\theta} = \frac{Ps}{4(P+2W)a}$$

என்று காட்டு. (r என்பது கோளத்தின் ஆரை; $2a$ என்பது ஒவ்வொரு கோலின் நீளம்).



படம் 238

தீர்வு

$ABCD$ என்னும் சாய் சதுரச் சட்டம் Aயிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. $AB = BC = CD = AD = 2a$ என்க. O-ஐ மையமாகவும், r ஆரையுமுள்ள கோளமொன்று BC, CD ஆகிய கோல்களுக் கிடையில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. நான்கு கோல்

களின் மொத்த எடையாகிய $4W$ சாய் சதுரத்தின் மையம் Gயில் $\downarrow$ செயல்படும். கோளத்தின் எடை Pயானது Oவில் $\downarrow$ செயல் படும். சட்டமானது Aயிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டுள்ளதால் Aஐ நிலையான புள்ளியாக எடுத்துக்கொள்க.

A வழிச் செங்குத்துடன் பக்கங்களின் சாய்வுக் கோணம் θ என்க. Aயிலிருந்து G, O ஆகியவற்றின் தூரங்கள் முறையே

$$AG=2a\cos\theta,$$

$$AO=AC-OC=(4a\cos\theta-r\,\text{cosec}\,\theta)$$

ஆகும். இப்பொழுது, இச்சட்டத்திற்கு ஒரு சிறு கற்பித இடப் பெயர்ச்சி கொடுக்கவும். இதன் காரணமாக, θ ஆனது $(\theta+\delta\theta)$ ஆக மாறுவதாகக் கொள்க. G, O ஆகிய புள்ளிகளில் செயல் படும் $4W$, P ஆகிய விசைகள் கீழ்நோக்கிச் செயல்படுவதாலும், நிலையான புள்ளி Aயிலிருந்து இப்புள்ளிகளின் தூரங்களும் கீழ் நோக்கியே அளவிடப்படுவதாலும், $4W$, P ஆகிய விசைகளால் செய்யப்படும் கற்பித வேலைகள் நேரடையாள முடையனவாக யிருக்கும். எனவே, கற்பித வேலைச் சமன்பாடு வருமாறு:—

$$4W.\delta(2a\cos\theta)+P.\delta(4a\cos-r\,\text{cosec}\,\theta)=O.$$

$$4W(-2a\sin\theta\delta\theta)+P(-4a\sin\theta\delta\theta+r\cos\theta\cot\theta\delta\theta)=0$$

$\delta\theta\neq O$; ஆகவே,

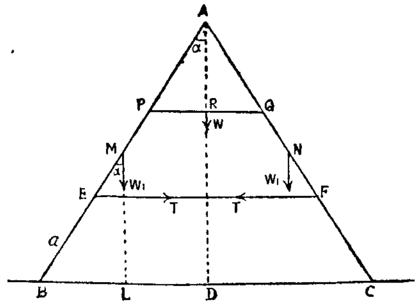
$$-8aW\sin\theta-4aP\sin\theta+Pr\,\text{cosec}\,\theta.\cot\theta=O$$

$$4a\sin\theta(P+2W)-Pr.\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}.$$

$$\therefore\frac{\sin^3\theta}{\cos\theta}=\frac{Pr}{4(P+2W)a}.$$

மாதிரி 177 ஒரு ஏணிப்படியானது, அதன் இரு கால்களின் உச்சிகளும் ஒரு பிணையலினால் இணைக்கப்பட்டும், அடியி லிருந்து $\frac{1}{3}$ பாகத் தூரங்களில் இரு கால்களிலுமுள்ள புள்ளிகள் ஒரு கயிற்றினால் இணைக்கப்பட்டும் வைக்கப்பட்டுள்ளது. கால்கள் ஒவ்வொன்றின் எடையாகிய W_1 அதன் நடுப் புள் ளியில் செயல்படுகிறது. W எடையுள்ள ஒரு மனிதன் $\frac{2}{3}$ பாகத் தில் ஏறி நிற்கிறான். நிலைக்குத்துடன் ஒவ்வொரு காலின்

சாய்வும் ∝ எனில், கயிற்றின் இழுவிசை $\frac{1}{2}$ $(W+\frac{2}{3}W_6)$ tan ∝ என்று காட்டுக.



படம் 239

தீர்வு

AB, AC என்பன ஏணியின் கால்கள் *E, F* என்பன *BA, CA* என்ற கால்களில் $BE=\frac{1}{3}$ *BA*; $CF=\frac{1}{3}$ *CA* என்றவாறமைந்த புள்ளிகள். $AB=AC=2a$ என்க.

$\therefore BE=CF.$

E, F என்பன *EF* என்னும் கயிற்றினால் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. *M, N* என்பன கால்களின் நடுப்புள்ளிகள். *M, N* ஆகிய அப்புள்ளிகளில் கால்களின் எடைகளாகிய W_1, W_1 என்பன ↓ செயல்படுகின்றன. *PQ* என்பது அடியிலிருந்து $\frac{2}{3}$. *AB* தூரத்திலுள்ள ஏணிப்படி. அதாவது. $BP=CQ=\frac{2}{3}$ *AB* *PQ*வின் நடுப்புள்ளியில் *W* எடையுள்ள மனிதன் நிற்கிறான். நிலைக்குத்துடன் *AB, AC* ஆகிய கால்களின் சாய்வு ∝. கயிற்றின் இழுவிசை *T* என்க. இவ்விழுவிசை *B, F* ஆகிய புள்ளிகளில் உள்நோக்கிச் செயல்படும்.

கிடைத்தளம் *BC*யை நிலையான நேர் கோடாகக் கொள்க இக்கோட்டிற்கு மேல் *M, N* ஆகியவற்றின் தூரம் $a \cos \alpha$.

*R*ன் உயரம் $= PB \cos \alpha = \frac{3}{2}(2a) \cos \alpha = \frac{4}{3} a \cos \alpha.$

கயிற்றின் நீளம் $= EF = 2 \times AE \sin\alpha = 2 \times \frac{2}{3}(2a) \sin \alpha = \frac{8}{3} a \sin \alpha.$

இப்பொழுது, இந்த ஏணிப்படிக்கு ஒரு சிறு கற்பித இடப்பெயர்ச்சி கொடுக்கவும். எனவே, ∝ ஆனது $(\alpha+\delta\alpha)$ ஆக மாறுமென்று கொள்க. *M, N, R* ஆகிய புள்ளிகளில் எடைகள்

கீழ் நோக்கிச் செயல்படுவதாலும், நிலேயான கிடைக்கோடாகிய PCயிலிருந்து இவற்றின் உயரம் மேல் நோக்கி அளவிடப்படுவதாலும், இப்புள்ளிகளில் செயல்படும் நிறைகளால் செய்யப்படும் கற்பித வேலேகள் எதிரடையாளமுடையவனவாகயிருக்கும். கயிற்றின் இழுவிசை உள்நோக்கிச் செயல்படுவதாலும், இடப் பெயர்ச்சியின் காரணமாக இவை வெளிநோக்கி நீட்சிபெறுமாகையாலும் இழுவிசையால் செய்யப்படும் கற்பித வேலேயும் எதிரடையாள முடையதாகயிருக்கும். எனவே, கற்பித வேலேச் சமன்பாடு வருமாறு :—

$$-W.\delta\ (\tfrac{4}{3}a\cos\alpha) - W_1\delta\ (a\cos\alpha) - W_1\delta\ (a\cos\alpha\ (- T\cdot\delta\ (\tfrac{8}{3}a$$
$$\sin\alpha) = O$$

$$-W.\ (\tfrac{4}{3}a\sin\alpha\ \delta\alpha) = 2W_1(-a\sin\alpha\ \delta\alpha) - Y\ (\tfrac{8}{3}a\cos\alpha\ \delta\alpha) = O$$
$$\delta\alpha \neq O.$$

$$\therefore \tfrac{4}{3}Wa\sin\alpha + 2W_1\ a\sin\alpha - \tfrac{8}{3}\ Ta\cos\alpha = O.$$

$$\tfrac{8}{3}T\cos\alpha = \tfrac{4}{3}W\sin\alpha + 2W_1\sin\alpha$$
$$= 2\sin\alpha\ (\tfrac{2}{3}W + W_1)$$

$$\because T = \frac{3}{8\cos\alpha}.2\sin\alpha\left(\frac{2}{3}W + W_1\right)$$

$$= \frac{3}{4}\tan\alpha\left(\frac{2}{3}W + W_1\right)$$

$$= \tan\alpha\ (\tfrac{1}{2}W + \tfrac{3}{4}W_1)$$
$$= \tfrac{1}{2}\ (W + \tfrac{3}{2}W_1)\tan\alpha.$$

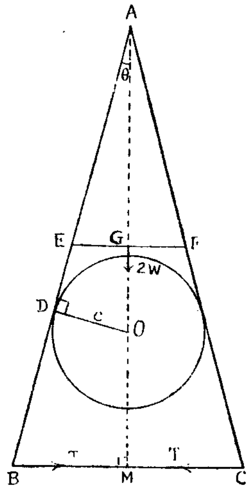
மாதிரி 178 a நீளமும், W எடையுமுள்ள AB, AC என்னும் இரு சமமான சீரான கோல்கள் Aயில் தாராளமாக இணைக்கப்பட்டு, Cஆரையுள்ள ஒரு வழவழப்பான உருளேயின் மேல் குறுக்காகயிருக்குமாறு ஒரு நிலேக்குத்துத் தளத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ளன. B,C ஆகிய முனேகள் l நீளமுள்ள ஒரு விறைப்பான கயிற்றினுல் உருளேயைத் தொடாதவாறு இணைக்கப்பட்டுள்ளன. கயிற்றின் இழுவிசை

$$W\left[\frac{4ac}{l^2} - \frac{l}{2\sqrt{4a^2 - l^2}}\right]$$

என்று காட்டுக.

தீர்வு

கோல்களின் வழியே செல்லும் நிலைக்குத்துத் தளத்தின் குறுக்கு வெட்டுப் பகுதி படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளது. O என்பது உருளையின் குறுக்கு வெட்டுப் பகுதி வட்டத்தின்



படம் 240

மையம். கோல்களின் எடைகள் அவற்றின் நடுப்புள்ளிகளாகிய E,Fஇல் செய்யப்படுமாகையால், இரு கோல்களின் மொத்த எடை 2W ஆனது, E, Fஇன் நடுப்புள்ளி Gயில் செயல்படும்.

$AB = AC = a$; OD = உருளையின் ஆரை $= c$ BC = கயிற்றின் நீளம் $= l$.

கயிற்றின் இழுவிசை Tயானது Bயிலும் Cயிலும் உள் நோக்கிச் செயல்படும். O ஐ நிலையான புள்ளியாகக் கொள்க. $\angle BAO = \theta$ என்க.

சமநிலையில் BO ஆனது BCக்குச் செங்குத்தாகயிருக்கும்.

$$\sin\theta = \frac{BM}{AB} = \frac{l/2}{a} = \frac{l}{2a}$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{l}{\sqrt{4a^2 - l^2}}$$

Oவிலிருந்து Gயின் உயரம் $= GO = AO - AG$

$$= OD \operatorname{cosec} \theta - AE \cos \theta$$

$$= (c \operatorname{cosec} \theta - \frac{a}{2} \cos\theta)$$

கயிற்றின் நீளம் $= BC = 2\ BM = 2a \sin \theta$.

இப்பொழுது, ஒருசிறு கற்பித இடப் பெயர்ச்சி கொடுக்கவும். இதன் காரணமாக θ ஆனது $(\theta + \delta\theta)$ ஆகமாறுமென்று கொள்க.

இருகோல்களின் எடைகளும் Gயில் கீழ்நோக்கிச் செயல் படுவதாலும், O-விலிருந்து Gயின் தூரம் மேல் நோக்கி அளவிடப் படுவதாலும் $2W$-ஆல் செய்யப்படும் கற்பித வேலை எதிரடையாளமுடையதாகயிருக்கும். கயிற்றின் இழுவிசை உள்நோக்கிச் செயலபடுவதாலும், கயிறு வெளி நோக்கி நீளும் இயல்புடையதாலும் கயிற்றின் இழுவிசையால் செய்யப்படும் கற்பித வேலையும் எதிரடையாளமுடையதாகவே யிருக்கும். கற்பித வேலைச் சமன்பாடு வருமாறு :

$$-2W.\ \delta\,(c \operatorname{cosec} \theta - \frac{a}{2} \cos \theta) - .\ \delta(2a \sin \theta) = O$$

$$-2W\ (-\ c \operatorname{cosec}\theta.\cot \theta\ \delta\theta + \frac{a}{2} \sin \theta\ \delta\theta) - T\ (2a \cos\theta\,\delta\theta)$$

$$= O.\ \delta\theta \neq O\ \therefore\ T = \frac{2W\,(c \operatorname{cosec}\theta.\cot\theta - \frac{a}{2} \sin \theta)}{2a \cos \theta}$$

$$= W\left(\frac{c}{a}\,\frac{\operatorname{cosec}\theta.\cot\theta}{\cos \theta} - \tfrac{1}{2} \tan \theta\right)$$

$$= W\left(\frac{c}{a} \operatorname{cosec}^2 \theta - \tfrac{1}{2} \tan \theta\right)$$

$$= W\left(\frac{c}{a}\,.\ \frac{4a^2}{l^2} - \tfrac{1}{2}\,\frac{l}{\sqrt{4a^2 - b^2}}\right)$$

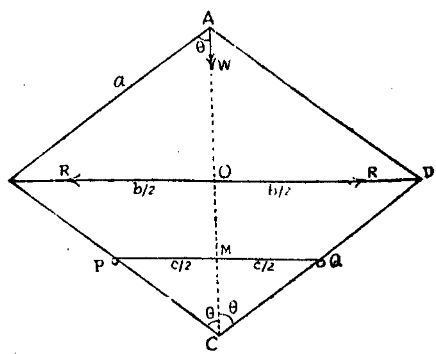
$$= W\left(\frac{4ac}{l^2} - \frac{l}{2\sqrt{4a^2 - l^2}}\right)$$

மாதிரி 179: *ABCD* என்னும் சாய்சதுரவடிவமான சட்டம் ஒன்று a நீளமுள்ள நான்கு சமமான இலேசான கோல்களை இணைத்து அமைக்கப்பட்டுள்ளது. இச்சட்டமானது, அதன் மூலைவிட்டம் *AC* நிலைக்குத்தாகவும், *BC, CD* ஆகிய கோல்கள் *C* இடைவெளியில் ஒரே கோட்டிலமைந்த இரு வழவழப்பான முளைகளுடன் தொடுகையிலிருக்குமாறும் வைக்கப்படுகிறது. *B,D* ஆகிய இணைப்புகளுக்கிடையே b நீளமுள்ள ஒரு இலேசான கோல் பொருத்தப்பட்டு அவ்விணைப்புகள் பிரிந்திருக்குமாறு செய்யப்படுகிறது. உச்சிப்புள்ளி *A*யில் வைக்கப்படும் *W* என்னும் எடை *BD*யில் $\dfrac{W(2a^2c-b^3)}{b^2(4a^2-b^2)^{1/2}}$ என்னும் அழுத்தத்தை உண்டு பண்ணுமென்று காட்டு.

(சென்னை எம்.எஸ்ஸி.1965)

தீர்வு

P,Q என்னும் முளைகளின் மேல் *ABCD* என்னும் சாய்சதுரம் *AC* நிலைக்குத்தாகயிருக்குமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது. *PQ* என்பன ஒரு கிடைக் கோட்டின் மேல் c இடை



படம் 241

வெளியிலுள்ளன.

$\therefore PQ=c.$

BD என்பது ஒரு இலேசான கோல். $BD=b$. *A*யில் வைக்கப்பட்டுள்ள எடை *W* கீழ் நோக்கி, நிலைக்குத்தாக *AC* வழியே செயல்படும். *BD*யில் அழுத்தம் *R* இரு முளைகளிலும் வெளிநோக்கிச் செயல்படும். கிடைக்கோடு *PQ*ஐ நிலையான கோடாக எடுத்துக் கொள்ளவும்.

PQ-விலிருந்து Aயின் உயரம் $= AM$

$$= AC - MC$$

$$= \left(2a \cos\theta - \frac{c}{2} \cot \theta\right)$$

$BD = 2a \sin \theta$. ஒரு சிறு கற்பித இடப்பெயர்ச்சி கொடுக்கவும்.

Aயில் எடை W கீழ்நோக்கிச் செயல்படுவதாலும், PQவிலிருந்து Aயின் உயரம் மேல் நோக்கி அளவிடப்படுவதாலும் Wவின் கற்பித வேலை எதிரடையாள முடனிருக்கும். BDயில் அழுத்தத்தின் கற்பித வேலை நேரடையாள முடையதாகயிருக்கும். எனவே, கற்பித வேலைச் சமன்பாடு வருமாறு :

$$-W.\delta\left(2a \cos \theta - \frac{c}{2} \cot \theta\right) + R\,\delta\,(2a \sin \theta) = O.$$

$$-W.\left(-2a \sin \theta\delta\theta + \frac{c}{2} \operatorname{cosec}^2\theta\delta\theta\right) + R\,(2a \cos \theta\delta\theta) = O.$$

$\delta\theta \neq Q.$ $\therefore R.2a \cos \theta = W\left(\frac{c}{2} \operatorname{cosec}^2\theta - 2a \sin \theta\right)$

$$\therefore R = \frac{W\left(\frac{c}{2} \operatorname{cosec}^2 \theta - 2a \sin \theta\right)}{2a \cos \theta}.$$

சமநிலையில், $\sin \theta = \frac{BO}{AB} = \frac{b/2}{a} = \frac{b}{2a}$

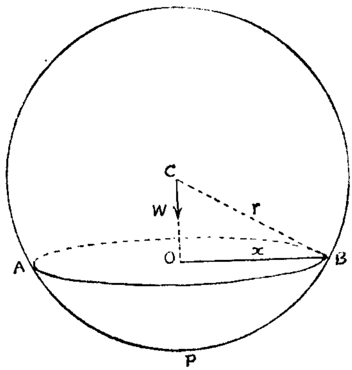
$$\therefore \operatorname{cosec}\theta = \frac{2a}{b},$$

$$\cos \theta = \left(1 - \frac{b^2}{4a^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2a}(4a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\therefore R = \frac{W\left(\frac{c}{2}.\frac{4a^2}{b^2} - b\right)}{(4a^2 - b^2)^{1/2}}$$

$$= \frac{(W(2a^2c - b^3)}{b^2(4a^2 - b^2)^{1/2}}$$

மாதிரி 180: r ஆரையும், w எடையுமுள்ள ஒரு வழவழப்பான கோளம், a ஆரையுள்ள ஒரு கிடைத்தள வட்டத் துவாரத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. அத்துவாரத்தைச் சுற்றி கோளத்தின் மேற்பரப்பின் மேல் ஒரு நூல் சுற்றப்பட்டு இறுக்கமாக இழுக்கப்பட்டுள்ளது. நூலானது கோளத்தை மேலே தூக்கும் தருவாயிலிருக்கும்போது நூலின் இழுவிசை என்ன?



படம் 242

தீர்வு

AB என்பது துவாரம். O என்பது துவாரத்தின் மையம். APB என்பது துவாரத்தினுள்ளிருக்கும் கோளப் பகுதி. AB வழியே கோளத்தைச் சுற்றி நூல் சுற்றப்பட்டு இழுக்கப்பட்டுள்ளது. இந்நூல் வட்டத்தின் ஆரை x என்க. எனவே, நூலின் நீளம் $2\pi x$ ஆகும். கோளத்தின் எடை W அதன் மையத்தில் நிலைக்குத்தாகக் கீழ்நோக்கிச் செயல்படும். துவாரம் ABயின் கிடைத்தளத்தை நிலையானதாகக் கொள்க. இத்தளத்தின் மேல் Cயின் உயரம் $= CO = \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)$ ஆகும். இத்தூரம் மேல் நோக்கி அளவிடப்படுவதாலும், W கீழ்நோக்கிச் செயல்படுவதாலும் Wஆல் செய்யப்படும் கற்பித வேலை எதிரடையாள முடையதாகயிருக்கும். எனவே, கற்பித வேலைச் சமன்பாடு வருமாறு :

$$-W\delta.\left(\sqrt{r^2 - x^2}\right) - T.\delta\,(2\pi\alpha) = O.$$

$$-W,\left(\frac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}}\right)\delta x - T\,(2\pi\delta\alpha) = O.$$

$$\delta x \neq O. \quad \therefore \frac{Wx}{\sqrt{r^2 - x^2}} - T.2\pi = O.$$

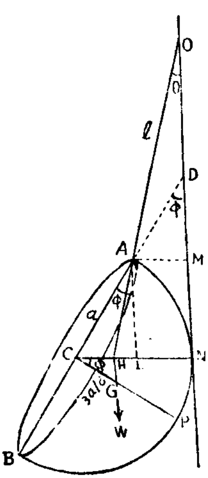
$$\therefore T = \frac{Wx}{2\pi\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

சமநிலையில் $x = a$ ஆகையால்,

$$T = \frac{Wa}{2\pi\sqrt{r^2 - a^2}}.$$

இருசமன்பாட்டுப்படி கொண்ட தொகுதிகள்
(Systems having two Degrees of Freedom)

மாதிரி **181:** ஒரு திண்ம அரைக்கோளம் அதன் விளிம்பின் ஓரத்திலுள்ள ஒரு நிலையான புள்ளியுடனும், ஒரு வழவழப்பான நிலைக்குத்துச் சுவரின் மேலுள்ள ஒரு புள்ளியுடனும் இணைக்கப்பட்ட ஒரு நூலின்மூலம் அச்சுவரின் மேல் அரைக்கோளத்தின் வளைபரப்புத் தொடுகையிலிருக்குமாறு தாங்கப்படுகிறது. θ, ϕ என்பன நிலைக்குத்துடன் முறையே நூல், அரைக்கோளத்தின் அடித்தளம் ஆகியவற்றின் சாய்வுகளெனில், $\tan\phi = \frac{3}{8} + \tan\theta$ என்று நிறுவுக.



படம் 248

தீர்வு

C என்பது திண்ம அரைக் கோளத்தின் அடித்தள மையம், A என்பது அரைக்கோளத்தின் விளிம்பில் நூல் கட்டப்பட்டுள்ள புள்ளி. O என்பது சுவரில் நூல் கட்டப்பட்டுள்ள புள்ளி G என்பது அரைக் கோளத்தின் புவியீர்ப்பு

மையம். எனவே, a என்பது அரைக் கோளத்தின் ஆரையெனில்.

$$CG=\frac{3a}{8}.$$

AO = நூலின் நீளம் $=l$ என்க. Oஐ நிலையான புள்ளியாகக் கொள்க. அரைக்கோளத்தின் எடை W ஆனது Gயில் நிலைக்குத்தாகக் கீழ்நோக்கிச் செயல்படும்.

∴ Oவிலிருந்து Gயின் தூரம் $=QM+AL++HG=l\cos\theta+a\cos\phi+\frac{3a}{8}\sin\phi$.

நூலின் நீளத்தில் எவ்வித மாறுதலும் ஏற்படாமல், Gயில் மட்டும் இடப்பெயர்ச்சியேற்படுமாறு ஒரு சிறு கற்பித இடப்பெயர்ச்சி யேற்படுமாறு ஒரு சிறு கற்பித இடப்பெயர்ச்சி கொடுக்கப்படுவதாகக் கருதுக. எனவே, θ, ϕ என்பன முறையே $(\theta+\delta\theta)$, $(\phi+\delta\phi)$ என்று மாறுவதாகக் கொள்க. எனவே, கற்பித வேலைச் சமன்பாடு வருமாறு ;—

$$W.\delta\left(l\cos\theta+a\cos\phi+\frac{3a}{8}\sin\phi\right)=O.$$

அதாவது, $-l\sin\theta\;\delta\theta-a\sin\phi\delta\phi+\frac{3a}{8}\cos\phi\delta\phi=O$......(1)

மேலும், $CN=CH+AM$ = கிடைக்கோட்டில் CAயின் வீச்சு $+AO$வின் வீச்சு. ஆனால் CA, AO என்பன மாறிலியாகையால், GNம் ஒருமாறிலியாகும்.

அதாவது, $\delta(CN)=O$ ஆகும்,

ஆனல், $CN=CH=AM$

$$=a\sin\phi+l\sin\theta.$$

$\therefore\delta(CN)=a\cos\phi\delta\phi+l\cos\theta\delta\theta=O$......(2)

$(1)\times\cos\theta=-l\sin\theta\cos\theta\delta\theta-a\cos\theta\sin\phi\delta\phi+\frac{3a}{8}\cos\theta\cos\phi\delta\phi=O$

$(2)\times\sin\theta=\quad l\sin\theta\cos\theta\;\delta\theta+a\sin^2\theta\cos\phi\;\delta\phi\qquad=O$

கூட்டவும். $\delta\phi\left[a\sin\theta\cos\phi-a\cos\theta\sin\phi+\frac{3a}{8}\cos\theta\cos\phi\right]=O.$

$d\varphi \neq O.$ $\quad \therefore \sin\theta\cos\phi - \cos\theta\sin\phi + \frac{3}{8}\cos\theta\cos\phi = O.$

$$\therefore \cos\theta\sin\phi = \sin\theta\cos\phi + \tfrac{3}{8}\cos\theta\cos\phi$$

$$= (\sin\theta + \tfrac{3}{8}\cos\theta)\cos\phi.$$

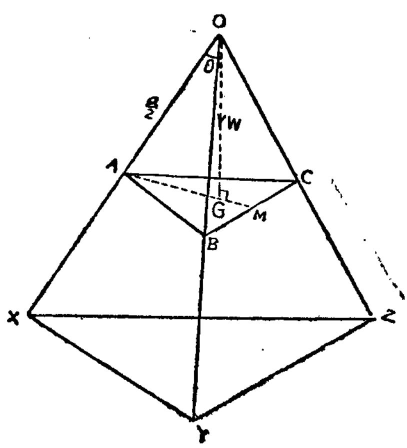
$$\therefore \frac{\sin\phi}{\cos\phi} = \frac{\sin\theta + \frac{3}{8}\cos\theta}{\cos\theta}$$

$$\tan\phi = \tan\theta + \tfrac{3}{8}.$$

மாதிரி 183 a நீளமும், w எடையுமுள்ள மூன்று சமமான சீரான கோல்களின் முனைகள் ஒன்ருக தாரளமான முறையில் இணைக்கப்பட்டு அமைக்கப்பெற்ற ஒரு முக்காலியின் மூன்று கால்களின் நடுப்புள்ளிகளும் b நீளமுள்ள கயிறுகளினுல் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. இந்த முக்காலியானது அதன் மறு முனைகள் ஒரு வழுவழுப்பான கிடைத்தளத்தின் மேலிருக்குமாறு வைக்கப்பட்டு, அதன் பொது முனையில் W என்னும் ஒரு எடை வைக்கப்படுகிறது. ஒவ்வொரு கயிற்றிலுமுள்ள இழுவிசை

$\frac{1}{3}(2W+3w)\dfrac{b}{\sqrt{9a^2-12b^2}}$ என்று காட்டு.

(சென்னை எம், எஸ்ஸி. 1966)



படம் 244

தீர்வு

QX, OY, GZ என்பன முக்காலியின் கால்கள். A, B, C என்பன அவற்றின் நடுப்புள்ளிகள்.

$OX = OY = OZ = a.$

$\therefore\ OA = OB = OC = \frac{a}{2}.$

AR, *BC*, *CA* என்பன *b* நீளக் கயிறுகளால் இணைக்கப் பட்டுள்ளன.

$AB = BC = CA = b.$

*O*வில் *W* என்னும் எடை வைக்கப்பட்டுள்ளது. மூன்று கால்களின் எடைகளும் *A*, *B*, *C* ஆகியவற்றில் செயல்படுமா கையால், இம் மூன்று எடைகளும் சேர்ந்து △*ABC*யின் திணிவு மையம் *G* வழியே செயல்படும். அதாவது, *G*யில் 3*W* எடை கீழ்நோக்கிச் செயல்படும். எனவே, *OG* ஆனது நிலைக்குத் தாகும்.

OX, *OY*, *OZ* என்பன மாறுதவாறு ஒரு சிறு இடப்பெயர்ச்சி கொடுக்கவும். ஆனல் கால்களின் பொது முனை சற்று கீழே இறங்கும். நிலைக்குத்துடன் கால்களின் சாய்வு θ ஆகயிருக்கும் போது, ஒவ்வொரு கயிற்றின் நீளமும் *l* என்க.

$\underline{|OGA} = 90^\circ$ ஆகையால், $AG = \frac{a}{2}\sin\theta.$

$$AM = AC\cos 30^\circ = l\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\because AG = \frac{2}{3}.AM = \frac{2}{3}.\ \frac{\sqrt{3}}{2}\ l = \frac{l}{\sqrt{3}}.$$

$$\therefore \frac{l}{\sqrt{3}} = \frac{a}{2}\sin 0.$$

அல்லது, $l = a\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta.$

இப்பொழுது *XYZ* என்பது நிலையான கிடைத்தளமாகை யால், இத்தளத்திலிருந்து *O*வின் உயரத்தைக் காண்க.

XYZ தளத்திலிருந்து *O*வின் உயரம் $= a\cos\theta.$

XYZ தளத்திலிருந்து Gயின் உயரம் $= \frac{a}{2}\cos\theta$.

இப்பொழுது சிறு கற்பித இடப்பெயர்ச்சியின் காரணமாக Oவிலுள்ள W எடை, Gயிலுள்ள $3W$ எடை ஆகியவை செய்யும் கற்பித வேலைகள் எதிரடையாள முடையவையா யிருக்கும். மூன்று கயிறுகளிலும் செயல்படும் $T, T. T$ என்னும் இழுவிசைகளினுல் செய்யப்படும் கற்பித வேலைகளும் எதிரடையாள முடையவையாயிருக்கும் எனவே, கற்பித வேலைச் சமன்பாடு வருமாறு :—

$$-W.\delta\,(a\cos\theta)-3w\delta\left(\frac{a}{2}\cos\theta\right)-3T.\,\delta\left(a\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 0\right)-O.$$

$$-W(-a\sin\theta\delta\theta)-3\,w\left(-\frac{a}{2}\sin\theta\, d\,\theta\right)-3^{T}\left(a\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\,\delta 0\right)=O.$$

$\delta\theta\neq O$. ஆகவே,

$$3T\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta=W\sin\theta+\frac{3}{2}w\sin\theta.$$

$$=\left(W+\frac{3}{2}w\right)\sin\theta.$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{2}T=\frac{2W+3w}{2}\tan\theta.$$

$$T=\frac{2W+3w}{2}\tan\theta.$$

ஆனல்; $OA=\frac{a}{2}$,

$$AG=\frac{2}{3}AM=\frac{2}{3}.AB\cos 30^\circ=\frac{2}{3}.b.\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{b}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \triangle OGA\text{யில்},\ OG^2 = OA^2 - AG^2$$

$$= \frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{3}$$

$$= \frac{3a^2 - 4b^2}{12}$$

$$\therefore OG = \frac{\sqrt{3a^2 - 4b^2}}{2\sqrt{3}}$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{AG}{OG} = \frac{b/\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3a^2 - 4b^2}}{2\sqrt{3}}} = \frac{2b}{\sqrt{3a^2 - 4b^2}}$$

$$\therefore T = \frac{2W + 3w}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{2b}{\sqrt{3a^2 - 4b^2}}$$

$$= \tfrac{2}{3}(2W + 3w)\frac{b}{\sqrt{9a^2 - 12b^2}}.$$

(1) ஆறு சமமான, கனமான, சீரான கோல்கள் ஓர் ஒழுங்கு அறு கோணமாக அமையும் வண்ணம் அதன் முனைகளில் இறுக்கமின்றி இணைக்கப்பட்டுள்ளன. ஒரு கோல் கிடைநிலையில் அசையாதவாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது. மேலேயுள்ள சாய்வான இருகோல்களின் நடுப் புள்ளிகளும் ஒரு இலேசான கயிற்றினால் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. கிடைத்தளத்துடன் சாய்வுக் கோல்களின் சாய்வுக் கோணம் θ. ஒவ்வொரு கோலின் எடையும் W எனில், கயிற்றின் இழுவிசை $6W\cot\theta$ என்று காட்டு.

(2) நான்கு சீரான கோல்கள் ஒன்றுடன் ஒன்று அவற்றின் முனைகளில் இறுக்கமற்ற நிலையில் இணைக்கப்பட்டு $ABCD$ என்னும் நாற்கரமாக அமைகிறது. AB, AD ஆகிய கோல்கள் சமமாக வுள்ளன. BC, CD ஆகிய சமமான கோல்கள் கீழே தொங்கிக்கொண்டிருக்குமாறு நாற்கரமானது Aயிலிருந்து தொங்கவிடப் பட்டுள்ளது. $\underline{|ABC}$ ஒரு நேர் கோணமாக யிருக்குமாறு Aயும் Cயும் ஒரு நூலினால் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. மேலேயுள்ள கோல்கள் ஒவ்வொன்றின் எடை W; கீழேயுள்ள

கோல்கள் ஒவ்வொன்றின் எடை W'; $\underline{|BAD} = 2\theta$ எனில், கயிற்றின் இழுவிசை $(W+W')\sin^2\theta + W'$ என்று காட்டு.

(3) ஆறு சமமான, சீரான கோல்கள் அவற்றின் முனைகளில் ஒன்றுடன் ஒன்று இறுக்கமற்று இணைக்கப் பெற்று $ABCDEF$ என்னும் ஒழுங்கு அறு கோணமாக அமைகின்றன. AB என்னும் கோல் கிடை நிலையில் அசையாதவாறு வைக்கப் பட்டுள்ளது. AB, DE ஆகியவற்றின் நடுப் புள்ளிகள் ஒரு நூலினால் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. நூலின் இழுவிசை $3W$ என்று காட்டு.

(4) $ABCDEF$ என்னும் ஒழுங்கு அறுகோணம் முனைகளில் ஒன்றுடன் ஒன்று இறுக்கமற்று இணைக்கப்பட்ட W எடையுள்ள ஆறு சமமான கோல்களைக் கொண்டது. AB என்ற கோல் ஒரு கிடையான மேசையின் மேல் தொடுகையிலிருக்குமாறு அறு கோணம் ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் நிறுத்திவைக்கப் பட்டுள்ளது. Cயும் F-ம் ஒரு இலேசான நூலினால் இணைக்கப் பட்டுள்ளன. நூலின் இழுவிசை $W\sqrt{3}$ என்று நிறுவுக.

(5) ஆறு சமமான கோல்கள் அவற்றின் முனைகளில் இறுக்கமற்று இணைக்கப்பட்டு $ABCDEF$ என்னும் ஒரு ஒழுங்கு அறு கோணமாக அமைகின்றன. AB என்னும் கோல் உச்சியில் கிடை நிலையிலிருக்குமாறு, ஒழுங்கு அறுகோணத்தின் வடிவம் குலையாமலிருக்க BC, CD ஆகியவற்றின் நடுப்புள்ளிகளும், AF, EF ஆகியவற்றின் நடுப்புள்ளிகளும் இரு நிலைக்குத்து நூற்களினால் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. ஒவ்வொரு நூலிலும் இழுவிசை ஒரு கோலின் எடையைப்போல் மூன்று மடங்கு இருக்குமென்று நிறுவுக.

(6) ஐத்து சமமான, சீரான கோல்கள் அவற்றின் முனைகளில் இறுக்கமற்று இணைக்கப்பட்டு $ABCDE$ என்னும் ஒழுங்கு ஐங்கோணமாக அமைகின்றன. BE ஆனது ஒரு கனமில்லாத கோலினால் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இச்சட்டமானது Aயிலிருந்து ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் தொங்கவிடப் பட்டுள்ளது. ஒரு கோலின் எடை W எனில், கோல் BEயிலுள்ள அமுத்தம் $W\cot\frac{\pi}{10}$ என்று காட்டு.

(7) நான்கு சீரான கோல்கள் $ABCD$ என்னும் இணைகரமாக அமையும் வண்ணம் இறுக்கமற்று இணைக்கப்பட்டு A யிலிருந்து தொங்கவிடப் பட்டுள்ளன. இணைகரத்தின் வடிவம் குலையாமலிருக்க Aயும் Cயும் ஒரு நூலினால் இணைக்கப் பட்டுள்ளன. நூலின் இழுவிசை நான்கு கோல்களின் மொத்த எடையில் பாதியென்று காட்டு.

(8) a நீளமுள்ள நான்கு சமமான கோல்கள் முனைகளில் இறுக்கமற்று இணைக்கப்பட்டு ஒரு முனையிலிருந்து தொங்க விடப்பட்டுள்ளன. இம் முனையும் எதிர் முனையும் ஒரு மீள் சக்தியுடைய நூலினால் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. கோல்கள் ஒரு சதுரவடிவில் தொங்குகின்றன. நூலின் மீள் தன்மைக் குணகம் ஒரு கோலின் எடைக்குச் சமமெனில், நூலின் இயல்பான நீளம் $\frac{a\sqrt{2}}{3}$ என்று காட்டு.

(9) ஐந்து எடையில்லாத சமநீளக் கோல்கள் $ABCD$ என்னும் சாய் சதுரமும் அதன் ஒரு மூலைவிட்டம் BDயுமாக அமையும் வண்ணம் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. Cயில் ஒரு எடை W பொருத்தப்பட்டு, இத்தொகுதியானது Aயிலிருந்து தொங்க விடப்பட்டுள்ளது. BDயில் $\frac{1}{\sqrt{3}}W$க்குச் சமமான அழுத்தம் இருக்கிறதென்று காட்டு.

(10) w எடையுள்ள நான்கு சமமான, சீரான கோல்கள் $ABCD$ என்னும் சாய்சதுரமாக அமையுமாறு இருக்கமற்று இணைக்கப்பட்டுள்ளன. B,C,D ஆகிய ஒவ்வொரு முனையில் W என்னும் ஒரு எடை பொருத்தப்பட்டு, சட்டமானது Aயிலிருந்து தொங்கவிடப் பட்டுள்ளது. B,Dஆகியவற்றில் கிடைத்தளமாகச் செயல்படும் P அளவுள்ள இரு விசைகள் $\angle BAD$ கோணத்தை $120°$க்குச் சமமாக வைத்திருக்கிறதெனில் $P=(W+w)2\sqrt{3}$ என்று காட்டு.

(11) a நீளமும், w எடையுமுள்ள நான்கு சீரான கோல்கள் $ABCD$ என்னும் சாய் சதுரமாக அமையுமாறு வழவழப்பான இணைக்கப்பட்டுள்ளன. இச்சாய்சதுரம் Aயிலிருந்து தொங்க விடப்பட்டு BD என்னும் இலேசான கோலின் மூலம் சாய் சதுர வடிவம் குலையாமல் பாதுகாக்கப் பட்டுள்ளது. r ஆரையும், w, எடையுமுள்ள ஒரு சீரான வட்டத் தகடு $\triangle BCD$ யினுள்ளே அதன் தளம் நிலைக்குத்தாக யிருக்குமாறும், அதன் வழவழப் பான விளிம்பு BC, DC யுடன் தொடுகையிலிருக்குமாறும்

அதன் உச்சிப் புள்ளி BDக்குக் கீழேயிருக்குமாறும் வைக்கப் படுகிறது. $\angle BAC = \theta$ எனில், BDயிலுள்ள அழுத்தம்

$$(2\omega+\omega_1) \tan\theta - \frac{\omega_1}{\sin^2\theta} \cdot \frac{r}{2a}$$

என்று காட்டு.

(12) $ABCDEF$ என்னும் ஒரு ஒழுங்கு அறு கோணமும் அதன் மூலை விட்டம் ADயும் இலேசான கோல்களின் முனைகளை வழவழப்பாக இணைத்து அமைக்கப்பட்டுள்ளன. AB, CD, DE, FA ஆகிய பக்கங்களின் நடுப் புள்ளிகள் வழியே, பக்கங் களுக்குச் செங்குத்தாக, உட்புறம் நோக்கி Pக்குச் சமமான நான்கு விசைகள் செயல்படுகின்றன. கோல் ADயிலுள்ள அழுத்தம் $\frac{P}{\sqrt{3}}$ என்று காட்டு.

(13) AC என்னும் மூலைவிட்டத்துடன் கூடிய $ABCD$ என்னும் ஒரு சாய்சதுரச் சட்டம் ஐந்து கோல்களினாலானது. பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகளில் பக்கங்களுக்குச் செங்குத்தாக உட்புறம் நோக்கி Pக்குச் சமமான நான்கு விசைகள் செயல் படுகின்றன. $\angle BAC = \theta$ எனில், ACயிலுள்ள அழுத்தம் $\frac{P\cos 2\theta}{\sin\theta}$ என்று நிறுவுக.

(14) $2l$ நீளமுள்ள AB, AC என்னும் இருசமமான, சீரான கோல்கள் Aயில் இறுக்கமற்று இணைக்கப்பட்டு, a ஆரையுள்ள ஒரு வழவழப்பான நிலைக்குத்து வட்டத்தின் மேல் வைக்கப் பட்டுள்ளன. அவற்றிற் கிடையேயுள்ள கோணம் 2θ எனில் $b\sin^3\theta = a\cos\theta$ என நிறுவுக.

(15) $2l$ நீளமுள்ள இரு சமமான, சீரான கோல்கள் அவற்றின் ஒரு முனைகளில் இறுக்கமற்று இணைக்கப்பட்டு, $2a$ விட்டமுள்ள ஒரு வழவழப்பான நிலைக்குத்து வட்டத்தின் பரிதியின் மேல் வைக்கப்பட்டுள்ளன. சமநிலையில் நிலைக்குத்துடன் ஒவ்வொரு கோலின் சாய்வும் $\operatorname{cosec}^2\theta . \cot\theta = l/a$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலம் தரப்படுகிறதென்று காட்டு.

(16) l நீளமும், ω எடையுமுள்ள நான்கு கோல்களின் முனைகள் இறுக்கமற்று இணைக்கப்பட்டு $ABCD$ என்னும் சாய் சதுரமாக அமைக்கப்பட்டுள்ளன. கீழ்முனை Cயில் W என்னும்

ஒரு எடை பொருத்தப்பட்டு, ஒரே கிடைக் கோட்டின் மேலுள்ள இரு முனைகளின்மேல் AB, AD என்னும் கோல்கள் தொடுகையிலிருக்குமாறு சட்டம் வைக்கப்பட்டுள்ளது. Bயும் Dயும் ஒரு நூலினால் இணைக்கப்பட்டு ஒரு கிடைக் கோட்டின் மேலுள்ளன. முனைகளுக்கிடையேயுள்ள தூரம் $2c$, கோணம் $A = 2\alpha$ எனில், நூலின் இழுவிசை

$$\tan\alpha\left\{\frac{c}{2l}(W+4\omega)\operatorname{cosec}^3\alpha-(W+2\omega)\right\}$$

என்று காட்டு.

(17) lநீளமும், புறக்கணிக்கத் தக்க அளவில் எடையுமுள்ள நான்கு கோல்கள் வழவழப்பான பிணையல்களின் மூலம் இணைக்கப்பட்டு $ABCD$ என்னும் சாய்சதுர வடிவில் அமைக்கப்பட்டுள்ளன. அதன் மிகத் தாழ்ந்த பிணையல் Cயில் W என்னும் எடை பொருத்தப்பட்டு, ஒரே கிடைக் கோட்டிலமைந்த இரு முனைகளின் மேல் AB, AB என்னும் கோல்கள் தொடுகையிலிருக்குமாறு அச்சட்டம் வைக்கப்பட்டுள்ளது. Bயும், Dயும் ஒரு நூலினால் இணைக்கப்பட்டு ஒருகிடைக் கோட்டின் மேலிருக்கின்றன. இரு முனைகளுக்குமிடையேயுள்ள தூரம் $2c$, $A = 2\alpha$ எனில், நூலின் இழுவிசை $W\tan\alpha\left(\frac{c}{2l}\operatorname{cosec}^3\alpha-1\right)$

என்று காட்டு.

(18) ஒரு முக்காலி lநீளமுள்ள மூன்று கால்களைக் கொண்டது. அதன் கால்கள் நிலைக்குத்துடன் θ கோணச் சாய்விலிருக்கின்றன. கால்கள் எவ்வளவு அகலமாக விரிக்கப்பட்டாலும் அவற்றின் குறுக்குவெட்டு எப்பொழுதும் சமபக்க முக்கோணமாகவேயிருக்கும். முக்காலி ஒரு வழவழப்பான தளத்தின் மேல் வைக்கப்பட்டு, அதன் கால்கள் விரிந்து விடாமல் அவற்றின் அடிப்பக்கங்களைச் சுற்றிலும் ஒரு முடிவற்ற கயிற்றினால் கட்டப்பட்டுள்ளது. முக்காலியின் எடை அதன் உச்சியில் வைக்கப்பட்டுள்ள எடையுடன் சேர்த்து ω எனில் கயிற்றின் இழுவிசை

$$T=\frac{\omega}{3\sqrt{3}}\tan\theta$$

என்று காட்டு.

(19) W எடையும் l நீளமுள்ள நான்கு கோல்கள் வழவழப்பாக இணைக்கப்பட்டு ஒரு சாய்சதுரமாக அமைக்கப்பட்டுள்ளது. $2c$ இடைவெளியில் ஒரே மட்டத்திலுள்ள இரு முளைகளில் அதன் மேல் பக்கங்கள் தொடுகையிலிருக்குமாறு அது வைக்கக்கப்பட்டுள்ளது. அதன் மிகத் தாழ்வான புள்ளியில் W' என்னும் எடை வைக்கப்பட்டுள்ளது. சாய்சதுரத்தின் பக்கங்கள் நிலைக்குத்துடன் θ கோணச் சாய்விலிருந்தால்,

$$\sin^3 \theta = \frac{c\,(4W+W')}{l\,(4W+2W')}$$

என்று காட்டு.

(20) ABC என்னும் முக்கோணச் சட்டம் மூன்று இலேசான கோல்களைக் கொண்டது. AB, AC ஆகியவை ஒவ்வொன்றின் நீளம் a; BCயின் நீளம் $\frac{3a}{2}$. $2b$ இடைவெளியில் ஒரே கிடைக் கோட்டின் மேலுள்ள P, Q என்னும் இருமுளைகளின் மேல் AB, AC ஆகிய கோல்களிருக்குமாறும், BC கிடையாகவும் Aயானது BCக்குக் கீழேயும் இருக்குமாறு அது வைக்கப்பட்டுள்ளது. Aயிலிருந்து W என்னும் ஒரு எடை தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. கோல் BCயிலுள்ள அழுத்தம் $\frac{32b}{9\sqrt{7}a}W$ என்று காட்டு.

(21) உச்சி மேல் நோக்கி யிருக்குமாறு வைக்கப்பட்டுள்ள ஒரு வழவழப்பான நிலைக்குத்துக் கூம்பினைச் சுற்றி வட்டமான பட்டையைப் போன்று W எடையுள்ள ஒரு முடிவில்லாத சங்கிலி சுற்றப்பட்டுள்ளது. கூம்பின் உச்சிக் கோணம் 2α எனில், சங்கிலியின் எடையின் காரணமாக அதிலேற்படுகின்ற இழுவிசை $\frac{W}{2\pi}\cos\alpha$ என்று காட்டு.

(22) W எடையுள்ள ஒரு வழவழப்பான கூம்பு ஒரு வட்டத் துவாரத்தில் அதன் அச்சு நிலைக்குத்தாகயிருக்குமாறு தலைகீழாக நிறுத்தப்பட்டுள்ளது. துவாரத்தை யொட்டி கூம்பைச் சுற்றி ஒரு நூல் இருமுறை சுற்றப்பட்டு விறைப்பாக இழுக்கப்படுகிறது. கூம்பு மேலே எழும்பும் தருவாயிலிருக்கும் போது நூலின் இழுவிசை $\frac{W}{4\pi}\cot\alpha$ என்று காட்டு.

(23) $2\pi a$ இயல்பான நீளமுடைய ஒருகனமான மீளியல்புடைய நூல் அரையுச்சிக் கோணம் α-ம், அச்சு நிலைக்குத்தாகவும் கொண்ட ஒரு வழவழப்பான கூம்பினைச் சுற்றி சுற்றப்பட்டுள்ளது. நூலின் எடை W, மீள்சக்திக் குணகம் λ எனில், சமநிலையில் நூல் அமைந்துள்ள வட்டத்தின் ஆரை $a(1+\frac{W}{2\pi\lambda}\cot\alpha)$ என்று காட்டு.

(24) a நீளமுள்ள நான்கு இலேசான கோல்கள் A,B,C,D என்ற முனைகளில் இறுக்கமற்ற நிலையில் ஒரு சட்டமாக இணைக்கப்பட்டு Aயிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. B,Dயில் கட்டப்பட்டுள்ள l $(l \geqslant \sqrt{2})$ நீளமுள்ள இரு நூற்களின் மூலம் m என்னும் பொருண்மை தொங்கவிடப் பட்டுள்ளது. AC என்னும் நூலினல் இச்சட்டம் சதுர வடிவமாக வைக்கப் பட்டுள்ளது. இந்நூலின் இழுவிசை

$$\tfrac{1}{2}mg\left[\;1+\frac{a}{\sqrt{2l^2-a^2}}\;\right]$$

என்று காட்டு.

(25) நான்கு சீரான கோல்கள் ஒன்றுடன் ஒன்று அவற்றின் முனைகளில் இணைக்கப்பட்டு ஒரு நாற்கரமாக அமைந்துள்ளன. AB, AD ஆகியவை சமமாகவும், BC, CD ஆகியவை சமமாக வுள்ளன. இச்சட்டம் Aயிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. A, C ஆகிய முனைகள் ஒரு நூலினல் $\underline{|ABC}$ ஒரு நேர் கோண மாகயிருக்குமாறு இணைக்கப்பட்டுள்ளன. இந்நூலின் இழுவிசை $(W+W')\sin^2\theta+W'$ என்று காட்டு.

10. சங்கிலியம்

(CATENARY)

முற்றிலும் வளையும் தன்மை வாய்ந்த கயிறு, சங்கிலி ஆகியவற்றின் தன்மைகள் பற்றியும், தொங்கவிடப்பட்ட நிலையில் அவற்றின் சமநிலை இழுவிசை ஆகியவை பற்றியும் இங்கு நாம் ஆராய்வோம். ஒரு சங்கிலி அல்லது கயிறு அதன் எந்தப் புள்ளியிலும் எவ்விதத் தடையுமின்றி வளையக் கூடியதாயிருந்தால், அச்சங்கிலி அல்லது கயிறு "முற்றிலும் வளையும் தன்மை வாய்ந்த" (perfectly flexible) சங்கிலி அல்லது கயிறு எனப்படும்.

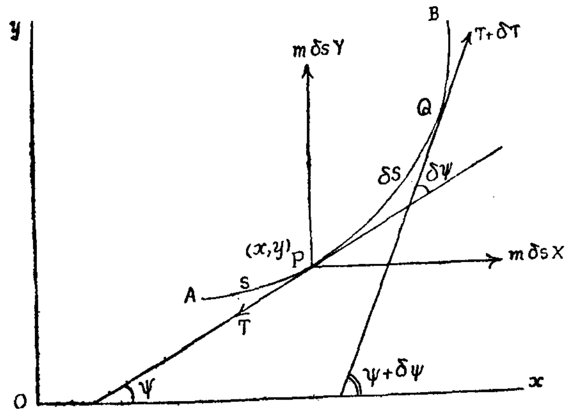
சங்கிலியம் அல்லது கயிற்றுவளை (Catenary)

ஒரு கனமான நீளியல்பற்ற கயிறு அல்லது சங்கிலி அதன் இரு முனைகளும் ஒரே கிடைக் கோட்டிலமைந்த இரு நிலையான புள்ளிகளில் பொருத்தப்பட்டு புவியீர்ப்பு விசையின் தாக்கத்தின் கீழ் தொங்குமேயானால், அதன் வடிவம் "கயிற்று வளை" அல்லது "சங்கிலியம்" (catenary) எனப்படும் வளைவரைவாகும். கயிறு அல்லது சங்கிலியின் ஒவ்வொரு அலகு நீளத்தின் பொருண்மையும் மாறிலியாக யிருந்தால் இச்சங்கிலியம் ஒரு "சீரான சங்கிலியம்" (uniform catenary அல்லது "பொதுச் சங்கிலியம்" அல்லது "சாதாரணக் கயிற்றுவளை common catenary) என்றழைக்கப்படும்.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள விசைகளின் செயற்பாடுகளின் கீழ் ஓய்வு நிலையிலிருக்கும் ஒரு கயிற்றின் சமநிலைச் சமன்பாடுகள்.

AB என்ற கயிறும், அக்கயிற்றில் செயல்படும் விசைகளும் ஒரே தளத்தில் இருப்பதாகக் கொள்க. இத்தளத்தில் Ox, Oy என்னும் நிலையான செங்குத்துத் திசைகளை x, y அச்சுக்களாக எடுத்துக் கொள்க. A என்பது கயிற்றில் ஒரு நிலையான புள்ளி.

கயிற்றின் மேல் இப்புள்ளியிலிருந்து s தூரத்தில் P என்னும் புள்ளியை எடுத்துக் கொள்க. இப்புள்ளி Pயின் ஆயத் தொலைகள் (x,y) என்க. கயிற்றின் மேல் Pக்கு அருகில் மிக நெருக்கமாக Qஎன்னும் புள்ளியை எடுத்துக் கொள்க. Aயிலிருந்து Qவின் தூரம் $s+\delta s$ என்றும், Q-வின் ஆயத் தொலைகள் $(x+\delta x, y+\delta y)$ என்றும் கொள்க. எனவே, வில்



படம் 245

$PQ=\delta s$. P,Q ஆகிய புள்ளிகளில் கயிற்றின் இழுவிசைகள் முறையே T, $T+\delta T$ என்க, கயிற்றின் மீது செயல்படும் விசைகள் யாவற்றையும் Ox, Oy ஆகிய திசைகளில் விசைப் பிரிப்பு செய்து, இத்திசைகளிலுள்ள விசைப்பிரிவுகளின் மொத்தங்களிலிருந்து கயிற்றின் ஒரு அலகு பொருண்மைக்கு இத்திசைகளில் செயல்படும் விசைப்பிரிவுகளின் வீதங்களைக் காண்க. இவ்விசைப் பிரிவு வீதங்கள் முறையே X, Y என்றும் ஒரு அலகு நீளக்கயிற்றின் பொருண்மை வீதம் m என்றும் கொள்க. எனவே, PQ என்ற விற்பகுதியின் பொருண்மை $m\,\delta s$ ஆகும் எனவே, இவ்விற்பகுதியில் செயல்படும் விசைகளின் விசைப்பிரிவுகள் Ox திசையில் $m\delta s.X$-ம்; oy திசையில் $m\delta s \cdot Y$-ம் ஆகும், Pயில் இழுவிசை T தொடுகோட்டின் வழியே கீழ்நோக்கியும், Qவில் இழுவிசை $T+\delta T$ தொடுகோடு வழியே மேல்நோக்கியும் செயல்படும். Ox உடன் இத்தொடுகோடுகளின் சாய்வுகள் முறையே ψ, $\psi+\delta\psi$ என்க. எனவே, இவ்விரு தொடுகோடுகளுக்கிடையேயுள்ள கோணம் $\delta\psi$ ஆகும். Pயில் செயல்படும் இழுவிசை Tயின் ox திசைக்கு இணையான விசைப் பிரிவு $T\cos\psi$ ஆகும். ஆனால், $\cos\psi = \frac{dx}{ds}$.

$\therefore T\cos\psi = T.\dfrac{dx}{ds}.$

ஆனல், இவ்விசைப் பிரிவு Pயின் நிலையைச் சார்ந்திருப்பதால் இதை sஇன் சார்பாக $f(s)$ என்று கூறலாம்.

அதாவது, $T.\dfrac{dx}{ds} = f(s).$

இவ்விசைப் பிரிவு XP திசையில் செயல்படும்.

இதுபோல், Qவில் செயல்படும் இழுவிசை $(T+\delta T)$ cos $(\psi+\delta\psi)$ ஆகும். இவ்விசைப் பிரிவு Qவின் நிலையைச் சார்ந்திருப்பதால் இதை $(s+\delta s)$இன் சார்பாக $f(s+\delta s)$ என்று கூறலாம்.

அதாவது, ox திசையில் $(T+\delta T)$யின் விசைப் பிரிவு

$$= f(s+\delta s)$$
$$= f(s)+\delta s.\frac{d}{ds} f(s)+ \ldots\ldots\ldots$$

தெயிலரின் தோற்றப்படி)

δs என்பது மிகச் சிறியதாகயிருப்பதால் δsஇன் இரண்டாம் படியும் அதற்கு மேற்பட்ட படிகளும் புறக்கணிக்கத் தக்க அளவில் மிகச் சிறியனவாக யிருக்குமாகையால் அவற்றைப் பூச்சியாக ஏற்றுக்கொள்ளலாம். எனவே, Ox திசையில் $(T+\delta T)$ யின் விசைப் பிரிவு $= f(s)+\delta s.\dfrac{d}{ds}.f(s)$ ஆகும். இது PX திசையில் செயல்படும்.

ஆகவே, PQவில் செயல்படும் எல்லா விசைகளின் Ox திசை வழிப் பிரிவுகள் XP திசையில் $f(s)$ம், PX திசையில் $m\delta s.X$

$f(s)+\delta s.\dfrac{d}{ds}.f(s)$ ஆகும்.

PQ சமநிலையிலிருப்பதால், $f(s) = m\delta x+X f(s)+\delta s.\dfrac{d}{ds}f(s.)$

அதாவது, $\delta s, \dfrac{d}{ds} f(s)+m.\delta sX = O.$

அல்லது, $\dfrac{d}{ds} f(s)+mX = O.$

ஆனால் $f(s) = T\frac{dx}{ds} \therefore \frac{d}{ds}\left(T.\frac{dx}{ds}\right) + mX = O$ ... ... (1)

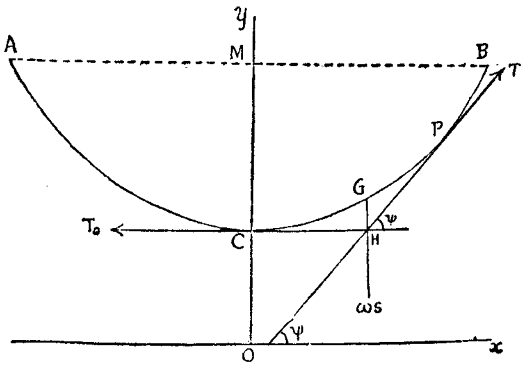
இதுபோல்' PQவில் செயல்படும் எல்லா விசைகளையும் OY திசையில் விசைப் பிரிப்பு செய்து சமநிலைச் சமன்பாடு

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right) + mY = O \quad ... \quad ... \quad (2)$$

என்று காணலாம். கயிற்றின் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும், X, Y, m என்பன தெரிந்தால் (1), (2) ஆகிய சமன்பாடுகளிலிருந்து அப் புள்ளியில் செயல்படும் இழுவிசை Tயையும், கயிற்று வளை வரையின் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டினையும் பெறலாம். (1), (2) ஆகிய சமன்பாடுகள் கயிற்றின் சமநிலைச் சமன்பாடுக ளாகும்,

பொதுச் சங்கிலியத்தின் சமன்பாடு
(Equation of the common cate nry

முனைகள் நிலையாகப் பொருத்தப்பட்டுப் புவியீர்ப்பு விசையின் கீழ் தொங்கும் ஒரு கயிற்று வளையின் சமன்பாடு காணல் :



படம் 24 6

ஒரே மட்டத்திலுள்ள A, B என்னும் இருநிலையான புள்ளி களில் ACB என்னும் சங்கிலியின் முனைகள் பொருத்தப்பட்டு புவியீர்ப்பு விசையின் கீழ் தொங்குகிறது. C என்பது சங்கி லியின் மிகத் தாழ்வான புள்ளி. எனவே, Cயில் சங்கிலியின் வளைவரைக்கு வரையப்படும் தொடுகோடு கிடையாகயிருக்கும்.

P என்பது சங்கிலியில் Cயிலிருந்து S தூரத்திலுள்ள ஏதேனு மொரு புள் ளி. எனவே, வில $CP = S$. ஒரு அலகு நீளச் சங்கி லியின் எடை W என்க. CP என்ற விற்பகுதியின் எடை $W\,S$ ஆகும். இது CPயின் நடுப்புள்ளி வழியே நிலைக்குத்தாகக் கீழ் நோக்கிச் செய ல்படும்.

Cயில் இழுவிசை T_0 ஆனது தொடுகோடு வழியே கிடைத் திசையில் செயல்படும். Pயில் இழுவிசை Tயானது தொடுகோடு வழியே மேல்நோக்கிச் செயல்படும், கிடைக்கோட்டுடன் Pயிலுள்ள தொடுகோட்டின் சாய்வு ψ என்க. CP என்ற விற் பகுதி சமநிலையிலிருப்பதால், ωs, T_0, T ஆகிய இம்மூன்று விசை களும் ஒரு புள்ளியில் (H–இல் என்க) சந்திக்கும்.

இவ்விசைகளைக் கிடைத்திசையிலும், நிலைக்குத்துத் திசை யிலும் விசைப் பிரிப்பு செய்து சமநிலைச் சமன்பாடுகள் அமைக்கவும்.

$$T \sin \psi = \omega s,$$

$$T \cos \psi = T_0.$$

சங்கிலியத்தின் தாழ்வுப் புள்ளியின் இழுவிசையாகிய Y_0 என்பது c நீளச் சங்கிலியின் எடைக்குச் சமமென எடுத்துக் கொண்டால்,

$$T_0 = \omega c \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore\ T \cos \psi = \omega c.$$

$$\therefore\ \tan \psi = \frac{T\sin\psi}{T\cos\psi} = \frac{\omega s}{\omega c} = \frac{s}{c}$$

அல்லது $s = c \tan \psi$.

இது சங்கிலியத்தின் "உள்ளீட்டச் சமன்பாடு" (Intrinsic Equation) என்றழைக்கப்படுகிறது. c என்பது பண்பளவை (Parameter) ஆகும்.

பொதுச் சங்கிலியத்தின் தேக்காட்டின் சமன்பாடு (Cartesian Equation of the Common Catenary)

$\tan \psi = \dfrac{dy}{dx}$ ஆகையால் சங்கிலியத்தின் உள்ளீட்டுச் சமன்பாட்டை

$$s = c.\ \frac{dy}{dx}$$

என்று எழுதலாம்.

$\dfrac{dy}{dx} = p$ என்று எழுதினால், $s = cp$ ஆகும்.

இரு பக்கமும் x-ஐப் பொறுத்த வகையீடு செய்க.

$$\therefore \frac{ds}{dx} = c.\frac{dp}{dx}.$$

$$\text{ஆனால்,} \frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1+p^2}.$$

$$\therefore \sqrt{1+p^2} = c.\frac{dp}{dx}.$$

$$dx = c.\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}}.$$

$$\text{அல்லது} \int dx = c.\int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}}$$

$$\therefore x = c.\sin h^{-1}(p)+k_1.$$

$$\text{அதாவது,} \quad x = c.\sin h^{-1}\left(\frac{dy}{dx}\right)+k_1.$$

இப்பொழுது, C-வழியே செல்லும் நிலைக்குத்தை y-அச்சாக எடுத்துக் கொண்டால்,

$$C\text{-ல்,} \quad x=O, \ \frac{dy}{dx}=O.$$

$$\therefore O = c.\sin h^{-1}(O)+k_1$$

$$\text{அல்லது,} \ k_1 = O.$$

$$\therefore x = c \sin h^{-1}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$\text{அல்லது,} \sin h^{-1}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{x}{c}$$

$$\frac{dy}{dx} = \sin h \frac{x}{c}.$$

$$dy = \sin h\frac{x}{c}.dx.$$

$$\therefore \int dy = \int \sinh \frac{x}{c} dx + k_2$$

அல்லது, $y = c \cosh \frac{x}{c} + k_2.$

இப்பொழுது, C-ன் கீழ் y அச்சில் c தூரத்தில் ஆதியை எடுத்துக் கொண்டால், $x = O$ எனில் $y = c$

$$\therefore \quad c = c \cosh (O) + k_2 = c + k_2$$

$$\therefore \quad k_2 = O.$$

ஆகவே, $y = c \cosh \frac{x}{c}$ ... ... (2)

இதுவே, பொதுச் சங்கிலியத்தின் தேக்காட்டின் சமன்பாடு (Cartesian equation of the common catenary) ஆகும்.

O வழியே செல்லும் கிடைக்கோடு (அதாவது x-அச்சு) பொதுச் சங்கிலியத்தின் 'இயக்கு வரை' (Directrix) எனப் படும். மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியாகிய C-யானது சங்கிலியத்தின் உச்சி (Vertex) எனப்படும். இந்த உச்சியின் வழியே செல்லும் நிலைக்குத்துக் கோடு (அதாவது y-அச்சு) சங்கிலியத் தின் 'சமச்சீர் அச்சு' (axis of symmetry) எனப்படும். சங்கிலியம் இச் சமச்சீர் அச்சினைச் சுற்றி இருபுறமும் சமச்சீராக யிருக்கும். சங்கிலியத்தின் முனைகள் பொருத்தப்பட்டுள்ள A, B என்னும் நிலையான கிடைக்கோட்டுப் புள்ளிகளுக்கிடையே யுள்ள தூரம் 'வளைவரை விட்டம்' (Span) என்றழைக்கப்படு கிறது. AB-லிருந்து C-யின் தாழ்வு 'தொய்யல்' அல்லது 'தொய்வு' (sag) என்றழைக்கப்படுகிறது.

சங்கிலியத்தின் தன்மைகள்

சங்கிலியத்தின் உள்ளீட்டுச் சமன்பாட்டிலிருந்து, அதன் தன்மைகள் பற்றிய பின்வரும் சமன்பாடுகளைப் பெறலாம்.

$$s = c \tan \psi.$$

$$\therefore \frac{ds}{d\psi} = c \sec^2 \psi.$$

ஆனால், $\frac{dx}{ds} = \cos\psi$

$$\therefore \quad \frac{dx}{d\psi} = \frac{dx}{ds} \cdot \frac{ds}{d\psi}$$

$$= \cos\psi . c \sec^2\psi.$$

$$= c \sec\psi.$$

$$\therefore \; dx = c \sec\psi \, d\psi.$$

$$\int dx = c \int \sec\psi \, d\psi + A.$$

அல்லது, $x = c \log(\sec\psi + \tan\psi) + A.$

ஆனால் $x = O$ எனில் $\psi = O \; \therefore A = O$ ஆகும்.

$\therefore \; x = c \log(\sec\psi + \tan\psi)$ .... (3)

மேலும், $\dfrac{dy}{d\psi} = \dfrac{dy}{ds} \cdot \dfrac{ds}{d\psi}$

$$= \sin\psi . c \sec^2\psi$$

$$= c \sec\psi \tan\psi.$$

$$\therefore \; dy = c \sec\psi \tan\psi \, d\psi$$

அல்லது, $\int dy = c \int \sec\psi \tan\psi \, d\psi + B.$

அதாவது, $y = c \sec\psi + B.$

ஆனால், $y = c$ எனில், $\psi = O \; \therefore B = O.$

$\therefore \; y = c \sec\psi.$ ... ... (4)

ஆகவே, $x = c \log(\sec\psi + \tan\psi)$

$$= c \log \frac{(c \sec\psi + c \tan\psi)}{c}$$

$$= c \log\left(\frac{y+s}{c}\right)$$

அதாவது, $x = c \log\left(\dfrac{y+s}{c}\right)$ ... ... (5)

மேலும், (4) -லிருந்து,

$$y^2 = c^2 \sec^2\psi$$

$$= c^2(1 + \tan^2\psi)$$

$$= c^2 + c^2 \tan^2\psi$$

$$= c^2 + s^2$$

அதாவது, $y^2 = c^2+s^2$ ... ... (6)

மேலும், (1) -லிருந்து, $s = c \tan \psi$

$$= c.\frac{dy}{dx}$$

$$= c \sin h\frac{x}{c}$$

அதாவது, $s = c \sin h\frac{x}{c}$ ... ... (7)

(5), (6) ஆகியவற்றிலிருந்து,

$$x = c\log\left(\frac{\sqrt{c^2+s^2}+s}{c}\right) \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (8)$$

என்று காணலாம்.

இப்பொழுது, M என்பது AB-ன் நடுப்புள்ளி என்க. எனவே, M ஆனது y-அச்சின் மேலிருக்கும். MC என்பது சங்கிலியத்தின் தொய்வு (sag) ஆகும். இத் தொய்வு h எனக் கொண்டால், $MC = h$ ஆகும். எனவே, சங்கிலியத்தின் இறுதிப் புள்ளிகளாகிய A, B ஆகியவற்றின் நிலைத்தூரங்கள் (ordinates) $y = c+h$ ஆகும். மேலும், சங்கிலியத்தின் மொத்த நீளம் $2l$ எனில், $CA = CB = l$ ஆகும். அதாவது, இறுதிப் புள்ளிகளாகிய A, B ஆகியவற்றில் $s = l$ ஆகும்.

எனவே, $B = (x, y)$ எனில்,

$$x = c\log\left(\frac{y+s}{c}\right)$$

ஆனால், $y^2 = c^2+s^2$

$$\therefore \quad c^2 = y^2 - s^2$$

$$= (y+s)(y-s)$$

$$\therefore x = \frac{c}{2}\log\frac{(y+s)^2}{c^2}$$

$$= \frac{c}{2}\log\frac{(y+s)^2}{(y+s)(y-s)}$$

$$= \frac{c}{2}\log\left(\frac{y+s}{y-s}\right)$$

$$=\frac{c}{2}\log\left(\frac{c+h+l}{c+h-l}\right)$$

$$\therefore\ 2x=c\log\left(\frac{c+h+l}{c+h-l}\right)\quad \dots\quad \dots\quad \dots\quad \dots\quad (9)$$

ஆனல், $AB=2x$ ஆகையால்,

சங்கிலியத்தின் வளைவரை விட்டம் (span) $=c\log\left(\frac{c+h+l}{c+h-l}\right)$

என்று காண்கிறோம்.

சங்கிலியத்தின் ஏதேனுமொரு புள்ளியில் இழுவிசை

சங்கிலியத்தின் உள்ளீட்டுச் சமன்பாடு $s=c\tan\psi$ என்று நாமறிவோம்.

$$\therefore\ \frac{ds}{d\psi}=c\sec^2\psi.$$

எனவே, $\frac{dy}{d\psi}=\frac{dy}{ds}.\ \frac{ds}{d\psi}$

$$=c\sin\psi.\ c\ \text{sce}^2\psi$$

$$=c\sec\psi\tan\psi$$

$$dy=c\sec\psi\tan\psi d\psi$$

அல்லது, $\int dy=c\int\sec\psi\ \tan\psi\ d\psi+A$

அதாவது, $y=c\sec\psi+A.$

$y=c$ எனில், $\psi=O\quad\therefore\ A=O.$

$$\therefore y=c\sec\ \psi.$$

இப்பொழுது, $P(x,y)$ என்ற புள்ளியில் இழுவிசை T எனில், கிடைத்தள விசைப் பிரிவுச் சமன்பாட்டிலிருந்து,

$$T\cos\psi=T_{\circ}=\omega c$$

என்று அறிவோம்.

$$\therefore\ T=\omega c\sec\psi$$

$$=\omega y.$$

அதாவது, $T=\omega y\quad \dots\quad \dots\quad \dots\quad \dots\quad \dots\quad (10)$

அதாவது, சங்கிலியத்தின் ஏதேனுமொரு புள்ளியில் சங்கிலியின் இழுவிசையானது இயக்குவரையிலிருந்து அப்புள்ளியின் உயரத்திற்கேற்ப மாறுபடுமென்று காண்கிறோம்.

குறிப்பு 1: சங்கிலியத்திலுள்ள $P_1\ (x_1,\ y_1)$, $P_2\ (x_2,\ y_2)$ என்னுமிருபுள்ளிகளில் சங்கிலியின் இழு விசைகள் முறையே T_1, T_2 எனில்,

$$T_1 = \omega y_1,\ T_2 = \omega y_2$$

என்று கண்டோம்.

$$\therefore \quad T_1 - T_2 = \omega\,(y_1 - y_2). \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (11)$$

அதாவது, சங்கிலியத்தின் ஏதேனுமிரு புள்ளிகளில் சங்கிலியின் இழு விசைகளின் வித்தியாசம், இயக்குவரைக்குமேல் அப் புள்ளிகளின் உயரங்களின் வித்தியாசத்திற்கு விகித சமத்தி லிருக்கும்.

குறிப்பு 2: சங்கிலியத்தின் ஏதேனுமொரு புள்ளியில் இழு விசையானது, இயக்குவரைக்குமேல் அப் புள்ளியின் உயரத் திற்குச் சமமான நீளச் சங்கிலிப் பகுதியின் எடைக்குச் சம மாகும்.

சங்கிலியத்தின் ஏதேனுமிரு புள்ளிகளில் செயல்படும் இழு விசைகளின் வித்தியாசமானது, இயக்குவரைக்கு மேல் அப் புள்ளிகளின் உயரங்களின் வித்தியாசத்திற்குச் சமமான நீளச் சங்கிலிப் பகுதியின் எடைக்குச் சமமாகும்.

குறிப்பு 3: ஒரே கிடைமட்டத்திலுள்ள இருநிலையான வழவழப்பான முளைகளின் (அல்லது கப்பிகளின்) வழியே செல்லும் ஒரு கனமான சீரான சங்கிலி சமநிலையில் தொங்கிக் கொண்டிருந்தால், அச் சங்கிலியின் இருமுளைகளும் அம்முளை களுக்கிடையே தொங்கிக் கொண்டிருக்கும் சங்கிலிப் பகுதி யால் அமையப்பெற்ற சங்கிலியத்தின் இயக்குவரையின் மேலிருக்கும்.

ஏனெனில், ஒவ்வொரு முளையிலும் இழுவிசையானது இயக்கு வரைக்கு மேல் முளையின் உயரத்திற்குச் சமமான நீளச் சங்கிலிப் பகுதியின் எடைக்குச் சமமாகயிருக்குமாகையால், முளையிலிருந்து இயக்குவரை வரை தொங்கிக் கொண்டிருக்கும் சங்கிலிப் பகுதியின் எடை அம் முளையிலுள்ள இழுவிசையை விளைவு நீக்கி விடும். ஆகவே, சங்கிலியான இரு முளைகளின் வழியே சமச்சீருடன் தொங்கிக்கொண்டிருக்க முடிகிறது.

மாதிரி 183 : ஒரே கிடைக் கோட்டிலுள்ள A, B என்ற இரு புள்ளிகளிலிருந்து l அளவு நீளமுள்ள சீரான சங்கிலியம் தொங்கவிடப்படுகிறது. எல்லை இழுவிசை மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியின் இழுவிசை போல் n மடங்கு ஆனுல்

$$AB=\frac{l}{\sqrt{n^2-1}}\log\left(n+\sqrt{n^2+1}\right)$$

என நிறுவுக. (மதுரை பி.எஸ்ஸி., 1973 ஏப்.)

தீர்வு :

(வழக்கமான குறியீடுகளை நினைவிற் கொள்க)

A,B என்பன சங்கிலியத்தின் எல்லைப் புள்ளிகளாகும்.

$B=(x.y)$ என்பது. T_O, T_B என்பன முறையே மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியிலும். எல்லைப் புள்ளி Bயிலும் உள்ள இழு விசைகள் என்க. ψ என்பது Bயிலுள்ள தொடுகோடு இயக்கு வரையுடன் கொண்டுள்ள சாய்வுக் கோணமெனில்,

$$T_B=n.T_o=n.\omega c$$

ஆகும்.

ஆனுல் $T_B=\omega y$

$\therefore\ \omega y=n\omega c$

அல்லது $y=nc$

ஆனுல், $y=c\sec\psi$ ஆகையால், $nc=c\sec\psi$.

$\therefore\ \sec\psi=n$

அல்லது, $\tan\psi=\sqrt{n^2-1.}$

சங்கிலியத்தின் நீளம் l ஆகையால், $2s=l$. அல்லது $s=\frac{l}{2}$.

ஆனுல், $s=c\tan\psi$

$$\therefore\ \frac{l}{2}=c\sqrt{n^2-1}$$

$$\therefore\ c=\frac{l}{2\sqrt{n^2-1.}}$$

$$\therefore x = c \log(\sec\psi + \tan\psi)$$

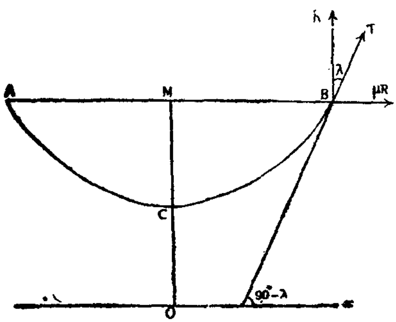
$$= \frac{l}{2\sqrt{n^2-1}}\left(n+\sqrt{n^2-1}\right)$$

எனவே, $AB = 2x = \frac{l}{\sqrt{n^2-1}}\left(n+\sqrt{n^2-1}\right)$

மாதிரி 184 : ஒரு *சீரான சங்கிலியின்* முனைகளிலுள்ள கண்ணிகள் ஒரு நிலையான உராய்வுடைய கிடையான கோலின் மேல் நழுவக்கூடியனவாயிருக்கின்றன. உராய்வுக் கோணம் λஎனில், மீப்பெருவளைவரை விட்டமும், சங்கிலியின் நீளமும் $\log\cot\frac{\lambda}{2} : \cot\lambda$ என்னும் விகிதத்திலிருக்குமென்று நிறுவுக.

தீர்வு :

ABC என்ற சங்கிலியத்தின் முனைகள் *A*யும் *B*யும் *AB* என்னும் உராய்வுடைய கிடையான கோலின் மேல் நகரக் கூடியனவாகயிருக்கின்றன, எல்லைச் சமநிலையில் சங்கிலியத்



படம் 247

தின் வளைவரை விட்டம் மீப்பெரிதாகயிருக்கும். இம் மீப்பெரு வளைவரை விட்டம் *AB* என்க. எல்லைச் சமநிலையில் *B*-லுள்ள இழுவிசை *T* என்க. *B*யில் கோலின் எதிர்விசை *R* கோலுக்குச் செங்குத்தாகவும், முனை *B*யானது *BA*யை நோக்கி நகர முயலுமாகையால் *B*யில் உராய்வு விசை μR வெளிப்புற மாகவும் செயல்படும். எனவே, *T* ஆனது *R*, μR ஆகியவற்றின் விளைவு விசைக்குச் சமமாகயிருக்குமாகையால், *T*-க்கும் *R*-க்கு மிடையேயுள்ள கோணம் உராய்வுக் கோணம் λ ஆகும். எனவே, *B*யிலுள்ள தொடுகோட்டிற்கும், இயக்குவரைக்கு மிடையேயுள்ள கோணம் $(90° - \lambda)$ ஆகும்.

அதாவது, $\psi=(90^\circ-\lambda)$

இப்பொழுது, $=(x,y)$ எனில்,

$$x=c\log(\sec\psi+\tan\psi)$$
$$=c\log[\sec(90^\circ-\lambda)+\tan(90^\circ-\lambda)]$$
$$=c\log[\operatorname{cosec}\lambda+\cot\lambda]$$
$$=c\log\left(\frac{1+\cos\lambda}{\sin\lambda}\right)$$
$$=c\log\left(\frac{1+2\cos^2\frac{\lambda}{2}-1}{2\sin\frac{\lambda}{2}\cos\frac{\lambda}{2}}\right)$$
$$=c\log\cot\frac{\lambda}{2}.$$

$\therefore$ மீப்பெருவளைவரை விட்டம் $=2x=2c\log\cot\frac{\lambda}{2}.$

சங்கிலியின் நீளம் $=2s=2c\tan\psi$

$$=2c.\tan(90^\circ-\lambda)$$
$$=2c\cot\lambda$$

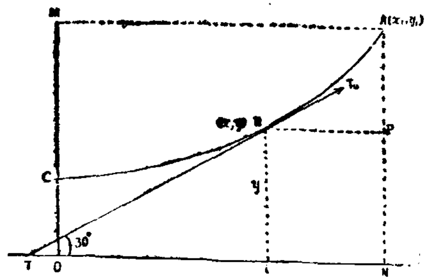
$$\therefore\ \frac{\text{மீப்பெருவளைவரை விட்டம்}}{\text{சங்கிலியின் நீளம்}}=\frac{2c\log\cot\frac{\lambda}{2}}{2c\cot\lambda}$$
$$=\frac{\log\cot\frac{\lambda}{2}}{\cot\lambda}.$$

மாதிரி 185 : ஒரு பட்டமானது கையிலிருந்து பட்டம் வரை 600 அடி நீள நூலினுல் பறக்கவிடப்படுகிறது. கையிலுள்ள ஒரு விற்றராசில் 100 அடி நீள நூலின் எடைக்குச் சமமான இழுவிசை காட்டப்படுகிறது. கையருகில் நூலானது கிடைக் கோட்டிற்கு 30° சாய்வைிருந்தால் கைக்குமேல் பட்டத்தின் நிலைக்குத்து உயரத்தைக் காண்க.

தீர்வு :

H என்பது கையின் நிலை; *A* என்பது பட்டத்தின் நிலை. எனவே, *H A* என்னும் வளைவு *C*யை உச்சியாகக் கொண்ட ஒரு சங்கிலியத்தின் ஒரு பகுதியாகக் கொள்ளப்படலாம்.

H-ல் நூலின் இழுவிசை T_H ஆனது H-லுள்ள தொடு கோட்டின் வழியே செயல்படும். இத் தொடுகோடு கிடைக் கோட்டுடன் 30° சாய்விலிருப்பதால் $\psi = 30°$ ஆகும். மேலும்,



படம் 248

T_H என்பது 100 அடி நீள நூலின் எடைக்குச் சமமாகும். எனவே, ω என்பது ஒரு அடி நீள நூலின் எடையெனில்,

$$T_H = 100\omega.$$

ஆனால், $H = (x,y)$ எனில், $T_H = \omega y$ ஆகும்.

$\therefore\ \omega y = 100\omega$ அல்லது, $y = 100.$

மேலும், $y = c \sec \psi$ யிலிருந்து,

$$100 = c \sec 30° = c \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore\ c = 50\sqrt{3}.$$

வில் $CH = s$ எனில், $s = c \tan\psi = 50\sqrt{3} \tan 30°$

$$= 50\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 50$$

$\therefore\ s_1 =$ வில் $CA =$ வில் $CH +$ வில் $HA = 50 + 600 = 650.$

$A = (x_1, y_1)$ எனில்,

$$\begin{aligned} y_1^2 &= c^2 + s_1^2 \\ &= (50\sqrt{3})^2 + (650)^2 \\ &= 50^2 \times 3 + 50^2 \times 13^2 \\ &= 50^2 (3 + 169) \\ &= 50^2 \times 172 \end{aligned}$$

$$\therefore\ y_1 = 50\sqrt{172} = 50 \times 2\sqrt{43} = 100\sqrt{43}.$$

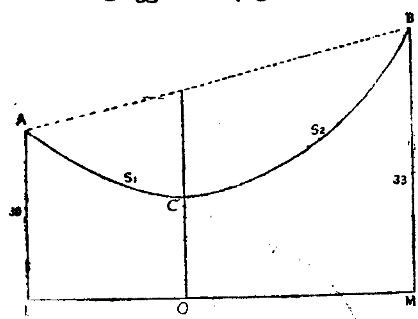
எனவே, கைக்குமேல் பட்டத்தின் உயரம் $= y_1 - y = 100\sqrt{43} - 100 = 100\,(\sqrt{43} - 1)$ அடி.

மாதிரி 186 : 90 செ.மீ. நீளமுள்ள கனமான, சீரான கயிறு ஒன்று வெவ்வேறு உயரங்களிலுள்ள இரு முனைகளின் வழியே

தொங்குகிறது. முனைகளுக்கு வெளியே நிலைக்குத்தாகத் தொங்கும் பகுதிகளின் நீளங்கள் 30 செ.மீ., 33 செ.மீ. எனில், சங்கிலியத்தின் உச்சி கயற்றின் முழு நீளத்தை 4 : 5 என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்குமென்று காட்டு.

தீர்வு :

L A C B M என்ற கயிறு *A, B* என்ற முனைகளின் வழியே தொங்குகிறது. கயிறு சமநிலையில் தொங்குவதால், கயிற்றின் முனைகளிரண்டும் இயக்குவரையின் மேலிருக்கும். அதாவது, *LM* என்பது முனைகளுக்கிடையே கயிற்று வளையின் இயக்கு வரையாகும். *C* என்பது இக் கயிற்று வளையின் உச்சி என்க.



படம் 249

$AL=30$ செ.மீ., $BM=33$ செ.மீ. முனைகளுக்கிடையேயுள்ள கயிற்று வளையின் *AC, CB* ஆகிய பகுதிகளின் நீளங்கள் முறையே s_1, s_2 என்க.

$\therefore\ s_1+s_2=90-(30+33)=27$ செ.மீ. ω என்பது 1 செ.மீ. நூலின் எடையெனில்,

$T_A=A$யில் இழுவிசை

$=30$ செ.மீ. நூலின் எடை

$=30\ \omega$.

இதுபோல், $T_B=B$யில் இழுவிசை $=33\ \omega$.

$A=(x_1, y_1)$, $B=(x_2, y_2)$ என்க.

$$\therefore\ y_1=30,\ y_2=33.$$

$$y_1^2=c^2+s_1^2 \quad \therefore\ c^2+s_1^2=30^2$$

$$y_2^2=c^2+s_2^2 \quad \therefore\ c^2+s_2^2=33^2$$

$$\therefore\ s_2^2-s_1^2=33^2-30^2$$

$$(s_2+s_1)(s_2-s_1)=63\times 3$$

$$s_2-s_1=\frac{63\times 3}{s_2+s_1}=\frac{63\times 3}{27}=7.$$

அதாவது, $s_2+s_1=27$

$s_2-s_1=7$

$\therefore\ s_1=10$ செ.மீ., $s_2=17$ செ.மீ.

ஆகவே, $LAC=LA+AC=30$ செ.மீ. $+10$ செ.மீ. $=40$ செ.மீ.

$CBM=CB+MB=s_2+33$ செ.மீ. $=17$செ.மீ. $+33$செ.மீ.

$=50$ செ.மீ.

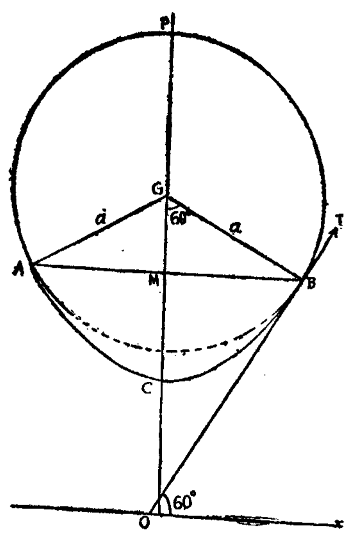
$$\therefore \frac{\text{கயிற்றின் } LAC \text{ பகுதி}}{\text{கயிற்றின் } CBM \text{ பகுதி}}=\frac{40 \text{ செ.மீ.}}{50 \text{ செ.மீ.}}=\frac{4}{5}.$$

அதாவது, சங்கிலியத்தின் உச்சி கயிற்றை 4 : 5 என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்கிறது.

மாதிரி 187 : a ஆரையுள்ள ஒரு வட்டக் கப்பியின் பரிதியில் மூன்றில் இரண்டு பாகத்தைத் தொட்டவாறு கப்பியின் வழியே தொங்கக் கூடிய கனமான முடிவற்ற சங்கிலியின் நீளம்

$$a\left\{\frac{3}{\log(2+\sqrt{3})}+\frac{4\pi}{3}\right\}$$

என்று காட்டு.



படம் 250

தீர்வு :

G என்பது கப்பியின் மையம். $CAPB$ என்ற முடிவற்ற சங்கிலி கப்பியின் மேல் APB என்னும் பகுதி தொட்டுக்கொண்டிருக்குமாறு தொங்கிக்கொண்டிருக்கிறது.

வில் APB-ன் நீளம் $= \frac{2}{3} \times$ வட்டத்தின் பரிதி

$$= \frac{2}{3} \times 2\pi a$$

$$= \frac{4}{3} \pi a.$$

$\underline{|AGB} = \frac{1}{3}$ பரிதி G-ல் தாங்கும் கோணம் $= \frac{1}{3} \times 360° = 120°$.

$\therefore \underline{|AGM} = \underline{|MGB} = 60°$.

B-லுள்ள தொடுகோடு இயக்கு வரையை T-ல் சந்திக்கிறது.

$\underline{|GBT} = \underline{|GOT} = 90°$ ஆகையால், $GOTB$ ஒரு வட்ட நாற்கரம்.

$\therefore \psi = \underline{|BTX} = \underline{|BGO} = 60°$.

$$GA = GB = \text{ஆரை} = a.$$

$$MB = a \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$B = (x,y)$ எனில், $x = \frac{\sqrt{3}}{2} a$.

எனவே, $x = c \log (\sec\psi + \tan\psi)$ -லிருந்து,

$$\frac{\sqrt{3}}{2} a = c \log (\sec 60° + \tan 60°)$$

$$= c \log (2 + \sqrt{3})$$

$$\therefore c = \frac{\sqrt{3}a}{2 \log (2+\sqrt{3})}$$

$\therefore s = c \tan\psi$-லிருந்து,

வில் $CB = c \tan\psi$

$$= \frac{\sqrt{3}\, a}{2 \log(2+\sqrt{3})} \cdot \tan 60°$$

$$= \frac{\sqrt{3}\, a}{2 \log(2+\sqrt{3})} \cdot \sqrt{3}$$

$$= \frac{3\, a}{2\log\,(2+\sqrt{3})}$$

$\therefore$ ACB பகுதியின் நீளம் $= 2 \times$ வில் $CB = \dfrac{3a}{\log(2+\sqrt{3})}$

எனவே, கயிற்றின் நீளம் $=$ வில் $ACB +$ வில் APB

$$= \frac{3a}{\log(2+\sqrt{3})} + \frac{4}{3}\pi a$$

$$= a\left\{\frac{3}{\log(2+\sqrt{3})} + \frac{4\pi}{3}\right\}$$

மாதிரி 188: சாதாரணக் கயிற்று வளையின் ஒரு வில்லின் இரு நுனிகளில் உள்ள தொடுகோடுகள் கிடைக்கோட்டுடன் α, β எனும் கோணச் சாயலில் உள்ளன. வில்லின் நீளம் l என்றால், வில்லின் ஒரு முனை மற்றொரு முனைக்கு மேலே $l \sin \dfrac{\alpha+\beta}{2} \div \cos \dfrac{\alpha-\beta}{2}$ உயரத்தில் உள்ளது எனக் காண்க.

(அச்சுக்கு ஒரு புறத்தில் வில் உள்ளது)

(மதுரை பி.எஸ்ஸி., 1972 செப்.)

தீர்வு :

BA என்பது C-யை உச்சியாகக் கொண்ட ஒரு சாதாரணக் கயிற்று வளையின் ஒரே புறத்திலுள்ள ஒரு விற்பகுதி.

A, B ஆகிய புள்ளிகளில் வரையப்படும் தொடுகோடுகளுக்கும் கிடைக்கோட்டுக்குமிடையேயுள்ள கோணங்கள் ψ_1, ψ_2 எனில்,

$\psi_1 = \alpha$, $\psi_2 = \beta$

ஆகும்.

$CA = s_1$, $CB = s_2$ எனில் வில் $BA = s_1 - s_2 = l$.

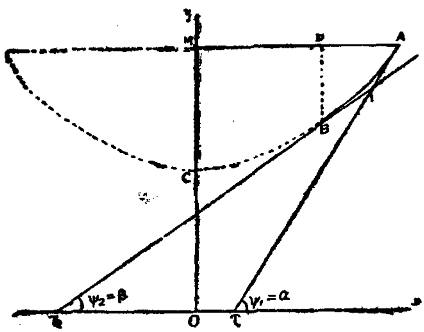
$A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ என்க.

B-க்கு மேலே A-ன் உயரம் $= BD$

$= y_1 - y_2$

$s_1 = c \tan \alpha,\ s_2 = c \tan \beta.$

$\therefore l = s_1 - s_2 = c(\tan \alpha - \tan \beta)$



படம் 251

$$= c\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\sin\beta}{\cos\beta}\right)$$

$$= \frac{c \sin(\alpha - \beta)}{\cos\alpha \cos\beta}.$$

$y_1 = c \sec \alpha,\ y_2 = c \sec \beta.$

$\therefore y_1 - y_2 = c(\sec\alpha - \sec\beta)$

$$= c\,\frac{(\cos\beta - \cos\alpha)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}$$

$$\therefore \frac{y_1 - y_2}{l} = \frac{\cos\beta - \cos\alpha}{\sin(\alpha - \beta)}$$

$$= \frac{2 \sin\frac{\alpha+\beta}{2} . \sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{2 \sin\frac{\alpha-\beta}{2} . \cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

$$= \frac{\sin \frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos \frac{\alpha-\beta}{2}}$$

$$\therefore\ y_1 - y_2 = \frac{l \sin \frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos \frac{\alpha-\beta}{2}} = l \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \div \cos \frac{\alpha-\beta}{2}.$$

மாதிரி 189: $2l$ நீளமுள்ள சீரான சங்கிலியொன்று அதன் முனைகள் ஒரே கிடைமட்டத்திலிருக்குமாறு தொங்கவிடப் பட்டுள்ளது. சங்கிலியின் மிகத் தாழ்ந்த புள்ளி முனைகளுக்குக் கீழே நிலைக்குத்தாக a தூரத்திலிருக்குமாறு அதன் முனை களிரண்டும் வைக்கப்பட்டுள்ளன. இரு முனைகளுக்குமிடையே யுள்ள தூரம் $2a$. சங்கிலியத்தின் இயக்கு வரையிலிருந்து மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியின் தூரம் c எனில்,

$$\frac{2a^2}{l^2-a^2} = \log \frac{l+a}{l-a} \text{ என்றும், } \tan h\frac{a}{c} = \frac{2al}{l^2+a^2} \text{ என்றும்}$$

நிறுவுக.

தீர்வு :

சங்கிலியின் முழு நீளம் $= 2l$.

மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியிலிருந்து ஒரு முனைவரையுள்ள பகுதி யின் நீளம் s எனில், $s = l$.

சங்கிலியின் ஒரு முனை (x,y) எனில்,

$2x =$ முனைகளுக்கிடையேயுள்ள தூரம் $= 2a$

$\therefore\ x = a.$

சங்கிலியத்தின் தொய்வு $= a$.

இயக்குவரைக்கு மேலே மிகத்தாழ்ந்த புள்ளியின் தூரம் $= c$

$\therefore\ y =$ இயக்குவரைக்கு மேலே ஒரு முனையின் தூரம் $= (c+a)$

எனவே, $y^2=c^2+s^2$ இலிருந்து,

$$(c+a)^2=c^2+l^2$$

$$\therefore 2ca=(l^2-a^2)$$

அல்லது, $$c=\frac{l^2-a^2}{2a}$$

மேலும், $s=c\tan\psi$ யிலிருந்து,

$$l=c\tan\psi.$$

$$\therefore \tan\psi=\frac{l}{c}=\frac{2al}{l^2-a^2}$$

$y=c\sec\psi$யில் $y=c+a$ என்று பிரதியிட,

$$c+a=c\sec\psi.$$

$$\therefore \sec\psi=\frac{c+a}{c}=1+\frac{a}{c}=1+\frac{2a^2}{l^2-a^2}=\frac{l^2+a^2}{l^2-a^2}$$

இம்மதிப்புக்களை $x=c\log(\sec\psi+\tan\psi)$ யில் பிரதியிடவும்.

$$x=\frac{l^2-a^2}{2a}\log\left[\frac{l^2+a^2}{l^2-a^2}+\frac{2al}{l^2-a^2}\right]$$ ஆனால், $x=a$.

$$\therefore a=\frac{l^2-a^2}{2a}.\log.\frac{(l+a)^2}{l^2-a^2}$$

$$=\frac{l^2-a^2}{2a}\log\frac{l+a}{l-a}$$

$$\therefore \frac{2a^2}{l^2-a^2}=\log\frac{l+a}{l-a}.$$

மேலும், $y=c\cos h\frac{x}{c}$ யில் $x=a$, $y=c\sec\psi$ என்று பிரதியிட,

$$c\sec\psi=c\cos h\frac{a}{c}$$

அல்லது, $\cos h\frac{a}{c}=\sec\psi.$

இப்பொழுது, $s = c \sin h \frac{x}{c}$ யில் $s = c \tan\psi$, $x = a$ என்று பிரதி யிட,

$$c \tan \psi = c \sin h \frac{a}{c}$$

அல்லது, $\sin h \frac{a}{c} = \tan \psi$.

$$\therefore \frac{\sin h \frac{a}{c}}{\cos h \frac{a}{c}} = \frac{\tan \psi}{\sec \psi}$$

அதாவது, $\tan h \frac{a}{c} = \frac{2al}{l^2 - a^2} \times \frac{l^2 - a^2}{l^2 + a^2}$

$$= \frac{2al}{l^2 + a^2}.$$

மாதிரி 190: $2l$ நீளமும் W எடையுமுள்ள சீரான சங்கிலி யொன்று ஒரே கிடைமட்டத்திலுள்ள A, B என்னுமிரு புள்ளி களிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. சங்கிலியின் நடுப் புள்ளி Dயில் P என்னும் ஒரு பளு தொடங்கவிடப்பட்ட போது, ABக்குக் கீழே நடுப் புள்ளியின் ஆழம் h என்று காணப் பட்டது. ஒவ்வொரு எல்லை இழு விசையும்

$$\frac{1}{2}\left[P \frac{l}{h} + W \frac{l^2 + h^2}{2hl} \right]$$

என்று காட்டு.

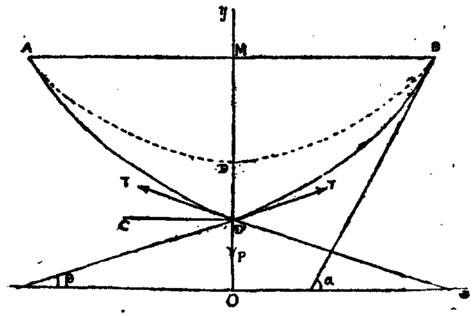
தீர்வு

A, B என்னும் கிடைமட்டப் புள்ளிகளில் ADB என்னும் சங்கிலி தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. D என்பது சங்கிலியின் நடுப் புள்ளி. Dயில் P என்னும் எடை தொங்கவிடப்பட்ட போது D யானது D' என்னும் நிலைக்குத் தாழ்ந்து விடுகிறது.

$MD^1 = h$ (கொடுக்கப்பட்டுள்ளது).

B, D' ஆகிய புள்ளிகளின் தொடு கோடுகள் கிடைக் கோட்டுடன் முறையே α, β கோணச் சாய்வுகளிலிருப்பதாகக் கொள்க. D' – இல் $AD', D'B$ ஆகிய சங்கிலிப் பகுதிகளில்

செயல்படும் இழுவிசைகளிரண்டும் சமமாக, தொடுகோடுகளின் வழியே மேல் நோக்கிச் செயல்படும். இச்சம இழுவிசைகளை T என்க.



படம் 252

இப்பொழுது, D' யில் செயல்படும் விசைகளின் நிலைக் குத்துப் பிரிவுச் சமன்பாடு காண்க.

$$P = 2T \sin \beta.$$

AD', BD' ஆகிய இரு சங்கிலிப் பகுதிகளையும் இரு வடிவொத்த சங்கிலியங்களின் பகுதிகளாகக் கருதலாம்.

எனவே, $D' = (x, y)$ எனில்,

$$T = \omega y = \omega . c \sec \beta$$

$$\therefore P = 2\omega\, c \sec \beta . \sin \beta = 2\, \omega c \tan \beta$$

$$= 2\, \omega s (\text{ஏனெனில் } s = c \tan \psi = c \tan \beta)$$

ஆனால் $2l$ நீளச் சங்கிலியின் மொத்த எடை W

$$\therefore \omega = \frac{W}{2l}$$

$$\therefore P = 2 \cdot \frac{W}{2l} . s = \frac{Ws}{l}.$$

அல்லது, $s = \dfrac{Pl}{W}$

இப்பொழுது, இயக்கு வரைக்கு மேலே Bயின் உயரம் $= (y+h)$. C என்பது $D'B$யைப் பகுதியாகக் கொண்ட சங்கிலியத்தின் மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியெனில், $CD^1 = s$; மேலும் $D'B = l$.

$$\therefore CB = (s+l)$$

எனவே, முனை Bக்கு $y^2=c^2+s^2$ என்னும் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தினல்,

$(y+h)^2 = c^2+(s+l)^2$

தவிர புள்ளி D'க்கு, $y^2=c^2+s^2$

கழிக்கவும் : $2hy+h^2 = 2sl+l^2$

$$2hy=2sl+l^2-h^2$$

$$\text{அல்லது } y=\frac{1}{2h}(2sl+l^2-h^2)$$

இயக்குவரைக்கு மேலே Bயின் உயரம் $=y+h$

$$=\frac{1}{2h}(2sl+l^2-h^2)+h$$

$$=\frac{1}{2h}(2sl+l^2-h^2+2h^2)$$

$$=\frac{1}{2h}(l^2+h^2+2sl)$$

$$=\frac{1}{2h}\left[l^2+h^2+2\frac{Pl}{W}.l\right]$$

$$=\frac{1}{2h}\left[l^2+h^2+2\frac{Pl^2}{w}\right]$$

$\therefore$ Bயில் எல்லை இழுவிசை $=w.(y+h)$.

$$=\frac{W}{2l}.\ \frac{1}{2h}\left[l^2+h^2+\frac{P2l^2}{W}\right]$$

$$=\tfrac{1}{2}\left[\frac{W\ (l^2+h^2)}{lh}+\frac{2Pl}{h}\right]$$

$$=\tfrac{1}{2}\left[W.\frac{l^2+h^2}{2lh}+P.\frac{l}{h}\right]$$

பயிற்சி 22

(1) $y=c\cos h\dfrac{x}{c}$ என்ற சங்கிலியத்தின் எந்தப் புள்ளியின் நிலைத் தூரத்தின் அடியிலிருந்து அப்புள்ளியின் தொடுகோட்

டிற்கு வரையப்படும் செங்குத்துத் தூரம் மாறிலியாகயிருக்கு மென்று காட்டு.

(2) 50 அடி நீளமுள்ள ஒரு *சீரான* சங்கிலியின் முனைகள் ஒரே கிடைமட்டத்திலுள்ள இரு புள்ளிகளில் பொருத்தப்பட்டுள்ளன. இப்புள்ளிகள் ஒவ்வொன்றிலுமுள்ள இழுவிசை மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியிலுள்ள இழுவிசையைப் போன்று மூன்று மடங்கு எனில் அப்புள்ளிகளுக் கிடையேயுள்ள தூரம் $\frac{25}{\sqrt{2}}\log(3+2\sqrt{2})$ என்று காட்டு.

(3) l நீளமுள்ள ஒரு *சீரான* சங்கிலியின் முனைகள் ஒரே மட்டத்திலுள்ள இரு புள்ளிகளில் பொருத்தப்பட்டுள்ளன. இப்புள்ளிகள் ஒவ்வொன்றிலுமுள்ள இழுவிசை மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியிலுள்ள இழுவிசையைப் போன்று இருமடங்குகளெனில், வளைவரை விட்டம் $\frac{l}{\sqrt{3}}\log(2+\sqrt{3})$ என்று காட்டு.

(4) $2l$ நீளமுள்ள ஒரு கனமான *சீரான* கயிற்றின் A, B என்னும் முனைகள் ஒரு நிலையான கிடைக் கம்பியின் மேல் நழுவக் கூடிய இரு சிறு வளையங்களுடன் பொருத்தப்பட்டுள்ளன. w என்பது ஒரு அலகு நீளக் கயிற்றின் எடை, ஒவ்வொரு வளையத்திலும் $F=lw$ என்னும் கிடைத்தளவிசை செயல்படுகிறது. இரு வளையங்களுக் கிடையேயுள்ள தூரம் $2l\log(1+\sqrt{2})$ என்று காட்டு.

(5) ஒரு *சீரான* சங்கிலியின் முனைக் கண்ணிகள் ஒரு நிலையான. உராய்வுடைய கிடைக்கோலின் மேல் நழுவக் கூடியதாயிருக்கின்றன, μ என்பது உராய்வுக் குணகமெனில், மீப்பெரு வளைவரை விட்டத்திற்கும், சங்கிலியின் நீளத்திற்குமுள்ள விகிதம் $\mu\log\left(\frac{1+\sqrt{1+\mu^2}}{\mu}\right)$ என்று காட்டு.

(6) புவியீர்ப்பு விசையினுல் மட்டும் தொங்கிக் கொண்டிருக்கின்ற l நீளமுள்ள ஒரு *சீரான*, நீளியல்பற்ற சங்கிலியின் முனைகள் μ உராய்வுக் குணகமுடைய ஒரு நிலையான உராய்

வுடைய கிடைத்தளக் கோலின் மேல் நழுவக் கூடியனவாக இருக்கின்றன. அம் முனைகள் அதிகபட்சம்

$$\mu l \log\left(\frac{1+\sqrt{1+\mu^2}}{\mu}\right)$$

இடைவெளியில் ஓய்விலிருக்க முடியுமென்று காட்டு.

(7) $2b\beta$ நீளமுள்ள சீரான கயிறு ஒன்று நிலைக்குத்துத் தளத்தின் மேல் பொருத்தப்பட்டுள்ள b ஆரையுள்ள ஒரு வழவழப்பான வட்டத்தின் மேல் வைக்கப்பட்டுள்ளது. கயிற்றின் நீளம் வட்டத்தின் பரிதியைவிட அதிகமாக உள்ளது. கயிற்றின் ஒரு பகுதி வட்டத்திற்குக் கீழே ஒரு கயிற்று வளையின் வடிவில் தொங்குகிறது. வட்டத்துடன் தொடுகையிலுள்ள கயிற்றுப் பகுதியின் நீளம் $2(\pi-\alpha)b$ எனில்

$$\sin^2\alpha \sec\alpha = (\alpha+\beta-\pi)\cos h^{-1}(\sec\alpha)$$

என்று காட்டு.

(8) $2l$ நீளமுள்ள ஒரு கனமான முடிவற்ற சங்கிலி அச்சு கிடையாகவுள்ள ஒரு வழவழப்பான நேர்வட்ட உருளையைச் சுற்றிச் செல்கிறது. சங்கிலியானது உருளையைவிட்டுப் பிரிகின்ற இடத்திலுள்ள புள்ளிகள் வழியே செல்லும் ஆரைகளுக்கு இடையேயுள்ள கோணம் 2ϕ. உருளைக்குக் கீழே தொங்கிக் கொண்டிருக்கும் சங்கிலியப் பகுதியின் மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியில் இழுவிசையானது c நீளச் சங்கிலிப் பகுதியின் எடைக்குச் சமமெனில்

$$\tan\phi + \frac{(\pi-\phi)}{\sin\varphi}\log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\phi}{2}\right) = \frac{l}{c}$$

என்று காட்டு.

(9) l நீளமுள்ள சீரான, கனமான கயிறு ஒன்று A என்னும் நிலையான புள்ளியிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டு, அதன் மறுமுனை Bயில் a நீளக் கயிற்றின் எடைக்குச் சமமான ஒரு கிடைத் தளவிசையினால் இழுக்கப்படுகிறது. A, B ஆகிய இரு முனைகளுக்கு மிடையேயுள்ள கிடைத் தூரம், நிலைக்குத்துத் தூரம் ஆகியவை முறையே $a \sin h^{-1}\left(\frac{l}{a}\right)$, $(\sqrt{l^2+a^2}-a)$ என்று காட்டு.

(10) தன்னுடைய எடையைப் போல் n மடங்கு எடைக்குச் சமமான இழுவிசையைத் தாங்கக் கூடிய l நீளமுள்ள சீரான சங்கிலியொன்று ஒரே கிடைமட்டத்திலுள்ள இரு புள்ளிகளுக்கிடையே இழுத்துக் கட்டப்பட்டுள்ளது. நடுவில் ஏற்படக் கூடிய மீச்சிறு தொய்வு $l\,[n-\sqrt{n^2-\frac{1}{4}}]$ என்று காட்டு.

(மதுரை பி.எஸ்ஸி. 1969 ஏப், '71 ஏப்

(11) C எடையுள்ளஒரு சங்கிலி ஒரே மட்டத்திலுள்ள இரு புள்ளிகளிலிருந்து அதன் முனைகளின் மூலம் தொங்கவிடப் பட்டுள்ளது. அதன் மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியில் W என்னும் ஒரு எடை இணைக்கப் பட்டுள்ளது. W தொங்கவிடப்பட்டுள்ள புள்ளியிலும், சங்கிலி தொங்கவிடப் பட்டுள்ள புள்ளியிலும் சங்கிலியத்திற்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகள் கிடைக்கோட்டுடன் முறையே α_1, α_2 கோணச் சாய்வுகளில் இருந்தால்

$$\frac{\tan \alpha_2}{\tan \alpha_1} = 1 + \frac{C}{W}$$

என்று காட்டு.

(12) $2l$ நீளமான ஒருகனமான சங்கிலியின் ஒரு முனை A என்னும் புள்ளியில் கட்டப்பட்டுள்ளது. அதன் மறுமுனை A வழியே செல்லும் ஒரு கிடையான கோலில் நழுவிச் செல்லக் கூடிய ஒரு சிறிய கனமான வளையத்துடன் இணைக்கப் பட்டுள்ளது. வளையத்தின் எடை, சங்கிலியின் எடையைப் போன்று n மடங்கு எனில், உராய்வுக் குணகம் μ என்றும், $\frac{1}{\lambda} = \mu\,(2n+1)$ என்றும் கொண்டு Aயிலிருந்து வளையத்தின் மீப் பெருந்தூரம்

$$\frac{2l}{\lambda}\log\left[\lambda+\sqrt{1+\lambda^2}\right]$$

என்று காட்டு.

(13) சீரான அடர்த்தியும் பருமனும் கொண்ட ஒருகனமான கயிறு ஒரே கிடைமட்டத்திலுள்ள இரு புள்ளிகளிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. கயிற்றின் எடையைப் போல் $\frac{1}{n}$ எடையொன்று அதன் மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியில் இணைக்கப் பட்டுள்ளது. கயிற்றின் மிகத்தாழ்ந்த, மிகஉயர்ந்த புள்ளி

களிலுள்ள தொடுகோடுகள் நிலைக்குத்துடன் முறையே θ, ϕ எனில்,

$$\tan\theta = (1+n)\tan\phi$$

என்று நிறுவுக.

(14) l நீளமும், W எடையும் கொண்ட சீரான சங்கிலி யொன்று ஒரே கிடைமட்டத்திலுள்ள இரு நிலையான புள்ளி களுக்கிடையில் தொங்கவிடப் பட்டுள்ளது. அதன் நடுப் புள்ளியில் W' என்னும் எடை இணைக்கப்பட்டுள்ளது. சங்கிலி யின் நடுவிலுள்ள தொய்வு h எனில், தொங்கு புள்ளிகள் ஒவ்வொன்றிலுமுள்ள இழுவிசை

$$\left(\frac{h}{2l}W + \frac{l}{4h}W' + \frac{l}{8h}W \right)$$

என்று காட்டு.

(15) $2l$ நீளமும், $3W$ எடையும் கொண்ட சீரான சங்கிலி யொன்று ஒரே கிடைமட்டத்திலுள்ள இரு நிலையான புள்ளி களிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. சங்கிலியின் நடுப்புள்ளி யிலிருந்து w எடையுள்ள பளு ஒன்று தொங்கவிடப் பட்டுள்ளது. இரு புள்ளிகளின் கிடைமட்டத்திலிருந்து இந்த நடுப்புள்ளியின் ஆழம் h எனில், எல்லை இழுவிசை

$$\frac{w(h^2+2l^2)}{2hl}$$ என்று காட்டு.

(16) l நீளமும், W எடையும் கொண்ட சீரான சங்கிலி யொன்று ஒரே கிடைமட்டத்திலுள்ள இருநிலையான புள்ளிகளுக் கிடையில் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. நடுவிலுள்ள தொய்வு h இருக்குமாறு அதன் நடுப்புள்ளியில் ஒரு எடை தொங்க விடப்பட்டுள்ளது. எல்லைப் புள்ளிகள் ஒவ்வொன்றிலுமுள்ள இழுவிசை P எனில், நடுவில் தொங்கவிடப்பட்டுள்ள எடை

$$\frac{4h}{l}P - \left(\frac{l^2+4h^2}{2l^2} \right)W$$ என்று காட்டு.

(17) A, B என்பன ஒரே கிடைக்கோட்டின் மேல் $2a$ இடை வெளியில் அமைந்துள்ள இரண்டு புள்ளிகள். AO, OB என்னும் இரண்டு சமமான கனமான இரண்டு கயிறுகள் O-வில் ஒன்ருகக் கட்டப்பட்டு, O-வில் ஒரு எடையைத் தாங்கி நிற்கின்றன. கயிறுகள் ஒவ்வொன்றின் நீளமும் l ஆகும். ABக்குக் கீழே வின் ஆழம் h எனில்,

$$l^2 - h^2 = 2c^2 \left(\cosh \frac{a}{c} - 1\right)$$

என்ற தொடர்பின் மூலம் சங்கிலியின் பண்பளவை c தரப்படு மென்று காட்டு.

(18) l நீளமுள்ள ஒரு சீரான சங்கிலி A, B என்னும் இரண்டு புள்ளிகளுக்கிடையே தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. Aக்கும் Bக்கு மிடையேயுள்ள கிடைத்தூரம் a; Aக்கு மேலே Bயின் நிலைக் குத்து உயரம் b. சங்கிலியின் பண்பளவை c யானது

$$2c \sinh \left(\frac{a}{2c} \right) = \sqrt{l^2 - b^2}$$

என்னும் தொடர்பின் மூலம் தரப்படுகிற தென்று காட்டு.

(19) ஒரு கனமான கயிறு அதன் முனைகளிரண்டும் நிலைக் குத்தாகத் தொங்கிக் கொண்டிருக்குமாறு ஒரே மட்டத்திலுள்ள இரு முனைகளின் வழியே தொங்குகிறது. கயிறுனது சாத்திய மான அளவில் மிகக் குட்டையாக யிருக்கும்போது சங்கிலியத் தின் பண்பளவை முனைகளுக்கிடையேயுள்ள தூரத்தில் பாதி யிருக்குமென்று காட்டு.

(20) l நீளமுள்ள ஒரு சீரான சங்கிலியின் ஒரு முனை ஒரு உராய்வுடைய மேசைக்கு மேலே h உயரத்தில் பொருத்தப் பட்டு, அதன் ஒரு பகுதி மேசையின் மேல் ஒரு நேர்கோட்டி லமைத்தவண்ணம் ஓய்விலிருக்கின்றது. உராய்வுக் குணகம் μ எனில், சங்கிலியானது நழுவும் தருவாயிலிருக்கும்போது மேசையின் மேலிருக்கும் பகுதியின் நீளம்

$$l + \mu h - [(\mu^2 + 1)h^2 + 2\mu l h]$$

என்று நிறுவுக.

பொதுச்சங்கிலியத்தின் தோராய வடிவங்கள்

இரு புள்ளிகளுக்கிடையே தொங்கவிடப்பட்டுள்ள ஒரு சங்கிலியானது இரு முனைகளிலும் விறைப்பாக இழுக்கப்படும் போது நடுவிலுள்ள தொய்வு மிகவும் சிறியதாகிவிடும். என வே அதன் மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியில் இழுவிசை மிக அதிகமாக யிருக்குமாகையால், சங்கிலியப் பண்பளவையான c யின் மதிப்பும் மிகவும் அதிகமாகிவிடுகிறது. மேலும், தொய்யல் மிகவும் குறைவாகயிருப்பதால் கிடைக் கோட்டுடன் அதிக

வேறுபாடு தெரியாத நிலையில் சங்கிலி தொங்கிக் கொண்டிருக்கும். எனவே, சங்கிலியத்திலுள்ள எந்தப் புள்ளியிலுள்ள தொடு கோடும் கிடைக் கோட்டுடன் கொண்டுள்ள சாய்வு மிகமிகச் சிறிய தாகிவிடும். $s=c\tan\psi$ ஆகையால் cயுடன் ஒப்பிடுகையில் s மிகவும் சிறியதாகக் காணப்படும். அதுமட்டுமன்று; சங்கிலியானது கிடைக்கோட்டுடன் ஒட்டிய நிலையில் தொங்குவதால் s-ம் x-ம் அதிக வித்தியாசமின்றி யிருக்கும். c யுடன் ஒப்பிடுகையில் s மிகச் சிறியதாயிருப்பதால், x-ம் மிகச் சிறியதாகவேயிருக்கும். எனவே, $\frac{x}{c}$ யானது மிக மிகச் சிறியதாயிருக்கும். இதன் காரணமாக, சங்கிலியமானது தோராயமாகப் பரவளைவு (Parabola) வடிவத்தைப் பெறுகிறது.

முக்கிய விளைவு : ஒரு கனமான சங்கிலி (அல்லது கயிறு இரு நிலையான புள்ளிகளுக்கிடையே தொங்கவிடப்பட்டு இரு முனைகளிலும் மிகவும் விறைப்பாக இழுக்கப்பட்டால், தொங்கிக் கொண்டிருக்கும் சங்கிலி (அல்லது கயிறு) ஒரு பரவளைவின் வடிவத்தைத் தோராயமாகப் பெறுகிறது.

(அல்லது) ஒரு சங்கிலியத்தின் மிகத்தாழ்ந்த புள்ளியைச் சுற்றிலும் சங்கிலியத்தின் வளைவு ஒரு பரவளையின் வடிவத்தைத் தோராயமாகப் பெற்றிருக்கும்.

நிறுவல் : சங்கிலியத்தின் தேக்காட்டின் சமன்பாடு $y=c\cosh\frac{x}{c}$ ஆகும்.

$$\text{ஆனால் } \cosh x = 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\dots \quad \dots \quad \dots$$

$$\therefore y=c\left[1+\frac{1}{2!}\left(\frac{x}{c}\right)^2+\frac{1}{4!}\left(\frac{x}{c}\right)^4+\dots \quad \dots \quad \dots\right]$$

$$=c\left[1+\frac{x^2}{2c^2}+\frac{1}{24}\left(\frac{x}{c}\right)^4+\dots \quad \dots \quad \dots\right]$$

$\frac{x}{c}$ ஆனது மிகமிகச் சிறியதாகையால், $\left(\frac{x}{c}\right)^2$க்கு அதிகமான $\left(\frac{x}{c}\right)$யின் படிகளைப் புறக்கணித்து விடலாம்.

$$\therefore y = c\left[1 + \frac{x^2}{2c^2}\right]$$

$$= c + \frac{x^2}{2c}$$

அல்லது, $\frac{x^2}{2c} = y - c$

அல்லது, $x^2 = 2c\,(y - c)$.

இது ஒரு பரவளைவின் சமன்பாடாகும். இதன் உச்சி (o,c) என்ற சங்கிலியத்தின் மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியாகும். இதன் செல்லும் நிலைக்குத்துக் கோடுதான் பரவளையத்தின் அச்சு ஆகும். இதன் செவ்வகலம் (latus rectum) $2c$ ஆகும்.

ஆகவே, சங்கிலியத்தின் மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியைச் சுற்றி சங்கிலியமானது ஒரு பரவளைவின் வடிவத்தைத் தோராயமாகக் கொண்டிருக்கின்றதென்றறிகிறோம்.

மற்றுமொரு தோராய வடிவம்

இரண்டு புள்ளிகளுக்கிடையே ஒரு சங்கிலியானது மிகவும் தாராளமாக விறைப்பின்றித் தொங்கவிடப் பட்டிருந்தால், அதன் மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியைச் சுற்றி சங்கிலியானது மிக அதிக அளவில் வளைவுடையதாகயிருக்கும். எனவே, x உடன் ஒப்பிடுகையில் c மிகவும் சிறியதாகயிருக்கும். அதாவது, $\frac{x}{c}$ மிகப் பெரியதாகயிருக்கும்.

$$\therefore \ y = c \cos h \frac{x}{c}$$

$$= \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right)$$

$\frac{x}{c}$ மிகப்பெரியதாகையால் $e^{-x/c}$ புறக்கணிக்கத்தக்க அளவில் மிகச் சிறியதாகயிருக்கும்.

$$\therefore y = \frac{c}{2} e^{\frac{x}{c}}$$

அதாவது, சங்கிலியம் தொங்கும் புள்ளிகள் அதன் மிகத்

தாழ்ந்த புள்ளியிலிருந்து மிக மிக அதிகத் தூரத்திலிருந்தால், சங்கிலியமானது $y = \frac{c}{2} e^{x/c}$ என்னும் அடுக்குக் குறி வளை யின் (exponential curve) வடிவத்தைத் தோராயமாகப் பெறுகிறது.

மாதிரி 191 l நீளமுள்ள ஒரு சீரான அளவுச் சங்கிலியானது ஒரு ஆற்றின் மேல் அதன் நடுப் புள்ளி தண்ணீரின் மேற் பரப்பை இலேசாகத் தொட்டுக் கொண்டிருக்குமாறு விறைப் பாக நீட்டப்பட்டுள்ளது. அதன் முனைகள் ஒவ்வொன்றும் தண்ணீரின் மேற் பரப்பிற்கு மேலே k உயரத்திலுள்ளன. அளவுச் சங்கிலிக்கும் ஆற்றின் அகலத்துக்குமிடையேயுள்ள வித்தியாசம் ஏறக்குறைய $\frac{8k^2}{3l}$ என்று காட்டு.

தீர்வு

$s = c \sin h \frac{x}{c}$ என்ற சூத்திரத்தில்,

s = மிகத் தாழ்ந்த புள்ளிக்கும் சங்கிலியின் ஒரு முனைக்கு முள்ள தூரம்

= சங்கிலியின் நீளத்தில் பாதி

= $\frac{1}{2}l$ என்றும்

$\sin h \frac{x}{c} = \frac{x}{c} + \frac{1}{3!}\left(\frac{x}{c}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{x}{c}\right)^5 + \ldots$ என்றும் பிரதியிடுக.

$$\therefore \tfrac{1}{2}l = c\left[\frac{x}{c} + \frac{x^3}{6c^2} + \ldots - -\right]$$

$= x + \frac{x^3}{6c}$ ($\frac{x}{c}$ சிறியதாகையால் ஏனைய உறுப்புக்கள் புறக்கணிக்கப்பட்டு விட்டன.

$$\therefore l = 2x + \frac{x^3}{3c}.$$

அல்லது, $(l - 2x) = \frac{x^3}{3c^2}$ (ஏறக்குறைய)

சங்கிலியத்தின் தொய்வு = மிகத் தாழ்ந்த புள்ளிக்கும் மிக உயர்ந்த புள்ளிக்குமுள்ள நிலைக்குத்துயரம்.

$= k$ (கொடுக்கப்பட்டுள்ளது).

ஆனால், மிக உயர்ந்த புள்ளி (x, y) எனில், தொய்வு $= y - c$ ஆகும்.

$$\therefore k = y - c$$

$$= c \cos h \frac{x}{c} - c$$

$$= c \left[\cos h \frac{x}{c} - 1 \right]$$

$$= c \left[\left\{ 1 + \frac{1}{2!}\left(\frac{x}{c}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{x}{c}\right)^4 + \dots \right\} - 1 \right]$$

$$= c \left[\frac{x^2}{2c^2} \right],$$ (ஏனைய உறுப்புக்களைப் புறக்கணித்தபின்)

$$= \frac{x^2}{2c}$$

அல்லது, $c = \dfrac{x^2}{2k}$

$$\therefore l - 2x = \frac{x^3}{3} \times \frac{4k^2}{x^4}$$

$$= \frac{4k^2}{3x} \left(\text{, ஆனால், } x = \frac{l}{2} \right)$$

$$= \frac{8k^2}{3l}$$

$\therefore l - 2x$ அளவுச் சங்கிலிக்கும் ஆற்றின் அகலத்துக்குமுள்ள வித்தியாசம் $= \dfrac{8k^2}{3l}$.

மாதிரி 192: $2l$ நீளமுள்ள ஒரு சீரான சங்கிலி $2a$ இடைவெளியில் ஒரே கிடைக்கோட்டின் மேலுள்ள இரு புள்ளிகளுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. a-ஐ விடவும் l மிகச் சிறிதளவே அதிகமானால், மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியில் இழுவிசையானது $\sqrt{\dfrac{a^3}{6(l-a)}}$ நீளச் சங்கிலியின் எடைக்குச் சமம் என்றும், நடுப் புள்ளியில் தொய்வு $\frac{1}{2}\sqrt{6a(l-a)}$ என்றும் காட்டு.

தீர்வு

l ஆனது a-யை விட மிகச் சிறிதளவே அதிகமாயிருப்ப தால், நடுப் புள்ளியில் தொய்வு மிகக் குறைவாகவும், சங்கிலி யின் பண்பளவு c மிக அதிகமாகவுமிருக்கும்.

$$s = c \sin h \frac{x}{c}$$ யில் $s = l$, $x = a$ என்று பிரதியிடவும்.

$$\therefore l = c \sin h \frac{a}{c}$$

$$= c \left[\frac{a}{c} + \frac{1}{3!} \left(\frac{a}{c} \right)^3 + \ldots \right]$$

$$= a + \frac{a^3}{6c^2} \text{ (தோராயமாக)}$$

$$\therefore l - a = \frac{a^3}{6c^2}$$

$$6c^2 = \frac{a^3}{l-a}$$

அல்லது, $c = \sqrt{\dfrac{a^3}{6(l-a).}}$

ஒரு அலகுச் சங்கிலியின் எடை வீதம் ω எனில், மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியில் இழுவிசை $= \omega \sqrt{\dfrac{a^3}{6(l-a)}}$

Z என்பது மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியிலுள்ள தொய்வு எனில்,

$$Z = y - c,$$

y என்பது இயக்கு வரைக்கு மேல் மிக உயர்ந்த புள்ளியின் நிலைக்குத்து உயரம்.

$$Z = c \cos h \frac{x}{c} - c$$

$$= c \left[1 + \frac{1}{2!} \left(\frac{x}{c} \right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{x}{c} \right) + \ldots \ \ldots \ \ldots \ -1 \right]$$

$$= c\left[\frac{x^2}{2c^2}\right] \text{(தோராயமாக).}$$

$$= c\,\frac{x^2}{2c}$$

$$= \tfrac{1}{2}.\frac{a^2}{\sqrt{\dfrac{a^3}{6(l-a)}}}$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{6a\,(l-a)}. \text{ (தோராயமாக)}$$

பயிற்சி 23

(1) 155 அடி நீளமுள்ள கனமான சீரான சங்கிலியொன்று ஒரே கிடைக் கோட்டில் 150 அடி இடைவெளியிலுள்ள A, B என்னும் இரு புள்ளிகளிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. அதன் மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியிலுள்ள இழுவிசை சங்கிலியின் எடையைப் போன்று தோராயமாக 1·08 மடங்கு இருக்குமென்று என்று காட்டு.

(2) வளைவரை விட்டம் 100 அடியில், 1அடி தொய்வுடன் தொங்கும் அடிக்கு $\frac{1}{20}$ ராத்தல் வீதம் எடையுள்ள ஒரு கம்பியின் மீப்பெரு இழுவிசை தோராயமாக $62\frac{1}{2}$ ராத்தல்கள் காட்டு.

(3) 100 அடி நீளமுள்ள சீரான கம்பியொன்று இரண்டு தந்திக்கம்பங்களின் மேல் ஒரே மட்டத்திலுள்ள இரண்டு புள்ளிகளில் கட்டப்பட்டு விறைப்பாக இழுக்கப்பட்டுள்ளது. நடுவிலுள்ள தொய்வு 1 அடியெனில், கம்பியின் நீளம் கம்பங்களுக்கிடையேயுள்ள தூரத்தைவிட $\frac{2}{75}$ அடி அதிகம் என்று காட்டு.

(4) ஒரு தந்திக் கம்பியானது a அடி இடைவெளியிலுள்ள இரண்டு கம்பங்களுக்கிடையே நீட்டப்பட்டுள்ளது. நடுவி

லுள்ள தொய்யல் n அடி. ω என்பது ஒரு அடி நீளக் கம்பியின் எடையெனில், முனைகளிலுள்ள இழு விசை தோராயமாக $\left(\frac{a^2}{8n} + \frac{7}{6} n \right)$ ω என்று காட்டு.

(5) ஒரு சீரான சங்கிலியொன்று ஒரு கிடைமட்டத்திலுள்ள இரு புள்ளிகளிலிருந்து அதன் இரு முனைகளின் மூலம் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. நடுவிலுள்ள தொய்வு மிகவும் சிறியது. எல்லை இழுவிசையானது தொய்வின் தலைகீழ் விகிதத்திற்கேற்ப மாறும் என்று காட்டு.

(6) ஒரு தந்திக் கம்பியானது வளைவரை விட்டம் 75 கெஜமும், நடுவிலுள்ள தொய்வு 1 அடியும் இருக்குமாறு இழுத்துக் கட்டப்பட்டுள்ளது. கம்பியிலுள்ள இழுவிசை தோராயமாக 480 ராத்தல் எடைக்குச் சமமென்று காட்டு. (கம்பியின் எடை மைலுக்கு 400 ராத்தல்).

(7) ACB என்பது ஒரு தந்திக் கம்பி. ABயானது $2l$ நீளமுள்ள கிடைக்கோடு. கம்பியின் நடுப் புள்ளியாகிய C, ABயிலிருந்து h ஆழத்திலுள்ளது. கம்பியின் நீளம் தோராயமாக

$$2l + \frac{4h^2}{3l} - \frac{28h^4}{45l^3}$$

என்று காட்டு.

தேற்றம் புவியீர்ப்பு விசையின்கீழ் தொங்கும் ஒரு இலேசான கயிற்றில், அதன் ஒவ்வொரு சிறு பகுதியின் மீதும் அப்பகுதியின் கிடை வீச்சுக்கு விகித சமமான எடை செயல்படும் வண்ணம் சுமையேற்றப்பட்டால், அக் கயிறு ஒரு பரவளைவு வடிவத்தில் தொங்கும்.

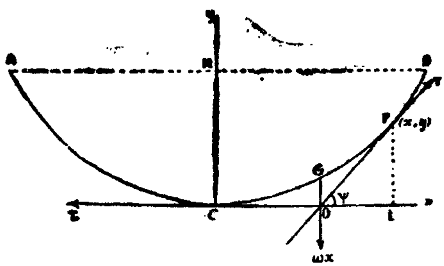
நிறுவல்:

ACB என்பது புவியீர்ப்பு விசையின்கீழ் தொங்கும் ஒரு கயிறு. அதன் மிகத் தாழ்ந்த புள்ளி C. C வழியே செல்லும் கிடைக்கோடு நிலைக்குத்துக் கோடு, ஆகியவற்றை x, y-அச்சுக்களாக எடுத்துக் கொள்க.

இக் கயிற்றின் ஒவ்வொரு சிறு பகுதியின் மீது செயல்படும் எடையும் அதன் கிடை வீச்சுக்கு விகித சமமாகயிருக்குமாறு இக்கயிற்றில் சுமையேற்றப்பட்டுள்ளது.

வில் CBயில் $P\ (x, y)$ என்னும் புள்ளியை எடுத்துக் கொள்க. $PL \perp Cx$ வரைக. $\therefore CL = x;\ PL = y.$

அதாவது, $CL = x$ என்பது CPயின் கிடை வீச்சு. w என்பது ஒரு அலகு கிடை வீச்சில் செயல்படுகின்ற எடை வீதம் எனில், CPயில் செயல்படும் எடை wx ஆகும்.



படம் 258

Pயிலுள்ள இழுவிசை T அதன் தொடு கோட்டின் வழியே மேல் நோக்கிச் செயல்படும். Cயில் இழுவிசை T_O, அதன் தொடுகோடு வழியே, அதாவது x அச்சின் வழியே வெளி நோக்கிச் செயல்படும். CPயின் எடையாகிய wx என்பது CP யின் நடுப்புள்ளியாகிய G வழியே நிலைக்குத்தாகக் கீழ்நோக்கிச் செயல்படும் CP ஆனது சமநிலையிலிருப்பதால், T, T_O. wx ஆகிய இம் மூன்று விசைகளும் ஒரு புள்ளியில் (அதாவது O-வில்) சந்திக்கும்.

Pயிலுள்ள தொடுகோடு x அச்சுடன் ψ சாய்விலிருப்ப தாகக் கொள்க, மிகத் தாழ்வான புள்ளி Cயிலுள்ள இழுவிசை T_0 ஆனது c கிடை வீச்சின் மேல் செயல்படும் எடைக்குச் சம மென்று கொள்க. $\therefore T_n = wc.$

கிடையாகவும், நிலைக்குத்தாகவும் விசைப் பிரிப்பு செய்து சமநிலைச் சமன்பாடுகள் அமைக்கவும்,

$$T \sin \psi = wx,$$
$$T \cos \psi = T_o = wc$$
$$\therefore \tan \psi = \frac{wx}{we} = \frac{x}{c}$$

ஆனல், $\tan \psi = \dfrac{dy}{dx}.$

$$\therefore dy = \frac{x}{c}dx$$

$$\therefore \int dy = \frac{1}{c}\int x dx + k.$$

அதாவது. $y = \frac{x^2}{2c} + k.$

Cயில், $x = o,\ y = o \quad \therefore k = o.$

$$\therefore y = \frac{x^2}{2c}$$

அல்லது, $x^2 = 2cy.$

இது ஒரு பரவளையின் சமன்பாடு. இதன் உச்சி C; அச்சு வழியே செல்லும் நிலைக்குத்துக் கோடு.

குறிப்பு 1 : இரு புள்ளிகளிலிருந்து தொங்கிக் கொண்டிருக்கும் கயிற்றில், ஏற்றப்படும் சுமை அதன் வளைவு வரை விட்டத்தில் சமமாகப் பிரிப்பீடு செய்யப்படுமேயானால் அக் கயிறு ஒரு பரவளைவு வடிவில் தொங்கும்.

குறிப்பு 2 : T_o, T, wx ஆகிய விசைகள் $\triangle\ LOP$யின் LO, OP, PL ஆகிய பக்கங்களால் அளவிலும், திசையிலும் குறிப்பிடப்படுகின்றன. எனவே, விசை முக்கோண விதியின்படி,

$$\frac{T_o}{LO} = \frac{T}{OP} = \frac{wx}{PL}$$

இப்பொழுது $DO = OC = \frac{1}{2}LC = \frac{1}{2}x,$

$$PL = y$$

$$\therefore OP = \sqrt{OL^2 + LP^2} = \sqrt{\frac{x^2}{4} + y^2} = \frac{\sqrt{x^2+4y^2}}{2}$$

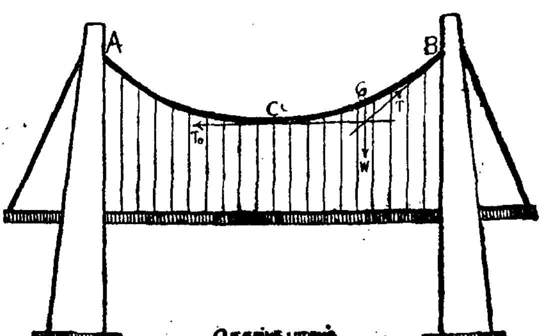
$$\therefore \frac{T_o}{\frac{1}{2}x} = \frac{T}{\frac{\sqrt{x^2+4y^2}}{2}} = \frac{wx}{y}$$

$$\therefore T_o = \frac{wx^2}{2y},\ T = \frac{wx\sqrt{x^6+4y^2}}{2y},$$

இவற்றிலிருந்து, கயிற்றின் மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியிலுள்ள இழுவிசை T_0 ஐயும், எந்த புள்ளியிலுமுள்ள இழுவிசை T_0 ஐயும் காணலாம்.

தொங்கு பாலம் (Suspension Bridge)

இரண்டு உறுதியான கம்பிக் கயிறுகள் (Cables) கிடைவசத்தில் இணையாக நீட்டப்பட்டு, அவற்றின் முனைகள் நிலையான தாங்கிகளுடன் உறுதியாகப் பொருத்தப்பட்டுள்ளன. இக்கம்பிக் கயிறுகளின் பல்வேறு புள்ளிகளிலிருந்து நிலைக்குத்தாகத் தொங்குகிற சங்கிலிகள் ஒரு சாலை வழி (Roadway)யைச் சுமந்து நிற்கின்றன. இவ்வாறு தொங்கின்ற சங்கிலிகள் மேலே கம்பிக் கயிறுகளுடன் இறுக்கமாகப் பொருத்தப்பட்டும், சாலை வழியே பார வண்டிகள் கடந்து செல்லும் போது ஏற்படும் அலைவுகளை அனுமதிக்கும் வகையில் அவற்றின் கீழ் முனைகள் சாலை வழியுடன் இணைக்கப்பட்டுமிருக்கும். எந்த இரு அடுத்தடுத்த நிலைக்குத்துச் சங்கிலிகளுக்குமிடையேயுள்ள கிடைத் தூரம் ஒரே அளவினதாகயிருக்கும் வகையில் இடைவெளி விட்டு இந்த நிலைக்குத்துச் சங்கிலிகள் பொருத்தப்பட்டிருக்கும். இவ்வாறு, இரு இணையான கிடைத்தளக் கம்பிக் கயிறுகளில் தொங்கிக் கொண்டிருக்கும் ஒரு சாலை வழிப் பாலத்திற்கு "தொங்கு பாலம்" என்று பெயர்.



தொங்கு பாலம்

படம் 254

கம்பிக் கயிறுகளின் எடைகளுடனும், நிலைக்குத்துச் சங்கிலிகளின் எடைகளுடனும் ஒப்பிடுகையில் சாலை வழியின் எடை மிகப் பெரியதாகயிருப்பதால், ஒவ்வொரு நிலைக்குத்துச் சங்கிலியும் சாலை வழியின் ஒரு சம பகுதி எடையைத் தாங்கி நிற்ப

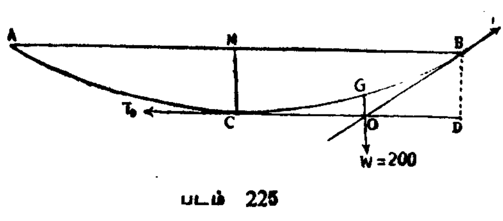
தாகக் கொள்ளலாம். ஆகவே, மேலேயுள்ள கம்பிக் கயிறு களால் தாங்கப்படும் சாலை வழிப் பாரமானது அவற்றின் வளைவு வரை விட்டமெங்கும் சமச்சீருடன் பிரிப்பீடு செய்யப் பட்டுள்ளதாகக் கொள்ளலாம். எனவே, முந்திய தேற்றத்தின் படி, இக் கம்பிக் கயிறுகள் பரவளைவு வடிவத்தில் தொங்கிக் கொண்டிருக்குமென்று காணலாம். இப் பரவளை வடிவத்தின் உச்சி C என்றும், அச்சு C வழி நிலைக்குத்துக் கோடு என்றும், அதன் சமன்பாடு $x^2 = 2cy$ என்றும் காண்க. C என்பது, கம்பிக் கயிற்றின் மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியாகிய Cயில் செயல்படும் கிடைத்தள இழுவிசைக்குச் சமமான எடையைக் கொண்ட ஒரு சாலை வழிப் பகுதியின் நீளமாகும்.

மாதிரி 193 400 அடி வளைவரை விட்டமும், 40 அடித் தொய்வும் கொண்ட ஒரு தொங்கு பாலத்தில் இரு கம்பிக் கயிறுகளாலும் தாங்கப்படுகின்ற முழு எடை ஒரு அடி கிடை வீச்சுக்கு 2 டன்களாகும், கம்பிக் கயிற்றின் மிகத் தாழ்வான புள்ளியிலும், கயிற்றைத் தாங்கி நிற்கும் புள்ளியிலுமுள்ள இழு விசைகளைக் காண்க.

(சென்னை பி.எஸ்.ஸி. 1968 செப்.)

தீர்வு

ACB என்பது தொங்கு பாலத்தின் ஒரு கம்பிக் கயிற்றைக் குறிக்கிறது. $AB = 400$ அடி என்பது வளை விட்டம். M என்பது ABயின் நடுப் புள்ளி. C என்பது கம்பிக் கயிற்றின் நடுப் புள்ளி. ஆகவே, C என்பது மிகத் தாழ்ந்த புள்ளி.



படம் 225

$\therefore$ MC = தொய்வு = 40 அடி. இரு கம்பிக் கயிறுகளும் தாங்கும் எடை வீதம் = 1 அடி கிடை வீச்சுக்கு 2 டன்கள்.

மொத்த கிடை வீச்சு = வளைவரை விட்டம் = 400 அடி.

$\therefore$ இரு கம்பிக் கயிறுகளும் தாங்கும் மொத்த எடை = $400 \times 2 = 800$ டன்கள்.

∴ ஒவ்வொரு கம்பிக் கயிறும் தாங்கும் மொத்த எடை = 400 டன்கள்.

C என்பது ஒரு கம்பிக் கயிறின் நடுப் புள்ளியாகையால், கம்பிக் கயிறின் CB பகுதி தாங்கும் மொத்த எடை = 200 டன்கள். = W என்க.

இந்த 200 டன்கள் எடையும் CBயின் நடுப்புள்ளி Gயில் ↓ செயல்படும். T_0, T என்பன முறையே E, B ஆகியவற்றிலுள்ள இழு விசைகள் என்று கொள்க. CB என்னும் பகுதி சமநிலையிலிருப்பதால் T_0, T $W = 200$ டன்கள் ஆகிய மூன்று விசைகளும் ஒரு புள்ளி (0) வழியே செல்லும். $BD \perp C0$ வரைக.

$$BD = MC = 40 \text{ அடி.}$$

$$OD = \tfrac{1}{2}CD = \tfrac{1}{2}\ MB = \tfrac{1}{4}AB = \tfrac{1}{4} \times\ 400 = 100 \text{ அடி.}$$

$$OB^2 = OD^2 + BD^2 = 10000 + 1600 = 11600$$

$$\therefore\ OB = \sqrt{11600} = 20\ \sqrt{29}$$

△ ODB யிலிருந்து விசை முக்கோண விதியின்படி,

$$\frac{T_0}{OD} = \frac{T}{OB} = \frac{200}{BD}$$

$$T_0 = \frac{T}{20\sqrt{29}} = \frac{200}{40} = 5.$$

$$\therefore\ T_0 = 500 \text{ டன்கள்.}$$

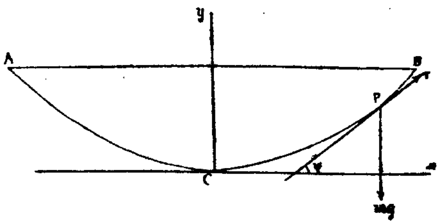
$$T = 100\ \sqrt{29} \text{ டன்கள்.}$$

சீரான பலம் பொருந்திய சங்கிலியம் (Catenary of uniform strength)

இரு புள்ளிகளுக்கிடையே தொங்கிக் கொண்டிருக்கும் ஒரு சங்கிலியின் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் எடை (அல்லது பொருண்மை) யானது அப்புள்ளியிலுள்ள இழுவிசைக்கு விகித சமமானால், அச்சங்கிலியால் அமையப் பெறும் வளைவரையின் வடிவம் ஒரு *சீரான பலம் பொருந்திய சங்கிலியம்* என்று அழைக்கப்படுகிறது.

சீரான பலம் பொருந்திய சங்கிலியத்தின் சமன்பாடு

A, B என்னும் கிடையான புள்ளிகளில் முனைகள் பொருத்தப்பட்டு ACB என்னும் ஒரு சங்கிலி தொங்கிக் கொண்டிருக்கிறது. C அதன் மிகத் தாழ்ந்த புள்ளி. இச்சங்கிலியின் ஒவ்வொரு



படம் 256

புள்ளியிலும் பொருண்மையானது அப்புள்ளியிலுள்ள இழுவிசைக்கு விகித சமமாகும்.

P என்னும் புள்ளியில் m என்னும் பொருண்மையைக் கருதுக. இப்புள்ளியின் சங்கிலியின் இழுவிசை T என்க. எனவே, m ஆனது Tக்கு விகித சமமாகையால், μ என்பது விகிதசம மாறிலியெனில்,

$$m = \mu T$$

ஆகும். இப்பொருண்மையின் எடை $mg = \mu Tg$ ஆனது Pயில் நிலைக்குத்தாகக் கீழ்நோக்கிச் செயல்படும்.

Pயிலுள்ள தொடுகோடு கிடைக்கோட்டுடன் ψ சாய்விலிருந்தால், இழுவிசை Tயின் கிடைக் கூறு $T \cos\psi = T.\frac{dx}{ds}$

என்றும், நிலைக்குத்துக் கூறு $T \sin\psi = T\frac{dy}{ds}$ என்றும் அறிவோம்.

இழுவிசை தவிர Pயில் செயல்படும் விசை புவியீர்ப்பு விசையாகிய g மட்டுமேயாகும். எனவே, $X =$ இவ்விசையின் கிடைக்கூறு $= O$.

$Y = y$-அச்சுத் திசையில் gயின் நிலைக்குத்துக் கூறு $= -g$.

இம்மதிப்புக்களைப் பின்வரும் சமன்பாடுகளில் பிரதியீடு செய்க.

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right)+mX=O, \quad \therefore \quad T\frac{dx}{ds}\Big)+O=O \quad \ldots (1)$$

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right)+mY=O. \quad \frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right)-mg=O \quad \ldots (2)$$

(1) இலிருந்து, $\frac{d}{ds}\left(T.\frac{dx}{ds}\right)=O$

தொகையீடு காணின், $T.\frac{dx}{ds}$ = ஒரு மாறிலி $=k$ என்க.

$$\therefore T=k\frac{ds}{dx}.$$

(2) இலிருந்து, $\frac{d}{ds}\left(T.\frac{dy}{ds}\right)=mg$

$T=k\frac{ds}{dx}$ என்று பிரதியிடுக.

$$\therefore \frac{d}{ds}\left(k.\frac{ds}{dx}.\frac{dy}{ds}\right)=mg=\mu Tg=\mu g.k\frac{ds}{dx}.$$

அதாவது, $\frac{d}{ds}\left(k\frac{dy}{dx}\right)=\mu g\ k.\frac{ds}{dx}.$

$$\frac{d^2y}{dx^2}.\frac{dx}{ds}=\mu g.\frac{ds}{dx}.$$

அல்லது, $\frac{d^2y}{dx^2}=\mu g\left(\frac{ds}{dx}\right)^2$

$$=\mu g\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}$$

$\frac{dy}{dx}=p$ எனில், $\frac{dp}{dx}=\mu g(1+p^2)$

$$\therefore \frac{dp}{1+p^2}=\mu g\cdot dx$$

$$\int \frac{dp}{1+p^2} = \mu g \int dx.$$

$\tan^{-1}(p) = \mu g x +$ ஒரு மாறிலி.

அதாவது, $\tan^{-1}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \mu g x + \lambda$, λ ஒரு மாறிலி.

சங்கிலியின் மிகத் தாழ்ந்த புள்ளி Cயை ஆதியாகவும், C வழிக் கிடைக் கோட்டை x-அச்சாகவும் கொள்வோமாயின் C யில் $x=0$, $\frac{dy}{dx}$ = தொடு கோட்டின் சாய்வு $=0$. $\therefore = \lambda = 0$.

$$\therefore \tan^{-1}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \mu g x.$$

அல்லது, $\frac{dy}{dx} = \tan(\mu g x)$

இப்பொழுது, $\mu g = \frac{1}{a}$ என்று எடுத்துக் கொள்க.

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \tan\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$dy = \tan\frac{x}{a}\,dx.$$

தொகையீடு காணின், $y = a \log \sec\frac{x}{a} +$ மாறிலி

Cயில், $x=0$, $y=0$ $\therefore$ மாறிலி $=0$.

$$\therefore y = a \log \sec \frac{x}{a}$$

என்பது சீரான பலம் பொருந்திய சங்கிலியத்தின் சமன்பாடு. இவ்வளைவரையானது y-அச்சின் இரு புறமும் சமச்சீருடன் அமைந்துள்ளது. $x = \frac{a\pi}{2}$ எனில், $y = \infty$ ஆகும், எனவே,

$x = \pm\frac{a\pi}{2}$ இல் இவ்வளைவரை தொலைத் தொடுகோடுகளைக்

கொண்டுள்ளது. ஆகவே, இச் சங்கிலியத்தின் வளைவரை விட்டம் $a\pi$ ஆகும்.

சங்கிலியின் பொருண்மை மாறுபாடுவிதி (Law of Variation of mass)

$$T = k\frac{ds}{dx}$$

என்று கண்டோம். ஆனால் $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

$$= \sqrt{1+\tan^2\frac{x}{a}} \quad \left(\text{ஏனெனில் } \frac{dy}{dx} = \frac{x}{a}\right)$$

$$= \sec\frac{x}{a}.$$

$$\therefore ds = \sec\frac{x}{a}.dx$$

தொகையீடு காணின், $s = a\log\left(\sec\frac{x}{a} + \tan^{x}\right) + \text{மாறிலி}.$

s ஆனது மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியிலிருந்து அளவிடப்பட்டால் $x = o$, $s = o$ எனில், $o = a\log(1) + \text{மாறிலி}$ $\therefore \text{மாறிலி} = o.$

$$\therefore s = a\log_e\left(\sec\frac{x}{a} + \tan\frac{x}{a}\right)$$

$$\frac{s}{a} = \log_e\left(\sec\frac{x}{a} + \tan\frac{x}{a}\right)$$

அல்லது, $e^{\frac{s}{a}} = \sec\frac{x}{a} + \tan\frac{x}{a}$

$$\therefore e^{-\frac{s}{a}} = \sec\frac{x}{a} - \tan\frac{x}{a}$$

$$\therefore \frac{e^{\frac{s}{a}} + e^{-\frac{s}{a}}}{2} = \sec\frac{x}{a}$$

அல்லது, $\cosh\frac{s}{a} = \sec\frac{x}{a}$

$$= \frac{ds}{dx}$$

$$= \frac{T}{k} \quad \left(\text{ஆனால் } m = \mu T \therefore T = \frac{m}{\mu}\right.$$

$$= \frac{m}{\mu k}$$

$$\therefore\ m = \mu k \cosh\frac{s}{a}$$

அதாவது $m \propto \cosh\frac{s}{a}$.

அதாவது, சங்கிலியின் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் பொருண்மை யானது $\cosh\frac{s}{a}$ க்கு விகித சமமாகயிருக்கும்.

குறிப்பு : $s = a\log\left(\sec\frac{x}{a} + \tan\frac{x}{a}\right)$

ஆனல் $\sec\frac{x}{a} + \tan\frac{x}{a} = \dfrac{1+\sin\frac{x}{a}}{\cos\frac{x}{a}}$

$$= \frac{\cos^2\frac{x}{2a} + \sin^2\frac{x}{2a} + 2\sin\frac{x}{2a}\cos\frac{x}{2a}}{\cos^2\frac{x}{2a} - \sin^2\frac{x}{2a}}$$

$$= \frac{\left(\cos\frac{x}{2a} + \sin\frac{x}{2a}\right)^2}{\left(\cos\frac{x}{2a} + \sin\frac{x}{2a}\right)\left(\cos\frac{x}{2a} - \sin\frac{x}{2a}\right)}$$

$$= \frac{\cos\frac{x}{2a} + \sin\frac{x}{2a}}{\cos\frac{x}{2a} - \sin\frac{x}{2a}}$$

$$= \frac{1+\tan\frac{x}{2a}}{1-\tan\frac{x}{2a}}$$

$$= \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2a}\right)$$

$$\therefore\ s = a\log\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2a}\right)$$

மாதிரி 194 : ஒரு சீரான பலம்கொண்ட சங்கிலியத்தின் தாங்கற் புள்ளிகளுக்கிடையேயுள்ள தூரம் a ; அதன் சங்கிலி

யின் நீளம் l. அதன் பண்பளவை c என்பது $\tanh \frac{l}{4c} = \tan \frac{a}{4c}$ என்ற தொடர்பிலிருந்து பெறப்படுகிறதென்று காட்டு.

தீர்வு :

A, Bயை தாங்கற்புள்ளிகளாகவும், c யைப் பண்பளவையாகவும் கொண்ட ஒரு சீரான பலம்கொண்ட சங்கிலியத்தின் சமன்பாடு

$$y = c \log \sec \frac{x}{c}$$

என்று கொள்க. அதன் மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியிலிருந்து அதன் மேலுள்ள $P(x, y)$ என்னும் ஏதேனுமொரு புள்ளி வரையுள்ள சங்கிலியின் நீளம் s எனில்,

$$s = c \log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2c} \right)$$

என்று நாமறிவோம். தாங்கற்புள்ளி Bயில் $x = \frac{a}{2}$, $s = \frac{l}{2}$ ஆகும்.

$$\therefore \frac{l}{2} = c \log_e \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{4c} \right)$$

$$e^{\frac{l}{2c}} = \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{4c} \right)$$

$$= \frac{1 + \tan\frac{a}{4c}}{1 - \tan\frac{a}{4c}}$$

$$\therefore \frac{e^{\frac{l}{2c}} + 1}{e^{\frac{l}{2c}} - 1} = \frac{\left(1 + \tan\frac{a}{4c}\right) + \left(1 - \tan\frac{a}{4c}\right)}{\left(1 + \tan\frac{a}{4c}\right) - \left(1 - \tan\frac{a}{4c}\right)}$$

அதாவது, $$\frac{e^{\frac{l}{4c}} + e^{\frac{-l}{4c}}}{e^{\frac{l}{4c}} - e^{\frac{-l}{4c}}} = \frac{2}{2 \tan\frac{a}{4c}}$$

$$\coth \frac{l}{4c} = \cot \frac{a}{4c}$$

அல்லது, $\tanh \frac{l}{4c} = \tan \frac{a}{4c}.$

மாதிரி 195: $y = a \log \sec \frac{x}{a}$ என்ற சீரான பலம்கொண்ட சங்கிலியத்தில் ψ என்பது (x, y) என்னும் புள்ளியிலுள்ள தொடுகோடு x-அச்சுடன் கொண்டுள்ள சாய்வு, ρ என்பது அப் புள்ளியிலுள்ள வளைவாரை (radius of curvature) எனில்,

(i) $x = a\psi$

(ii) $s = a \log (\sec \psi + \tan \psi)$

(iii) $\cos \psi \cdot \cosh \frac{s}{-} = 1$

(iv) $\rho = a \cosh \left(\frac{s}{a}\right)$

என்று நிறுவுக.

$$y = a \log \sec \frac{x}{a}$$

தீர்வு :

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \tan \frac{x}{a}.$$

ஆனல், $\frac{dy}{dx} = \tan \psi.$

$$\therefore \tan \frac{x}{a} = \tan \psi.$$

அல்லது, $\frac{x}{a} = \psi,\ x = a\psi$ ... ... (i)

இப்பொழுது, $\frac{ds}{d\psi} = \frac{ds}{dx} \cdot \frac{dx}{d\psi}$

$$= \frac{ds}{dx} \cdot a \left(\because x = a\psi,\ \frac{dx}{d\psi} = a\right)$$

ஆனல் $\frac{dx}{ds} = \cos \psi \quad \therefore \frac{ds}{dx} = \sec \psi.$

$$\therefore \frac{ds}{d\psi} = \sec \psi \cdot a$$

அல்லது, $ds = a \sec \psi \cdot d\psi.$

தொகையீடு காணின், $s = a \int \sec \psi \, d\psi + k$

$$= a \log_e (\sec \psi + \tan \psi) + k.$$

மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியில், $s = 0$, $\psi = 0 \ \therefore k = 0.$

$$\therefore s = a \log_e (\sec\psi + \tan\psi) \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(ii)}$$

(ii) இலிருந்து, $\frac{s}{a} = \log_e (\sec\psi + \tan\psi)$

$$e^{\frac{s}{a}} = \sec\psi + \tan\psi.$$

$$\therefore e^{-\frac{s}{a}} = \sec\psi - \tan\psi$$

$$\therefore e^{\frac{s}{a}} + e^{\frac{-s}{a}} = \sec\psi.$$

$$\cosh\frac{s}{a} = \sec\psi = \frac{1}{\cos\psi}.$$

அல்லது, $\cos\psi . \cos h\frac{s}{a} = 1. \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(iii)}$

வகை நுண் கணிதத்திலிருந்து, $\rho = \frac{ds}{d\psi}$ என்று நாமறி வோம்.

$$\therefore \rho = \frac{ds}{dx} . \frac{dx}{d\psi}$$
$$= \sec\psi . a$$
$$= a \cosh\frac{s}{a} \quad \text{[(iii) இலிருந்து.]}$$

பயிற்சி 24

(1) ஒரு தொங்கு பாலத்தின் வளைவரை விட்டம் 200 மீட்டர்; அதன் எடை 50 டன்கள்; சங்கிலியின் தொய்வு 20 மீட்டர். மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியிலும் மிக உயர்ந்த புள்ளியிலும் இழு விசைகளைக் காண்க.

(2) ஒரு தொங்கு பாலத்தின் வளைவரை விட்டம் 100 மீட்டர்; சங்கிலியின் நடுப் புள்ளியிலுள்ள தொய்வு 10 மீட்டர். ஒவ்வொரு சங்கிலி தாங்கும் மொத்த எடையும் 750 குவின்டால் களெனில் ஒவ்வொரு சங்கிலியின் மீப்பெரு இழுவிசையையும் மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியின் இழு விசையையும் காண்க.

(சென்னை பி.எஸ்ஸி., 1970 ஏப்.

(3) ஒரு தொங்கு பாலத்தின் முழுப் பாரமாகிய 200 டன் களும் அதன் 150 அடி நீளக் கிடையான வளைவரை விட்டத் தில் சமச்சீராகப் பிரிப்பீடு செய்யப்பட்டுள்ளது. அதன் உயரம் 20 அடி. மிகத்தாழ்வான புள்ளியிலும் தாங்கற்புள்ளியிலும் இழு விசைகளைக் காண்க.

(மதுரை பி.எஸ்ஸி., 1970 செப்.)

(4) ஒரு தொங்கு பாலத்தின் எடையாகிய 160 டன்களும் அதன் 120 அடி நீள வளைவரை விட்டத்தில் சமச் சீராகப் பிரிப்பீடு செய்யப்பட்டுள்ளது. தாங்கற்புள்ளிகளிலிருந்து மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியின் ஆழம் 16 அடியெனில் தாங்கற்புள்ளியில் இழு விசையைக் காண்க.

(5) 600 அடி வளைவரை விட்டமும் 60 அடித் தொய்வுமுள்ள ஒரு தொங்கு பாலத்தில் தாங்கப்படும் மொத்த எடை ஒரு கிடைத்தள அடிக்கு 2 டன்கள் வீதம் பிரிப்பீடு செய்யப்பட்டுள்ளது. சங்கிலிகள் ஒவ்வொன்றிலுமுள்ள கிடைத்தள இழு விசையையும் தாங்கற் புள்ளியிலுள்ள இழு விசையையும் காண்க.

(6) ஒரு தொங்கு பாலத்தின் வளைவரை விட்டம் 40 மீட்டர்; தொய்வு 5 மீட்டர். வளைவரை விட்டமெங்கும் அதன் எடை மீட்டருக்குக் கால் டன் வீதம் சமச் சீராகப் பிரிப்பீடு செய்யப்பட்டிருந்தால், ஒவ்வொரு முனையிலும் இழு விசை $5\sqrt{5}$ டன்கள் என்று காட்டு.

(7) ஒரு நடைபாதையின் நீளமெங்கும் சீராகப் பிரிப்பீடு செய்யப்பட்டுள்ள ஒரு பாரத்தை ஒரு தொங்கு சங்கிலி தாங்குகிறது. இந்தப் பாரமானது 600 அடி நீள வளைவரை விட்டத்தில் அடிக்கு அரை டன் என்னும் வீதத்தில் பரவிக் கிடக்கின்றது. மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியிலிருந்து தாங்கற்புள்ளியின் நிலைக்குத்து உயரம் 50 அடி. சங்கிலியின் எடையைப் புறக்கணித்துவிட்டு, மீப்பெரு, மீச்சிறு இழு விசைகளைக் காண்க.

(8) ஒரு சீரான பலம்கொண்ட சங்கிலியத்தின் எந்தப் புள்ளியிலும் ஒரு அலகு நீளத்தின் பொருண்மை வீதம் அப் புள்ளியின் வளைவரைக்கேற்ப மாறுபடுமென்று காட்டு.

(9) இரு புள்ளிகளுக்கிடையே தொங்கிக் கொண்டிருக்கும் ஒரு கயிற்றின் எந்தப் புள்ளியிலும் அடர்த்தியானது அக் கயிறு தொங்கிக் கொண்டிருக்கும் வளைவரைக்கு அப் புள்ளியின் வளைவரைக்கேற்ப மாறுபடின், அக் கயிற்றின் வடிவம் ஒரு சீரான பலம்கொண்ட கயிற்று வளையென்று காட்டு.

(10) πa நீளமுள்ள ஒரு கயிறு $2a$ இடைவெளியிலுள்ள இரு புள்ளிகளில் கட்டப்பட்டு, அப் புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நேர்கோட்டிற்குச் செங்குத்தாகச் செயல்படும் ஒரு விசையினால் தள்ளப்பட்டு ஒரு அரைவட்ட வடிவில் ஓய்வு நிலையிலிருக்கிறது. கயிற்றின் எந்தப் புள்ளியிலும் செயல்படும் விசை, அந்த நேர் கோட்டிலிருந்து அப் புள்ளியின் தூரத்தின் வர்க்கத்தின் எதிர் மாறு விகிதத்தில் மாறுபடுமெனக் காட்டு.

விடைகள்

அறிமுகம்

பயிற்சி 1

(2) $\cos\theta = \frac{7\sqrt{26}}{78}$; $\frac{1}{\sqrt{185}}(7i - 6j - 10k)$; (3) $\sqrt{\frac{115}{147}}$;

(4) $24i + 7j - 5k$; $15(i + j + k)$.

முதற்பாகம் — நிலையியல்

பயிற்சி 2

(1) (i) $3\sqrt{13}$, (ii) 7, (iii) $2\sqrt{3}$, (iv) 3, (v) 90° ;

(2) 120° ; (3) $\cos^{-1}(\frac{1}{8})$; (4) 60° ; (5) 60° ;

(6) $15\sqrt{3}$ ராத். எடை; 15 ராத்.எடை;

(9) 16 கி.கி.; (10) 12 கி.கி.; (21) $P_1 = 12$, $P_2 = 5$.

பயிற்சி 5

(4) 12·06 கி.கி. ; (6) ADவழியே $5P$.

(7) 57·25 ராத். எடை; 47°41′ தெ.கி.

(10) $P\sqrt{3}$; $\overrightarrow{2P}$ திசையுடன் 150°யில்.

(11) $Q\sqrt{3}$; $(P - Q)$ வுடன் 150°யில்.

(17) $P\sqrt{26}(\sqrt{2} - 1)$; ABயுடன் $2\pi - \tan^{-1}(5)$ கோணத்தில்.

பயிற்சி 6

(1) (i) $R = 21$, $AC = 4$; (ii) $R = 20$, $AC = 8$;
(iii) $R = 30$, $AC = 21$.

(2) (i) $R = 46$; ABதிசையில் $AC = 12$; (ii) $R = 30$; BA திசையில் $AC = 15$; (iii) $R = 3$; BA திசையில் $AC = 95\frac{1}{3}$.

(3) 15 கி.கி; 10 கி.கி.; (4) 112 கி.கி., 16 கி.கி.

(5) 60 செ.மீ. அல்லது 40 செ.மீ ; (6) 6 கி.கி., 4 கி.கி.

(7) (அ) இரண்டாவது தாங்கியிலிருந்து $6\frac{1}{4}$ மீட்டர் தூரம்.
(ஆ) 4 மீட்டர்.

(8) மூலையிலிருந்து 2·5 மீட்டர் தூரத்தில். (9) $116\frac{2}{3}$ கி.கி.

(10) 62·5 கி.கி., 57·5 கி.கி. (11) 180 ராத்தல்.

(12) 20 கி.கி., $\frac{2}{3}$ மீட்., $\frac{1}{3}$ மீட்.; (15) 1 : 4.

(16) $\frac{1}{2}\left[W+P\left(1+\frac{b}{a}\right)\right]$, $\frac{1}{2}\left[W+P\left(1-\frac{b}{a}\right)\right]$

(22) $\frac{R\tan B}{\tan B+\tan C}$, $\frac{R\tan C}{\tan B+\tan C}$.

பயிற்சி 7

(1) 6 ராத்., 4 ராத்., 4 அடி; (2) $3\mathbf{i}+\mathbf{j}-4\mathbf{k}$; (3) $-3\mathbf{i}+19\mathbf{j}-4\mathbf{k}$;

(4) $6(2\mathbf{i}+6\mathbf{j}+\mathbf{k})$; (5) $P\sqrt{7}$; $\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$; CBயில் $CD=2a$ எனும் புள்ளி.

(12) 7 கி.கி எடையிலிருந்து $\frac{7}{8}$ மீட்.தூரம்; (13) 60 கி.

(14) மூலையிலிருந்து $3\frac{1}{2}\frac{0}{1}$மீட். தூரம்; (15) 150 கி.

(16) 64 கி., 48 கி.

(17) $\frac{5}{3}$அடி தூரத்தில். (18) மனிதனின் தோளிலிருந்து $\frac{9}{8}$ அடி தூரத்தில்.

(19) $h/\sqrt{2}$ உயரத்தில். (21) $2\sqrt{3}P$; Bயிலிருந்து $\frac{5}{9}$ BC தூரத்தில்.

(22) $2\sqrt{5}$; BAஐ Aயிலிருந்து 9 அலகு தூரத்திலும், BCஐ 14 அலகு தூரத்திலும்.

(24) $\frac{1}{2}$ ராத்தல்; AB-க்கு இணையாக Cயிலிருந்து 16அடி தூரத்தில்.

(27) $6\sqrt{6}$ கி.கி; 45° ; (28) 9கி.கி., ADயில் $\frac{1}{3}$ ADதூரத்தில்.

(29) Aயிலிருந்து $\frac{3}{8}$மீட்டர்.

(30) $2\sqrt{2}$ கி.கி. எடைவிசை ABக்கு 45° சரிவில் BAயில் $AE=3\frac{1}{2}$ AB என்றவாறு E எனும் புள்ளி வழியாக.

(32) $\overrightarrow{P}$; BA வழியே $BA=AE$ என்ற அளவில் E எனும் புள்ளியில்.

(33) 1கி.கி. ; (34) கால்களுடன் மேசையின் எடைக்குச் சமமான எடை.

(35) முறிந்த காலுக்கு எதிர்க் காலையும் மேசையின் மையத்தையும் சேர்க்கும் நேர்கோட்டை 1 : 2 என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளி.

பயிற்சி 8

(2) 20 மீட்.கி.கி. ; (3) $8(6+4\sqrt{3})$ மீட்.கி.கி.; (5) 9 அடி ராத்தல்.

(17) $\frac{1}{2}Pa$.

பயிற்சி 9

(1) ABயுடன் 240°யில் 7 ராத்தல் எடைவிசை; $28\sqrt{3}$ அடி ராத்தல் திருப்புத் திறன் கொண்ட சுழலிணை.

(2) $\sqrt{9}$ அலகுகள்; Aயிலிருந்து $\frac{29}{9}$ a தூரத்தில்.

(3) $\frac{8}{2}\sqrt{3}a$; (6) $6a$; ABயுடன் 240°.

(7) $\sqrt{109}$ அலகுகள்; $5\sqrt{3}x+19y-6\sqrt{3}a=O$.

(9) $\frac{1}{8}\sqrt{561}$; $21x+11y-14=O$.

(13) $R=\sqrt{93+36\sqrt{2}}$;$(18+12\sqrt{2})-x(5+8\sqrt{2})+y(4\sqrt{2}-1)=O$.

(14) $4\sqrt{10}$ கி.கி., $x+3y=16$; (16) $\sqrt{10}$கி.கி., 18 மீட்.கி.கி.

(19) $(x-y)(3\sqrt{2}+\sqrt{5})+2\sqrt{2}=O$

(20) DAயில் Dயிலிருந்து $\frac{a}{2\sqrt{3}}$ தூரத்தில் BC-க்கு இணையாக.

(21) $\sqrt{3}$ அலகு; BCஐ Dயில் $DB=3\ BC$ என்ற அளவில்.

பயிற்சி 10

(1) $\tan^{-1}\frac{3\sqrt{3}}{2}$; (22) $\frac{6bW}{\sqrt{9b^2-8a^2}}$; (25) $c^2>a^2+3b^2$ எனில்,

Bயில் எந்த எடையும் தொங்கவிடப்படாமலேயே முக்கோணம் கவிழ்ந்து விடும். (29) $\frac{1}{4}AB$.

(30) $W\sin 15°$ அல்லது $W\sin 75°$

(35) $F=\frac{W}{2\sqrt{3}}$; எதிர்விசை $=\frac{W\sqrt{13}}{2\sqrt{3}}$; (36) $\frac{11\sqrt{41}}{58}W$; $\frac{\sqrt{3169}}{58}W$.

(41) 2 கி.கி., $2\sqrt{3}$ கி.கி. (42) $\frac{W}{2}\sqrt{4+\tan^2\alpha}$; $\tan^{-1}(\frac{1}{2}\tan\alpha)$

(46) கிடைத்தளத்துடன் கோலின் சாய்வு θ எனில்,

$\tan\theta=\frac{1}{a+b}(a\cot\alpha-b\cot\beta)$;

$\frac{W\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$, $\frac{W\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$; (47) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{34}}{2}$;

கிடைக்கோட்டுடன் $\tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$ சாய்வில்

(50) $\frac{3Wl}{4\sqrt{a^2-l^2}}$; (51) 1·154 கி.கி., 0·244 கி.கி.

பயிற்சி 11

(1) 200 கி. (4) $\frac{W}{\sqrt{n^2-2n}}$ (5) 8கி. (7) $P+\frac{W}{2\sqrt{3}}$;

(8) $T-\frac{W}{2\sqrt{3}}$; (12) 15°; 8·92கி.கி.

பயிற்சி 13

(1) $\frac{1}{5\sqrt{3}}$; (2) $\frac{4}{\sqrt{3}}$கி.கி.; 4) $\frac{3500}{9}$, $\frac{1500}{11}$ கி.கி.

(5) 68·87, 92·72 கி.கி.; (8) $\tan^{-1}\frac{1}{2}$, $\frac{W}{3\sqrt{5}}$; (9) 0·66.

(13) $T=W\tan\frac{\alpha}{2}=F$; $\mu\geq\tan\frac{\alpha}{2}$. (16) $2\tan^{-1}\mu$.

பயிற்சி 14

(1) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$; (3) $\tan^{-1}\frac{91}{60}$; (4) $\tan^{-1}\left(\frac{41}{25}\right)$; (5) 14 ராத்.

எடை; $\frac{2}{15}$

(7) உச்சிவரை; (8) $\frac{75}{7}$ கி.கி., $\frac{60}{7}$கி.கி., $\frac{115}{7}$கி.கி.

(15) 13 அடி; (21) $\tan^{-1}\frac{a-b\mu\mu'}{\mu(a+b)}$

பயிற்சி 15

(6) $\pi/8$. (10) $\mu > \frac{a}{2h}$. (14) $a<\lambda$ எனில் கவிழும்; $\alpha>\lambda$ எனில் நழுவும். (29) $\frac{1}{\mu}$ (முனைப் பக்கத்தின் நீளத்தில் பாதி)

பயிற்சி 16

(1) $\frac{13}{15}\alpha$; (2) ABயிலிருந்து $\frac{23a}{36}$ தூரத்திலும், ADயிலிருந்து $\frac{a}{2}$ தூரத்திலும்; (3) CD, CB ஆகியவற்றிலிருந்து முறையே 1, $\frac{3}{4}$ மீட்டர் தூரங்களில்; (5) இணைப் பக்கங்களின் நடுக்கோட்டை 5 : 4 விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளி.

பயிற்சி 16

(6) $\tan^{-1}\frac{3}{14}$; (8) $\frac{11b}{30}$, $\frac{13a}{30}$.

பயிற்சி 17

(1) $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{8}\right)$; (2) $\left(\frac{256a}{315\pi}, \frac{256a}{315\pi}\right)$; (3) $\left(\frac{\pi a}{4\sqrt{2}}, O\right)$

(4) $\left(\frac{5a}{6}, O\right)$; (6) $\bar{x}=a\left(\pi-\frac{4}{3}\right)$, $\bar{y}=\frac{2a}{3}$; (7) $\left(\frac{3}{5}h, \frac{3}{4}\sqrt{ah}\right)$

(8) (2, $\frac{8}{5}$; (9) $\left(\frac{9}{20}a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}, \frac{9}{20}a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}\right)$; (10) $\left[\frac{a(1-\cos 2\alpha)}{4(1-\cos\alpha)}, O\right]$

(11) $\left(\frac{a+c}{2}, O\right)$ $\left[\frac{5(a+c)^2}{4(2a+c)}, O\right]$. (13) $\bar{x}=\bar{y}=\frac{128a}{105\pi}$

(14) $\left[\frac{(9\pi^2-16)a}{18\pi}, \frac{7a}{6}\right]$; (15) $\left[\frac{2a}{3(\pi-2)}, \frac{2b}{3(\pi-2)}\right]$

(16) $\left(O, \frac{3b}{8}\right)$; (17) $\left(a, \frac{5a}{8}\right)$; (18) $\left(\frac{2h}{3}, O\right)$

(19) $\left(\frac{b+c}{2}, O\right)$; (21) $\left(\frac{a(2+\sqrt{2})}{6}, O\right)$; (22) $\left(\frac{50a}{63}, O\right)$

பயிற்சி 18

(2) $\left(\frac{6a}{5}, \frac{9a}{20}\right)$; (3) $\left(O, \frac{5a}{3\pi}\right)$; (5) $\left(\frac{8a}{15}, \frac{8b}{15}\right)$

(6) $\left(\frac{5a}{12}, O\right)$.

பயிற்சி 24

(1) 33·66, 31·25; (2) 1010·62, 937·5 குவின்டால்;

(3) 187·5, 212·5 டன்கள்; (4) 170 டன்;

(5) 750 டன், 807·75 டன்; (8) 474·3, 450 டன்.

மேற்கோள் நூற்பட்டியல்

1. Principles of Mechanics *by* John L. Synge and Byron A. Griffith.
2. Classical Mechanics *by* D. E Rutherford.
3. Mechanics *by* J. L. Meriam.
4. Introduction to Mechanics *by* V. D. Deshpande.
5. Statics and the Dynamics of a Particle *by* William Duncan.
6. Statics *by* H. Lamb.
7. Analytical Statics *by* E. Routh.
8. Applied Mechanics, Volume I—Statics *by* George W. Housner and Donald E Hudson.
9. Statics *by* T. Natarajan.
10. Statics *by* T. R Raghava Sastri.
11. Statics *by* A. S. Ramsey.
12. Vector Methods *by* D. E. Rutherford.
13. Statics *by* S. Z. Zoney.

கலைச்சொற்கள்

A		
Acceleration		முடுக்கம்
,, due to gravity		ஈர்ப்பு முடுக்கம்
Angle	—	கோணம்
Angle of friction	—	உராய்வுக் கோணம்
Arm	—	புயம்
Astatic centre	—	நிலையில் மையம்
Astatic equilibrium	—	நிலையில் சமநிலை
Axle	—	அச்சாணி
B		
Beam	—	உத்திரம்
Body	—	பொருள்
C		
Cardioid	—	நெஞ்சுவளை
Catenary	—	சங்கிலியம், கயிற்றுவளை
Centre of gravity	—	புவியீர்ப்பு மையம்
Centre of mass	—	திணிவுமையம், பொருண்மை மையம்
Centre of parallel forces	—	இணைவிசைகளின் மையம்
Centroid	—	திணிவு மையம்
Coefficient of friction	—	உராய்வுக் குணகம்
Component	—	கூறு, பிரிவு
,, horizontal	—	கிடைக் கூறு, கிடைப் பிரிவு
,, Vertical	—	நிலைக்குத்துக் கூறு, நிலைக் குத்துப் பிரிவு
Cone	—	கூம்பு
Cone of friction	—	உராய்வுக் கூம்பு
Contact	—	தொடுகை
Coplanar forces	—	ஒருதள விசைகள்
Couple	—	சுழலிணை
Cylinder	—	உருளை
D		
Density	—	அடர்த்தி
Directed line segment	—	திசை கொண்ட நேர் கோட்டுத் துண்டம்

Directrix — இயக்கு வரை
Dot product — புள்ளிப்பெருக்கம்

E

Edge — விளிம்பு
Ellipse — நீள்வட்டம்

F

Force — விசை
Frame of reference — குறியீட்டச்சு
Friction — உராய்வு
,, limiting — எல்லையுராய்வு

G

Gravitation — ஈர்ப்பு
Gravitational force — ஈர்ப்பு விசை

H

Hemi sphere — அரைக் கோளம்
Horizontal line — கிடைக் கோடு
Horizontal plane — கிடைத்தளம்

I

Inclined plane — சாய்தளம்
Inextensible — நீளியல்பற்ற

K

Kilogram — கிலோகிராம்
Kinetic friction — இயக்கப் பண்புராய்வு

L

Latus rectum — செவ்வகலம்
Law — விதி
Limiting equilibrium — எல்லைச் சமநிலை
Limiting friction — எல்லையுராய்வு

M

Magnitude — அளவு
Major axis — பேரச்சு
Mass — பொருண்மை, திணிவு, நிறை
Minor axis — சிற்றச்சு
Moment — திருப்புத் திறன்

N

Neutral equilibrium — நடுநிலைச் சமநிலை
Normal Reaction — நேர்குத்தெதிர் விசை

P

Parallel forces — இணை விசைகள்
Parameter — பண்பளவை

Particle	—	துகள்
Peg	—	முளை
Plane	—	தளம்
Polygon	—	பல்கோணம்
Polygon of forces	—	விசைப் பல்கோணம்
Position vector	—	திசையிநிலை
Pressure	—	அழுத்தம்
Principle	—	தத்துவம்
Pulley	—	கப்பி

Q

Quantity	—	கணியம்

R

Reaction	—	எதிர்விசை, எதிர்த்தாக்கம்
Resolved parts, Resolutes	—	பிரித்த பகுதிகள், குத்துப் பிரிவுகள்
Resultant	—	விளைவு
Rigid body	—	கட்டிறுக்கப் பொருள்
Rolling friction	—	உருளுராய்வு
Rough	—	உராய்வுடைய
Rule	—	விதி

S

Sag	—	தொய்யல், தொய்வு
Scalar	—	திசையிலி
Slope	—	சரிவு
Smooth	—	வழவழப்பான
Space	—	வெளி
Sphere	—	கோளம்
Stability	—	நிலைப்புத் தன்மை
Stable equilibrium	—	உறுதிச் சமநிலை
Statics	—	நிலையியல்
Static friction	—	நிலையியலுராய்வு
Stress	—	உள்ளமுக்கம்
Surface	—	மேற்பரப்பு
System	—	தொகுதி

T

Thrust	—	அமுக்கம், அழுத்தம்
Time	—	காலம், நேரம்

U

Unit	—	அலகு
Unlike parallel forces	—	எதிரிணை விசைகள்

V

Vector	—	திசையி
Vertical plane	—	நிலைத்தளம்

W

Weight	—	எடை, நிறை