அடிப்படைக் கணிதம்

(வணிகவியல் பட்டப்படிப்பு - பாகம் II)

(BASIC MATHEMATICS
For B.Com - Part II)

கு. இராஜகோபாலன்

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

த. பா. நி. (க.வெ.) வரிசை எண்—630

அடிப்படைக் கணிதம்

[வணிகவியல் பட்டப்படிப்பு—பாகம் II]

(திருத்தப்பட்ட பாடத் திட்டத்தின்கீழ் வெளியிடப்படுகின்றது

ஆசிரியர்

திரு. கு. இராஜகோபாலன், எம்.ஏ., எல்.டி.,

ஒய்வு பெற்ற முதல்வர்,

சர் தியாகராயர் கல்லூரி,

சென்னை.

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

First Edition—June, 1975

T.N.T.B.S. (C.P.) No. 630

© Tamilnadu Textbook Society

BASIC MATHEMATICS—Part II

K. RAJAGOPALAN

Price Rs. 11-20

Published by the Tamilnadu Textbook Society under the Centrally Sponsored Scheme of Production of books and literature in regional languages at the University level, of the Government of India in the Ministry of Education and Social Welfare (Department of Culture), New Delhi.

Printed by
Ravishankar Printers,
84, Perambur Barracks Road,
Madras—600007.

அணிந்துரை

திரு. இரா. நெடுஞ்செழியன்
(தமிழகக் கல்வி அமைச்சர்)

தமிழைக் கல்லூரிக் கல்வி மொழியாக ஆக்கிப் பதினைந் தாண்டுகள் ஆகிவிட்டன. குறிப்பிட்ட சில கல்லூரிகளில் பட்டப் படிப்பு வகுப்புவரை மாணவர்கள் தங்கள் பாடங்கள் அனைத்தை யும் தமிழிலேயே கற்று வருகின்றனர். 1969ஆம் ஆண்டிலிருந்து அறிவியல் பாடங்களையும் தமிழிலேயே கற்பிக்க ஏற்பாடு செய் துள்ளோம். தமிழிலேயே கற்பிப்போம் என முன்வந்துள்ள கல்லூரி ஆசிரியர்களின் ஊக்கம், பிற பல துறைகளில் தொண்டு செய்வோர் இதற்கெனத் தந்த உழைப்பு, தங்கள் சிறப்புத் துறை களில் நூல்கள் எழுதித் தர முன்வந்த நூலாசிரியர்கள் தொண் டுணர்ச்சி இவற்றின் காரணமாக இத் திட்டம் நம்மிடையே மகிழ்ச்சியும் மன நிறைவும் தரத்தக்க வகையில் நடைபெற்று வருகிறது. இவ்வகையில், கல்லூரிப் பேராசிரியர்கள் கலை, அறிவியல் பாடங்களை மாணவர்களுக்குத் தமிழிலேயே பயிற்று விப்பதற்குத் தேவையான பயிற்சியைப் பெறுவதற்கு மதுரைப் பல்கலைக் கழகமும், சென்னைப் பல்கலைக் கழகமும் ஆண்டுதோறும் எடுத்துவரும் பெருமுயற்சியைக் குறிப்பிட்டுச் சொல்லவேண்டும்.

வரலாறு, அரசியல், உளவியல், பொருளாதாரம், மெய்ப் பொருளியல், புவியியல், புவியமைப்பியல், மனையியல், கணிதம், இயற்பியல், வேதியியல், உயிரியல், வானியல், புள்ளியியல், விலங் கியல், தாவரவியல், பொறியியல், சட்டம் ஆகிய எல்லாத் துறை களிலும் மூல நூல்கள் மொழிபெயர்ப்பு நூல்கள் என்ற இரு வகையிலும் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம் வெளியிட்டு வருகிறது.

இவற்றுள் ஒன்றான 'அடிப்படைக் கணிதம்' என்ற இந் நூல் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனத்தின் 630 ஆவது வெளியீடா கும். கல்லூரித் தமிழ்க் குழுவின் சார்பில் வெளியான 35 நூல் களையும் சேர்த்து இதுவரை 665 நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன. இந் நூல் மைய அரசு கல்வி, சமூகநல அமைச்சகத்தின் மாநில மொழி யில் பல்கலைக் கழக நூல்கள் வெளியிடும் திட்டத்தின்கீழ் வெளி யிடப்படுகிறது.

தமிழில் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாணவர்களிடையே சிறந்த இடம் பெறவேண்டும் என்பதே நம் குறிக்கோளாகும். கல்லூரிகளிலும் பல்கலைக் கழகங்களிலும், கலையியற் பாடங்களை யும், அறிவியற் பாடங்களையும், தொழில்நுட்ப அறிவுப் பாடங் களையும் பயிலுகின்ற மாணவர்கள், அவற்றைத் தமிழில் பயில வேண்டும் என்பதை வலியுறுத்தி வருவதற்குக் காரணம், தமி ழறிவு வளரவேண்டும் என்பதைவிட, தமிழ் மக்களின் அறிவு ஆற்றல் எளிதாக, விரைவாக வளரவேண்டும் என்பதுதான். 'எதிலும் தமிழ் எங்கும் தமிழ்' என்ற குறிக்கோளை நிறைவேற்ற வேண்டிய கடப்பாடு, தமிழகத்து ஆசிரியப் பெருமக்களையும் மாணவர்களையும் சார்ந்ததாகும். தமிழ்நாட்டுப் பல்கலைக் கழகங்களின் பல்வகை உதவிகளுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் நம் மனம் கலந்த நன்றி உரியதாகுக.

இரா. நெடுஞ்செழியன்

பொருளடக்கம்

பாகம் I—இயற்கணிதம்

		பக்கம்
1.	மீள் பார்வை ...	1— 18
2.	அடுக்குக் குறிகள், அடுக்குகள், மூலகங்கள் ...	19— 37
3.	இலாகரிதம் அல்லது மடக்கை ...	38— 56
4.	சமன்பாடுகள் ...	57— 61
5.	எண் தொடர்கள் ...	62— 90
6.	வரிசை மாற்றமும், சேர்வுகளும் ...	91—111
7.	ஈருறுப்புக் கோவைத் தேற்றம் ...	112—118
8.	விகிதமுறு படிக்கு ஈருறுப்புக் கோவைத் தேற்றம்	119—125
9.	அடுக்குக் குறித் தேற்றம் ...	126—133
10.	இலாகரிதத் தொடர் அல்லது மடக்கைத் தொடர்	134—141

பாகம் II—கோண கணிதம்

	தோற்றுவாய் ...	142—143
1.	கோணங்களை அளக்கும் முறைகள் ...	144—150
2.	திரிகோணச் சார்புகளும் அவற்றின் தொடர்புகளும்.	151—168
3.	சில துணைக் கோணங்களின் கோண கணிதத் தகவுகள்; கோண கணித அட்டவணைகள்; கோண கணிதத் தகவுகளின் வரைபடங்கள்.	169—188
4.	கூட்டுக் கோணங்கள், கீழ்மடங்குக் கோணங்கள், பெருக்கல் வாய்பாடுகள்.	189—201
5.	கலப்பெண்கள் ...	202—222

பாகம் III—நுண் கணிதம்

1.	சார்புகள், எல்லைகள், சார்புகளின் தொடர்ச்சித் தன்மை, வரைபடங்கள்.	223—244
2.	வகையிடல் ...	245—267
3.	வகைக்கெழுவின் பயன்பாடுகள் ...	268—301
4.	தொகை காணல் ...	302—313

பாகம் IV—இரு பரிமாணப் பகுமுறை வரைகணிதம் அல்லது ஆய எண் வடிவ கணிதம்

	தோற்றுவாய் ...	314—318
1.	தொலைவுகள், விகிதங்கள், பரப்பளவுகள் ...	319—327
2.	நேர்கோடுகள் ...	328—350
3.	வட்டம் ...	351—358
4.	கூம்பு வளைவுகள் ...	359—395
5.	கூம்பு வளைவுகள் (தொடர்ச்சி) பொதுவான பண்புகளும், பலன்களும் ...	396—409
6.	வரைபடங்கள் ...	410—417
	மேற்கோள் நூற்பட்டியல் ...	418
	கலைச்சொற்கள் ...	419—423

பாகம் I

இயற்கணிதம்
(Algebra)

1. மீள்பார்வை
(Review of Algebra)

1. இயற்கணிதம்—எண் கணிதத்துடன் தொடர்பு

மற்ற கலைகளைப் போலக் கணிதமும் ஆதிமக்களின் தேவையை ஒட்டியே தோன்றியது. எண்ணிக்கையை ஒட்டி எண் கணிதமும், பரப்பளவு, கன அளவு, யாகசாலை நிறுவுதல் இவற்றை யொட்டி வடிவகணிதமும் உண்டாயின.

இயற்கணிதத்தில் நாம் எண்களுடன் எழுத்துகளையும் பயன் படுத்துகிறோம். எழுத்துகள் எந்த மதிப்பையும் மேற்கொள்ள லாம். இதனால் பொது முறைகளும் விதிகளும் பெற முடியும்.

எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு செவ்வகத்தின் நீள அகலங்கள் முறையே 3 மீட்டர், 2 மீட்டர் ஆயின் அதன் பரப்பு 6 சதுர மீட்டர் ஆகும். ஆனால், இது தனிப்பட்ட கணக்கிற்குத் தனிப் பட்ட விடையே தவிர, இதிலிருந்து இம் மாதிரி மற்ற கணக்கு களுக்கு விடை காண முடியாது. ஆனால், பொதுவாக l மீட்டர் நீளமும், b மீட்டர் அகலமும் கொண்ட செவ்வகத்தின் பரப்பு lb சதுர மீட்டர் ஆகும். இது இவ்வகையில் பொதுப்படைக் கணக்காகும். இதிலிருந்து இம் மாதிரி மற்ற கணக்குகளுக்கு $A = lb$ என்னும் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி விடை காணலாம்.

எண் கணிதப் பிரச்சினைகளைச் சுருக்கமாக எழுதவும் தீர்க்கவும் இயற்கணிதம் பயன்படுகிறது. கூட்டல், கழித்தல், பெருக்கல், வகுத்தல் எனும் பிணைகளுக்கும் (operations), சமம், சமனின்மை என்ற உறவுகளுக்கும் குறிகளைப் பயன்படுத்தியும், எண் குறிகளைத் தவிர இன்னும் மதிப்புத் தெரியாத எண்களைக் குறிக்க எழுத்துகளைப் பயன்படுத்தியும் எண் கணிதக் கேள்விகளை ஒரு சுருக்கெழுத்து முறையாக நாம் எழுதி அதனின்று எழுத்துகளால் குறித்த எண்களின் மதிப்பைக் காண வழிகளை ஆராய்கிறோம்.

2. எண்ணினங்கள்

ஆதிகால மனிதனுக்கு முழு எண் முறைதான் தேவைப்பட்டது. ஆடு மாடுகளை வைத்து வளர்த்த அவனுக்கு அவற்றை எண்ணுவதற்கு இதுவே போதுமானதாயும் இருந்தது.

1, 2, 3........நேர் முழு எண் தொடர் எனப்படும். இத் தொடரை இயற்கை எண் தொடர் (Series of Natural numbers) என்றும் வழங்குவதுண்டு. ஆனால், அறிவியல் துறைகள் பல வளர ஆரம்பிக்கவே, நேர் முழு எண்கள் மாத்திரம் போதுமானதாக இல்லை. இதனால் பலவகை எண்கள் தேவைப்பட்டன.

எடுத்துக்காட்டாக, $x+4=3$ என்றும், $2x+3=2$ என்றும், $x^2=2$ என்றுமுள்ள சமன்பாடுகளில் x-ன் மதிப்பைக் காண வேண்டுமானால், முறையே எதிர் முழு எண், விகிதமுறு எண், விகிதமுறா எண் கொண்டே மதிப்புகளைக் காணலாம்.

ஆதலால் இத்தகைய சமன்பாடுகளைத் தீர்வு காண, எண் வகைகளை மேலும் மேலும் பெருக்கிக் கொண்டே போகவேண்டியிருக்கிறது.

இப்போது $x^2+1=0$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்வு காண வேண்டுமானால், எண்ணினத்தை மேலும் விரிவுபடுத்த வேண்டிய நிலை ஏற்படுகிறது.

இதற்கென $i^2=-1$ என்ற நிபந்தனைக்குட்பட்ட, i என்ற எண்ணை நாம் ஏற்போம்.

(அதாவது) $i=\sqrt{-1}$ ஆகும்.

இனி i என்பது ஒரு கற்பனை எண்ணாகும். ஆனால், எந்த மெய்யெண்ணையும், அது எக் குறி பெற்றபோதிலும், வர்க்கம் காணில்,

8967

நேர் எண் மதிப்போ அல்லது பூச்சியமோ கிட்டும் [x ஒரு மெய்யெண் ஆனால், $x^2=0$ அல்லது >0].

ஆகவே, i ஒரு கற்பனை எண்.

மெய்யெண் இனமும், கற்பனை எண் இனமும் சேர்ந்து நமக்குக் கலப்பெண் இனத்தைத் தருகின்றது.

இதன் பொதுத் தன்மை $a+ib$ ஆகும். இதில் $b=0$ ஆனால், ஒரு மெய்யெண் கிடைக்கும்.

$a=0$ ஆனால், ஒரு கற்பனை எண் கிடைக்கும். ஆகவே, இந்த வடிவில் இதில் எல்லா எண்ணினங்களும் அடங்கியுள்ளன.

நாம் கூறிய யாவற்றையும் தொகுத்துக் கீழ்வரும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது.

எண்கள்

- கலப்பெண்கள் (Complex numbers) — வடிவம் $a+bi$
  - மெய் யெண்கள் (real numbers)
    - விகிதமுறு எண்கள் (rational numbers) — வடிவம் a/b
      - நேரெண் (positive numbers)
        - நேர் முழு எண் (positive whole numbers) 1, 2, 3,...
        - நேர் பின்னம் (positive fractions) $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$
      - எதிரெண் (negative numbers)
        - எதிர் முழு எண் (negative whole numbers) —1,—2,...
        - எதிர் பின்னம் (negative fractions) $-\frac{5}{4}$, $-\frac{7}{8}$, ...
    - விகிதமுறா எண்கள் (irrational numbers) e, π, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$
      - நேரெண் (positive)
      - எதிரெண் (negative)
  - கற்பனை எண்கள் (imaginary numbers) — வடிவம் bi

3(a). ஓரின இராசிகள், வேற்றின இராசிகள்

5 ரூபாய்+3 ரூபாய்=8 ரூபாய் என எழுதுகிறோம். ரூபாய் என்பதற்கு R என்ற எழுத்தைப் பயன்படுத்தினால், $5R+3R=8R$ என எழுதலாம்.

$5R$, $3R$ என்பன ஓரின இராசிகளாகும்.

ஆனால் 5 ரூபாய்+3 பைசா என்பதை 8 ரூபாய் என்றோ, 8 பைசா என்றோ எழுத முடியாது.

ரூபாய் என்பதற்கு R என்றும், பைசா என்பதற்கு P என்றும் கொண்டால், 5 ரூபாய்+3 பைசா என்பதை $5R+3P$ என எழுதலாம்.

ஒரே இனமுள்ள இராசிகளைத்தான் கூட்டியோ அல்லது கழித்தோ சுருக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு : கூட்டுக

$$\begin{array}{r} 5a^2-ab+2b^2-a-2b+7 \\ -3a^2+3ab-9b^2+7a+5b-9 \\ \hline 2a^2+2ab-7b^2+6a+3b-2 \end{array}$$

என்றாகும். மேற்கண்ட கூட்டலில், a^2 ஓர் இனம், ab ஓர் இனம், b^2 ஓர் இனம், மற்றும் a, b வெவ்வேறு இனங்களாகும்.

வெவ்வேறு இன இராசிகளைக் கூட்டவோ கழிக்கவோ வேண்டுமானால், அவற்றிற்குரிய குறிகளைப் போட்டு இணைக்கலாமே தவிர, சுருக்க முடியாது.

3(b). நேரெண்கள், எதிரெண்கள் (Positive and negative numbers)

(i) கூட்டல் : நேரெண், எதிரெண்கள் வரும் கூட்டலைச் செய்ய, நேரெண்கள் இலாபத்தையும், எதிரெண்கள் நட்டத்தையும் காட்டும் எனக் கொண்டு விடையைப் பெறலாம்.

இவ்விதமாக $(+4)+(-5)=-1$ என்றாகும்.

$(-2)+(-3)=-5$ என்றாகும்.

(ii) **கழித்தல் :** நேரெண், எதிரெண் வரும் கழித்தல்களில், கழிக்கும் எண்ணின் அடையாளத்தை மாற்றி மற்ற எண்ணுடன் கூட்டிக் கொள்ள வேண்டும்.

$$(+7)-(-2)=(+7)+(+2)=+9$$

$$(-4)-(+9)=(-4)+(-9)=-13$$

(iii) **பெருக்கல் :** இரண்டு நேரெண்களின் பெருக்குத் தொகை ஒரு நேரெண்ணாகும். இரண்டு எதிரெண்களின் பெருக்குத் தொகையும் ஒரு நேரெண்ணாகும். ஆனால் ஒரு நேரெண், ஓர் எதிரெண் ஆகியவற்றின் பெருக்குத் தொகை ஓர் எதிரெண்ணாகும்.

$$(+4)\ (+3)=+12 \qquad (+4)\ (-3)=-12$$

$$(-4)\ (-3)=+12 \qquad (-4)\ (+3)=-12$$

(iv) **வகுத்தல் :** இரண்டு எண்களும் நேரெண்களானால், ஈவு ஒரு நேரெண்ணாகும். இரண்டு எண்களும் எதிரெண்களானாலும், ஈவு ஒரு நேரெண்ணாகும். ஆனால், ஒன்று நேரெண்ணும், மற்றது எதிரெண்ணாகவும் இருப்பின், ஈவு எதிரெண்ணாகும்.

$$(+12)\div(+4)=3 \qquad (+12)\div(-4)=-3$$

$$(-12)\div(-4)=3 \qquad (-12)\div(+4)=-3$$

3(c). அடைப்புகள் (Brackets)

அடைப்புகளை நீக்கிச் சுருக்கும் போது, அடைப்புகளுக்கு வெளியே + குறி இருந்தால், அடைப்புகளை நீக்கி உள்ளே இருக்கும் உறுப்புகளை உள்ளவாறே எழுதிவிட வேண்டும். அடைப்புகளுக்கு வெளியே — குறி இருந்தால், அடைப்புகளை நீக்கி உள்ளே இருக்கும் ஒவ்வோர் உறுப்பின் அடையாளத்தையும் மாற்றி எழுத வேண்டும்.

$$a+(b-c)=a+b-c$$

$$a-(b-c)=a-b+c$$

3(d). அடியெண், அடுக்கு, அடுக்குக் குறி

$a\times a\times a$ என்ற பெருக்கல் பலனை a^3 என எழுதுகிறோம். இந்தப் பெருக்குத் தொகை 'அடுக்கு' (power) எனப்படும். a என்பது அடுக்கின் அடியெண் ; 3 என்பது அடுக்குக் குறி எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு : கூட்டுக

$3x^2, -5xy, 7x, -4y, -3$

இவை யாவும் வேற்றின இராசிகளாகும்.

இவற்றின் கூடுதல், $3x^2-5xy+7x-4y-3$ என்றாகும்.

4. சார்புகள் (Functions)

(i) ஒரு மாறிச் சார்பு : ஒரு வட்டத்தின் ஆரம் r அலகுகள் என்றால், அதன் சுற்றளவு $C=2\pi r$ ஆகும்.

C-ன் மதிப்பு r-ன் மதிப்பைச் சார்ந்து நிற்கிறது.

C எனும் இராசி 'r' எனும் இராசியின் சார்பு அல்லது சார்பலன் (function) எனப்படுகிறது.

இதனை $C=f(r)$ எனக் குறியீடுசெய்து காட்டுகிறோம்.

$y=2x^2-4x+1$ என்றால், y-ன் மதிப்பு x-ன் மதிப்பைச் சார்ந்து நிற்கிறது. ஆகவே, $2x^2-4x+1$ என்பது $f(x)$ ஆகும்.

$f(x)\equiv 2x^2-4x+1$ என்றால், $f(a)=2a^2-4a+1$ என்றாகும்.

ஆகவே $f(a)$ கிடைக்க, $f(x)$-ல், x-க்கு 'a' எனப் பிரதியிட வேண்டும்.

இவ்வாறாக, $f(1)=2\cdot1^2-4\cdot1+1=-1$

$f(0)=2\cdot0^2-4\cdot0+1=\ \ 1$ ஆகும்.

இங்கு x என்பது மாறி (variable) எனப்படும். $2x^2-4x+1$ என்பது ஒரு மாறி கொண்ட x-ன் சார்பாகும். இவ்வாறே $3x-4$, $\sin x$, $\cos x$ என்பன x என்னும் ஒரு மாறியைப் பொறுத்த சார்புகள் ஆகும்.

(ii) ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட மாறிகளைக் கொண்ட சார்புகள் $v=\frac{1}{3}\pi r^2 h$ என்னும் தொடர்பைக் கருதுவோம். இங்கு r-க்கும், h-க்கும் குறிப்பிட்ட மதிப்புகளைக் கொடுத்தால், v-ன் மதிப்பைப் பெறலாம். ஆகவே vஐ r, h-களின் சார்பாகக் கருதலாம்.

z-ன் மதிப்பானது x, y எனும் இரண்டு சார்பிலா (independent) மாறிகளை யொட்டி அமையுமாயின், zஐ x, y-களின் சார்பெனக் கூறுவோம்.

இதனை $z=f(x, y)$ எனக் குறியீடு செய்வது வழக்கம்.

இங்கு x, y என்பன சாரா மாறிகள் அல்லது சார்பில் மாறிகள் (independent variables) எனப்படும்.

z என்பது சார்ந்த மாறி அல்லது சார்புடை மாறி (dependent variable) எனப்படும்.

5. பல்லுறுப்புக் கோவை அல்லது விகித முழுக் கோவை அல்லது முழு அடுக்குக் கோவை (Polynomial or Rational Integral Function)

இராசியின் அடுக்குகள் நேர் முழு எண்களாக வருமிடத்து அவை முழு எண் அடுக்குக் கோவை, அல்லது முழு எண் அடுக்குச் சார்பு அல்லது பல்லுறுப்புக் கோவை அல்லது விகித முழுச் சார்பு எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு

$$x+7,\ 3x^2-2x+5,\ x^3+\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\ x^6-\tfrac{1}{4}x^2-5$$

இங்கு x என்னும் மாறி ஓர் உறுப்பின் பகுதியிலாவது (denominator) மூலக் குறியீடு பெற்றுவது வராமையை நோக்குக. உறுப்புகளின் கெழுக்கள் பின்னங்களாகவோ மூலக் குறியீடு பெற்றோ வரலாம். ஆனால், மாறியின் அடுக்குக் குறிகள் நேர் முழு எண்களாக இருக்கவேண்டும்.

$x+3\sqrt{x}-5$ என்னும் கோவையில் x வர்க்கமூலமாக வருவதால், இக் கோவை விகிதமிலாச் சார்பாகும் (irrational function). $\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x^2}+7$ என்னும் கோவையில் x ஆனது பின்னத்தின் பகுதியில் இருப்பதால், இது பின்னச்சார்பு (fractional function) எனப்படும்.

[குறிப்பு 1 பெரும்பாலும் பயன்படும் சார்புகள் விகித முழுக் கோவைகளே யாகும் (பொதுவாக விகிதமுறுச் சார்புகளும், பின்னச் சார்புகளும் முக்கியத்துவம் வாய்ந்தவை அல்ல).]

வரையறை: $a_0, a_1, a_2 \ldots$ என்பன மாறிலிகளாகவும் (constants), n ஒரு நேர் முழு எண்ணாகவும் இருப்பின், $a_0 x^n+a_1 x^{n-1}+a_2 x^{n-2}+\ldots+a_n$ என்பது x-ல் n படியுள்ளஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை அல்லது விகித முழுச் சார்பு அல்லது முழு எண் அடுக்குச் சார்பு எனப்படும்.

ஒருபடிச் சார்புகள் (linear or first degree functions), இருபடிச் சார்புகள் (quadratic functions), முப்படிச் சார்புகள்

(cubic functions) முதலியன பல்லுறுப்புக் கோவையின் சிறப்பு வகைகள் ஆகும்.

ஒரே ஓர் உறுப்புள்ள கோவை ஒருறுப்புக் கோவை (monomial expression) என்றும், இரண்டு உறுப்புகள் கொண்ட கோவை ஈருறுப்புக் கோவை (binomial expression) என்றும், மூன்று உறுப்புகள் உள்ள கோவை மூவுறுப்புக் கோவை (trinomial expression) என்றும் பெயர் பெறும்.

6. **மீதித் தேற்றம் (Remainder Theorem)**

ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையான $f(x)$ஐ $x-a$ ஆல் வகுத்தால் வரும் மீதி $f(a)$ ஆகும்.

நிருபணம்: $f(x)$ ஐ $(x-a)$ ஆல் வகுக்குங்கால், வரும் ஈவு $Q(x)$ எனவும், மீதி R ஆகவும் கொள்க.

$f(x)$ ஆனது n படி உடையதானுல், $Q(x)$ ஆனது $(n-1)$ படியுள்ள பல்லுறுப்புக் கோவையாகும். மீதியின் படி (degree) வகு எண்ணின் படிக்குக் குறைந்திருக்க வேண்டும். அதாவது R-ல் x உறுப்பு இராது.

வகுத்தல் விதிப்படி,

$f(x)\equiv(x-a)Q(x)+R$ எனப் பெறுகின்ருேம். இஃதொரு முற்றொருமை யாகையால், x-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் ஏற்புடையதாகும்.

$x=a$ என்று இடுக.

$$f(a)\equiv 0\times Q(a)+R$$

$$\therefore\ R=f(a)$$

[குறிப்பு: (i) $f(x)$ ஐ $(x+a)$ஆல் வகுத்தால், வரும் மீதி $f(-a)$ ஆகும்.

(ii) $f(x)$ ஐ $(ax+b)$ ஆல் வகுத்தால், வரும் மீதி $f\left(-\frac{b}{a}\right)$ ஆகும்.

இணைத் தேற்றம்

காரணித் தேற்றம் (Factor Theorem): ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையான $f(x)$-ல், x-க்குப் பதிலாக aஐப் பயன்படுத்த, $f(a)=0$ என வருமானால், $(x-a)$ என்பது $f(x)$-ன் காரணியாகும்.

[குறிப்பு 1 : ஒரு கோவைக்கு $(x-1)$ காரணியாக வேண்டுமானல், உறுப்புகளின் கெழுக்களின் கூடுதல் 0 ஆக வேண்டும்.

குறிப்பு 2 : இரட்டைப் படி உறுப்புகளின் கெழுக்களும் தனி உறுப்பும் சேர்ந்து, ஒற்றைப் படி உறுப்புகளின் கெழுக்களின் கூட்டுத் தொகைக்குச் சமமானல், $x+1$ ஆனது கோவையின் காரணியாகும்.]

7. மீதித் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்திக் கீழ் வருவனவற்றைக் காணலாம் :

(i) n ஒரு முழு எண்ணைக் குறித்தால், x^n-y^n எப்பொழுதும் $x-y$ஆல் வகுபடும்.

(ii) x^n-y^n-ல் n இரட்டைப் படை எண்ணானல், அது $(x+y)$ யாலும் $x-y$ யாலும் மீதமின்றி வகுபடும்.

(iii) x^n+y^n என்பதில், n ஒற்றைப் படை எண்ணானல், அது $(x+y)$ ஆல் வகுபடும்.

(iv) x^n+y^n ஆனது $(x-y)$ஆல் வகுபடாது.

8. சார்பின் படி (Degree of a function)

ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையிலுள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பிலும் உள்ள மாறிகளின் படிகளைக் கூட்டிப் பெறப்படும் தொகைகளில் மிகப் பெரிய தொகை எதுவோ, அதுவே அச் சார்பின் படி எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு

$a^2x^3+b^2x^4y^2+c^2+dy^5$: இதன் படி 6.

9. கோவைகள்—வகை

(i) ஓரினக் கோவை அல்லது சமபடிச் சார்பு (Homogeneous functions) : ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையில் உள்ள எல்லா உறுப்பின் படிகளும் சமமாக இருப்பின், அஃது ஒரு சமபடிச் சார்பு அல்லது ஓரினக் கோவை (homogeneous expression) எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு

$ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3$ என்பது x, y என்னும் இரு மாறிகளில் மூன்று படியுடைய ஓரினக் கோவையாகும்.

(ii) முழுச் சீர் அல்லது சமச்சீர் கோவைகள் (Symmetrical expression) : ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட மாறிகள் வரும் கோவைகளில் ஏதாவது இரண்டு மாறிகளை ஒன்றிற்கொன்று மாற்றியமைத்தாலும், அக் கோவை மாறாதிருந்தால், அம் மாறிகளைப் பொறுத்த மட்டில் அது முழுச்சீர் அல்லது சமச்சீர் கோவை எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு

$3x^2+3y^2+3z^2-2x-2y-2z-5xy-5yz-5zx$ என்னும் கோவை x, y, z என்பனவற்றில் சமச் சீருள்ளதாகும்.

(iii) ஓரினச் சமச்சீர்க் கோவைகள் அல்லது சமபடிச் சமச்சீர்க் கோவைகள் : ஒரு கோவை ஓரினமாகவும், சமச்சீருள்ளதாகவும் விளங்கினால், அந்து ஓரினச் சமச்சீர்க் கோவை அல்லது சமபடிச் சமச்சீர்க் கோவை எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு

மாறிகள் x, y ஆனால், படி 2, 3-ல் சமபடிச் சமச்சீர்க் கோவைகளின் பொது வடிவங்கள் முறையே,

$a\,(x^2+y^2)+bxy$

$a\,(x^3+y^3)+b(x^2y+y^2)$ ஆகும்.

மாறிகள் x, y, z ஆனால், படி 2-ல் சமபடிச் சமச்சீர்க் கோவையின் பொது வடிவம்,

$a\,(x^2+y^2+z^2)+b\,(xy+yz+zx)$ ஆகும்.

(iv) வட்டச் சமச்சீர்க் கோவைகள் (Cyclic Symmetrical expressions) : $a^2(b-c)+b^2\,(c-a)+c^2(a-b)$ என்னும் கோவையில், a-ம், b-ம் ஒன்றுக்கொன்று மாற்றியமைக்கப்பட்டால், அக் கோவை $b^2(a-c)+a^2(c-b)+c^2(b+a) = -a^2(b-c)-b^2(c-a)-c^2(a-b)$ என்றாகும். அதாவது, கொடுத்த கோவை $f\,(a, b, c)$ ஆனால், வருவது $-f\,(a, b, c)$ ஆகும். இது முந்தைய கோவையோடு இராசிக் குறியால் வேறுபடுவதாகின்றது. ஆகையால், மேற்கண்ட கோவை முழுச்சீர்க் கோவையன்று.

எனினும், இக் கோவையில் ஒரு வகைச்சீர் காணப்படுகிறது. கொடுத்துள்ள கோவையில் $a^2(b-c)$ என்னும் முதல் உறுப்பிலுள்ள எழுத்துகளை வட்டச்சீராக மாற்றியமைத்தால், அதாவது a-க்குப் பதில் b-ம், b-க்குப் பதில் c-ம், c-க்குப் பதில் a-ம் எழுதினல் $b^2(c-a)$ என்னும் இரண்டாவது உறுப்பு வரக் காண்கிறோம். இரண்டாவது உறுப்பில் இதே மாறுதல்களைச் செய்தால், மூன்றாவது உறுப்பும், மூன்றாவது உறுப்பில் இம் மாறுதல்களைச் செய்தால் முதலுறுப்பும் கிடைக்கின்றன.

இவ்வாறு தம்மிடத்துள்ள எழுத்துகளை வட்டச்சீராக மாற்றியமைத்தாலும், வேறுபாடு எய்தாத கோவைகள் வட்டச் சீர்க் கோவைகள் எனப்படும்.

(v) ஸிக்மா (Σ) என்ற குறியீட்டு முறை: ஒரு கோவையானது வட்டச்சீர் உறுப்புகளைக் கொண்டிருந்தால், அதன் முதலுறுப்பின் முன் மட்டும் கிரேக்க மொழி எழுத்தாகிய Σ (sigma) என்ற அடையாளத்தைக் கொடுத்து, அக் கோவை முழுவதையும் சுருக்கமான வடிவில் எழுதலாம். Σab என்றல், $ab+bc+ca$ எனப் பொருளாகும்.

$x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$ என்று நீளமாக எழுதுவதை $\Sigma x^2+2\Sigma xy$ என எழுதினல் போதும்.

10. சில முக்கியமான முற்றொருமைகள் (Some important identities)

1. $(x+a)(x+b) \equiv x^2+x(a+b)+ab$
2. $(a+b^2) \equiv a^2+2ab+b^2$
3. $(a-b)^2 \equiv a^2-2ab+b^2$
4. $(a+b)^2+(a-b)^2 \equiv 2(a^2+b^2)$
5. $(a+b)^2-(a-b)^2 \equiv 4ab$
6. $(a+b+c)^2 \equiv a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$
7. $\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2] \equiv a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$
8. $(a+b)(a-b) \equiv a^2-b^2$
9. $a^4+a^2b^2+b^4 \equiv (a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$
10. $a^3+b^3 \equiv (a+b)(a^2-ab+b^2)$

11. $a^3-b^3 \equiv (a-b)\ (a^2+ab+b^2)$

12. $(x+a)(x+b)(x+c) \equiv x^3+x^2(a+b+c)+x(ab+bc+ca)$
$+abc$

13. $(a+b)^3 \equiv a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

14. $(a-b)^3 \equiv a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

15. $a^3+b^3+c^3-3abc \equiv (a+b+c)\ (a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

16. $(a+b)\ (b+c)\ (c+a) \equiv \Sigma a^2(b+c)+2abc$
$\equiv \Sigma a(b^2+c^2)+2abc$
$\equiv \Sigma ab\ (a+b)+2abc$
$\equiv (a+b+c)\ (ab+bc+ca)-abc$

17. $(a+b+c)^3 \equiv a^3+b^3+c^3+3(a+b)\ (b+c)\ (c+a)$

18. $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3 \equiv 3(a+b)\ (b+c)\ (c+a)$

19. $\Sigma a^2(b-c) \equiv -\ (a-b)\ (b-c)\ (c-a)$

20. $\Sigma ab(a-b) \equiv -\ (a-b)\ (b-c)\ (c-a)$

21. $\Sigma a(b^2-c^2) \equiv (a-b)\ (b-c)\ (c-a)$

22. $\Sigma(x-y) \equiv 0;\quad \Sigma(x^n-y^n) \equiv 0$

23. $\Sigma x(y-z) \equiv 0;\quad \Sigma x^n(y^n-z^n) \equiv 0$

11. தேராக் கெழுக்களைப் பற்றிய தத்துவம் (Principle of undetermined coefficients)

x-ல் ஒரே படியுள்ள இரண்டு கோவைகள் சர்வ சமமானால், அவை இரண்டிலும் x-ன் ஒரே அடுக்குள்ள உறுப்புகளின் கெழுக்கள் சமமாகும்.

12. விகித சமம்

(i) $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ ஆனால், ஒவ்வொன்றும் $\dfrac{a+c}{b+d}$-க்குச் சமம்.

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ ஆனால், ஒவ்வொன்றும் $\dfrac{a-c}{b-d}$-க்குச் சமம்.

(ii) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ஆனல், $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$ ஆகும்.

(iii) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \ldots\ldots$ ஆனல்,

ஒவ்வொன்றும் $\frac{a+c+e+\ldots}{b+d+f+\ldots}$-க்குச் சமம்.

ஒவ்வொன்றும் $\frac{pa+qc+re\ldots}{pb+qd+rf\ldots}$-க்குச் சமம்.

(iv) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \ldots\ldots\ldots$ என்றால்,

ஒவ்வொன்றும் $\sqrt[n]{\frac{pa^n+qc^n+re^n+\ldots\ldots\ldots}{pb^n+qd^n+rf^n+\ldots\ldots\ldots}}$

இங்கு p, q, r என்பன பூச்சியம் நீங்கலாக எம் மதிப்புகளையும் உடையனவாகலாம்.

(v) $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \ldots$ எனும் விகிதங்கள் ஒன்றிற்கொன்று சமமில்லாமலும், $b_1, b_2, b_3, \ldots\ldots$ எனும் பகுதி எண்கள் நேரெண் களாகவும் இருந்தால்,

$\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots\ldots}{b_1+b_2+b_3+\ldots\ldots}$ எனும் விகிதம் தரப்பட்ட விகிதங் களின் மிகக் குறைந்த விகிதத்திற்கும் மிகப் பெரிய விகிதத்திற்கும் இடையில் அமையும்.

பயிற்சி 1.

1. அடைப்புகளை நீக்கிச் சுருக்குக :

   $a-[b-\{2a-(3b-\overline{a-1})-2\}-3]$ [விடை : $4a-4b$]

2. $A=3a+b-c$, $B=c+b-2a$, $C=b-3a+c$ என்றால், $A-2B-3C$ ஐக் காண்க. [விடை : $16a-4b-6c$]

3. $x=0$, $y=-1$, $z=3$, $w=-2$ என்றால், $x-(y+3z-w$-ன் மதிப்பென்ன? [விடை : -10]

4. $C=\frac{5}{9}(F-32)$; $C=60$ என்றால் F என்ன? [விடை: 140]

5. $A=2\pi r(r+h)$; $A=748$; $\pi=3\frac{1}{7}$; $r=7$; $h=$?
[விடை: 10]

6. $V=\frac{1}{3}\pi r^2h$; $V=1884$; $\pi=3{\cdot}14$, $h=8$; $r=$? [விடை: 15]

7. சுருக்குக:
$(3x-1)(2x+3)-3(5-4x)(x-2)$
[விடை: $18x^2-32x+27$]

8. $3x^3-2x^2-15x+14$ஐ $x-2$ஆல் வகுத்தால், வரும் ஈவு, மிச்சம் காண்க. [விடை: $3x^2+4x-7$; 0]

9. $2x^4+x^3-12x^2+8x-7$ஐ x^2+x-6ஆல் வகுத்தால், வரும் ஈவு, மிச்சம் காண்க. [விடை: $2x^2-x+1$; $x-1$]

10. பெருக்குக:
$(1+p)(1+2p)(1+3p)$ [விடை: $1+6p+11p^2+6p^3$]

11. $a+b=2$ என்றால், a^3+b^3+6ab-ன் மதிப்பென்ன?
[விடை: 8]

12. $(x+2)(2x+3)(x+a)$ என்னும் பெருக்கற் பலனில், x^2-ன் கெழு 0 ஆனால், 'a'-ன் மதிப்பென்ன?
[விடை: $a=-3\frac{1}{2}$]

13. $(1-2t+3t^2)(1-t+2t^2)$ என்ற பெருக்கற் பலனில் t^2-ன் கெழுவைக் கண்டுபிடி. [விடை: 7]

14. $(2x-3)(3x-4)(4x-5)(5x-6)$-ன் தொடர் பெருக்கற் பலனில் x^3, x-ன் கெழுக்களைக் கண்டுபிடி.
[விடை: -634; -1098]

15. காரணிப்படுத்துக: [விடைகள்]
(i) $p^3+q^3+1-3pq$ [$(p+q+1)(p^2+q^2-pq-p-q+1)$]
(ii) $a^4-5a^2b^2+4b^4$ [$(a+2b)(a-2b)(a+b)(a-b)$]

[விடைகள்]

(iii) $28-31a-5a^2$ $[(4-5a)(7+a)]$

(iv) p^3-8p $[p(p-2)(p^2+2p+4)]$

(v) $(a^2-2a)^2-(a^2-2a)-56$ $[(a^2-2a-8)(a^2-2a+7)]$

(vi) $(x^2+5x+1)(x^2+5x+5)-5$
$[x(x+5)(x+2)(x+3)]$

(vii) $c^2-a^2+2ab-b^2$ $[(c+a-b)(c-a+b)]$

(viii) $x^2+2ax-2ay-y^2$ $[(x-y)(x+y+2a)]$

(ix) $(x^2-y^2)(a^2-b^2)+4ab\,xy$
$[(xa+yb+xb-ya)(xa+yb-xb+ya)]$

(x) $x^4+x^2y^2+y^4$ $[(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)]$

16. பின் வருவனவற்றிற்கு உத்தமப் பொதுக் காரணி (உ.பொ.கா.) (H.C.F.) கண்டுபிடி.

(i) a^2-b^2, $(a+b^2)$; (a^3+b^3) [(விடை : $(a+b)$]

(ii) x^3-x^2+x, x^3+1, x^4+x^2+1 [விடை : x^2-x+1]

17. பின் வருவனவற்றிற்கு அதமப் பொது மடங்கு (அ.பொ.ம.)(L.C.M.)காண்க.

(i) x^3-y^3, $x^4+x^2y^2+y^4$, x^2+xy+y^2
[விடை: $(x-y)(x^4+x^2y^2+y^4)$]

(ii) a^2-a-6, $(a-1)(a^2-a+1)-7a+7$,
$(a^2+a)^2-14(a^2+a)+24$
[விடை : $(a-1)(a+2)(a-3)(a+4)$]

18. சுருக்குக !

(i) $\dfrac{4a^4-17a^2+4}{2a^2-5a+2}$ [விடை : $(a+2)(2a+1)$]

(ii) $\dfrac{1}{1-a}+\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{2}{1+a^2}$ $\left[\dfrac{4}{1-a^4}\right]$

(iii) $\dfrac{x-y}{x^3+y^3}\times\dfrac{x^4+x^2y^2+y^4}{x^3-y^3}$ $\left[\dfrac{1}{x+y}\right]$

(iv) $\dfrac{a}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c}{(c-a)(c-b)}$
[விடை : 0]

19. தீர்வு காண்க.

$$\frac{4}{x+y} + \frac{6}{x-y} = 4$$

$$\frac{1}{x+y} + \frac{2}{x-y} = 1\tfrac{1}{4}$$

[விடை : $x=3,\ y=1$]

20. தீர்வு காண்க.

$$3x+2y+6z = 7$$

$$2x+6y+3z = 2$$

$$6x-3y-2z = 12\tfrac{5}{6}$$

[விடை : $x=2,\ y=-\frac{1}{2},\ z=\frac{1}{3}$]

21. தீர்வு காண்க.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3$$

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 5$$

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{x} = 4$$

[விடை : $x=1,\ y=\frac{1}{2},\ z=\frac{1}{3}$]

22. தீர்வு காண்க $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+3} = \frac{1}{35}$

[விடை : $x=-13$ அல்லது 11]

23. ஒரு மோட்டார் டிரைவர் 360 கி. மீட்டர் தூரம் பயணம் செய்கிறான். அவன் தன்னுடைய வழக்கமான வேகத்தைவிட மணிக்கு 6 கி.மீட்டர் அதிக வேகத்தில் சென்றால், மூன்று மணி நேரத்திற்கு முன்னதாகவே போய்ச் சேருவான். அவனுடைய வழக்கமான வேகம் என்ன ? [விடை: மணிக்கு 24 கி.மீட்டர்]

24. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1$-ன் வர்க்க மூலம் என்ன?

[விடை : x^2+5x+5]

25. $x^4-6x^3+13x^2-12x+4$-ன் வர்க்க மூலத்தைக் காண்க.

[விடை : x^2-3x+2]

26. $4x^4-20x^3+37x^2$ என்பது ஒரு சுத்த வர்க்கத்தின் முதல் மூன்று உறுப்புகள் என்றால், மற்ற உறுப்புகளைக் கண்டு பிடி. [விடை :$-30x+9$]

27. $2x^4+(2a+3b)\,x^3-12x^2+(a-5b)\,x-6$ என்னும் கோவை x^2+x-6 ஆல் சரியாக வகுபடுமானால், a, b-ன் மதிப்புகளையும், மற்ற காரணிகளையும் கண்டுபிடிக்க.
[விடை : $a=2$; $b=-1$; $2x^2-x+1$]

28. $ax^4+bx^3-18x^2+15x-5$ என்னுங் கோவை x^2-3x+2 ஆல் வகுபடும் பொழுது $4x-7$ ஆனது மிச்சமாகுமானால், a, b-க்களின் மதிப்பைக் கண்டறிக.
[விடை: $a=1$; $b=4$]

29. $x^3-49x+a=0$ என்பதற்கு 3 ஒரு மூலமானால், a-ன் மதிப்பையும் பிற மூலங்களையும் கண்டறிக.
[விடை : $a=120$; $x=-8$ or 5]

30. $x^2+(l-1)\,x+(m+3)$-ம், $x^2+(l+10)\,x-(m+1)$-ம் தனித் தனியாக $(x-2)$ஆல் மிச்சமின்றி சரியாக வகுபடுமானால் l, m என்பவற்றின் மதிப்புகள் யாவை ? [விடை: -7, 9]

31. $x-2$, $x-3$, $x+3$ என்பவற்றால் வகுபடும்போது, முறையே 9, 24, -6 என்பன மீதிகளாகக் கிடைத்தற்குரிய இருபடி சார்பினைக் கண்டறிக. [விடை : $2x^2+5x-9$]

32. பின்வரும் வட்டச்சீர்க் கோவைகளை முழுவதாக எழுதிச் சுருக்குக.

(i) $\Sigma\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(b^2+c^2-a^2)$

(ii) $\Sigma\,(a-b)\,(a+b-c)$ [விடை : $2\,(a+6+c)$; 0]

33. மீதித் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்திப் பின்வருவனவற்றைக் காரணிப் படுத்துக:

விடைகள் :

(i) $\Sigma\, a^2\,(b-c)$ [$-(a-b)\,(b-c)\,(c-a)$]

(ii) $\Sigma\, a\,b\,(a-b)$ [$-(a-b)\,(b-c)\,(c-a)$]

(iii) $\Sigma\, a\,(b^2-c^2)$ [$(a-b)\,(b-c)\,(c-a)$]

(iv) $\Sigma\, a^3\,(b-c)$ [$-(a-b)\,(b-c)\,(c-a)\,(a+b+c)$]

34. x, y, z-ன் இருபடி ஓரினச் சமச்சீர்க் கோவை யொன்றில் $x=0, y=1, z=-1$ எனப் பிரதியிட்டால், அதன் மதிப்பு 1 ஆகிறது. $x=1, y=0, z=1$ எனப் பிரதியிட்டால், அதன் மதிப்பு 7 ஆகிறது. கோவையைக் காண்க.
[விடை : $2(x^2+y^2+z^2)+3(xy+yz+zx)$]

35. x, y-ன் மூன்று படியுள்ள ஓரினச் சமச்சீர்க் கோவை யொன்று $x=1, y=2$ என்று பிரதியிட மதிப்பு 21-ம், $x=1$ $y=1$ என்று பிரதியிட மதிப்பு 6-ம் பெறுமாயின், அக் கோவையைக் கண்டுபிடிக்க.
[விடை : $x^3+y^3+2(x^2y+xy^2)$]

36. x^3ஐ $(x-2)$-ன் சார்பாக எழுதுக.
[விடை : $x^3\equiv(x-2)^3+6(x-2)^2+12(x-2)+8$]

37. $4x^2-5\equiv A(x-1)^2+B(x-1)+C$ ஆனால், A, B, C-ன் மதிப்புகளைக் காண்க. [விடை : $A=4, B=8: C=-1$]

38. $4x^2-12x+6$ஐ $A(x-1)(x-2)+B(x-2)(x-3)$ $+C(x-3)(x-1)$ என்ற வடிவில் வரைக.
[விடை : $A=3, B=-1, C=2$]

39. $ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3+ex^2+fxy+gy^2+hx+ky+l$ என்பது x, y என்பன வரும் விகித முழுக் கோவை யாகும். இதில் மிகக் குறைந்த மாறுதல்களைச் செய், அல்லது உறுப்புகளை நீக்கு. இதை x, y என்பனவற்றின் தரம் மூன்றுள்ள (i) சீர்க்கோவையாக (ii) ஓரினக் கோவையாக (iii) ஓரினச்சீர்க் கோவையாக எழுதுக.

[விடைகள்

(i) $ax^3+bx^2y+bxy^2+ay^3$ $+ex^2+fxy+ey^2+hx+hy+l$

(ii) $ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3$

(iii) $ax^3+bx^2y+bxy^2+ay^3$]

40. $F(x)=x^2-px+q$, $f(x)=x^2+px+q$ என்றால், $f(2-x)-F(x-2)$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

2. அடுக்குக் குறிகள், அடுக்குகள், மூலங்கள்

(Exponents, Powers, and Roots)

1. அடுக்குகள்

விளக்கம் : p என்பது ஒரு நேர் முழு எண் (positive integer) எனின், 'a'-ன் p காரணிகளின் பெருக்கற்பலன், a^p என்று குறிக்கப்படும்.

(அதாவது) $a \times a \times a \times \ldots\ldots\ldots\ldots p$ காரணிகள் $= a^p$

a^p என்பது a-ன் p ஆவது அடுக்கெனப்படும் (power)

p ஆனது a-ன் அடுக்குக் குறியெனப்படும் (index)

a ஆனது அடுக்கின் அடி (base) எனப்படும்.

2. நேர் முழு எண் அடுக்குக் குறிகளைப் பற்றிய விதிகள் (The Index Laws for positive integers)

a-ம், b-ம் பூச்சியம் நீங்கலாகிய யாதொரு மெய் எண்களாகியும், m-ம், n-ம் யாதொரு நேர் முழு எண்களாகியும் இருக்குமாறல்,

விதி I. $a^m \times a^n = a^{m+n}$

விதி II. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ அல்லது $\dfrac{1}{a^{n-m}}$, $m \gtrless n$ என்பதற்கேற்ப.

விதி III. $(a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m$

விதி IV. $(ab)^m = a^m b^m$

கிளைவிதி : $(abcd......)^m = a^m b^m c^m d^m............$

விதி V. $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

நிரூபணம் :

விதி I. $a^m \times a^n = (a \times a \times a........m$ காரணிகள் வரை)

$\times\ (a \times a \times a \times ....n$ காரணிகள் வரை)

$= a \times a \times a \times ....(m+n)$ காரணிகள் வரை

$= a^{m+n}$

[குறிப்பு : இப் பலனை மூன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட காரணிகளுக்கும் விரிவு படுத்தலாம்.]

ஆகவே, m, n, p......நேர் முழு எண்களானல்,

$a^m \times a^n \times a^p \times .... = a^{m+n+p}...$ எனப் பெறலாம்.

விதி II. $\frac{a^m}{a^n} = \frac{a \times a \times a \times ....m \text{ காரணிகள் வரை}}{a \times a \times a \times ....n \text{ காரணிகள் வரை}}$

$m > n$ ஆனல், பகுதியிலுள்ள எல்லாக் காரணிகளும் தொகுதியிலுள்ள n காரணிகளைப் போக்கி, தொகுதியில் $(m-n)$ காரணிகளை மட்டும் நிறுத்தும்

$\therefore \frac{a^m}{a^n} = a \times a \times a \times ....(m-n)$ காரணிகள் வரை

$= a^{m-n}$

$m < n$ ஆனல், தொகுதியிலுள்ள m காரணிகளனைத்தும் பகுதியிலுள்ள m காரணிகளைப் போக்கி எஞ்சிய $(n-m)$ காரணிகளை மட்டும் பகுதியில் நிறுத்தும்

$\therefore \frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a \times a \times a........(n-m) \text{ காரணிகள் வரை}}$

$= \frac{1}{a^{n-m}}$

விதி III. $(a^m)^n = a^m \times a^m \times a^m \times \ldots\ldots n$ காரணிகள் வரை

$= a^{m+m+\ldots\ldots n \text{ உருப்புகள்}}$

$= a^{mn}$

விதி IV. $(ab)^m = (ab)\times(ab)\times\ldots\ldots m$ காரணிகள் வரை

$= (a\times a\times a\times\ldots\ldots m$ காரணிகள் வரை$)$

$\times\ (b\times b\times b\times\ldots\ldots m$ காரணிகள் வரை$)$

$= a^m\, b^m$

விதி V. $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a}{b} \times \frac{b}{b} \times \frac{a}{b} \times \ldots\ldots m$ காரணிகள் வரை

$= \frac{a\times a\times a\times\ldots\ldots m \text{ காரணிகள் வரை}}{b\times b\times b\times\ldots\ldots m \text{ காரணிகள் வரை}}$

$= \frac{a^m}{b^m}$

3. பின்ன, பூச்சிய, எதிரெண் அடுக்குக் குறிகள்

மேற்கண்ட விதிகளைப் பின்ன, பூச்சிய, எதிரெண் அடுக்குக் குறிகளுக்கும் விரிவு படுத்தலாம்.

ஆனால், நாம் அதைச் செய்யுமுன், பின்ன, பூச்சிய எதிரெண் அடுக்குக் குறிகளின் பொருளை அறிதல் வேண்டும்.

p ஆனது ஒரு நேர் முழு எண் அல்லாத விடத்து, பிரிவு 1-ல் கொடுத்த விளக்கம் அர்த்த மற்றதாகும்.

ஆயினும், அடிப்படை அடுக்குக் குறி விதியாகிய $a^m \times a^n = a^{m+n}$ என்பது நேர் முழு எண்களுக்கே நிரூபிக்கப் பட்டாலும், அது அடுக்குக் குறிகளின் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் உண்மையாகுமெனக் கொண்டு, p-ன் பின்ன, பூச்சிய, எதிரெண் மதிப்புகளுக்கும் விளக்கத்தை வருவிக்கலாம்.

(i) பூச்சிய அடுக்குக் குறியின் பொருள்

$a^m \times a^0 = a^{m+0} = a^m$

a பூச்சிய மன்றுயின், ஒவ்வொரு பக்கத்தையும் a^m ஆல் வகுக்க :

$$\therefore \quad \frac{a^m \times a^o}{a^m} = \frac{a^m}{a^m}$$

(அ-து) $a^o = 1 \qquad (a \neq 0)$

[குறிப்பு : 0^o என்பது தேரப்படாத நிலைமையது ஆம்.]

(ii) எதிரெண் அடுக்குக் குறியின் பொருள்

a என்பது பூச்சியம் தவிர ஏதேனு மோரெ எண்ணுயின்,

$$a^{-m} \times a^m = a^{-m+m} = a^o = 1$$

$$\therefore \quad a^{-m} = \frac{1}{a^m} \; (a \neq 0, m \text{ ஏதேனுமொரு விகிதமுறு எண்})$$

இதனேடு, $a^m = \dfrac{1}{a^{-m}}$ ஆகும்.

[குறிப்பு : இவ் விளக்கத்திற்குப் பின், இரண்டாம் விதியில் கண்ட இரண்டு வகைகளுக்கும் வேறுபாடு காட்ட வேண்டுவதில்லை.

ஏனெனில் $\dfrac{1}{a^{n-m}} = a^{-(n-m)} = a^{(m-n)}$]

எடுத்துக்காட்டு :

$$a^{-4} = \frac{1}{a^4} \; ; \; \frac{1}{125} = \frac{1}{5^3} = 5^{-3},$$

(iii) $p = \dfrac{m}{n}$ என்று கொள்க [m ஒரு முழு எண், n ஒரு நேர் முழு எண் ஆகுக.]

[குறிப்பு : $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$]

$$\therefore \quad \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = \left(a^{m/n}\right)\left(a^{m/n}\right)\left(a^{m/n}\right) \ldots\ldots$$

n காரணிகள் வரை

$$\left(\frac{m}{n}+\frac{m}{n}+\frac{m}{n}\right)\ldots n \text{ உறுப்புகள் வரை}$$
$$= a$$
$$n \times \frac{m}{n}$$
$$= a$$
$$= a^m$$
$$\therefore \quad (a^{m/n})^n = a^m$$
$$\therefore \quad a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

(அதாவது) $a^{m/n}$ **என்பது** a^m**-ன் ஒரு** n **படி மூலமாகும்.**

(எ-டு) $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}\,;\ x^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{x^3}\,;\ a^{-\frac{3}{5}} = \frac{1}{a^{3/5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{a^3}}$

4. ஆகவே, m, n நேர் முழு எண்களெனக் கொண்டு நிறுவப் பட்ட ஐந்து விதிகளும், நேர் முழு எண்களுக்கு மாத்திரமின்றி, எல்லா விகித முறு எண்களுக்கும் பொருந்துமெனக் கொண்டு, a^o, a^{-m}, $a^{m/n}$-க் குரிய மதிப்புகளை வருவித்துக் கொண்டோம்.

இனி, மறுதலையாக மேல் 3ஆம் பிரிவிலுள்ள மூன்று பலன் களையும் வரையறை இலக்கணங்களாகக் கொண்டு, பின்ன, பூச்சிய, எதிரெண் அடுக்குக் குறிகளுக்கு இப்பொழுது கொடுத்த பொருளுடன் அடுக்குக் குறி விதிகள் எல்லா விகிதமுறு மதிப்பு களுக்கும் உண்மை எனக் காட்டலாம்.

5. விளக்க மாதிரிகள்

மாதிரி 1 : சுருக்குக :

$$\frac{8^{-2/3} + \sqrt{9^{-1}}}{(-64)^{1/3}}$$

$$8^{-2/3} = (2^3)^{-2/3} = 2^{3\times-\frac{2}{3}} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \tfrac{1}{4}$$

$$\sqrt{9^{-1}} = \sqrt{\tfrac{1}{9}} = \tfrac{1}{3}$$

$$(-64)^{1/3} = \{(-4)^3\}^{1/3} = -4\,;$$

(அல்லது) $(-64)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-64} = -4$

$\therefore$ கொடுக்கப்பட்ட பின்னம் $= \dfrac{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}}{-4} = -\dfrac{7}{48}$

மாதிரி 2 :

$x=y^z,\ y=z^x,\ z=x^y$ ஆகுமாயின்,

$xyz=1$ என்று நிரூபிக்க.

$$x^{xyz}=(x^y)^{zx}$$

$$=(z)^{zx}=(z^x)^z=y^z=x=x^1$$

$\therefore\ xyz=1$

மாதிரி 3 :

சுருக்குக :

$$\frac{1}{1+x^{a-b}+x^{a-c}}+\frac{1}{1+x^{b-c}+x^{b-a}}+\frac{1}{1+x^{c-a}+x^{c-b}}$$

$$\frac{1}{1+x^{a-b}+x^{a-c}}=\frac{1}{1+\dfrac{x^a}{x^b}+\dfrac{x^a}{x^c}}$$

$$=\frac{x^bx^c}{x^bx^c+x^ax^c+x^ax^b}=\frac{x^{b+c}}{x^{a+b}+x^{b+c}+x^{c+a}}$$

இதே போல், $\dfrac{1}{1+x^{b-c}+x^{b-a}}=\dfrac{x^{c+a}}{x^{a+b}+x^{b+c}+x^{c+a}}$ ஆகும்.

மேலும், $\dfrac{1}{1+x^{c-a}+x^{c-b}}=\dfrac{x^{a+b}}{x^{a+b}+x^{b+c}+x^{c+a}}$ ஆகும்.

$$\therefore\ \text{மதிப்பு}=\Sigma\frac{x^{b+c}}{x^{a+b}+x^{b+c}+x^{c+a}}=\frac{x^{b+c}+x^{c+a}+x^{a+b}}{x^{a+b}+x^{b+c}+x^{c+a}}$$

$$=1$$

மாதிரி 4 :

$\left(\dfrac{x^m}{x^n}\right)^{m^2+mn+n^2}\cdot\left(\dfrac{x^n}{x^l}\right)^{n^2+nl+l^2}\left(\dfrac{x^l}{x^m}\right)^{l^2+lm+m^2}=1$ எனக்காட்டுக.

$$\text{தற்பொழுது, } \left(\frac{x^m}{x^n}\right)^{m^2+mn+n^2} = (x^{m-n})^{m^2+mn+n^2} = (x^{m^3-n^3})$$

$$\text{எனவே, இடது பக்கம் } = x^{m^3-n^3} \cdot x^{n^3-l^3} \cdot x^{l^3-m^3}$$

$$= x^{m^3-n^3+n^3-l^3+l^3-m^3}$$

$$= x^0$$

$$= 1$$

மாதிரி 5 : தீர்வு காண்க ;

(i) $5^{x+y} = 25^{y-x}$; (ii) $2^{3x+y} = 8^{y-1}$

$5^{x+y} = 25^{y-x} = (5^2)^{y-x} = 5^{2y-2x}$ ...(i)

$2^{3x+y} = 8^{y-1} = (2^3)^{y-1} = 2^{3y-3}$ ...(ii)

ஆகவே, (i)-ல் இருந்து, $x+y = 2y-2x$ ...(iii)

(ii)-ல் இருந்து, $3x+y = 3y-3$ ...(iv)

(iii), (iv) ஐ விடுவிக்க, $x=1$, $y=3$ எனவரும்.

பயிற்சி 2-1.

1. சுருக்குக

(i) $(a^{4/3} b^{2/5})^{15} \times \left(b^{\frac{1}{2}}\right)^{3} \div \left(a^{\frac{1}{5}} b^{\frac{1}{4}}\right)^{10}$ [விடை : $a^{18} b^{5}$]

(ii) $(ab)^{5} a^{\frac{3}{2}} \div \sqrt[3]{-a^{6} b^{8}}$ [விடை : $-a^{31/3} b^{7/3}$]

(iii) $(a^3)^2 \div (b^2)^3 \times (ab)^3 \div b^{\frac{3}{2}} \times a^{\frac{2}{3}} \div (a^2 \times ^4)$ [விடை : a^{12}/b^{11}]

(iv) $8^{-\frac{1}{3}} + 27^{-\frac{1}{3}}$ [விடை : 5/6]

(v) $\dfrac{6^{m+1} \cdot 10^{m-n} \cdot 14^{m+n-2} \cdot 2^n}{4^m \cdot 3^{2m+n}\, 25^{m-1}}$ [விடை : 2/3]

(vi) $\left(\frac{x^m}{x^n}\right)^{b+n} \cdot \left(\frac{x^n}{x^p}\right)^{n+p} \cdot \left(\frac{x^p}{x^m}\right)^{p+m}$ [விடை : 1]

(vii) $(x^{b-c})^{\frac{1}{bc}} \cdot (x^{c-a})^{\frac{1}{ca}} \cdot (x^{a-b})^{\frac{1}{ab}}$ [விடை : 1]

(viii) $\sqrt[qr]{\frac{x^q}{x^r}} \cdot \sqrt[rp]{\frac{x^r}{x^p}} \cdot \sqrt[pq]{\frac{x^p}{x^q}}$ [விடை : 1]

(ix) $\left(\frac{x^{b+c}}{x^{c-a}}\right)^{\frac{1}{a-b}} \cdot \left(\frac{x^{c+a}}{x^{a-b}}\right)^{\frac{1}{b-c}} \cdot \left(\frac{x^{a+b}}{x^{b-c}}\right)^{\frac{1}{c-a}}$ [விடை : 1]

(x) $\left(\frac{x^{bc}}{x^{a-b}}\right)^{\frac{1}{c-a}} \cdot \left(\frac{x^{ca}}{x^{b-c}}\right)^{\frac{1}{a-b}} \cdot \left(\frac{x^{ab}}{x^{c-a}}\right)^{\frac{1}{b-c}}$ [விடை : $1/x$]

(xi) $\frac{1}{1+a^{m-n}} + \frac{1}{1+a^{n-m}}$ [விடை : 1]

(xii) $\frac{(x^2+1)^{\frac{1}{2}} - (x^2-1)^{\frac{1}{2}}}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}} + (x^2-1)^{\frac{1}{2}}} + \frac{(x^2+1)^{\frac{1}{2}} + (x^2-1)^{\frac{1}{2}}}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}} - (x^2-1)^{\frac{1}{2}}}$

[விடை : $2x^2$]

(xiii) $\frac{(1-a^{-1})(1-b^{-1})}{1+a^{-1}b^{-1}} + \frac{a+b-a^{-1}-b^{-1}}{ab-a^{-1}b^{-1}}$ [விடை : 1]

(xiv) $\frac{a^2+b^2-a^{-2}-b^{-2}}{a^2b^2-a^{-2}b^{-2}} + \frac{(a-a^{-1})(b-b^{-1})}{ab+a^{-1}b^{-1}}$

[விடை : 1]

2. $\sqrt[a]{x^{b-c}}, \sqrt[b]{x^{c-a}}, \sqrt[c]{x^{a-b}} = 1, (x \neq 1)$ ஆனால், a, b, c என்றவற்றுள் எவையேனும் இரண்டு சமமாக இருக்கும் எனக் காட்டு.

3. 5^{200} பெரியதா அல்லது $3^{100} \times 4^{150}$ பெரியதா ? ஏன் ?

4. $xy^{p-1}=a, xy^{q-1}=b, xy^{r-1}=c$ எனின், $a^{q-r} \cdot b^{r-p} \cdot c^{p-q}=1$ என நிறுவுக.

5. $a^x = bc;\ b^y = ca;\ c^z = ab$ ஆனால்,

(i) $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} = 1$ எனக் காட்டுக.

(ii) இது பற்றியேனும், அல்லது வேறு வகையினாலேனும் $xyz = x+y+z+2$ என நிறுவுக.

6. (i) $x = a^m,\ y = a^n,\ x^n y^m = a^{\frac{2}{p}}$ ஆனால், $mnp = 1$ என்று நிரூபி.

(ii) $a^{mn} = (am)^n$ ஆனால், $m = n^{\frac{1}{n-1}}$ என்று காட்டுக.

(iii) $x^y = y^x$ ஆனால், $\left(\frac{x}{y}\right)^{x/y} = x^{\frac{x}{y}-1}$ எனக் நிறுவுக.

(iv) $a^x = b^y = ab$ ஆனால், $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$ எனக் காட்டுக.

(v) $a^x = b^y = c^z$; $b^2 = ac$ ஆனால், $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{2}{y}$ என நிறுவுக.

(vi) $a = p^x,\ b = p^y$; $a^y b^x = p^{2(x+y)}$ எனில்,
$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$ என்று காட்டுக.

7. (i) $x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}} + z^{\frac{1}{3}} = 0$ ஆனால், $(x+y+z)^3 = 27xyz$ என நிறுவுக.

(ii) $y = x + \sqrt{x^2+1}$ ஆனால், $x = \frac{1}{2}(y - y^{-1})$ என்று நிரூபி.

(iii) $x = 2^{\frac{1}{3}} - 2^{\frac{1}{3}}$ ஆனால், $2x^3 + 6x = 3$ என நிறுவுக.

8. தீர்வு காண்க :

(i) $2^{3y-1} = 8^{x+y}$; $3^{x+3y} = 9^{2x-4}$ [விடை : $x = -\frac{1}{3},\ y = -3$]

(ii) $a^b = b^a$; $a = 2b$ [விடை : $a = 4,\ b = 2$]

(iii) $64^x = \frac{1}{256^y} = 2\sqrt{2}$ [விடை : $x = \frac{1}{4}$; $y = -\frac{3}{16}$]

9. வர்க்க மூலங் காண்க :

(i) $4^m - 2^{m+1} \cdot 3^n + 9^n$ [விடை . $2^m - 3^n$]

(ii) $25^p + 2^{q+1}\, 5^p + 4^q$ [விடை : $5^p + 2^q$]

10. $abc = 1$ ஆனால்,

$$(1+a+b^{-1})^{-1} + (1+b+c^{-1})^{-1} + (1+c+a^{-1})^{-1} = 1$$

எனக் காட்டுக.

6. விகிதமுரு மூலங்கள் (Surds)

1. விகித முறு எண்கள் : தொகுதியும், பகுதியும் முழு எண்களாகக் கொண்ட எண்கள் விகிதமுறு (rational) எண்கள் எனப்படும்.

2. இவ்வாறு அமையாத எண்கள் விகிதமுரு எண்கள் எனப்படும்.

இவை பல வகைப்படும் :

(i) $\pi = 3{\cdot}1416$.........$e = 2{\cdot}71828$.........

(ii) $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$,........., $\sqrt[3]{2}$,.........

இவற்றின் மூலங்களைக் காண முற்படும் போது, அவை முடிவற்ற எண்களாவதைக் காண்கிறோம்.

இவை விகித முறு எண்களின் விகிதமுரு மூலங்கள் (surds) எனப்படும்.

(iii) $\sqrt{2+\sqrt{3}}$, $\sqrt[3]{3-\sqrt{5}}$, ...

இவை விகிதமுரு எண்களின் விகித முரு மூலங்களாகும்.

[குறிப்பு : $\sqrt{2} = 1{\cdot}414$...... நாம் $\sqrt{2}$ஐ எத்தனை தசமஸ்தான சுத்தமாக வேண்டுமானாலும் கண்டு கொள்ளலாம். அண்மைக் காலம்வரை இம் மாதிரி எண்களைப் பொருளற்ற எண்கள் (absurd numbers) என்று குறிப்பிட்டார்கள். மனிதனின் கணித வளர்ச்சியில் அக் காலத்தில் அவன் அடைந்த நிலையை இச் சொல் குறிக்கின்றது. ஆனால், இப்பொழுது $\sqrt{2}$ போன்ற எண்கள் இதர எண்களைப் போன்றனவே எனத் தெரிந்தும், அப்

பெயரில் மாற்றம் செய்யவில்லை. ஏனெனில், மனிதன் கணித வளர்ச்சியில் அக் காலத்தில் அடைந்த நிலையை இச் சொல்லால் நாம் அறிய முடிகிறது. இச் சொல்லே, நாளடைவில் 'surds' என மாறிற்று.

7. விகித முறுத்தல் (Rationalisation)

ஒரு பின்னத்தின் பகுதியில் ஒரு விகிதமுரு மூலம் இடம் பெற்றால், அப் பின்னத்தின் மதிப்பைக் காண்பதில் நாம் தோராய மதிப்பைத்தான் பெறமுடியும். எடுத்துக்காட்டாக $\frac{1}{\sqrt{3}}$-ன் மதிப்பைப் பெற வேண்டுமானால், முதற்கண் $\sqrt{3}$-ன் மதிப்பைக் காண முற்படும்போது அது ஒரு முடிவற்ற எண்ணாகும். ஆகவே, நாம் தோராய மதிப்பாக $\sqrt{3} = 1{\cdot}7321$ எனக் கொள்கிறோம். இதில் ஒரு பிழை ஏற்படுகிறது. மேலும், $\frac{1}{\sqrt{3}}$ காணும்போது (அதாவது) 1 ஐ $\sqrt{3}$ ஆல் வகுக்க முற்படும்போது அஃது ஒரு முடிவற்ற எண்ணாகும். ஆகவே, இதிலும் நாம் ஒரு தோராய மதிப்பையே கொள்ள வேண்டும். ஆகவே, இரு பிழைகள் ஏற்படுகின்றன.

இதைத் தவிர்க்க, நாம் விகிதமுரு மூலங்களைப் பகுதியில் இடம்பெறாமல் செய்முறை மேற்கொள்ள வேண்டும். இச் செய்முறைக்கு விகிதமுறுத்தல் (Rationalisation) எனப்படும்.

ஏதேனுமொரு மூலத்தை விகிதமுறுத்த, அதைத் தக்க காரணியால் பெருக்கவேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு :

(i) $\sqrt{3}$ ஐ $\sqrt{3}$ ஆல் பெருக்க, 3 என்ற விடை கிடைக்கிறது.

(ii) $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ ஐ $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ ஆல் பெருக்க, $a-b$ என்ற விகிதமுறு எண் கிடைக்கிறது. இவை ஒன்றுக்கொன்று துணை விகிதமுரு மூலங்கள் (conjugate surds) எனப்படும்.

மாதிரி 1 :

விகித முறுத்துக : $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

இங்குப் பகுதியை விகிதமுறுத்தற்கு, விகிதமுரு மூலத்தின் துணைக் கோவையைக் காரணியாகக் கொள்ளுதல் வேண்டும்.

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})\ (1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}$$

$$= \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1+2\sqrt{2}+2-3}$$

$$= \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

மீண்டும் பகுதி, தொகுதிகளை $\sqrt{2}$ ஆல் பெருக்க, நாம் பெறுவது!

$$\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{4} = \frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

[குறிப்பு: $(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})$க்கு ஏற்புடைய மற்றொரு துணைக் கோவை $1+\sqrt{3}-\sqrt{2})$ ஆகும். $(1+\sqrt{3}-\sqrt{2})$ ஐப் பெருக்கியாகக் கொண்டு செய்துபார்.]

மாதிரி 2.

$a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{3}}$ ஐ விகிதமுறு எண்ணாக்கும் காரணியைக் காண்க.

$a^{\frac{1}{2}} = x$; $b^{\frac{1}{3}} = y$ எனக் கொள்க.

2, 3-ன் அ. பொ. ம. 6

$x^6 = (a^{\frac{1}{2}})^6 = a^3$; $y^6 = (b^{\frac{1}{3}})^6 = b^2$

ஆகவே, a^3, b^2 விகிதமுறு எண்களாகும்.

$\therefore$ x^6-y^6 ஒரு விகிதமுறு எண்ணாகும். இது $x+y$-ன் மடங்காகும்.

ஆகவே, விகிதமுறுத்தும் காரணி, x^6-y^6 ஐ $x+y$ ஆல் வகுத்துக் கிடைக்கும் ஈவு ஆகும்.

$$(x^6-y^6) = (x+y)(x^5-x^4y+x^3y^2-x^2y^3+xy^4-y^5)$$

$\therefore$ விகித முறுத்தும் காரணி $x^5-x^4y+x^3y^2-x^2y^3+xy^4-y^5$

அதாவது $a^{\frac{5}{2}}-a^2b^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{3}{2}}-ab+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{4}{3}}-b^{\frac{5}{3}}$

பயிற்சி 2-2.

1. கீழ்க் கண்டவற்றுள் எது பெரியது ?

   (i) $\sqrt[3]{14}$ அல்லது $\sqrt{6}$ (ii) $\sqrt[3]{11}$ அல்லது $\sqrt[4]{23}$

2. $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{20}$, $\sqrt[4]{30}$, $\sqrt[6]{60}$ இவற்றை ஏறு வரிசையில் எழுதுக.

3. சுருக்குக :

   (i) $\dfrac{2}{3-\sqrt{7}} - \dfrac{4}{3+\sqrt{5}}$ [விடை : $\sqrt{7}+\sqrt{5}$]

   (ii) $\dfrac{(15+5\sqrt{5})(\sqrt{5}-2)}{5-\sqrt{5}}$ [விடை : $\sqrt{5}$]

   (iii) $\dfrac{x\sqrt{x}+3x-4\sqrt{x}}{4+\sqrt{x}}$ [விடை : $x-\sqrt{x}$]

   (iv) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1} - \dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$ [விடை : 3]

4. பின் வருவனவற்றை விகிதமுறு எண்ணாக்கும் காரணியைக் காண்க.

   (i) $\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}$

   [விடை : $2^{5/2}+2^2\cdot3^{\frac{1}{3}}+2^{3/2}3^{2/3}+2\cdot3+2^{\frac{1}{2}}3^{4/3}+3^{\frac{5}{3}}$]

   (ii) $\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{9}$ [விடை : $\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{3}$]

5. பகுதியை விகித முறுத்துக.

   (i) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ விடை : $\left[\dfrac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12}\right]$

(ii) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{5}+1}$ [விடை : $\dfrac{5^{1/3}+1}{6}$]

(iii) $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{16}}$ [விடை : $\dfrac{4^{1/3}-1}{3}$]

6. (i) $x=\sqrt{2}+1$ ஆனால், x^2+x^{-2}-ன் மதிப்பைக் காண்க.

(ii) $x=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ ஆனால், x^2+x^{-2}-ன் மதிப்பைக் காண்க.

(iii) $x=\dfrac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}$ ஆனால், $x^4+\dfrac{1}{x^4}$ ஒரு முழு எண்ணாகு மென்று காட்டுக.

(iv) $x=\frac{1}{2}(5-\sqrt{21})$ ஆனால்,

$$\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-5\left(x^2+x^{\frac{1}{2}}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)=0$$

எனக் காட்டுக.

(v) $x=\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})$ ஆனால்,

$$\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)\text{-ன்}$$

மதிப்பைக் காண்க. [விடை : 59]

7. $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}+1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$ எனக் காட்டுக.

8. தீர்வு காண்க :

$$\frac{1}{\sqrt{2+x}\;\sqrt{\sqrt{2}}}+\frac{1}{\sqrt{2-x}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{x}$$

9. $x=\sqrt{3}/2$ ஆனால்,

$$\frac{1+x}{1+1\sqrt{+x}}+\frac{1-x}{1-\sqrt{1-x}}=1 \text{ எனக் காட்டுக.}$$

10. $\left(\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{(2+\sqrt{3})}}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}\right)=2$ எனக் காட்டுக

8. தேற்றம்.

$\sqrt{b}$, $\sqrt{d}$ விகிதமுரு மூலங்களாகவும், a, c விகிதமுறு எண் களாகவும் ஆகுமிடத்து, $a+\sqrt{b} = c+\sqrt{d}$ ஆனால், அப்பொழுது $a=c$, $b=d$ ஆகும்.

$$a+\sqrt{b} = c+\sqrt{d}$$

இடப் பெயர்ச்சி செய்கையில், $a - c + \sqrt{b} = \sqrt{d}$ எனப் பெறுகிறோம்.

இரண்டு பக்கங்களையும் வர்க்கப்படுத்த, நாம் பெறுவது

$(a-c)^2+2(a-c)\sqrt{b}+b=d$ ஆகும்.

(அதாவது) $2(a-c)\sqrt{b} = d-b-(a-c)^2$

இப்பொழுது, $\sqrt{b}$ விகிதமுறு எண்ணாகும்.

$(a-c)\neq 0$ ஆனால், ஒரு விகித முருக் கோவை, ஒரு விகிதமுறு கோவைக்குச் சமம் என்ற நிலை ஏற்படுகிறது. இஃது அர்த்தமற்ற தாகும்.

ஆகவே, $a-c$ பூச்சியத்திற்குச் சமமாதல் வேண்டும்.

$\therefore\ a = c$

ஆகவே $b = d$

[குறிப்பு : $a+\sqrt{b} = c-\sqrt{d}$ ஆனால்,

அப்பொழுது $a-\sqrt{b}=c-\sqrt{d}$ ஆகும்.]

9. ஈருறுப்பு விகித முரு எண்ணின் வர்க்க மூலம்

மாதிரி : $70-15\sqrt{3}$-ன் வர்க்க மூலத்தைக் காண்க :

$$\sqrt{70-15\sqrt{3}} = \sqrt{x}-\sqrt{y}$$ எனக் கொள்க.

இரு பக்கங்களையும் வர்க்கப் படுத்த, நாம் பெறுவது

$$70-15\sqrt{3} = x+y-2\sqrt{xy}$$

இனி, முழு எண் உறுப்பையும், விகித முரு மூல உறுப்பையும் தனித்தனியே சமன்படுத்த,

$$x+y+70 \qquad \text{...(i)}$$

$$2\sqrt{xy} = 15\sqrt{3} \text{ ஆகும்} \qquad \text{...(ii)}$$

இவற்றிலிருந்து, $x+y=70$

$4xy=675$ என்றறியலாம்.

இனி, $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy$ ஆதலால்,

$$(x-y)^2=4900-675=4225$$

$$\therefore \quad x-y=65 \text{ ஆகும்.} \qquad \text{...(iii)}$$

(i), (iii) சமன்பாடுகளை விடுவிக்குங்கால்,

$$x = \frac{135}{2},\ y = \frac{5}{2} \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore \quad \sqrt{70-15\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{135}{2}} - \sqrt{\frac{5}{2}}$$

10. மூவுறுப்பு விகித முரு எண்ணின் வர்க்க மூலம்

$(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2=x+y+z+2\sqrt{xy}+2\sqrt{yz}+2\sqrt{zx}$ ஆகும்.

(அதாவது) $(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2=a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}$ என்ற வடிவில் அமைகிறது.

மறுதலையாக, $\sqrt{a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}} = \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$ எனக் கொள்ளலாம்.

மேலும் $(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z})^2=x+y+z+2\sqrt{xy}$

$$-2\sqrt{xz}-2\sqrt{yz}$$

$$=a+\sqrt{b}-\sqrt{c}-\sqrt{d} \text{ ஆகும்.}$$

ஆகவே, $a+\sqrt{b}-\sqrt{c}-\sqrt{d}$ என்ற கோவையின் வர்க்கமூலம் $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$ எனக் கொள்ளலாம்.

மாதிரி : $10-\sqrt{24}+2\sqrt{10}-2\sqrt{15}$-ன் வர்க்க மூலம் அறிக.

$\sqrt{10-\sqrt{24}+2\sqrt{10}-2\sqrt{15}} = \sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}$ எனக் கொள்வோம்.

இரு பக்கங்களையும் வர்க்கஞ் செய்க.

$$\therefore \quad 10-\sqrt{24}+2\sqrt{10}-2\sqrt{15}=x+y+z+2\sqrt{xy}-2\sqrt{xz}-2\sqrt{yz}$$

விகித முறும் பாகங்களைச் சமன்படுத்த

$$\therefore \quad x+y+z=10 \qquad \text{...(i)}$$

விகித முருப் பாகங்களைச் சமன்படுத்த, பின் வருவன பெறப் படும்.

$2\sqrt{xy}=2\sqrt{10}$ (ii) (அதாவது) $\sqrt{xy}=\sqrt{10}$

$-2\sqrt{xz}=-\sqrt{24}$ (iii) ,, $\sqrt{xz}+\sqrt{6}$

$-2\sqrt{yz}=-2\sqrt{15}$ (iv) ,, $\sqrt{yz}=\sqrt{15}$

இவற்றை வர்க்கங் காண, $xy=10$, $xz=6$, $yz=15$ஆகும்,

இனி, $\dfrac{xy\times xz}{yz} = \dfrac{10\times 6}{15}$

(அதாவது) $x^2=4 \quad \therefore \quad x=2$ஆகும்

இதையொட்டி, $y=5$; $z=3$ஆகும்

இதைக்கொண்டு, $x+y+z=2+5+3=10$ஆகும்

ஆகவே (i)-ல் காட்டிய சமன்பாடு சரிப்பட்டு நிற்கக் காண்கிறோம்.

(இது நமது விடையைச் சரி பார்க்கப் பயன்படுகிறது)

$\therefore$ தேவையான வர்க்கமூலம் $=\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{3}$ ஆகும்.

பயிற்சி 2-3.

1. வர்க்கமூலங் காண்க.

(i) $5-\sqrt{24}$ [விடை: $\sqrt{3}-\sqrt{2}$]

(ii) $134+\sqrt{6292}$ [விடை: $11+\sqrt{13}$]

(iii) $89+28\sqrt{10}$ [விடை: $7+2\sqrt{10}$]

(iv) $181-12\sqrt{5}$ [விடை; $6\sqrt{5}-1$]

(v) $14-6\sqrt{5}$ [விடை: $3-\sqrt{5}$]

2. (i) சுருக்குக:

$$\sqrt{\left\{4+\sqrt{5+\sqrt{(17-4\sqrt{15})}}\right\}}$$ [விடை: $1+\sqrt{3}$]

(ii) $$\sqrt{\left[-\sqrt{3}+\sqrt{\left\{4+\sqrt{5+\sqrt{17-4\sqrt{15}}}\right\}}\right]}=1$$ என நிரூபிக்க.

3. சுருக்குக:

$$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}-\frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{\sqrt{89-28\sqrt{10}}}$$

[விடை: $\frac{2\sqrt{5}\,(\sqrt{5}-1)}{3}$]

4. $$\frac{1}{\sqrt{12-2\sqrt{35}}}-\frac{1}{\sqrt{8-2\sqrt{15}}}-\frac{2}{\sqrt{10+2\sqrt{21}}}=$$
எனக் காண்க.

5. $$\frac{1}{\sqrt{11-2\sqrt{30}}}-\frac{3}{\sqrt{7-2\sqrt{10}}}-\frac{4}{\sqrt{8+4\sqrt{3}}}=0$$
எனக் காண்க.

6. $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ஆனால், $\frac{1+x}{1+\sqrt{1+x}}+\frac{1-x}{1-\sqrt{1-x}}=1$
என்று காட்டுக.

7. $\left(\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}\right)=2$

என்று காட்டுக.

8. பின் வருவனவற்றின் இருபடி மூலங்களைக் காண்க.

(i) $10+2\sqrt{6}+2\sqrt{10}+2\sqrt{15}$

[விடை : $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$]

(ii) $35-12\sqrt{6}+6\sqrt{10}-4\sqrt{15}$

[விடை : $3\sqrt{2}+\sqrt{5}-2\sqrt{3}$]

(iii) $6-\sqrt{8}-\sqrt{12}+\sqrt{24}$ [விடை : $\sqrt{2}+\sqrt{3}-1$]

(iv) $14-2\sqrt{15}-2\sqrt{30}+6\sqrt{2}$

[விடை : $\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{5}$]

3. இலாகரிதம் அல்லது மடக்கை
(Logarithm)

1. வரையறை

கொடுத்த அடியை யொட்டி ஓர் எண்ணின் இலாகரிதமாவது' அவ் வெண்ணின் மதிப்பைப் பெறுவதற்கு அவ்வடியை எவ்வளவுக்கு உயர்த்த வேண்டு மென்பதைக் காட்டும் அடுக்குக் குறியேயாம்.

இங்ஙனம் $\log_2 8 = 3$, ஏனெனில் $2^3 = 8$ ஆதலால்

$\log_{10} 100 = 2$, ஏனெனில் $10^2 = 100$ ஆதலால்

பொதுவாக, $a^x = N$ ஆனால், $\log_a N = x$ என்கிறோம்.

$a^x = N$; $x = \log_a N$ என்னும் இருவகைக் கூற்றும் ஒரே கருத்தையே இரு வகைகளாகக் கூறியதாகும்.

எடுத்துக்காட்டு :

$3^4 = 81$ என்பதை அறிவோம்.

இதுவே, $\log_3 81 = 4$ ஆகும்

இவ்வாறே, $4^{\frac{1}{2}} = 2$ $\therefore$ $\log_4 2 = \frac{1}{2}$

$$100^{-\frac{1}{2}} = \cdot 1 \quad \therefore \quad \log_{100} \cdot 1 = -\tfrac{1}{2}$$

[குறிப்பு : 'மடக்கை' என்னும் சொல்லைச் சுருக்கமாக 'மகை' என்று கொண்டால், "$\log_a N = x$" என்பதை "மகை$_a$ $N = x$" என எழுதலாம்.]

2. இலாகரிதத்தின் அடி எண்

(i) 1-ன் எந்த அடுக்கும் 1 ஆகவே நிற்பதால், 1 என்ற எண் இலாகரித முறைக்கு அடி எண்ணாக ஏற்கப்பட்டது.

(ii) எந்த எதிரெண்ணின் அடுக்குகள், நேரெண்ணாகவும், எதிரெண்ணாகவும் மாறி, மாறி வருவதால், எந்த எதிரெண்ணும் இலாகரித முறைக்கு அடி எண்ணாக ஏற்கப்படாது.

எனவே 1 நீங்கலாக யாதேனுமொரு நேரெண்ணே இலாகரித முறைக்கு அடியாகக் கொள்ளுதற்கு ஏற்கும்.

3. இருவகை இலாகரித முறைகள்

ஆயினும் இரண்டு வகையான இலாகரித முறைகளே முக்கியத்துவம் வாய்ந்தவை.

(i) 10ஐ அடி எண்ணாகக் கொண்ட முறையே எல்லா செய்முறை கணக்கீடுகளுக்குப் பயன்படும். இது பொது (common) அல்லது பிரிக்ஸியன் (Briggsian) அல்லது தெனரி (Denary) இலாகரிதம் எனப்படும்.

(ii) 'e' என்னும் பிரசித்தமான எண்ணை அடியாகக் கொண்ட முறை.

இம்முறை இயற்கையான (Natural) அல்லது நேப்பியர் (Napierian) இலாகரிதம் எனப்படும்.

[குறிப்பு: e என்பது ஒரு விகித முறு எண்ணாகும். அதன் தோராய மதிப்பு 2·71828......

இது எல்லா அறிமுறை(Theroetical) உயர் கணதத்தில் பயன்படுவதாகும்.]

4. இலாகரிதத்தின் தன்மைகள்

(i) ஓர் எண்ணின் இலாகரிதம் அதே எண்ணை அடியெண்ணாகக் கொண்டால் 1 ஆகும்.

(ii) ஒரு நேரெண் அடிக்கு ஓர் எதிரெண்ணின் இலாகரிதம் கற்பனையானதாகும் (imaginary)

(iii) $a^{-\infty} \to 0$ ஆதலின், பூச்சியத்தின் இலாகரிதம், $-\infty$ ஆகும்.

(iv) $a^0=1$ $(a\neq 0)$ ஆதலின், எந்த அடிக்கும் 1-ன் இலாகரிதம் பூச்சியமாகும்.

(v) ஓர் எண்ணின் மதிப்பு 0-க்கும் 1-க்கும் இடைப் பட்டிருந்தால் இலாகரிதம் எதிரெண்ணாகும். அவ்வெண் 1 ஆனால், அதன் இலாகரிதம் '0' ஆகும். அவ்வெண் 1-க்கு அதிகப்படின் அதன் இலாகரிதம் நேரெண்ணாகும்.

(vi) முடிவிலியின் (infinity) இலாகரிதம் முடிவிலியேயாகும்

(vii) $a^{\log_a R}=N$ [$a^x=N$ ஆனால், $\log_a N=x$ ஆகும். x-க்கு இதைப் பிரதியிட, நமக்குக் கிடைப்பது $a^{\log_a N}=N$

[குறிப்பு : அடியெண் குறிப்பிடப் படா விட்டால், எந்த எண்ணை வேண்டுமானாலும் அடியெண்ணாகக் கொள்ளலாம் என்பது பொருள்.]

5. இலாகரித விதிகள்

பின் வரும் விதிகள் எந்த அடிக்கும் பொருந்தும்.

I. பெருக்கல் விதி : $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$ என நிறுவுக.

நிரூபணம் : $\log_a M=x$ எனவும்; $\log_a N=y$ எனவும் கொள்க

பின்னர், $M=a^x$; $N=a^y$ ஆகும்

$\therefore\ MN=a^x a^y=a^{x+y}$

$\therefore\ \log_a MN=x+y=\log_a M+\log_a N$

(அதாவது) இரண்டு எண்களின் பெருக்குத் தொகையின் இலாகரிதம் அவ்விரண்டு எண்களின் தனித்தனி இலாகரிதங்களின் கூட்டுத் தொகையாகும்.

கிளை : $\log_a MNP\ldots\ldots=\log_a M+\log_a N+\log_a P+\ldots\ldots$

II. வகுத்தல் விதி: $\log_a\left(\dfrac{M}{N}\right)=\log_a M-\log_a N$

நிரூபணம் : $\log_a M=x$ எனவும்; $\log_a N=y$ எனவும் கொள்க.

பின்னர், $M=a^x$; $N=a^y$

$$\therefore \quad \frac{M}{N} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$\therefore \quad \log_a\left(\frac{M}{N}\right) = x-y = \log_a M - \log_a N$$

(அதாவது) இரண்டு எண்களின் வகுத்தலின் இலாகரிதம் தொகுதியின் இலாகரிதத்தினின்றும் பகுதியின் இலாகரிதத்தைக் கழித்த எண்ணாகும்.

II. அடுக்கு விதி: $\log_a (M^p) = P \log_a M$

நிரூபணம் : $\log_a M = x$ ஆகுக

$\therefore \quad M = a^x$ ஆகும்

$\therefore \quad M^p = (a^x)^p = a^{px}$

$\therefore \quad \underline{\log_a (M^p) = px = p \,.\, \log_a M}$

கிளை : $\log_a \sqrt[q]{M} = \log_a M^{\frac{1}{q}} = \frac{1}{q} \log_a M$

IV. அடி மாற்றம் (Change of base) : 'a' ஐ அடியாகக் கொண்ட எண்களின் இலாகரிதங்கள் அடங்கிய அட்டவணையைக் கொண்டு, 'b' என்ற புதிய அடிக்கு அவ்வெண்களின் இலாகரிதங் களைப் பின்வரும் விதியைப் பயன்படுத்தி எளிதாக மாற்றியமைக்க லாம்.

$$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a B}$$

நிரூபணம் : $\log_b N = x$ ஆகுக

$\therefore \quad b^x = N$ ஆகும்

'a'ன் அடிக்கு, இருபக்கங்களின் இலாகரிதம் எடு. அப் பொழுது $\log_a b^x = \log_a N$ ஆகும்.

(அதாவது) $x \log_a b = \log_a N$ (அடுக்கு விதியின் படி

$$\therefore \quad x = \frac{\log_a N}{\log_a b}$$

(அதாவது) $\underline{\log_b N = \frac{\log^a N}{\log_a b}}$

கிளை 1: $N = a$ என்று மேற்கண்ட பலனில் பிரதியிடு.

$$\therefore \log_b a = \frac{\log_a a}{\log_a b} = \frac{1}{\log_a b}$$

கிளை 2: $\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b} = \log_a N \times \frac{1}{\log_a b}$

$= \log_a N \times \log_b$ [கிளை 1-லிருந்து

கிளை 3: $\log_{10} N = \frac{\log_e N}{\log_e 10} = \frac{1}{\log_e 10} \log_e N = \mu \log_e N$

இங்கு $\mu = \frac{1}{\log_e 10} = \cdot 4343$ ஆகும்.

இதனால் eஐ அடி எண்ணாகக் கொண்டு அமைந்த இலாகரிதங்களை μ என்ற 'மாற்ற அளவை' (Modulus) யால் பெருக்கி [10-என்னும் அடிக்குரிய இலாகரிதங்களைப் பெறலாம்.

6. விளக்க மாதிரிகள் :

மாதிரி : 1 சுருக்குக :— $\frac{\log_a 64 - \log_a 1}{\log_a 4 - \log_a 1}$

$\log_a 1 = 0$ ஆகும்.

ஆகவே, கொடுக்கப்பட்ட பின்னம் $= \frac{\log_a 64}{\log_a 4} = \frac{\log_a 4^3}{\log_a 4}$

$= \frac{3 \log_a 4}{\log_a 4} = 3$

மாதிரி 2: $x^2 + y^2 = 6xy$ ஆனால்,

$$2 \log (x+y) = \log x + \log y + 3 \log 2$$

என்று நிரூபிக்க.

$x^2 + y^2 = 6xy$

$\therefore x^2 + y^2 + 2xy = 6xy + 2xy = 8xy$

(அதாவது) $(x+y)^2 = 8xy = 2^3 xy$

$\therefore \log (x+y)^2 = \log (2^3 xy)$

(அதாவது) $2 \log (x+y) = \log 2^3 + \log x + \log y$

$= 3 \log 2 + \log x + \log y$

பயிற்சி 3-1.

1. இலாகரிதங்களைக் காண்க.

(i) $\sqrt{7}$ அடி எண்ணுக்கு 343-ன் இலாகரிதம் [விடை: 6]

(ii) $2\sqrt{2}$ அடி எண்ணுக்கு 144-ன் இலாகரிதம் [விடை: 4]

(iii) ·5 அடி எண்ணுக்கு ·25-ன் இலாகரிதம் [விடை: 2]

(iv) $2\sqrt{2}$ அடி எண்ணுக்கு $\frac{1}{256}$-ன் இலாகரிதம் [விடை: $\frac{16}{3}$]

(v) $5\sqrt{5}$ அடி எண்ணுக்கு 125-ன் இலாகரிதம் [விடை: 2]

2. ·25, 7, ·64 என்ற அடிகளுக்கு முறையே $\frac{1}{2}$, 2, $\frac{1}{2}$ என்பன வற்றை இலாகரிதங்களாகக் கொள்ளும் எண்களைக் கண்டுபிடி. [விடை: ·5, 49, 1·25]

3. (i) $32^5\sqrt{4}$-ன் இலாகரிதமாக 3·6 வரக்கூடிய அடி எண்ணைக் காண்க. [விடை: $\sqrt{2}$]

(ii) $729^4\sqrt[4]{27}$-ன் இலாகரிதமாக 4·5 வரக்கூடிய அடி எண் என்ன? [விடை: $\sqrt{3}$]

4. log (1+2+3) ஆனது log 1 + log 2 + log 3-க்குச் சமமாகுமா?

5. மதிப்பைக் கண்டறிக

(i) $\log_2 3 \times \log_3 4 \times \log_4 8$ [விடை: 3]

(ii) $3 \log\frac{3}{4} - \log\frac{27}{64}$ [விடை: 0]

(iii) $\dfrac{\log_x 125 - \log_x 25}{\log_x 25 - \log_x 5}$ [விடை: 1]

6. நிரூபி:

(i) $\log_{10}\left(\frac{15}{16}\right) + \log_{10}\left(\frac{64}{81}\right) - \log_{10}\left(\frac{4}{27}\right) = \log_{10} 4$

(ii) $\log_{10} 1600 = 2 + 4 \log_{10} 2$

(iii) $\log_3 10 = \dfrac{1}{\log_{10} 3}$; இதிலிருந்து $\log_3 30$ ஐக் கண்டுபிடி.

(iv) $\log_a N + \log_{\frac{1}{a}} N = 0$

(v) $\log\left(\dfrac{10}{27}\right) - 2\log\left(\dfrac{8}{9}\right) + \log\left(\dfrac{16}{15}\right) = 0$

(vi) $\log_a b, \log_b c, \log_c a = 1$

(vii) $\log_b a, \log_c b, \log_d c = \log_d a$

(viii) $\dfrac{1}{\log_a ab} + \dfrac{1}{\log_b ab} = 1$

(ix) $\dfrac{1}{\log_a abc} + \dfrac{1}{\log_b abc} + \dfrac{1}{\log_c abc} = 1$

(x) $\log_a M \log_b N = \log_b M \log_a N$

(xi) $\log_a M \log_b N \log_c P = \log_b M \log_c N \log_a P$

(xii) $a^{\log b - \log c}, b^{\log c - \log a}, c^{\log a - \log b} = 1$ என நிறுவுக.

7. $x = \log_a bc,\ y = \log_b ca,\ z = \log_c ab$ ஆனால்,

$\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1+y} + \dfrac{1}{1+z} = 1$ என நிறுவுக.

இதையொட்டியோ அல்லது வேறு வகையாலோ,

$xyz = x+y+z+2$ என்று நிரூபி.

8. $\log(x+y) = \log 3 + \frac{1}{2}\log x + \frac{1}{2}\log y$ ஆனால்,

$x^2+y^2 = 7xy$ என நிறுவுக.

9. $\log(x+y) = \log 2 + \frac{1}{2}\log x + \frac{1}{2}\log y$ ஆனால்,

$x = y$ என்று நிரூபி.

10. $2\log_8 N = P,\ \log_2 2N = q$; $q-p=4$ எனின், N-ன் மதிப்பென்ன? [விடை : 2^9]

11. $\log_a b = \log_b c = \log_c a$ என்றால் $a=b=c$ என நிரூபி.

12. $f(x) = \log \frac{1+x}{1-x}$ ஆனால்,

(i) $2f(x) = f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ என்று நிரூபிக்க.

(ii) $3f(x) = f\left(\frac{3x+x^3}{1+3x^2}\right)$ என நிறுவுக.

13. a, b, c என்பன அடுத்தடுத்த மூன்று நேர் முழு எண்களானால், $\log(1+ac) = 2\log b$ எனக் காட்டுக.

14. தீர்வு காண்க :
$\log_a(5a-3) - \log_a 2 = 2$ [விடை : $a = \frac{3}{2}$]

7. பொது அல்லது நடைமுறை இலாகரிதம் (Common Logarithms)

10 ஐ அடியெண்ணைக் கொண்டு அமைந்த இலாகரிதங்கள் எல்லாச் செய்முறை கணக்கீடுகளுக்கும் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. இது 'பொது அல்லது நடைமுறை இலாகரிதம்' எனப்படும்.

10ஐ அடியெண்ணைக் கொண்டு முறையே 4, 7 தசமத்தானத் திருத்தமாக ஒவ்வோர் எண்களுக்கும் இலாகரிதம் எவ்வளவு என்று கண்டு கொள்ளக்கூடிய இலாகரித அட்டவணைகள் உலகெங்கும் பயன்படுத்தப்படுகின்றன.

மேலும், மறுதலையாக வெவ்வேறு இலாகரிதங்களுக்குரிய எண்களைக் காண 'எதிர் இலாகரித' (anti logarithm) அட்டவணைகளும் உண்டு.

மேற்கண்ட இலாகரித விதிகளின் பலன்களிலிருந்து ஓர் இலாகரித அட்டவணையின் உதவியால் பெருக்கல்களைக் கூட்டல்களாகவும், அடுக்குக் கணிப்புகளைப் பெருக்கல்களாகவும், மூலக் கணிப்புகளை வகுத்தல்களாகவும் செய்யலாம் என்பது விளங்கும்.

இதனால், பெரிய எண்களையோ அல்லது பின்னங்களையோ பெருக்கும் போதும், வகுக்கும் போதும் படி மூலங்கள் காணும் போதும், வேலை மிக எளிதாக முடியும்.

விஞ்ஞானம், வானியல், பொறியியல், திரிகோணமிதி முதலியவற்றில் வரும் பல கணக்கீடுகளில் இலாகரிதம் பயன்படுகிறது.

8. இலாகரிதத்தின் முழு எண் பகுதியும், பின்னப் பகுதியும் (Characteristic and mantissa of a logarithm)

பின் வருவனவற்றைக் கவனிக்கவும்.

$10^0=1 \quad \therefore \log 1=0$

$10^1=10 \quad \therefore \log 10=1$

$10^2=100 \quad \therefore \log 100=2$

$10^3=1000 \quad \therefore \log 1000=3$

ஒன்றைவிடப் பெரிய எண்ணினது இலாகரிதம் நேர் எண்ணாகும் என்பதைக் காண்கிறோம்.

1-க்கும் 10-க்கும் இடையிலுள்ள எண்ணின் இலாகரிதம் 0-க்கும் 1-க்கும் இடையில் உள்ளது.

(அதாவது) 1-க்கும் 10-க்கும் இடையிலுள்ள எண்ணின் இலாகரிதம் = 0+ ஒரு தசம நேர் எண்

இவ்வாறே 10-க்கும் 100-க்கும்...... = 1+ ,,

100-க்கும் 1000-க்கும்................. = 2+ ,,

இன்ன பிறவும் ஆகும்.

மேலும் $10^0=1 \quad \therefore \log_{10} 1=0$

$10^{-1}=\frac{1}{10}=\cdot 1 \quad \therefore \log_{10} \cdot 1=-1$

$10^{-2}=\frac{1}{100}=\cdot 01 \quad \therefore \log_{10} \cdot 01=-2$

$10^{-3}=\frac{1}{1000}=\cdot 001 \quad \therefore \log_{10} \cdot 001=-3$

1-க்கும் ·1-க்கும் இடையிலுள்ள எண்ணின் இலாகரிதம் = −1+ ஒரு தசம நேர் எண்

·1-க்கும் ·01-க்கும்................ = −2+ ,,

·01-க்கும் ·001-க்கும் .... = −3+ ,,

மேற்கூறியவற்றிலிருந்து ஏதேனும் ஓர் எண்ணின் இலாகரிதம் ஒரு முழு எண் பகுதியும் (characteristic), ஒரு பின்ன பகுதியும் (mantissa) கொண்டுள்ளது.

9. இலாகரிதத்தின் முழு எண் பகுதியைக் காண விதி:

ஒன்றிற்கு மேற்பட்ட எண்ணின் இலாகரிதத்தின் முழு பகுதியானது அந்த எண்ணின் இலக்கங்களின் எண்ணிக்கையில் ஒன்று குறைவாகும். அதாவது எண்ணில் இலக்கங்கள் n எனில், அந்த எண்ணின் இலாகரித முழுப் பகுதி $= n-1$ ஆகும்.

ஒன்றிற்கு குறைவான எண்ணின் இலாகரித முழு பகுதியானது அந்த எண்ணில் தசமப் புள்ளிக்கு உடனே அடுத்து வரும் பூச்சியங்கள் எண்ணிக்கையுடன் ஒன்று கூடுதலாகி எதிர்க் குறியை உடையதாகும். அதாவது எண்ணில் தசமப் புள்ளிக்கு உடனே அடுத்து n பூஜ்யங்கள் வருமானல் அந்த எண்ணின் இலாகரித முழு பகுதி $= -(n+1)$ ஆகும்.

முழு எண்ணுக இருந்தாலும் தசம எண்ணுக இருந்தாலும், அந்த எண்ணின் இலாகரித பின்னப் பகுதி எப்பொழுதும் நேர் எண்ணுகும். ஒரே விதமான .இலக்கத் தொடருடைய எல்லா எண்களின் இலாகரித பின்னப் பகுதி ஒன்றேயாகும்.

எடுத்துக்காட்டு :

(i) 6·215, (ii) 62·15, (iii) 621·5, (iv) 6215 (v). 006215, என்ற எண்களை எடுத்துக்கொள்வோம். ஒரே விதமான இலக்கத் தொடருடைய இந்த எண்களில் தசம புள்ளி அமையும் இடங்கள் மட்டும் வேறுபாடுடையவை.

$$\text{(i)} \quad \log 6{\cdot}125 = 0{\cdot}7934$$

பின்னர்
$$\begin{aligned}\text{(ii)} \quad \log 62{\cdot}15 &= \log(6{\cdot}215\times 10)\\ &= \log 6{\cdot}215+\log 10\\ &= {\cdot}7934+1\\ &= 1{\cdot}7934\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{(iii)} \quad \log 6215 &= \log(6{\cdot}215\times 100)\\ &= \log 6{\cdot}215+\log 100\\ &= {\cdot}7934+2\\ &= 2{\cdot}7934\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{(iv)} \quad \log {\cdot}6215 &= \log\left(\frac{6{\cdot}215}{10}\right)\\ &= \log 6{\cdot}215-\log 10\\ &= {\cdot}7934-1\\ &= {\cdot}7934\\ &= \bar{1}{\cdot}7934\end{aligned}$$

$$(v)\ \log \cdot006215 = \log\left(\frac{6\cdot215}{1000}\right)$$
$$= \log 6\cdot215 - \log 1000$$
$$= \cdot7934 - 3$$
$$= \bar{3}\cdot7934$$

இவ்வாறு ஒரே விதமான இலக்கத் தொடருடைய எண்களின் இலாகரித பின்னப் பகுதி ஒன்றேயாகும். இவற்றின் இலாகரித முழு எண்கள் மட்டும் வெவ்வேறுனவைகளாகும்.

(i)-ல் $n=1$ $(n-1)=0$

(ii)-ல் $n=2$ $(n-1)=1$

(iii)-ல் $n=3$ $(n-1)=2$

(iv)-ல் $n=0$ $(n+1)=-1=\bar{1}$

(v)-ல் $n=2$ $(n+1)=-3=\bar{3}$

என்று விதிகளைப் பயன்படுத்தி அறியலாம்.

[குறிப்பு : $\log \cdot006215 = \bar{3}\cdot7934$ ஆகும்]

இங்கு 3-ன் தலையில் இட்டகோடு, இலாகரிதத்தின் முழு எண் பாகம் மட்டும் எதிரெண் ஆகும் எனக் காட்டுகிறது. ஆனல் தசம பாகம் நேர் எண்ணுகும். முழு எண் பாகமும், தசம பாகமும் வேறு பிரித்து வைக்கப்பட்டுள்ளன.

நாம் $\bar{3}\cdot7934$ என்பதை $-3+\cdot7934=-2\cdot2066$ என்றுற்போல எழுதுவதில்லை.

[இவ்வாறு செய்தால் ஒரே வகையான இலக்கங்களைக் கொண்ட எண்களுக்கு தசம பாகங்கள் மாறிவிடும். அதனல் நாம் தசம பாகத்தை நேரெண்ணுக வைத்து, முழு எண் பாகத்தை மட்டும் வேறு பட்டுச் செல்ல விட்டால், ஒரே வகையான இலக்கத் தொடர்ச்சியுடைய எண்கள் யாவையும், ஒரே வகையான தசம பாகத்தைப் பெற்று நிற்கும்.]

இங்ஙனமாக 6 215 ன் இலாகரிதத்தை, நாம் அறிந்து கொண்டோமானல், அதைக் கொண்டு தசம புள்ளி இருக்கும் நிலைக்கு ஏற்றவாறு இடந்தள்ளி வைத்து 6·215-லிருந்து பெறக்கூடிய எல்லா எண்களின் இலாகரிதங்களையும் நாம் உடனடியாக எழுதக் கூடும்.

இப்படி, எளிதாக இலாகரிதம் காணும் முறை 10ஐ அடி எண்ணுகக் கொண்டதன் பயனுகும். இந்தக் காரணத்திஞல் தான், 10ஐ அடி எண்ணுகக் கொண்டு அமைக்கப்பெற்ற இலாகரித முறை மற்ற அமைப்பு முறைகளைக் காட்டிலும் எண்முறைக் கணக்கீட்டுக்கு அதிக நன்மை விளைப்பதாகின்றது.

10. இலாகரித அட்டவணைகள்

மேற்கூறிய விதியிஞல், இலாகரிதத்தின் முழு எண் பாகத்தைப் பார்வை அளவிலேயே கண்டறியலாம். தசம பாகம் மட்டும் அட்டவணையிலிருந்து பெற்றுக் கொள்ளப்படும்.

இலாகரிதத்தின் தசம பாகத்தை, நேரெண்ணுகவே வைத்துக் கொண்டால், இலக்க வரிசையில் ஒத்துள்ள எண்களின் இலாகரித பின்ன பாகம் ஒன்ருகவே இருக்கும். ஆகவே, 1 முதல் 10 வரையிலுள்ள எண்களுடைய இலாகரிதங்களின் தசம பாகம் மட்டும் அட்டவணையில் குறித்தால் போதும். இதஞல் அட்டவணைகள் மிகச் சுருக்கம் வாய்ந்து தோன்றுகின்றன.

சேம்பருடைய (Chamber's) இலாகரித அட்டவணைகளில் இலாகரித மதிப்புகள் ஏழு தசமத்தானச் சுத்தமான முழு விளக்கத்துடன் தரப்பட்டுள்ளன. இவ்வட்டவணை ஏழிலக்க அட்டவணை எனப்படும். ஐந்து இலக்க, நான்கிலக்க அட்டவணைகளும் உள. ஐந்திலக்க அட்டவணை நான்கிலக்க அட்டவணையைவிட நுட்பம் மிகுந்தது என்பதும், ஐந்திலக்க அட்டவணையைவிட ஏழிலக்க அட்டவணை அதிநுட்பம் வாய்ந்தது என்பதும் வெளிப்படையாகும்.

ஆஞல், எல்லாச் செய்முறை காரியங்களுக்கும் நான்கிலக்க இலாகரிதங்களைப் பயன்படுத்தியே போதிய திருத்தம் பெறலாம். மேற் கூறிய நான்கிலக்க இலாகரித அட்டவணைப் பிரதியை மாணவர்கள் பயன்படுத்த அறிந்துகொள்ள வேண்டும்.

11. நான்கிலக்க அட்டவணையைப் பயன்படுத்தும் முறை

இலாகரிதத்தின் தசம பின்னத்தைக் கண்டறிதல்

அட்டவணையின் இடப்பக்கத்தின் ஓரத்தில் முதல் நிரலில் ஒன்றன் கீழ் ஒன்ருக 10 முதல் 99 வரை எழுதப் பெற்றுள்ளன. இவற்றிலிருந்து கொடுக்கப்பட்ட எண்ணின் முதலிரண்டு இலக்கங்கள் கொண்ட நிரையைக் காண்க. ஒவ்வொரு நிரைக்கும் நேராக நான்கு, நான்கு இலக்கங்கள் தரப்பட்டுள்ளன. அடுத்தடுத்து நிற்கும் பத்து நிரல்களின் தலைப்பில் உள்ள 0 முதல் 9 வரை உள்ள எண்களில், கொடுக்கப்பட்ட எண்ணின் மூன்ருவது

இலக்கத்தைக் குறிக்கும் எண்ணுக்குரிய நிரலுக்கு நேர் கீழாகவும், முதலிரண்டு இலக்கங்களுக்குடைய நிரைக்கு நேரெதிராகவும் உள்ள நான்கிலக்கங்களைக் குறித்துக் கொள். இவற்றையடுத்து சராசரி வேறுபாடுகள் (mean differences) எனப்படும் ஒன்பது நிரல்கள் 1 முதல் 9 வரை இலக்கங்களைத் தலைப்பாகக் கொண்டு காணப்படும். கொடுக்கப்பட்ட எண்ணின் நான்காவது இலக்கத்தை இதிலிருந்து குறித்து அந் நிரலுக்கு நேர் கீழாகவும், முதலிரண்டு எண்களின் நிரைக்கு நேரெதிராகவும் உள்ள எண்ணைக் குறித்து முன்னர்க் கூறிய பின்ன பாகத்துடன் கூட்டிக் கொள்க. இதுவே கொடுக்கப்பட்ட எண்ணின் இலாகரிதம் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

log ·002967 ஐக் கண்டறிதல்.

·002967 என்ற எண் 1ஐ விடக் குறைவு. தசமப் புள்ளியை அடுத்து உடனே இரண்டு பூச்சியங்கள் உள்ளன. எனவே, இலாகரிதத்தின் முழு எண்பாகம் $-(2+1)=-3$ அல்லது $\overline{3}$ ஆகும்.

தசம பாகத்தையறிய, அட்டவணையைப் பார்த்து 29 நிற்கும் நிரையில் 6 என்னும் எண் தலைப்பெய்திய நிரலில், பார்க்க, 4713 என்ற எண் காணப்படும். இது 296 என்னும் இலக்கத் தொடர்ச்சியுள்ள எல்லா எண்களுக்கும் ஏற்புடைய இலாகரிதத்தின் தசமப் பாகமாகும். இனி நான்காவது இலக்கமாகிய 7-க்காக இத் தசம பாகம் திருத்தப்படவேண்டும். ஆகவே, அதே நிரையில் 7 என்னும் எண் தலைப் பெய்திய சராசரி வேறுபாடு (Mean Difference) நிரல் அட்டவணையில் பார்க்க, 10 என்ற எண் காணப்படும். ஏற்கெனவே பெற்ற 4713 உடன் வேறுபாடு அட்டவணையில் கண்ட 10ஐயும் கூட்ட 4723 எனவரும் இங்ஙனம் 4723 என்று கிடைத்த தசம பாகம் 2967 என்ற இலக்கங்களைத் தொடர்ச்சியாகக் கொள்ளும் எல்லா எண்களுக்கும் பொருந்தும்.

முழு எண் கூறு $\overline{3}$ ஆதலின், log ·002967 $=\overline{3}\cdot4723$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

296743-ன் இலாகரிதமறிதல்.

296743 எண் 1ஐ விடப் பெரியது இதில் முழு எண் பகுதியில் 6 இலக்கங்கள் உள்ளன. ஆகவே, 296743-க்கு உரிய இலாகரிதத்தின் முழு எண் பாகம் $(6-1)=5$ ஆகும்.

296743-ன் தசமபாகமும், 2967·43-ன் தசப பாகமும் ஒன்றேயாகும். ·43 ஆனது ·5-க்குக் குறைந்ததாதலின், அதைப் புறக்

கணித்து 2967 என்று திருத்தஞ் செய்து கொள்ளலாம். இப்பொழுது 2967-ன் தசம பாகம் ·4723 ஆகும்.

ஆகவே log 296743 = 5·4723 ஆகும்.

[குறிப்பு : இலக்கங்கள் நான்குக்கு குறைவாக இருந்தால், பூச்சியங்கள் சேர்த்துக் கொள்ளவேண்டும்.

29 என்பது எண்ணுனல், 29·00 எனவும், 2 என்பது எண்ணுனல் 2·000 எனவும் கொள்ளவேண்டும்.]

13. எதிர் இலாகரிதம் (Anti Logarithm)

இதுவரை ஓர் எண் கொடுக்கப்பட்டால், அதன் இலாகரிதம் காணும் முறையைக் கூறினேம். இனி இலாகரிதம் தரப்பட்டால், அதற்கு ஏற்புடைத்தாகிய எண் என்ன என்று கண்டறிவோம். இந்த எண் எதிர் இலாகரிதம் (anti logarithm) எனப்படும்.

எதிர் இலாகரிதத்திற்கும் அட்டவணை தயாரிக்கப்பட்டுள்ளது. அதிலிருந்து ஓர் எண்ணின் இலாகரிதம் கொடுக்கப்பட்டால் அந்த எண்ணைக் கண்டறியலாம். தசம பாகம் மட்டுமே எண்ணின் இலக்க வரிசையை நிர்ணயிப்பதால், வெவ்வேறுன தசம பாகத்திற்கே எதிர் இலாகரித அட்டவணை தயாரிக்கப்பட்டுள்ளது.

இந்த அட்டவணையில் இடப்பக்கத்தின் முதல் நிரலிலுள்ள ஜதை எண்கள் தசம பாகத்தின் முதலிரண்டு இலக்கங்களாகும். அடுத்துவரும் பத்து நிரல்களின் தலைப்பில் நிற்கும் எண், தசம பாகத்தின் மூன்ருவது எண்ணுகும். தசம பாகத்தின் நான்காவது இலக்கமானது இறுதியில் வேறுபாடு நிரலின் தலைப்பில் நிற்கும் எண்களிலிருந்து கொள்ளப்படும்.

கொடுத்த தசம பாகத்தில் முதல் இரண்டு இலக்கங்களை அட்டவணையின் முதல் நிரலிலுள்ள ஜதை எண்களில் நாடி, அதே நிரையில் தசம பாகத்தின் மூன்ரும் இலக்கத்தின் கீழ் உள்ள எண்ணைக் குறித்துக்கொள். வேறுபாடு அட்டவணை நிரலில் தசம பாகத்தின் நான்காவது இலக்கத்தின் கீழ் உள்ள எண்ணைக் கண்டு, மேலே குறித்துக் கொண்ட எண்ணுடன் சேர்த்துக்கொள். இவ்வாறு கிடைக்கும் எண், கொடுத்த தசம பாகத்திற்குரிய எண்ணின் இலக்க வரிசையாகும். அதற்குமேல், கொடுத்த முழு எண் பாகத்தில் நிற்கும் எண்ணுக்கு ஏற்றவாறு, தசமப் புள்ளியை தக்க இடத்தில் இடு.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

எதிர் log $\bar{2}\cdot 1063$ **அறிக.**

10 நிற்கும் வரிசையிலும், 6 தலைப்பெய்திய நிரலுக்கு நேர்க் கீழாகவும் உள்ள எண்ணைக் காண்க. இது 1267 ஆகும். அதே நிரையில், வேறுபாடுப் பகுதியில் 3 தலைப்பெய்திய நிரலை நோக்கி அங்கு நிற்கும் எண்ணைக் காண்க. அது 1 ஆகும். அதை 1276 உடன் கூட்ட, 1277 கிடைக்கும். இது கொடுத்த தசம பாகத்திற்குரிய எண்ணின் இலக்க வரிசையைக் குறிக்கும்.

இனி, முழு எண் பாகத்தில் $\bar{2}$ நிற்பதால், வேண்டிய எண் ஒரு தசம பின்னமாகவும், அதன் கண்ணுள்ள தசமப் புள்ளி நியம ரூபத்தில் நிற்றற்குரிய இடத்திலிருந்து இரண்டு இடங்கள் இடப் பக்கம் நோக்கிப் பெயர்ந்து நிற்கும் என அறியலாம். ஆகவே, வேண்டிய எண் 0·01277 ஆகும்

எடுத்துக்காட்டு 2 :

எதிர் log $1\cdot 1063$ **அறிக.**

எடுத்துக்காட்டு 1-ல் கண்டு கொண்டதுபோல, கொடுத்த தசமப் பாகத்திற்குரிய எண்ணின் இலக்க வரிசை 1277 ஆகும். இனி முழு எண்பாகத்தில் 1 நிற்பதால், தசமப் புள்ளி 1277-ன் இலக்க வரிசையின் நியம ரூபத்தில் நிற்றற்குரிய இடத்திலிருந்து ஓர் இடம் வலப் பக்கம் நோக்கிப் பெயர்ந்து நிற்கும். ஆகவே, வேண்டிய எண் 12·77 ஆகும்.

14. விளக்க மாதிரிகள்

மாதிரி 1 : $\dfrac{(1.234)^4 \times (2\cdot 09)^2}{(3\cdot 582)^3}$-ன் பதிப்பை அறிக.

கொடுத்த கோவையை x எனக் குறிக்க,

$$\begin{aligned}
\therefore\ \log x &= 4\log 1\cdot 234 + 2\log 2\cdot 09 - 3\log 3\cdot 582 \\
&= 4\times \cdot 0913 + 2\times \cdot 3201 - 3\times \cdot 5541 \\
&= \cdot 3652 + \cdot 6402 - 1\cdot 6623 \\
&= 1\cdot 0054 - 1\cdot 6623 \\
&= -\cdot 6569 \\
&= -1 + 1 - \cdot 6569 = -1 + \cdot 3431 = \bar{1}\cdot 3431
\end{aligned}$$

$$\therefore\ x = \text{எதிர்} \log \bar{1}\cdot 3431 = \cdot 2204$$

மாதிரி 2: தீர்வு காண்க:

$$2^{x+1}\,5^{5-3x} = 100$$

இரு பக்கங்களுக்கும் இலாகரிதம் எடுக்க

$$\therefore\ (x+1)\log 2 + (5-3x)\log 5 = \log 100 = 2$$

அதாவது $x(\log 2 - 3\log 5) = 2 - 5\log 5 - \log 2$

இப்பொழுது, $\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2$
$= 1 - \log 2$

$$\therefore\ x[\log 2 - 3(1-\log 2)] = 2 - 5(1-\log 2) - \log 2$$

அதாவது $x\,[4\log 2 - 3] = [4\log 2 - 3]$

$$\therefore\ x = 1$$

மாதிரி 3: மதிப்பைக் காண்க:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(8{\cdot}675)^2}}$$

$x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{(8{\cdot}675)^2}}$ ஆகுக

$$\therefore\ x = \frac{1}{(8{\cdot}675)^{2/3}} = (8{\cdot}675)^{-\frac{2}{3}}$$

இரு பக்கங்களுக்கும் இலாகரிதம் காண்க

$$\therefore\ \log x = -\frac{2}{3}\log 8{\cdot}675$$

$$= -\frac{2}{3}({\cdot}9383) = -{\cdot}6255$$

$$= \bar{1}{\cdot}3745$$

$$\therefore\ x = {\cdot}2369$$

மாதிரி 4: 4^{31}-ன் இலக்கங்களின் எண்ணிக்கையைக் கண்டறிக!

$x = 4^{31}$ என்க.

இருபக்கங்களுக்கும், இலாகரிதம் காண்க.

$$\log x = 31 \log 4$$

$$= 31 \times {\cdot}6021 = 18{\cdot}6651$$

$$\therefore \quad x = \text{anti}\log 18{\cdot}6651$$

இலாகரிதத்தின் முழு எண் பாகத்தில் 18 இருப்பதால், தசமப் புள்ளி நியம ரூபத்திலிருந்து 18 இடங்கள் வலப்பக்கம் தள்ளி இருக்க வேண்டும்.

ஆகவே 4^{31}-ன் பெருக்கற் பலனில் 19 இலக்கங்கள் இடம் பெற்று நிற்கும்.

பயிற்சி 3-2.

1. ·2-ன் கன மூலத்தை நான்கு தசமஸ்தான சுத்தமாகக் கண்டுபிடி. [விடை : ·5848]

2. இலாகரித அட்டவணையைக் கொண்டு மதிப்பறிக.

(i) $\dfrac{36{\cdot}72 \times \sqrt{4{\cdot}51}}{(1{\cdot}87)^3 \times (2{\cdot}19)}$ [விடை : 5·448]

(ii) $\dfrac{(6{\cdot}215)^{3/5}\,({\cdot}02378)^{2/3}}{(45{\cdot}67)^{1/2}\,({\cdot}002135)^{3/4}}$

(iii) $1 - \dfrac{25{\cdot}34^2}{19{\cdot}56^3}$ [விடை : ·9142]

(iv) $\dfrac{(23{\cdot}5)^2\,({\cdot}523)^3}{1-(0{\cdot}352)^2}$ [விடை : 90·2]

(v) $(3{\cdot}41)^3 + (4{\cdot}01)^4$ [விடை : 298·07]

2. (i) $2^{12} \times 3^7$-ன் பெருக்கற் பலனைச் சாதாரண முறையில் எழுதும்பொழுது, அதிலுள்ள இலக்கங்களின் எண்ணிக்கையை அறிக. [விடை : 7 இலக்கங்கள்]

(ii) $2^{-3} \times 3^{-4}$ ஆனது தசம ரூபமாக வரையப்பட்டால், அதன் முதலாவது பொருளுடைய இலக்கத்தின் நிலையைக் கண்டறிக. [விடை: 4ஆவது தசமஸ்தானம்]

3. $\log 3 = \cdot 47712$ என்றதைக் கொண்டு, $3^{\cdot 48}$-ல் உள்ள இலக்கங்களின் எண்ணிக்கையையும், 3^{-48}ல் முதலாவது பொருளுடைய இலக்கத்தின் நிலையையும் காண்க.

விடை : [(i) 21 இலக்கங்கள்
(ii) 21 ஆவது தசம ஸ்தானம்]

4. $\left(\frac{21}{20}\right)^{800}$ ன் முழு எண் பாகத்தில் உள்ள இலக்கங்களின் எண்ணிக்கையை அறிக. [விடை : 7 இலக்கங்கள்]

5. $y = ab^{-x}$ என்னும் சமன்பாடு
(i) $x = 0 \cdot 2$, $y = 316$ (ii) $x = 0 \cdot 4$, $y = 120$ என்னும் மதிப்பீடுகளுக்குப் பொருந்துமாயின். a, b-க்களின் மதிப்புகளைக் கண்டறிக. [விடை : $a = 6 \cdot 93$; $b = 126 \cdot 6$]

6. x, y என்னும் மாறிகள் $y = ax^n$ என்னும் வடிவில் தொடர்பு கொள்ளுமென அறியப்படும். இங்கு a, n என்பன மாறிலிகளாகும். $x = 19 \cdot 3$ ஆனல், $y = 38700$ ஆகும். மேலும் $x = 14 \cdot 8$ ஆனல், $y = 27400$ ஆகும். a, n-களின் மதிப்புகளைக் கண்டுபிடி. [விடை : $a = 824 \cdot 9$; $n = 1 \cdot 3$]

7. $\log 2 = \cdot 3010$, $\log 3 = \cdot 4771$ எனின் $\log_{40} 12$-ன் மதிப்பைக் காண்க. [விடை : ·6742]

8. ஒரு வட்ட நேர்க்கூம்பின் அடியின் ஆரம் 9·52 மீட்டர் ஆகும். அதன் உயரம் 37·55 மீட்டர். அதன் கன பரிமாணம் என்ன? [விடை : 3563 கன மீட்டர்]

9. எத்தனை ஆண்டுகளில் 6% கூட்டு வட்டி வீதம் ஓர் அசல் இரண்டு மடங்காகும்? [விடை : 11·90]

10 தீர்வு காண்க.

(i) $2^{2x+1}\, 7^{x+8} = 17^{x+5}$ [விடை : 15·3]

(ii) $3^{2x}\, 5^{8x-4} = 7^{x-1}\, 11^{2x}$ [விடை : 15·82]

(iii) $6^x = \frac{10}{3} - 6^{-x}$ [விடை : ± ·6131]

(iv) $10 \cdot 2^{8+x} - 4^{8+x} = 16$ [விடை : 0 அல்லது −2]

(v) $9^x + 20 = 3^{x+2}$ [விடை : $\frac{\log 4}{\log 3}$ அல்லது $\frac{\log 5}{\log 3}$]

(vi) $9^{2x} = 9^{x+2} - 80$ [விடை : 0 அல்லது 1·995]

(vii) $4^x = 3^{2y}$; $x + y = 1$ [விடை : $x = ·613$; $y = ·387$]

(viii) $2^x = 3^y$; $3^{y+1} = 3^{x-1}$

(ix) $2^y\ 5^y = 10^{x-y}$; $3^x = 4^{y+2}$

(x) $3^{\cdot x+y+1} = 6^{y+1}$; $3^x = 3 \cdot 2^{y+1}$

[விடை : $x = 2·71$; $y = 1·71$]

4. சமன்பாடுகள்
(Equations)

1. கீழ் வகுப்பில் ஒருபடிச் சமன்பாடு (Simple Equation), ஒருங்கமைச் சமன்பாடுகள் (Simultaneous equations) பற்றிப் படித்திருப்பீர்கள். இனி இருபடிச் சமன்பாடு பற்றிக் கவனிப் போம்.

இருபடிச் சமன்பாட்டின் பொது உருவம் $ax^2+bx+c=0$ ஆகும். இதில் மாறி (variable) x ஆகும். a, b, c என்பன மாறிலி (constants)களாகும்.

2. $ax^2+bx+c=0$ எனும் சமன்பாட்டின் மூலங்களைக் காண்க.

$ax^2+bx+c=0$

$$\therefore \quad x^2+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}=0 \qquad [a\text{ஆல் வகுக்க}]$$

$$\therefore \quad x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$

$$\therefore \quad x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}$$

[இடது பக்கத்தை வர்க்கமாக எழுது.]

(அதாவது) $$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

இருபடி மூலம் எடுக்க,

$$\therefore \quad x+\frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\therefore \quad x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

(அதாவது) $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

இந்த வாய்பாட்டைக் கொண்டு எல்லா இருபடிச் சமன்பாடுகளின் மூலங்களேயும் எளிதில் கண்டுபிடிக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு :

தீர்வு காண்க : $4x^2+2x-1=0$

இங்கு $a=4$; $b=2$: $c=-1$.

எனவே,

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4(4)(-1)}}{2\times4} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+16}}{8}$$

$$\frac{-2 \pm \sqrt{20}}{8} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{8} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

3. இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்களுக்கும் கெழுக்களுக்கும் இடையேயுள்ள தொடர்புகள்

$ax^2+bx+c=0$ எனும் சமன்பாட்டின் மூலங்களே 'α', 'β' எனக் குறிப்போம்.

அப்பொழுது,

$$\alpha = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad \beta = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

இனி,

$$\alpha+\beta = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac} -b -\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

மேலும்,

$$\alpha\ \beta = \left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\ \left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$$

$$= \frac{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{4ac} = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}$$

$$= \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

ஆகவே,

$$\alpha+\beta = -\frac{b}{a} = -\frac{x\text{-ன் கெழு}}{x^2\text{-ன் கெழு}}$$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{\text{தனியுறுப்பு}}{x^2\text{-ன் கெழு}}$$

4. கொடுக்கப்பட்ட எண்களை மூலங்களாகவுடைய சமன்பாட்டை அமைத்தல்

கொடுக்கப்பட்ட மூலங்கள் m, n ஆகுக. இருபடிச் சமன்பாட்டின் மாறி x எனக் கொள்க.

எனின், x-ன் ஒரு மதிப்பு m ஆதலின் $x-m=0$

x-ன் மற்றொரு மதிப்பு n ஆதலின் $x-n=0$

xஆனது m அல்லது n என்னும் மதிப்பைப் பெறுமாயின், $(x-m)(x-n)=0$.

அதாவது $x^2-(m+n)x+mn = 0$

ஆகவே, கொடுத்த மூலங்களைக் கொண்ட சமன்பாடு x^2- மூலங்களின் கூட்டுப்பலன்) $x+$ மூலங்களின் பெருக்கற் பலன் $=0$ ஆகும்.

பயிற்சி 4.

1. பின்வரும் சமன்பாடுகளைத் தீர்வு காண்க.

(i) $28x^2+x-45 = 0$ [விடை : $x-\frac{5}{4}$ அல்லது $-\frac{9}{7}$]

(ii) $2x^2+3x = 65$ [விடை : $x=5$ அல்லது $-6\frac{1}{2}$]

(iii) $\frac{3}{x+1} + \frac{5}{x} = \frac{6}{x-1}$ [விடை : $x=5$ or $-\frac{1}{2}$]

(iv) $2x^2-6x+3 = 0$ [விடை : $(3\pm\sqrt{3})/2$]

(v) $8x^6+19x^3-27 = 0$ [விடை : 1, $-\frac{3}{2}$]

(vi) $x^2+x+1 = 0$ [விடை : $x=(-1\pm\sqrt{3}i)/2$]

2. $\frac{5}{6}$, $1\frac{1}{3}$, என்னும் மூலங்களைக் கொள்ளும் சமன்பாட்டைக் காண்க. [விடை : $18x^2-39x+20=0$]

3. α, β என்பன $x^2-4x+1=0$-ன் மூலங்களாயின், $\alpha^2+\beta^2$, $\alpha^3+\beta^3$ என்பவற்றின் மதிப்புகளைக் கண்டறிக. [விடை : 14, 52]

4. α, β என்பன $x^2 - p(x+1)-c = 0$ என்றதன் மூலங்களாயின், $(\alpha+1)(\beta+1)-1=c$ ஆகும் என்று நிரூபிக்க.

5. p, q என்பன $5x^2-x-2=0$-ன் மூலங்களானால், $\frac{2}{p}$, $\frac{2}{q}$ என்பவற்றை மூலங்களாகக் கொள்ளும் சமன்பாட்டைக் கண்டறிக. [விடை : $x^2+x-10=0$]

6. $x^2-2mx+8m-15=0$ ஆனது சம மூலங்களைக் கொள்ளுவதானால், m-ன் மதிப்பைக் கண்டறிக. [விடை : $m=5$ அல்லது 3]

7. $x^2-2(7\times3p)x + 5(9+11p)=0$ ஆனது சமமூலங்களைப் பெறுகின்றதானால், p-ன் மதிப்பைக் கண்டறிக. [விடை : $p=1$, $\frac{4}{9}$]

8. k-ன் மதிப்பு யாதாயின் $12x^2-10xy+2y^2+11x-5y+k$ என்னுங்கோவை x, y-ன் ஒருபடிக் காரணிகளாகப் பகுபடுவதாகும் ? [விடை : $K=1$]

9. P-ன் எம் மதிப்புக்கு $2x^2+3xy-2y^2-5x+py-12$ ஆனது இரண்டு ஒரு படிக் காரணிகளாகப் பகுபடும்? [$p=10$ அல்லது $-32/5$]

10. விடுவி :

(i) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=5$; $6xy=1$

[விடை : $x=\frac{1}{2}$ அல்லது $\frac{1}{3}$; $y=\frac{1}{3}$ அல்லது $\frac{1}{2}$]

(ii) $x^2+3y^2=28$; $xy=3$

[விடை : $x=1, y=3$; $x=3\sqrt{3}, y=\frac{1}{\sqrt{3}}$]

(iii) $x^2+xy=4$; $y^2+xy=5$ [விடை: $x=\pm\frac{4}{3}$; $y=\pm\frac{5}{3}$]

(iv) $x+y+1=0$; $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{12}$

[விடை : $x=3$; $y=-4$; $x=-4, y=3$]

(v) $x+y=2$; $x^2+xy+y^2+x+y=5$

[விடை ; $x=1$; $y=1$]

(vi) $x^3+y^3=117$; $x^2-xy+y^2=39$

[விடை : $x=-2, y=5$ or $x=5, y=-2$]

5. எண் தொடர்கள்
(Progressions)

I. கூட்டுத் தொடர் (Arithmetical Progression)

1. வரையறை

ஒரு தொடரில், யாதோர் உறுப்புக்கும் அதன் முன் நிற்கும் உறுப்புக்குமுள்ள வேறுபாடு யாங்கணும் ஒரே எண்ணாக இருக்குமானல் அஃது ஒரு கூட்டுத் தொடர் எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு :

2, 5, 8, 11 என்னும் தொடரில் பொது வேறுபாடு (common difference) 3 ஆகும்,

$-3, -7, -11,$......என்னும் தொடரில் பொது வேறுபாடு -4 ஆகும்.

ஆகவே இவை இரண்டும் கூட்டுத் தொடர்கள் ஆகும்.

2. கூட்டுத் தொடரின் நியம வடிவம்

'a' முதலுறுப்பும், 'd' பொது வேறுபாடுமானல், கூட்டுத் தொடரின் நியம ரூபம்

$a, a+d, a+2d, a+3d$............ஆகும்.

3. கூட்டுத் தொடரின் n ஆவது உறுப்பு (அல்லது) பொது உறுப்பு
n ஆவது உறுப்பை, l என்று குறிப்பிட்டால், பொது உறுப்பு, $l=a+(n-1)d$ ஆகும்.

4. ஒரு கூட்டுத் தொடரில், முதல் n உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகை காணல் (Sum of the first n terms of an Arithmetical Progression.)

கூட்டுத் தொடரில் 'a' முதலுறுப்பாகவும், 'd' பொது-வேறுபாடாகவும், l இறுதியுறுப்பாகவும் கொள்க. முதல் n உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகையை S எனக் குறிப்பிடுவோம்.

அப்பொழுது

(i) $S = a+(a+d) + (a+2d).....(l-2d)+(l-d)+l$ ஆகும். இத் தொடரை, கடை தலையாக எழுதினால்,

(ii) $S=l + (l-d) + (l-2d)..........(a+2d) + (a+d) + a$ ஆகும்.

இவற்றைக் கூட்ட, நாம் பெறுவது

$2S = (a+l) + (a+l) + (a+l) ...... + n$ உறுப்புகள் வரை.

$$\therefore \quad 2S=n\,(a+l)$$

$$\therefore \quad S = \frac{n\,(a+l)}{2}$$

இந்தப் பலனில், $l=a+(n-1)\,d$ எனப் பிரதியிட,

$$S = \frac{n}{2}\{2a+(n-1)\,d\} \text{ ஆகும்.}$$

கிளை (i) : முதல் n இயற்கை எண்களின் கூட்டுத் தொகை

$$= \frac{n\,(n+1)}{2}$$

(ii) : முதல் n அடுத்தடுத்த ஒற்றைப்படை எண்களின் கூட்டுத் தொகை $=n^2$

(iii) : முதல் n அடுத்தடுத்த இரட்டைப் படை எண்களின் கூட்டுத்தொகை $= n(n+1)$

5. கூட்டுத் தொடரின் இடையுறுப்பு

a, A, b என்பன கூட்டுத் தொடரில் அமைந்தால், A ஆனது a-க்கும், b-க்கும் கூட்டு இடையுறுப்பு (Arithmetic Mean) எனப்படும்,

அப்பொழுது, $A-a=b-A$ (வரையறை)

$\therefore\ 2A=a+b$

$\therefore\ A=\frac{a+b}{2}$ ஆகும்.

6. கூட்டிடைகள் (Arithmetic Means)

வரையறை $a, a_1, a_2, \ldots\ldots a_n, b$ என்பவை கூட்டுத் தொடரில் இருந்தால், $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$ என்பவை a-க்கும், b-க்கும் இடைப்பட்ட n-கூட்டிடைகள் எனப்படும்.

இனி, 'a'-க்கும் b-க்கும் இடையே n கூட்டிடைகளை அமைக்கவும்.

a-க்கும் b-க்கும் இடையேயுள்ள n கூட்டிடைகள் $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$ எனக் கொள்க.

பின்னர், $a, a_1, a_2, \ldots\ldots a_n, b$ என்பன கூட்டுத் தொடரில் அமையும்.

இதிலுள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை $(n+2)$ ஆகும்.

ஆகவே, $(n+2)$ ஆவது உறுப்பு b ஆகும்.

கூட்டுத் தொடரின் பொது வேறுபாடு d ஆகுக.

எனின், $(n+2)$ ஆவது உறுப்பு $=a+\overline{n+2-1}\,d$

$=a+(n+1)d$

$\therefore\ a+(n+1)d=b$

$\therefore\ (n+1)d=b-a$

$\therefore\ d=\frac{b-a}{n+1}$

$\therefore$ முதல் கூட்டிடை $a_1=a+d$

$=a+\frac{b-a}{n+1}=\frac{na+b}{n+1}$

இரண்டாவது கூட்டிடை $a_2=a+2d$

$=\frac{a+2(b-a)}{n+1}\quad\frac{(n-1)a+2b}{n+1}$

$$r\text{ஆவது கூட்டிடை} = a_r = a + rd = a + \frac{r(b-a)}{n+1}$$

$$= \frac{(n-r+1)a + rb}{n+1}$$

$$n\text{ ஆவது கூட்டிடை} = a_n = a + nd = a + \frac{n(b-a)}{n+1}$$

$$= \frac{a+nb}{n+1}$$

7. விளக்க மாதிரிகள்

மாதிரி 1 : ஒரு கூட்டுத்தொடரின் முதலுறுப்பு 5. உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை 15. உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை 390. பொது வேறு பாட்டையும், நடு உறுப்பையும் காண்க.

கூட்டுத் தொகை $\frac{n}{2}[2a+(n-1)d] = S$ ஆகும்.

கொடுத்துள்ள மதிப்புகளைப் பிரதியிட,

$\frac{15}{2}[2\times5+(15-1)\ d] = 390$ ஆகும்.

அதாவது $105d = 315$

$\therefore\ d = 3$

நடு உறுப்பு 8 ஆவது உறுப்பாகும்.

8ஆவது உறுப்பு $= a+(n-1)\ d = 5+(8-1)\times3 = 26$ ஆகும்.

மாதிரி 2 : கூட்டுத் தொடரிலுள்ள மூன்று எண்களின் கூட்டுத் தொகை 21 ஆகும். அவற்றின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை 179 ஆகும். அந்த எண்களைக் கண்டறிக.

மூன்று எண்களை $a-d$, a, $a+d$ எனக் கொள்வோம்.

$\therefore\ a-d+a+a+d = 21$

$\therefore\ 3a = 21$

$\therefore\ a = 7$

மேலும் $(a-d)^2 + a^2 + (a+d)^2 = 179$

அதாவது $2(a^2+d^2)+a^2 = 179$

அதாவது $2(49+d^2)+49=179$

$\therefore\ 2d^2=32$

$\therefore\ d^2=16\quad \therefore\ d=\pm 4$

$\therefore$ வேண்டிய எண்கள் 3, 7, 11

மாதிரி 3 : 500-க்கும் 1000-க்கும் இடையில் 13ஆல் வகுபடக் கூடிய எல்லா எண்களின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

500-க்கும் 1000-க்கும் இடையே 13ஆல் வகுபடும். முதலெண் 507 ஆகும்; இறுதி எண் 988 ஆகும்.

பெற வேண்டிய கூட்டுத்தொகை S என்க.

இனி, $507+520+\ldots 988=S$ ஆகும்.

இங்கு, $a=507$; $d=13$; $l=988$ ஆகும்.

$l=a+(n-1)\ d$ என்றறிவோம்.

$988=507-(n+1)\times 13$

$\therefore\ 13\ (n-1)=988-507=481$

$\therefore\ n-1=\dfrac{481}{13}=37$

$\therefore\ n=38$

இதனால், கூட்டுதற்குரிய உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை 38 ஆகும்.

$$\therefore\ S=\frac{n}{2}(a+l)=\frac{38}{2}(507+988)=19\times 1495$$

$$=\underline{28405}$$

பயிற்சி 5-1.

1. ஒரு கூட்டுத் தொடரில் 2 முதலுறுப்பாகும். இறுதியுறுப்பு 29 ஆகும். கூட்டுத் தொகை 155 ஆகும். அதன் பொது வேறு பாட்டைக் காண்க. [விடை : 3]

2. ஒரு கூட்டுத் தொடரில் 13ஆவது உறுப்பு 3 ஆகும். முதல் 13 உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை 234 ஆகும். அதன்

பொது வேறுபாட்டையும், முதல் 25 உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகையையும் கண்டறிக. [விடை : $-\frac{5}{2}$, 75]

3. ஒரு கூட்டுத் தொடரில் 44 ஆவதும், 4 ஆவதுமான உறுப்புகள் முறை -51-ம், 29-ம் ஆனல், 17 ஆவது உறுப்பை அறிக. [விடை : 3]

4. ஒரு கூட்டுத் தொடரில் 16 உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகை 400. பொது வேறுபாடு $2\frac{2}{3}$ எனின், முதலுறுப்பைக் காண்க. [விடை : 5]

5. ஒரு கூட்டுத் தொடரின் முதலுறுப்பு 4, இறுதியறுப்பு 96. உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகை 400. அத் தொடரில் இடம் பெறும் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையையும், பொது வேறுபாட்டையும் கண்டறிக.
[விடை : 8; 92/7]

6. $-6, -3, \ldots\ldots$ என்னும் தொடர் வரிசையில் எத்தனை உறுப்புகளை எடுத்துக் கொண்டால், அவற்றின் கூட்டுத் தொகை 75 ஆகும் ? [விடை : 10]

7. $100+99+98+97\ldots\ldots$ என்னும் தொடர் வரிசையில், நான் அடுத்தடுத்து நிற்கும் 30 உறுப்புகளை எடுத்துக் கொள்ளக் கருதுகிறேன். நான் எந்த உறுப்பு முதலாகத் தொடங்கி எடுத்துக் கொண்டு கூட்டினல், கூட்டுத் தொகை 1155 ஆகும் ? [விடை : 53]

8. 300-க்கும் 500-க்கும் இடையேயுள்ள ஒற்றைப் படையெண்களின் கூட்டுத் தொகையைக் கணக்கிடுக.
[விடை : 40000]

9. ஒரு கூட்டுத் தொடரின் பொது உறுப்பின் வடிவம் $3n+1$ ஆகும். அத் தொடர் வரிசையையும், 15 உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகையையும் காண்க.
[விடை : 4, 7, 10......; 375]

10. ஒரு தொடர் வரிசையிலுள்ள n உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகை $5n^2-3n$ ஆகும். அத் தொடர் வரிசை ஒரு கூட்டுத் தொடர் என நிரூபிக்க.

11. ஒரு கூட்டுத் தொடரிலுள்ள 3 எண்களின் கூட்டுத் தொகை 15 ஆகும். அவற்றின் பெருக்கற்பலன் 80 எனில், அவற்றைக் கண்டறிக. [விடை : 2, 5, 8]

12. ஒரு கூட்டுத் தொடரிலுள்ள மூன்று எண்களின் கூட்டுத் தொகை 12 ஆகும். அவற்றின் கனங்களின் கூட்டுத் தொகை 288; அந்த எண்கள் யாவை ? [விடை : 2,4, 6]

13. ஒரு கூட்டுத் தொடரிலுள்ள நான்கு முழு எண்களின் கூட்டுத் தொகை 22; அவற்றின் பெருக்கற்பலன் 280; அந்த எண்கள் யாவை ? [விடை : 1, 4, 7, 10]

14. ஒரு கூட்டுத் தொடரின் p ஆவது, q ஆவது, r ஆவது உறுப்புகள் முறையே P, Q, R என்பன வாயின்,

$(p-q)R+(q-r)P+(r-p)Q=0$ எனக் காட்டுக.

15. a, b, c-க்கள் கூட்டுத் தொடரிலிருந்தால், $a^2(b+c)$, $b^2(c+a)$, $c^2(a+b)$ என்பனவும் கூட்டுத் தொடரில் இருக்குமெனக் காட்டுக.

16. 51-க்கும் 7-க்கும் இடையே 10 கூட்டிடைகளை இடுக.

17. a, b-க்கு இடையே n கூட்டிடைகள் இடுக. அவற்றின் கூட்டுத் தொகை a, b-க்கு இடையேயுள்ள ஒரே கூட்டு இடையுறுப்பைப்போல் n மடங்காகும் என நிறுவுக.

18. $\log_{10}2+\log_{10}4+\log_{10}8+\ldots\ldots$ இதில் n உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகை காண்க. $\left[\text{விடை} : \dfrac{n(n+1)}{2}\times\log_{10}2\right]$

19. (i) $8-11+14-17\ldots\ldots\ldots n$ உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

[விடை $1-\dfrac{3n}{2}$, இரட்டைப்படை எண்ணுனல்;

$\dfrac{3n+13}{2}$, n ஒற்றைப்படை ஆனுல்]

(ii) $-44-41-38\ldots\ldots$ என்னும் வரிசையில் 0 ஓர் உறுப்பாயுள்ளதா ? [விடை : இல்லை]

20. 7, 10, 13, ...; 10, 14, 18........என்ற இரு தொடர்களும் 50 உறுப்புகளுக்குத் தொடரப்பட்டால், எத்தனை உறுப்புகள் இரண்டு வரிசைகளிலும் ஒருங்கொத்துக் காணப்படும்? [விடை : 13 உறுப்புகள்]

21. இயற்கை எண்கள் பின்வரும் தொகுதிகளாக வரிசைப் படுத்தப் பட்டுள்ளன (1); (2, 3); (4, 5, 6); (7, 8, 9, 10) ....இவற்றில் 'n' ஆவது தொகுப்பிலுள்ள எண்களின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க : [விடை : $n(n^2+1)/2$]

22. 25 கற்கள் ஒரே நேர் கோட்டில் அடுத்தடுத்து 1 மீ தூரத்தில் வரிசையாகத் தரையில் வைக்கப்பட்டுள்ளன. வரிசை முடியும் இடத்திலிருந்து 5 மீ. தூரத்தில் ஒரு கூடை வைக்கப்பட்டுள்ளது. ஒரு சிறுவன் கூடைக்கு மிக அருகிலுள்ள கல்லில் துவங்கி ஒவ்வொன்றாகக் கற்களை எடுத்துக் கூடையில் சேர்க்கிறான். எல்லாக் கற்களையும் கூடையில் சேர்க்க அவன் நடந்த மொத்த தூரம் எவ்வளவு? [845 மீட்டர்]

II இசைத்தொடர் (Harmonic Progression)

1. வரையறை

ஒரு தொடர் வரிசையில் உள்ள எண்களின், தலைகீழ் எண்கள் கூட்டுத் தொடரில் இருந்தால் அத் தொடர் இசைத் தொடர் எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு :

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ .....இத் தொடர் இசைத் தொடராகும்.

ஏனெனில் 1, 2, 3, 4......ஒரு கூட்டுத் தொடர் ஆவதால் $\frac{1}{a}, \frac{1}{a+d}, \frac{1}{a+2d}$ ..... ஓர் இசைத் தொடர், ஏனெனில் $a, a+d, a+2d$, ...ஒரு கூட்டுத் தொடர் ஆவதால். மறுதலையாக, a, b, c................ ஒரு கூட்டுத் தொடரில் இருப்பின், $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ ....ஓர் இசைத் தொடராகும்.

2. a, b, c என்பன இசைத் தொடரில் இருப்பின்

(i) $\frac{2}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}$ என நிறுவுக.

(ii) $\frac{a}{c} = \frac{a-b}{b-c}$ என நிறுவுக.

a, b, c என்பன இசைத் தொடரில் இருப்பதால்,

$\frac{a}{c}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ கூட்டுத் தொடராகும்

$$\therefore \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{1}{c} - \frac{1}{b}$$

$$\therefore \frac{2}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c} \text{ ஆகும்.}$$

அல்லது $b = \frac{2ac}{a+c}$ ஆகும்.

மேலும், $\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{1}{c} - \frac{1}{b}$ ஆதலால்,

$$\frac{a-b}{ab} = \frac{b-c}{bc} \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore \frac{a-b}{b-c} = \frac{ab}{bc} = \frac{a}{c} \text{ ஆகும்.}$$

3. (i) இசையிடை உறுப்பு

a, H, b என்பவை இசைத் தொடரில் இருக்குமானால், H என்பது a, b-க்கு இசையிடை உறுப்பு எனப்படும்.

ஆகவே, மேலே பார்த்தபடி,

$$H = \frac{2ab}{a+b} \text{ ஆகும்.}$$

(ii) இசையிடைகள் : வரையறை !

$a, h_1, h_2, h_3, \ldots h_n, b$ என்பவை இசைத் தொடரில் இருக்குமாயின், $h_1, h_2, \ldots h_n$ என்பன a, b இவற்றுக்கு இடைப்பட்ட n இசையிடைகள் எனப்படும்.

a, b-க்களுக்கு இடையில் n இசையிடைகள் அமைத்தல்:

a, b-களுக்கு இடைப்பட்ட n இசையிடைகள் h_1, h_2,......h_n எனக் கொள்க.

பின்னர் $\therefore$ $a, h_1, h_2, \ldots h_n, b$ ஓர் இசைத் தொடர்.

$\therefore \frac{1}{a}, \frac{1}{h_1}, \frac{1}{h_2}, \ldots\ldots \frac{1}{h_n}, \frac{1}{b}$ ஒரு கூட்டுத் தொடர்.

இக் கூட்டுத் தொடரின் பொது வித்தியாசம் 'd' எனில், $\frac{1}{b}$ என்பது $(n+2)$ ஆவது உறுப்பாகும்.

இனி, கூட்டுத் தொடரில் $(n+2)$ ஆவது உறுப்பு.

$$= \frac{1}{a} + (n+2-1)\, d$$

$$\therefore \frac{1}{a} + (n+1)\, d = \frac{1}{b}$$

$$\therefore (n+1)\, d = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab}$$

$$\therefore d = \frac{a-b}{(n+1)\, ab}$$

$$\therefore \frac{1}{h_1} = \frac{1}{a} + d = \frac{1}{a} + \frac{a-b}{(n+1)\, ab} = \frac{(n+1)\, b+a-b}{(n+1)\, ab}$$

$$= \frac{nb+a}{(u+1)\, ab}$$

$$\therefore h_1 = \frac{(n+1)\, ab}{nb+a} + \frac{(n+1)\, ab}{a+nb}$$

இதே போல் h_2, h_3,......h_n'காணலாம்.

$$\therefore h_1 = \frac{(n+1)\, ab}{a+nb}\, ;\; h_2 = \frac{(n+1)\, ab}{2a+(n-1)b}\, ;\; \ldots\ldots h_n = \frac{(n+1)\, ab}{na+b}$$

[குறிப்பு: இசைத் தொடர் கணக்குகளைக் கூட்டுத் தொடர் கணக்குகளாக மாற்றிச் செய்யவும்.]

பயிற்சி 5-2.

1. 2, 3, 6.....என்ற தொடரின் n ஆவது உறுப்பைக் காண்க.
[விடை : $\frac{6}{4-n}$]

2. ஓர் இசைத் தொடரின் 3ஆவது உறுப்பு 1 ஆகும்; 9 ஆவது உறுப்பு $\frac{1}{3}$ ஆகும். அதன் n ஆவது உறுப்பைக் காண்க.
[விடை : $\frac{3}{n}$]

3. ஓர் இசைத் தொடரில் மூன்றும் உறுப்பு $\frac{1}{11}$ ஆகும்; ஏழாவது உறுப்பு $\frac{1}{23}$ ஆகும் என்றால், அத் தொடரை அமைத்துக் காட்டுக. [விடை : $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{11}$...]

4. இரண்டு எண்களின் கூட்டு இடையுறுப்பு 6 ஆகும்; அவற்றின் இசையிடை உறுப்பு $4\frac{1}{2}$ ஆகும் எனின், அவ்வெண்களைக் கண்டறிக. [விடை : 9, 3]

5. இசைத் தொடரிலுள்ள மூன்று எண்களின் கூட்டுத் தொகை 22-ம், அவற்றின் தலைகீழ் எண்களின் கூட்டுத் தொகை $\frac{1}{2}$-ம் ஆமெனின், அவற்றைக் கண்டறிக.
[விடை : 12, 6, 4]

6. ஓர் இசைத் தொடரிலுள்ள மூன்று எண்களின் கூட்டுத் தொகை 11 ஆகும். அவற்றினது வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை 49 ஆகும் எனின், அவ் வெண்களைக் கண்டறிக.
[விடை : 6, 3, 2]

7. a, b, c இசைத் தொடரில் அமையுமாயின் $\frac{a}{b+c}$, $\frac{b}{c+a}$ $\frac{c}{a+b}$ -ம் இசைத் தொடரில் அமையுமென நிரூபி.

8. x, y என்பவற்றின் இடையே a_1, a_2, a_3 என்பன மூன்று கூட்டிடைகள்; h_1, h_2, h_3 என்பன மூன்று இசையிடைகள் எனவாயின், $a_1h_3 = a_2h_2 = a_3h_1 = xy$ என நிறுவுக.

9. a_1, a_2, a_3, a_4 என்பன ஓர் இசைத் தொடரிலிருப்பின், $a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 = 3a_1a_4$ எனக் காட்டுக.

10. $\log_a x$, $\log_b y$, $\log_c z$ கூட்டுத் தொடரில் இருந்தால், $\log_x a$, $\log_y b$, $\log_z c$ இசைத் தொடரில் அமையுமென நிறுவுக.

11. a, b, c என்பன இசைத் தொடரில் இருக்குமானால்
$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)=\frac{4}{ac}-\frac{3}{b^2}$$
என நிறுவுக.

12. ஒரு கூட்டுத் தொடரும், ஓர் இசைத் தொடரும், aஐயும், bஐயும் தமது முதலிரண்டு உறுப்புகளாகக் கொண்டுள்ளன. அவற்றின் 'n'ஆவது உறுப்புகள் முறையே x-ம், y-ம் ஆனால், $\frac{x-a}{y-a}=\frac{b}{y}$ என்று காட்டுக.

13. ஓர் இசைத் தொடரின் p ஆவது உறுப்பு q ஆகவும், q ஆவது உறுப்பு p ஆகவும் இருப்பின், pq ஆவது உறுப்பு 1 என நிறுவுக.

14. ஓர் இசைத் தொடரின் p ஆவது உறுப்பு 'qr' ஆகவும், q ஆவது, உறுப்பு 'rp' ஆகவும் இருப்பின், அதன் r ஆவது உறுப்பு 'pq' ஆகும் என நிறுவுக.

15. ஓர் இசைத் தொடரில் P, Q, R என்பன முறையே pஆவது, q ஆவது, r, ஆவது உறுப்புகளானால்,
$$pQ(P-q)+QR(q-r)+RP(r-p)=0$$
என நிறுவுக.

III பெருக்குத் தொடர் (Geometric Progression)

1. வரையறை

ஓர் எண் வரிசையில் யாதேனுமோர் எண்ணுக்கும் அதன் முன் னிற்கும் எண்ணுக்குமுள்ள விகிதம் அவ் வரிசையில் எவ்விடத்தும் மாருது காணக்கிடக்குமாயின், அவ்வரிசை எண்கள் பெருக்குத் தொடரில் உள்ளன எனப்படும்.

இந்த மாரு விகிதம் '**பொது விகிதம்**' (Common ratio) எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு

(i) $27, -9, 3, -1 \ldots\ldots$ இஃது ஒரு பெருக்குத் தொடர். இதன் பொது விகிதம் $-\frac{1}{3}$ ஆகும்.

(ii) $2, -8, 32, -128, 512, \ldots$ இஃது ஒரு பெருக்குத் தொடர். இதன் பொது விகிதம் -4 ஆகும்.

(iii) 1, 2, 4, 8, 16...இஃது ஒரு பெருக்குத் தொடர். இதன் பொது விகிதம் 2 ஆகும்.

2. (i) ஒரு பெருக்குத் தொடரிலுள்ள எல்லா உறுப்புகளும் ஒரே மாறிலியால் பெருக்கப்படினும், வகுபடினும் வரும் எல்லா பரிமாணங்களும் முன்னைய பொது விகிதமே கொண்டு பெருக்குத் தொடரில் அமையும்.

(ii) ஒரு பெருக்குத் தொடரிலுள்ள உறுப்புகள் எல்லாம் ஒரே அடுக்குக்கு உயர்த்தப் பட்டால், வரும் பரிமாணங்களும் புதியதொரு பொது விகிதத்தைக் கொண்ட ஒரு பெருக்குத் தொடரில் அமையும்.

(iii) a, b, c, d பெருக்குத் தொடரில் இருந்தால் அவைகள் தொடர் விகித சமத்தில் அமையும். அதாவது $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$ ஆகும்.

3 ஒருபெருக்குத் தொடரின் நியம வடிவம்

'a' முதலுறுப்பும், r பொது விகிதமுமானல், பெருக்குத் தொடரின் நியம வடிவம்.

a, ar, ar^2.........ஆகும்.

4. பெருக்குத் தொடரின் பொது உறுப்பு (General Term)

பெருக்குத் தொடரின் n ஆவது உறுப்பு$=ar^{n-1}$ ஆகும்.

5. பெருக்குத் தொடரின் கூட்டுப்பலன்

பெருக்குத் தொடரின் முதல் n உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகை காணல்

பெருக்குத் தொடரில், 'a' முதலுறுப்பும், 'r' பொது விகிதமும், n பெருக்குத் தொடரிலுள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையும், S_n உறுப்புகளின் கூட்டுப் பலனும் ஆகுக.

அப்பொழுது

$$S_n = a + ar + ar^2 \dots\dots\dots + ar^{n-2} + ar^{n-1} \dots\dots \qquad \dots(1)$$

(1)-ன் இரு பக்கங்களையும் r ஆல் பெருக்கி, வரும் உறுப்புகளை அடுக்கொப்பு நோக்கியவற்றின் கீழே எழுதுக.

$$rS_n = ar + ar^2 \qquad\qquad + ar^{n-1} + ar^n \dots (2)$$

(1)—(2) ஆல் கிடைப்பது

$$S_n(1-r)=a-ar^n=a(1-r)^n$$

$$\therefore\quad S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}\quad (r<1 \text{ எனில்})$$

$r>1$ ஆனால், இதையே

$$S_n=\frac{a(r^n-1)}{(r-1)} \text{ என எழுதலாம்.}$$

6. முடிவிலாப் பெருக்குத் தொடரின் கூட்டுப்பலன் (Sum of infinity of a Geometric Series)

n-ன் எண் மதிப்பு 1-க்குக் குறைந்திருந்தால், (அஃதாவது r-ன் மதிப்பு -1-க்கும் $+1$-க்கும் இடைப்பட்டுக் கிடந்தால்) அப்பொழுது ஒரு முடிவிலாப் பெருக்குத் தொடர் முடிவுடையதொரு கூட்டுப் பலனை அடையுமென நிறுவலாம்.

இப்பொழுது, ஒரு பெருக்குத் தொடரில், n உறுப்புகளின் கூட்டுப்பலன்,

$$S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a}{1-r}-\frac{ar^n}{1-r} \text{ ஆகும்.}$$

r ஆனது எண் மதிப்பில் 1-க்கு குறைவுற்று (அதாவது :

$|r|<1$) ஆகும் பொழுது, n-ன் மதிப்பு உயர்ந்து செல்லச் செல்ல, r^n-ன் மதிப்பு மிக மிகக் குறைந்து பூச்சிய எல்லையை நெருங்குகிறது.

இதை $\lim_{n\to\infty} r^n \to 0 \; (|r|<1)$ எனக் குறிப்பிடுகிறோம்.

$\frac{a}{1-r}$ ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்பை யுடையதால்,

$\lim_{n\to\infty} \frac{a}{1-r} r^n \to 0$ எனவாகும்.

ஆகவே. $\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{a}{1-r} \; (|r|<1$ எனில்)

7. பெருக்குத் தொடரின் பெருக்கு இடையுறுப்பு

மூன்று எண்கள் பெருக்குத் தொடரில் அமைந்தால், நடுவிலிருப்பது ஏனைய இரண்டின் பெருக்கு இடையுறுப்பு எனப்படும்.

a, G, b என்பன பெருக்குத் தொடரில் இருப்பின், 'a'-க்கும், b-க்கும் G பெருக்கு இடையுறுப்பாகும்.

இனி, $\frac{G}{a} = \frac{b}{G}$ ஆவதால், (வரையறையின் படி)

$G^2 = ab$

$\therefore \quad G = \sqrt{ab}$ ஆகும்.

8. பெருக்கிடைகள் (Geometric Means)

வரையறை : $a, g_1, g_2, g_3, \ldots\ldots g_n, b$ என்பவை பெருக்குத் தொடரில் இருப்பின், $g_1, g_2, g_3, \ldots g_n$ என்பவை a-க்கும் b-க்கும் இடைப்பட்ட n பெருக்கிடைகள் எனப்படும்.

$g_1, g_2 \ldots g_n$ என்பன a-க்கும் b-க்கும் இடைப்பட்ட n பெருக்கிடைகள் எனக் கொள்க.

பின்னர் $a, g_1, g_2, \ldots g_n, b$ ஒரு பெருக்குத் தொடர். இதில், முனையுறுப்புகளையும் சேர்த்து $(n+2)$ உறுப்புகள் உள்ளன.

'b' ஆனது $(n+2)$ ஆவது உறுப்பாகும்.

இப் பெருக்குத் தொடரின் பொதுவிகிதம் r எனில்,

$(n+2)$ ஆவது உறுப்பு $= ar^{n+2-1} = ar^{n+1}$

$\therefore \; ar^{n+1} = b$

$\therefore \quad r^{n+1} = \frac{b}{a}$

$\therefore \quad r = (b/a)^{1/n+1}$

ஆகவே, பெறவேண்டிய பெருக்கிடைகள்

$$a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}, a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{n+1}}, a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{n+1}}, \ldots a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{n+1}}$$ ஆகும்.

9. விளக்க மாதிரிகள்

மாதிரி 1 : 9, −6, 4, என்ற பெருக்கத் தொடரில் முதல் n உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகையையும், முடிவிலி (∞) நிலைக்குரிய கூட்டுத் தொகையையும் காண்க.

முதலுறுப்பு 9; பொது விகிதம் $= -\frac{2}{3}$

$$\therefore \quad S_n = \frac{a\,(1-r^n)}{1-r} = \frac{9\,\{1-(-\frac{2}{3})^n\}}{1-(-\frac{2}{3})} = \frac{27}{5}\,\{1-(-\tfrac{2}{3})^n\}$$

இனி, தொடர் முடிவிலி நிலையை எட்டும்போது, n உயர்ந்து கொண்டே முடிவிலி நிலைக்குச் செல்லும்

அப்பொழுது, $\lim_{n\to\infty} (-\frac{2}{3})^n \to 0$ $\quad [\,|-\frac{2}{3}| < 1$ ஆதலின்$]$

$$\therefore \quad S_{\infty} = \frac{27}{5} \text{ ஆகும்.}$$

மாதிரி 2 : 0·3 + 0·33 + 0·333 + ... என்ற தொடரில், முதல் n உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

S_n என்பது கொடுக்கப்பட்ட n உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகையைக் குறிக்கட்டும்.

பின்னர் $S_n = 0{\cdot}3 + 0{\cdot}33 + 0{\cdot}233 + \ldots\ldots n$ உறுப்புகள் வரை.

$$S_n = 3\,(0{\cdot}1 + 0{\cdot}11 + 0{\cdot}111 + \ldots\ldots n \text{ உறுப்புகள் வரை})$$

$$= \frac{3}{9}\left(0{\cdot}9 + 0{\cdot}99 + 0{\cdot}999 + \ldots\ldots \quad ,, \quad\right)$$

$$= \frac{3}{9}\left[(1-0{\cdot}1) + (1-0{\cdot}01) + (1-0{\cdot}001) + \ldots \;,, \quad\right]$$

$$= \frac{3}{9}\left[\,n - \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \ldots\ldots \frac{1}{10^n}\right)\right]$$

$$= \frac{3}{9}\left[\,n - \frac{1}{10}\;\frac{\{1-(\frac{1}{10})^n\}}{1-\frac{1}{10}}\right]$$

$$= \frac{3}{9}\left[\,n - \frac{1}{9}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)\right]$$

மாதிரி 3 : $\cdot 3\dot{4}\dot{5}$ என்னும் மடங்கு தசமத்தைப் (Recurring decimal) பின்னமாக்குக.

$$\cdot 3\dot{4}\dot{5} = \cdot 345454545\ldots\ldots$$

$$= \cdot 3 + \cdot 045 + \cdot 00045 + \cdot 0000045 + \ldots\ldots\infty$$

$$= \frac{3}{10} + \frac{\frac{45}{1000}}{1-\frac{1}{100}} \quad [a = \cdot 045;\ r = \tfrac{1}{100}]$$

$$= \frac{3}{10} + \frac{45}{1000} \times \frac{100}{99}$$

$$= \frac{3}{10} + \frac{5}{110} = \frac{38}{110} = \frac{19}{55}$$

மாதிரி 4 : n-ன் குறைந்த பட்ச மதிப்பு யாதானல், $1+3+3^2+\ldots\ldots$ என்னும் பெருக்குத் தொடரில் n உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகை 2000-க்கு அதிகப்படும்?

இங்குப் பொது விகிதம் 3 ஆகும்

n உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகை S_n ஆகுக.

$$S_n = \frac{1\,(3^n-1)}{3-1} = \frac{3^n-1}{2}$$

கணக்கின் படி, $S_n > 2000$ ஆகும் பொழுது, n-ன் குறைந்த பட்ச மதிப்பு அறிய வேண்டும்.

அதாவது $\frac{3^n-1}{2} > 2000$

$$\therefore\ 3^n - 1 > 4000$$

$$\therefore\ 3^n > 4001$$

இனி, $3^7 = 2187$ ஆகும்; $3^8 = 6561$ ஆகும்.

$\therefore$ n-ன் குறைந்த பட்ச மதிப்பு 8 ஆதல் பெறப்படும்.

பயிற்சி 5-3.

1. $\sqrt{3},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{3\sqrt{3}}$ ....(i) இத் தொடரின் 20 உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க. (ii) முடிவிலாத் தொடரின் கூட்டுத் தொகையையும் காண்க.

[விடை : $\frac{3\sqrt{3}}{2}\left\{1-(\frac{1}{3})^{20}\right\}$ $\frac{3\sqrt{3}}{2}$]

2. மதிப்பறிக :

(i) $3\cdot\dot{4}1\dot{7}$ (ii) $\cdot\dot{4}3\dot{5}$ [விடை : $3\frac{413}{990}$, $\frac{431}{990}$]

3. a, b, c, d என்பன பெருக்குத் தொடரிலிருப்பின் $(a-b+c)(b+c+d)=ab+bc+cd$ என நிறுவுக.

4. n உறுப்புகள் வரை கூட்டுக.

(i) $4+44+444+$......... [விடை : $\frac{40}{81}(10^n-1)\ -\frac{4n}{9}$]

(ii) $\cdot5+\cdot55+\cdot555+$......

[விடை : $\frac{5}{9}n-\frac{5}{81}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$]

5. ஒரு பெருக்குத் தொடரில் முதலிரண்டு உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகை 2-ம், முதல் நான்கு உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகை 20-ம் ஆனல், அத் தொடரைக் கண்டறிக.

[விடை : $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{2}$, $\frac{27}{2}$]

6. ஒரு பெருக்குத் தொடரில் முதல் மூன்று உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகையும், மூன்ருவது, நான்காவது, ஐந்தாவது உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகையும் 4 : 9 என்னும் விகிதத்தில் இருக்கின்றன. அதன் ஆருவது உறுப்பு $15\frac{3}{16}$ ஆனல், அதன் 10ஆவது உறுப்பை அறிக.

[விடை : $3^9/2^8$]

7. பெருக்குத் தொடரிலுள்ள மூன்று எண்களின் கூட்டுத் தொகை 21 ஆகும் அவற்றின் பெருக்குத் தொகை 64 ஆனால், அவ்வெண்களைக் கண்டறிக. [விடை : 1, 4, 16]

8. ஒரு குறிப்பிட்ட பெருக்குத் தொடரின் கூட்டுத் தொகை $3-\frac{3^{n+1}}{4^{2n}}$ ஆகும். அதன் முதலுறுப்பையும், பொது விகிதத்தையும் கண்டறிக. $\left[\text{விடை : } \frac{39}{16}, \frac{3}{16}\right]$

9. ஒரு பெருக்குத் தொடரின் கூட்டுத் தொகை 889; இறுதி யுறுப்பு 448 ; பொது விகிதம் 2 எனின், அதன் முதலு றுப்பு யாது ? [விடை :7]

10. ஒரு பெருக்குத் தொடரில் முதலுறுப்பு 2; கூட்டுத் தொகை 728. இறுதியுறுப்பு 486 எனின், பொது விகிதம் யாது ? [விடை : 4]

11. ஒரு முடிவிலாப் பெருக்குத் தொடரின் அநந்த உறுப்பு களின் கூட்டுத் தொகை 3 ஆகும். அவற்றின் வர்க்கங் களின் கூட்டுத் தொகை $= \frac{9}{2}$. அத் தொடர் வரிசையை யறிக. $\left[\text{விடை : } a=2\ ;\ r = \frac{1}{3}\right]$

12. ஒரு முடிவிலாப் பெருக்குத் தொடரின் அநந்த உறுப்பு களின் கூட்டுத் தொகை 2. அவற்றின் கனங்களின் கூட்டுத் தொகை $=\frac{8}{7}$.அத்தொடர் வரிசையைக் காண்க. [விடை $a=1;\ r=\frac{1}{2}$]

13. இரண்டு எண்களின் கூட்டுத் தொகை அவற்றின் பெருக் கிடையுறுப்பை (geometric mean) விட 9 அதிகமாகும். அக் கூட்டுத் தொகையின் வர்க்கம் அவற்றின் பெருக்கல் பலனைவிட 189 அதிகமாகும் என்றால், அவ் வெண்களைக் காண்க. [விடை : 12, 3]

14. (i) 3, 96 என்ற எண்களிடையே 4 பெருக்கிடை எண் கள் காண்க. [விடை : 6, 12, 24, 48]

(ii) 324-க்கும் 4-க்கும் இடையே 3 பெருக்கிடை எண்கள் காண்க, [விடை : 108, 36, 12]

15. $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}+$.........என்னும் பெருக்குத் தொடரில் குறைந்த பட்சம் எத்தனை உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகையானது அதே தொடரின் கந்தழி (∞) வரைக் கூட்டுத் தொகைக்கு $\frac{1}{5000}$-க்கும் குறைவுற்றிருப்ப தாகும்? [விடை :8]

16. ஒரு பெருக்குத் தொடரில் உள்ள உறுப்புகள் யாவும் நேரெண்களானால், அவ் வுறுப்புகளின் லாகரிதங்கள் கூட்டுத் தொடரில் அமையுமென நிறுவுக.

17. a, b, c என்பன ஒரு பெருக்குத் தொடரிலும், $a^x = b^y = c^z$ என்னும் வரையறையிலும் நிற்குமாயின், x, y, z என்பன ஓர் இசைத் தொடரில் அமையுமென நிறுவுக.

18. ஒரு பெருக்குத் தொடரில் முதல் n, $2n$, $3n$ உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகைகள் முறையே s_1, s_2, s_3 ஆகும் எனின், $(s_2-s_1)^2 = s_1(s_3-s_2)$ என நிறுவுக.

19. ஒரு பெருக்குத் தொடரிலுள்ள n உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகை S ஆகும். அவற்றின் பெருக்கற்பலன் P-ம் விலோமங்களின் (Reciprocals) கூட்டுத் தொகை R-ம் ஆனால், $P^2 = \left(\frac{S}{R}\right)^n$ என நிறுவுக.

20. $x=1+a+a^2+.........\infty$ என்றும்,
$y=1+b+b^2+.........\infty$ என்றும்,
a, b ஒவ்வொன்றும் 1-க்குக் குறைந்தது என்றுங் கொண்டால்,
$1+ab+a^2b^2+...........\infty = \frac{xy}{x+y-1}$ என நிறுவுக.

21. ஒரு பெருக்குத் தொடரில் P, Q, R என்பன முறையே p ஆவது, q ஆவது, r ஆவது உறுப்பு ஆனால், $P^{q-r}\,Q^{r-p}\,R^{p-q}=1$ என நிறுவுக.

22. ஒரு சிறுவன் ஓர் ஏரியின் நிலையான நீர்ப் பரப்பின் மீது தட்டைக் கற்சில்லுகளை வீசித் தத்திக் குதித்துச் செல்லும்படி செய்து விளையாடுகிறான். இப்படி செலுத்தும் படியான ஒரு சில் தன் முதல் தாவலில் 4மீட்டர் தூரமும், அதன் பிறகு அடுத்தடுத்து செல்லும் தாவலில் முந்திய

தாவலின் பாதி பாகமுமாகச் சென்றால் அது நீரில் மூழ்கு கிறதற்கு முன்பு செல்லக் கூடிய மிக அதிக தூரம் யாது?
[விடை : 8 மீடர்]

23. ஒரு பந்தானது மேலேயிருந்து விழுந்து தரையைத் தாக்குந்தொறும் முன்பிருந்து விழுந்த உயரத்தில் $\frac{1}{3}$பங்கு உயரத்திற்கே மீண்டும் எழுந்து செல்ல வல்லதாகும். அதனை 12 மீட்டர் உயரத்திலிருந்து கீழ்நோக்கி விழ விட்டால், அஃது எழுச்சி நிலை முற்றும் தணிந்து ஓய்வுறும் வரையில் சென்ற மொத்த தூரத்தைக் கணக் கிடுக. [விடை : 24 மீட்டர்]

IV கூட்டு வட்டியும், ஆண்டுத் தொகையும் (Compound Interest and Annuities)

பெருக்குத் தொடர் கொள்கை கூட்டுவட்டி, ஆண்டுத் தொகை காணும் கணக்கீடுகளில் பயன்படுகிறது.

1. கூட்டு வட்டி (Compound Interest)

ஒரு P அசலை ஆண்டுக்கு r % கூட்டு வட்டி வீதம் கடன் கொடுத்தால், n ஆண்டுகள் கழித்து அதன் தொகை A எனில்,

$$A = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$$

ஆகும் என்றறிவோம்.

இங்கு $\frac{r}{100} = i$ எனப் பிரதியிட,

$$A = P(1+i)^n \text{ ஆகும்.} \quad ...(1)$$

இங்கு 'i' என்பது ஒரு ரூபாய்மீது ஓர் ஆண்டினுடைய வட்டி ஆகும்.

2. இற்றைப் பெறுமானம் (Present Value)

n ஆண்டுகள் கழித்துக் கட்டவேண்டிய தொகை A ஆயின், அதன் இற்றைப் பெறுமானத்தை P எனக் குறிப்பிடுகிறோம்.

(1)-லிருந்து, $P=A(1+i)^{-n}$ ஆகும். ...(2)

3. ஆண்டுத் தொகைகள் (Annuities)

ஆண்டுத் தொகை என்பது ஆண்டுதோறும் குறிப்பிட்ட நாளில் முறையாக அளிக்கப்படும் சம தொகையைக் குறிக்கும்.

இது முடிவில்லாமல் தொடர்ந்து கொடுக்கப்பட்டால், அது **நித்தியவாண்டுத் தொகை** (Perpetuity) எனப்படும்.

நித்தியவாண்டுத் தொகை அளிக்கும் சொத்து **பயனுரிமைச் சொத்து** (Freehold estate) எனப்படும்.

ஆண்டுத் தொகை குறிப்பிட்ட கால அளவுக்கே கொடுக்கப் பட்டு அதன் பிறகு நிறுத்தப்பட்டால், அஃது **ஒரு முடிவுடை ஆண்டுத் தொகை** (Terminable Annuity) எனப்படும்.

(i) 'a' ரூபாய் நித்திய வாண்டுத் தொகையாக n ஆண்டு களுக்குக் கொடுக்கப்படின் அதனால் கிட்டும் மொத்தத் தொகை யைக் கணக்கிடுதல் (முதல் தொகை முதலாண்டு இறுதியில் கொடுக்கப்படுவதாகக் கொள்க).

முதலாண்டு இறுதியில் கிடைக்கும் தொகைக்கு $(n-1)$ ஆண்டுகளுக்கே வட்டி கூட்டப்படும். ஆகையால் அதன் தொகை $a(1+i)^{n-1}$ ஆகும்.

இரண்டாவது ஆண்டு கிடைக்கும் தொகைக்கு $(n-2)$ ஆண்டுகளுக்கே வட்டி கூட்டப்படும். ஆகையால், அதன் தொகை $a(1+i)^{n-2}$ ஆகும்.

ஆகவே மொத்த தொகை.

$$A = a(1+i)^{n-1} + a(1+i)^{n-2} + \ldots\ldots + a(1+i) + a$$

$$= a\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)-1} = a\frac{(1+i)^n-1}{i} \qquad \ldots(3)$$

விளக்க மாதிரி :

ஒருவன் ஒவ்வோர் ஆண்டு இறுதியிலும் ஆண்டுக்கு $2\frac{1}{2}\%$ கூட்டு வட்டி வழங்கும் சேமிப்பு வங்கியில் ரூ 100ஐச் சேமித்து வைக்கிறான். 15 ஆண்டுகள் முடிவில் அவன் சேமிப்புத் தொகை யின் மதிப்பென்ன ?

$$A = a\frac{(1+i)^n-1}{i}, \quad = 2\tfrac{1}{2}\% \ \therefore\ i = \cdot 025$$

$$A = 100\ \frac{(1+\cdot 025)^{15}-1}{\cdot 025} = 4000\left[(1\cdot 025)^{15}-1\right]$$

இப்பொழுது, $\log (1{\cdot}025)^{15} = 15 \log 1{\cdot}025 = {\cdot}1605$

$\therefore\ (1{\cdot}025)^{15} = \text{antilog}\ {\cdot}1605 = 1{\cdot}447$

$\therefore\ A =$ ரூ $4000\,[1{\cdot}447-1]$

$=$ ரூ $4000 \times {\cdot}447 =$ ரூ $1788.$

(ii) ஒவ்வோர் ஆண்டும் ஒரு குறிப்பிட்ட தொகையை ஆண்டுத் தொகையாகப் பெறுவதற்கு ஒரு குறிப்பிட்ட தொகையை முன் கூட்டியே கட்டவேண்டும். இது கிடைக்கும் தொகைகள் எல்லாவற்றின் இற்றைய மதிப்பாகும்.

ஆண்டுத் தொகை 'a' எனில், எல்லாத் தவணைகளின் இற்றைய மதிப்பு

$$P = \frac{a}{1+i} + \frac{a}{(1+i)^2} + \cdots\cdots\cdots \frac{a}{(1+i)^n}$$

$$= \frac{a}{1+i}\ \frac{1-\dfrac{1}{(1+i)^n}}{1-\dfrac{1}{1+i}} = \frac{a}{i}\left[1-(1+i)^{-n}\right]$$

துணை முடிவு (Corollary) : நித்தியவாண்டுத் தொகையாயின்,

$(1+i)^{-n} \to 0$

ஆகவே ரூ. 'a' நித்தியவாண்டுத் தொகையாகக் கிடைத்தால், அதன் இற்றைய மதிப்பு $= \dfrac{a}{i}$

விளக்க மாதிரி 2 :

கூட்டு வட்டி விகிதம் ஆண்டொன்றுக்கு 4% ஆக இருக்கும் போது, ஆண்டுத் தொகையாக ஆண்டுதோறும் ரூ 30ஐ 20 ஆண்டுகளுக்கு வழங்கத்தக்க தொகையின் இற்றைய மதிப்பைக் காண்க.

இங்கு $a=30$; $n=20$; $i = \dfrac{4}{100} = {\cdot}04$

$$\therefore\ P = \frac{30}{\cdot 04}\left[1-(1{\cdot}04)^{-20}\right]$$

$$\log(1{\cdot}04)^{-20} = -20\log 1{\cdot}04 = -20 \times {\cdot}0170 = -{\cdot}34$$
$$= \bar{1}{\cdot}66$$

$$\therefore (1{\cdot}04)^{-20} = \text{antilog } \bar{1}{\cdot}66 = {\cdot}4571$$

$$\therefore P = \frac{30}{{\cdot}04}\left[1 - {\cdot}4571\right] = \frac{30}{{\cdot}04} \times {\cdot}5429$$
$$= 30 \times 25 \times {\cdot}5429 = \text{ரூ. } 407{\cdot}18$$

பயிற்சி 5-4.

1. கூட்டுவட்டி விகிதம் ஆண்டொன்றுக்கு 5% ஆக இருக்கும்போது, ஓர் அசல் எவ்வளவு காலத்தில் 3 மடங்காகும்? [விடை : 22·51 ஆண்டுகள்]

2. ரூ. 1000 கடன் தொகையை 10 ஆண்டுதோறும் சம தவணைகளில் திருப்பிக் கொடுக்கவேண்டும். கூட்டு வட்டி விகிதம் 4% ஆனால், ஒவ்வோர் ஆண்டுத் தவணை யாது? [விடை : ரூ 123·5]

3. ஓர் ஊரில் பிறப்பு, இறப்பு வீதம் முறையே ஜனத் தொகையில் 100–க்கு 25–ம், 20–ம் ஆகும். ஓர் ஆண்டுத் தொடக்கத்தில் அந்த ஊர் ஜனத்தொகை 50000 எனில், 30 ஆண்டுகள் கழித்து அவ்வூர் ஜனத்தொகை எவ்வளவு இருக்கும்? [விடை : 57810]

4. ஒவ்வோர் ஆண்டு இறுதியிலும், ஆண்டுத் தொகை ரூ. 100 ஆக 25 ஆண்டுகளுக்கு வழங்கத் தேவையான தொகையின் இற்றைய மதிப்பைக் காண்க. வட்டி விகிதம் 5% கூட்டு வட்டி எனக் கொள்க. [விடை : 1409·80]

V மூன்று தொடர்கள்

தேற்றம் : இரண்டு நேரெண்களின் இடையேயுள்ள கூட்டு இடையுறுப்பும், பெருக்கு இடையுறுப்பும், இசை இடையுறுப்பும் இறங்கு வரிசையில் ஒரு பெருக்குத் தொடரில் அமைவினவாகும்.

a, b என்னும் இரண்டு நேரெண்களுக்கு இடையே இடப் பட்ட கூட்டு இடையுறுப்பும், பெருக்கு இடையுறுப்பும் முறையே A, C, A எனக் கொள்க.

அப்பொழுது $A = \frac{a+b}{2}$; $G = \sqrt{ab}$; $H = \frac{2ab}{a+b}$ ஆகும்.

எனில் $AH = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{2ab}{a+b} = ab = (\sqrt{ab})^2 = G^2$

A, G, H என்பன பெருக்குத் தொடரில் அமையும்,

மேலும் $AH = G^2$ ஆகையால், $\frac{A}{G} = \frac{G}{H}$

தவிர, $A - G = \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}$

$= \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2}$

($\because$ a-ம், b-ம் அசமமாதலின், இஃது எப்பொழுதும் நேரெண்ணுகவே அமையும்.) $A > G$, $\frac{A}{G} > 1$ $\therefore$ $\frac{G}{H} > 1$ $G > H$

$\therefore$ $A > G > H$

$\therefore$ A, G, H என்பன இறங்கு வரிசையில் ஒரு பெருக்குத் தொடரில் அமையும்.

பயிற்சி 5-5.

1. a, b, c என்னும் மூன்று எண்கள் $\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{a}$, $\frac{a}{b}$, அல்லது, $\frac{a}{c}$ என்பதற்கு ஏற்ப முறையே கூட்டுத் தொடரிலோ, பெருக்குத் தொடரிலோ, இசைத் தொடரிலோ அமையுமென நிறுவுக.

2. a, b, c, d என்னும் நேரெண்கள் ஒரு கூட்டுத் தொடரிலோ, அல்லது ஒரு பெருக்குத் தொடரிலோ அல்லது ஓர் இசைத் தொடரிலோ நிற்பதற்குத் தகுந்தாற் போல $bc - ad >=< 0$ ஆகுமென்று காட்டுக.

3. x, a_1, a_2, y என்பன கூட்டுத் தொடரிலும், x, y_1, y_2, y என்பன பெருக்குத் தொடரிலும், x, h_1, h_2, y என்பன இசைத் தொடரிலும் இருப்பின்,

(i) $\frac{g_1 g_2}{h_1 h_2} = \frac{a_1 + a_2}{h_1 + h_2}$ (ii) $ax = g_1 g_2 = a_1 h_2 = a_2 h_1$

எனக் காட்டுக.

4. இரண்டு எண்களின் கூட்டு இடையுறுப்பு, அவற்றின் பெருக்கு இடையுறுப்பைவிட 2 அதிகமாகும். அவற்றின் இசை இடையுறுப்பானது அவ்வெண்களுள் பெரியதின் $\frac{1}{5}$ பங்காகும் என்றல், அவ்வெண்களைக் கண்டறிக.

5 x, y என்ற எண்களின் கூட்டு இடையுறுப்பு y ஆகவும், பெருக்கு இடையுறுப்பு xy ஆகவும் இருந்தால், அவற்றின் இசை இடையுறுப்பு x^2y ஆகுமென நிறுவுக.

6. b-க்கும், c-க்கும் இடையில் a ஆனது கூட்டு இடையுறுப்பாகவும், a-க்கும், c-க்கும் இடையில் bஆனது பெருக்கு இடையுறுப்பாகவும் அமைந்தால், cஆனது a-க்கும், b-க்கும் இடையில் இசையிடையுறுப்பு ஆகுமென நிறுவுக.

7, a, b, c இசைத் தொடரிலும், b, c, d பெருக்குத் தொடரிலும், c, d, e கூட்டுத் தொடரிலும் இருந்தால்,

$$e = \frac{ab^2}{(2a-b)^2}$$

8. a, b, c கூட்டுத் தொடரிலும், b, c, d பெருக்குத் தொடரிலும், c, d, e இசைத் தொடரிலும் அமைந்தால், a, b, c பெருக்குத் தொடரில் அமையுமெனக் காண்பி.

9, a, b, c கூட்டுத் தொடரிலும், b, c, a பெருக்குத் தொடரிலும் அமைந்தால், c, a, b ஓர் இசைத்தொடரில் அமையுமெனக் காண்பி.

10. a, b என்ற எண்களுக்கிடையே, x_1, x^2 என்பன கூட்டிடைகளாகவும், y_1, y_2 இசையிடைகளாகவும், z_1, z_2 பெருக்கிடைகளாகவும் இருப்பின், $x_1 \ y_2 = x_2 y_1 = z_1 z_2$ என நிறுவுக.

VI அடுக்கேற்ற இயற்கை எண்களின் கூட்டுப் பலன்கள் (Sums of Powers of Natural Numbers)

1. முதல் x இயற்கை எண்களின் கூட்டுத் தொகை

நாம் சாதாரணமாகப் பயன்படுத்தும் எண்கள் 1,2,3......... முதலிய எண்கள். இவை இயற்கை எண்கள் எனப்படும்.

இவற்றின் கூடுதலைக் காண்போம்.

$S = 1+2+3+\dots\dots\dots+n$ ஆகுக.

இத் தொடர் வரிசை ஒரு கூட்டுத் தொடர் ஆகும். இதன் முதல் உறுப்பு 1 ஆகும். இறுதி உறுப்பு n ஆகும். உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை n ஆகும்.

ஆகவே, $S = \dfrac{n(1+n)}{2} = \dfrac{n(n+1)}{2}$

குறியீடு : $1+2+3+\dots+n$ வரை உள்ள எண்களின் கூடுதலை Σn என்ற குறியீட்டால் குறிப்பது வழக்கம்.

ஆகவே $\Sigma\, n = \dfrac{n\,(n+1)}{2}$ ...(1)

2. முதல் n இயற்கை எண்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதல்

அதாவது Σn^2–ன் மதிப்பு காணல் :

செய்முறை : $x^3-(x-1)^3=3x^2-3x+1$ என்பது முற்றொருமை. இதில் x–க்கு 1 முதல் n வரை பிரதியிட, கிடைப்பது

$1^3-0=3.1^2-3.1+1$

$2^3-1^3=3\cdot2^2-3\cdot2+1$

$n^3-(n-1)^3=3n^2-3n+1$

இவ்வனைத்தையும் நேர் நேராக மேனோக்கி இரு பக்கங்களிலும் கூட்ட வருவது,

$n^3=3\Sigma\, n^2-3.\Sigma\, n=n$ ஆகும்,

$$\therefore \quad 3\,\Sigma\, n^2 - 3\,\Sigma\, n + n = n^3$$

$$\therefore \quad 3\,\Sigma\, n^2 = n^3 + 3\,\Sigma\, n - n = n^3 + \frac{3n\,(n+1)}{2} - n$$

அதாவது $6\,\Sigma n^3 = 2n^3 + 3n\,(u+1) - 2n = n\,(2n^2+3n+1)$

அதாவது $6\,\Sigma n^2 = n\,(n+1)\,(2n+1)$

$$\therefore \quad \Sigma n^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6} \qquad \ldots(2)$$

3. முதல் n இயற்கை எண்களின் கனங்களின் கூடுதல்

$x^4 - (x-1)^4 \equiv 4x^3 - 6x + 4x - 1$ என்னும் முற்றொருமையில், x-க்கு 1 முதல் n வரை பிரதியிட்ட, நேர் நேராகக் கூட்டிய, $\Sigma n = \frac{n\,(n+1)}{2}$, $\Sigma_n{}^2 = \frac{n\,(n+1)\;(2n+1)}{6}$ என்பதைப் பயன்படுத்தி

$$\Sigma n^3 = \frac{n^2\,(n+1)^2}{4} \text{ எனப் பெறலாம்.} \qquad \ldots(3)$$

விளக்க எடுத்துக்காட்டு :

$1\cdot2\cdot4 + 2\cdot3\cdot5 + 3\cdot4\cdot6 + \ldots\ldots\ldots\ldots$ என்னும் தொடர் வரிசையின் கூட்டுப்பலனை முதல் n உறுப்புகளுக்கு காண்க.

கொடுக்கப்பட்ட தொடர் வரிசையில்,

r ஆவது உறுப்பு $= r\,(r+1)\,(r+3) = r^3 + 4r^2 + 3r$ ஆகும்.

இதில் $r = 1, 2 \ldots\ldots\ldots$ என n வரை பிரதியிட்டுக் கூட்ட, நாம் பெறுவது

$$S_n = \sum_1^n r^3 + 4\sum_1^n r^2 + 3\sum_1^n r$$

$$= \frac{1}{12}\, n\;(n+1)\,(n+2)\;(3n+13) \text{ சுருக்கிய பின்.}$$

பயிற்சி 5-6.

1. முதல் n ஒற்றைப்படை எண்களுடைய கனங்களின் கூட்டுத் தொகையை அறிக. [விடை : $2n^4 - n^2$]

2. $1\cdot3^2+2.4^2+3\cdot5^2+$.........என்ற தொடரில் n உறுப்புகள் வரைக்கும் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.
[விடை : $n(n+1)(3n^2+19n+32)/12$]

3. $$\frac{1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\ldots+n(n+1)(n+2)}{1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\ldots+n(u+1)} = \frac{3}{4}(n+3$$
எனக் காட்டுக.

4. $1\cdot n+2\ (n-1)+3\ (n-2)+\ldots\ldots+n\cdot1$ இதன் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க. [விடை : $n(m+1)\,n+2)/6$]

5. S_1, S_2, S_8 என்பன முறையே முதல் n இயற்கை எண்களின் கூட்டுத் தொகையையும், வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகையையும், கனங்களின் கூட்டுத் தொகையையும் குறிப்பிடுவனவானால், $9S_2{}^2=S_8\,(1+8S_1)$ எனக்காட்டுக

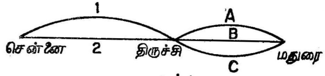
6. ஒரு தொடர் வரிசையில் n ஆவது உறுப்பு $4^n+2n\ (n-1)$ எனப்படுமானால், அத் தொடரின் கூட்டுத் தொகையை முதல் n உறுப்புகள் வரை கண்டறிக.
$\left[\text{விடை : } \frac{4}{3}(4^n-1)+\frac{2n\,(n^2-1)}{3}\right]$

7. ஒரு தொடர் வரிசையில் nஆவது உறுப்பு n^3+3^n ஆனால், அத் தொடரின் கூட்டுத் தொகையை முதல் n உறுப்புகள் வரை காண்க.
$\left[\text{விடை : } \frac{n^3\,(n+1)^2}{4}+\frac{3\cdot(3^n-1)}{2}\right]$

6. வரிசை மாற்றமும், சேர்வுகளும்

1. அடிப்படைக் கூறு

சென்னையிலிருந்து திருச்சி செல்ல இரண்டு வழிகளும், திருச்சியிலிருந்து மதுரை செல்ல மூன்று வழிகளும் இருக்கின்றன எனக் கொள்வோம். ஒருவன் சென்னையிலிருந்து திருச்சி வழியாக எத்தனை விதங்களில் மதுரை போய்ச் சேரலாம் ?



படம் 1.

சென்னையிலிருந்து திருச்சி செல்லும் வழிகளை 1, 2 எனக் குறிப்பிடுவோம். திருச்சியிலிருந்து மதுரைக்குச் செல்லும் வழிகளை A, B, C எனக் குறிப்பிடுவோம். இனி சென்னையிலிருந்து திருச்சிக்கு வழி 1–ன் மூலம் சென்றால் மதுரை சேர்வதற்கு A, B, C என்னும் 3 வழிகளில் ஏதேனும் ஒரு வழியைத் தேர்ந்தெடுத்துச் செல்லலாம். ஆகவே, வழி 1–ன் மூலம் மதுரை சேர்வதற்கு 3 வழிகள் உண்டு. இதே போல் வழி 2–ன் மூலம் சென்றாலும் மதுரை சேர்வதற்கு 3 வழிகள் உண்டு. எனவே சென்னையிலிருந்து மதுரை சேர $2 \times 3 = 6$ வெவ்வேறு வழிகள் உள்ளன. அவை யாவன : 1, A; 1, B; 1, C; 2, A; 2, B; 2, C இந்த 6 வெவ்வேறு முறைகளில் ஏதாவது ஒரு முறையில் மதுரை சேரலாம்.

இனி மற்றோர் எடுத்துக்காட்டைக் கவனிப்போம். பூச்சியம் அல்லாத 4 இலக்கங்கள் தரப்பட்டால், எத்தனை இரண்டிலக்க

எண்கள் அமைக்க முடியும் எனப் பார்ப்போம். கொடுத்த இலக்கங்கள் 1, 3, 4, 7 எனில், ஒன்றுவது தானத்தை நிரப்புவது ஒரு செயலாகும். கொடுத்த 4 இலக்கங்களில் ஏதேனும் ஓர் இலக்கத்தால் ஒன்றுவது தானத்தை நிரப்பலாம். ஆகவே, இச் செயலை 4 முறைகளில் செய்யலாம். ஏதேனும் ஓர் வகையில் ஒன்றுவது தானத்தை நிரப்பிய பிறகு, பத்தாவது தானத்தை நிரப்புவது இரண்டாவது செயலாகும். ஒன்றுவது தானத்தை நிரப்ப நாம் ஏற்கெனவே ஓர் இலக்கத்தைப் பயன் படுத்தி விட்டதால், பத்தாவது தானத்தை நிரப்ப, நமக்கு எவையேனும் 3 இலக்கங்களே உள்ளன. எனவே, பத்தாவது தானத்தை ஏதேனும் 3 முறைகளில் நிரப்பலாம்.

இவ்விதமாக, ஒன்றுவது தானத்தை நிரப்பும் 4 வகைகள் ஒவ்வொன்றுக்கும் பத்தாவது தானத்தை நிரப்பும் 3 வகைகள் உள்ளனவாதலால், ஒன்றுவது, பத்தாவது தானங்களை ஒன்றன் பின் ஒன்றாய் நிரப்பும் கூட்டுச் செயலை $4\times3=12$ வகைகளில் செய்யலாம். எனவே, கொடுத்த 4 இலக்கங்களைக் கொண்டு 12 இரண்டிலக்க எண்கள் அமைக்கலாம். இவையாவன: 13, 14, 17, 34, 37, 47, 31, 41, 71, 43, 73, 74.

இவ்வடிப்படையில், பொதுத்தேற்றமாக இதையே பின் வருமாறு கூறலாம்:

அடிப்படைத் தேற்றம்

ஒரு செய்வகையானது m வெவ்வேறு வழிகளில் செய்ய முடிந்து, அச் செயலை அந்த m வழிகளில் ஏதேனும் ஒரு வழியில் செய்யப் பட்ட பின்பு, இச் செயலினால் தடைபடாமல் மற்றோர் செயல் n வெவ்வேறு வழிகளில் செய்யப்படக் கூடுமானால், இவ்விரண்டு செய்வகைகளையும் ஒன்றன்பின் ஒன்றாக உடன் கூட்டி $m\,n$ வெவ்வேறு முறைகளில் ஏதேனும் ஒரு வழியில் செய்யலாம்.

கிளை: ஒன்றற்கொன்று தடைபடாமல் உள்ள பல செயல்களில் ஒன்றை m விதமாகவும், மற்றொன்றை n விதமாகவும், இன்னுமொன்றை P விதமாகவும், ...செய்யக் கூடுமானால், அவற்றை எல்லாம் $m\times n\times p$ என்ற வகைகளில், ஏதேனும் ஒரு வகையில் செய்யலாம்.

2. வரிசை மாற்றங்களும், சேர்வுகளும், அவற்றிற்குள்ள வேறுபாடும்

a, b, c, d என்ற நான்கு பொருள்களினின்று ஏதேனும் மூன்று பொருள்களைப் பொறுக்க வேண்டுமாயின், அவை abc, abd, acd,

bcd என்பனவாகும். இவை தவிர வேறெந்த விதத்திலும் மும் மூன்று பொருள்களைச் சேர்க்க முடியாது. இவ்வாறு எடுத்துச் சேர்த்தலைச் சேர்வுகள் அல்லது சேர்மானங்கள் (Combinations) என்கிறோம்.

இனி, இதே நான்கு பொருள்களிலிருந்து தடவைக்கு 3 பொருள்களாக எடுத்து இயன்றவாறு எல்லாம் வரிசைப் படுத்தி எழுதினால், எத்தனை வரிசைகள் எனப் பார்ப்போம்.

a b c என்ற ஒரு தொகுப்பு அல்லது குவியலை வரிசை மாற்றம் செய்ய *abc*, *acq*, *bca*, *bac*, *cab*, *cba* என 6 வரிசைகள் கிட்டும். இவ்வாறே *abd* என்ற தொகுப்பு மற்றொரு 6 வரிசைகளைத் தரும். இப்படி எல்லாத் தொகுப்புகளையும் வரிசை மாற்றம் செய்ய மொத்தம் 24 வரிசை மாற்றங்கள் கிடைக்கும்.

எனவே 4 பொருள்கள் கொடுக்கப்பட்டு, அவற்றைத் தடவைக்கு 3 பொருள்களாகக் கண்டெடுத்து இயன்றவரை எல்லா வழிகளிலும் வரிசைப்படுத்தி எழுதினால், 24 வரிசை மாற்றங்கள் கிடைக்கின்றன.

இனி, *abc*, *acb*, *bca*, *bac*, *cab*, *cba* என்பன *abc* என்னும் ஒரே தொகுப்புல் இருந்து பெற்ற வரிசை மாற்றங்கள் ஆகும். *a*, *b*, *c* என்ற மூன்று பொருள்கள் எந்த வரிசைக் கிரமத்தில் அடுக்கப்பட்டனவானாலும், அதே மூன்று பொருள்கள் ஒவ்வொரு வரிசைக் கிரமத்திலும் இருப்பதால், அவை யாவையும் ஒரே சேர்வையையே குறிக்கும். ஆகவே, சேர்வு என்று கருதும்போது இவை 6-ம் ஒரே சேர்வுதான். ஆனால், வரிசை மாற்றம் என்று கூறும் போது இவை 6-ம் வெவ்வேறு வரிசை மாற்றம் ஆகும்.

இனி வரிசை மாற்றம், சேர்வுகள் பற்றித் தனித்தனியாக ஆராய்வோம்.

3. வரிசை மாற்றம் (Permutation)

(i) $n^{p}r$! வரையறை

n வெவ்வேறு பட்ட பொருள்களிலிருந்து தடவைக்கு *r* பொருள்களாகக் கண்டெடுத்துச் சாத்தியப் பட்டபடி எல்லாம் வரிசை படுத்தும் வகையினது எண்ணிக்கை $n^{p}r$ எனக் குறிக்கப்படும்.

(ii) ^nP_rஐக் கணிக்க ஒரு சூத்திரத்தைக் காணல்

n வெவ்வேறு பொருள்கள் இருப்பதாகக் கொள்வோம். இவற்றைக் கொண்டு r பொருள்கள் கொண்ட எத்தனை வெவ்வேறு வரிசைகள் அமைக்க முடியுமோ, அந்த எண்ணிக்கையே ^nP_r ஆகும்.

இதைக் காண, வரிசையாக r வெற்றிடங்கள் உள்ளன எனக் கொள்வோம்.

ஒவ்வொரு வெற்றிடத்திலும் ஒவ்வொரு பொருள் நிரப்பி - எத்தனை வெவ்வேறு வரிசைகள் அமைக்கலாம் என அறிவதே ^nP_r-ன் மதிப்பாகும்,

n பொருள்களுள் ஒன்றனை முதல் வெற்றிடத்தில் இடலாம். ஆகவே, முதல் வெற்றிடம் n வேறு வழிகளில் ஏதேனுமொரு விதத்தில் நிரப்பலாம். இவ்வாறு முதல் வெற்றிடத்தை ஏதேனும் ஒரு பொருள் கொண்டு நிரப்பிய பின்னர் எஞ்சிய $(n-1)$ பொருள்கள் உள்ளன. அவற்றில் ஏதேனும் ஒன்றை இரண்டாவது இடத்தில் இடலாம். ஆகவே, இரண்டாவது வெற்றிடத்தை ஒரு பொருளால் $(n-1)$ விதங்களில் ஏதேனுமொரு விதத்தில் நிரப்பலாம்.

இவ்வாறு முதல் காலியிடத்தை நிரப்பும் ஒவ்வொரு வகைக்கும் இரண்டாவது காலியிடம் $(n-1)$ வகையில் நிரப்பக் கூடுமாதலால், § 1-ல் கண்ட அடிப்படைத் தேற்றத்தின்படி, முதலிரண்டு வெற்றிடங்களையும் நிரப்புவதற்கு $n(n-1)$ வழிகள் உள்ளன.

மேற் கூறியபடி, இரண்டு இடங்களையும் ஒவ்வொரு பொருளால் நிரப்பிய பின்னர் $(n-2)$ பொருள்கள் உள்ளன. இவற்றைக் கொண்டு மூன்றாவது இடத்தை $(n-2)$ விதங்களில் நிரப்பலாம்.

இவ்வாறாக ஒன்றாவது இடம் முதல் r ஆவது இடம் வரை நிரப்பும் செயல்களைத் தனித்தனியே $n, n-1, n-2, \ldots\ldots (n-r+1)$ எனும் வகைகளில் செய்யலாம்.

ஆகவே அடிப்படைத் தேற்றத்தின்படி, r வெற்றிடங்களையும் ஒன்றன்பின் ஒன்றாக உடன் கூட்டி நிரப்புவது $n(n-1)(n-2) \ldots\ldots (n-r+1)$ வழிகளாகும்.

ஆனால், n பொருள்களிலிருந்து r பொருள்களாகக் கண்டெடுத்து எல்லா விதமாகவும் வரிசைப்படுத்தி வரும் எண்ணிக்கையை ^nP_r எனக் குறிப்பிட்டுள்ளோம்.

$$\therefore {}^{n}p_{r} = n(n-1)(n-2)(n-3)......(n-r+1) \qquad ...(1)$$

${}^{n}p_{1}=n$, ஏனெனில் n பொருளால் 1 இடத்தை n விதமாய் நிரப்ப முடியும்.

கிளை ii. மாற்று நிரூபணம் !

${}^{n}p_{r}=n\times {}_{n-1}p_{r-1}$ என நிறுவுக.

இதிலிருந்து ${}^{n}p_{r}$-ன் மதிப்பைக் காண்க !

a, b, c......எனப் பொருள்கள் இருப்பதாகக் கொள்.

${}^{n}p_{r}$ என்பது n பொருள்களைக் கொண்டு வரிசையாக r ஆக வைக்க எத்தனை வெவ்வேறு வரிசைகள் வருமோ, அவற்றின் எண்ணிக்கையாகும்.

r இடங்களில் முதல் இடத்தை நிரப்பும் செயலை n விதமாய்ச் செய்யலாம். ஏனெனில், முதல் இடத்தில் a என்னும் பொருள் வரலாம்; அல்லது b என்னும் பொருள் வரலாம். இவ்வாறாக n பொருள்களில் ஏதேனும் ஒன்று முதலிடம் பெறலாம்.

இப்படி முதலிடத்தை ஒரு பொருளால் நிரப்பிய பின்னர், எஞ்சிய பொருள்கள் $(n-1)$; இடங்கள் $(r-1)$.

$(n-1)$ பொருள்களைக் கொண்டு வரிசையாக $(r-1)$ பொருள்களால் ஏற்படும் எல்லா வித வரிசைகளின் எண்ணிக்கையைக் குறியீட்டின்படி ${}^{n-1}p_{r-1}$ ஆகும்,

ஆகவே, r இடங்களையும் $n\times {}_{n-1}p_{r-1}$ வழிகளில் நிரப்பலாம்.

$$\therefore \quad {}^{n}p_{r}=n+{}_{n-1}p_{r-1} \qquad ...(2)$$

அதில், n-க்கு வரிசையாக $n-1$, $n-2$,...முதலிய மதிப்புகளையும், r-க்கு வரிசையாக, $r-1$, $r-1$...மதிப்புகளையும் கொடுக்க நாம் பெறுவது

$$n-1^{p}r-1 = n-1\times n-2^{p}r-2$$

$$n-2^{p}r-2 = n-2\times n-3^{p}r-3$$

... ...

... ...

$$n-r+1^{p}1 = n-r\times 1$$

இரு புறத்தையும் பெருக்கிப் பொதுக் காரணிகளை நீக்கி, கிடைப்பது $n^pr = n(n-1)\ (n-2)......(n-r+1)$

(iv) காரணீயக் குறியீட்டு முறை (Factorial Notation)

அடுத்தடுத்த முதல் இயற்கை யெண்களின் பெருக்கற் பலனை $n!$ அல்லது $\lfloor n$ என்று குறிப்பது வழக்கம். இதை 'Factorial n' என வாசிக்கவும்.

(அதாவது) $n(n-1)\ (n-2)...3\cdot2\cdot1\cdot$ என்னும் தொடர் பெருக்கத்தை $n!$ எனக்குறிப்பிடுகிறோம்.

(v) n^pr ஐக் காரணீயக் குறியீட்டு முறையில் எழுதுதல்.

$$n^pr = n(n-1)\ (n-2)...(n-r+1)$$

$$= \frac{n(n-1)\ (n-2)......(n-r+1)\ (n-r)\ (n-r-1)...3.2.1}{(n-r)\ \ (n-r-1)\ \ ...3.2.1}$$

(அதாவது) $n^pr = \dfrac{n\,!}{(n-r)\,!}$ ...(3)

(vi) $n^pn = n(y-1)\ (n-2)...(n-n+1)$

$$= n(n-1)\ (n-2)......1$$

$$= n\,! \qquad ...(4)$$

n^pr மதிப்பில் rக்கு n ஈடு செய்ய, இப் பலன் கிடைக்கும்.

(vii) 0 !-ன் மதிப்பு:

காரணீயக் குறியீட்டு முறைப்படி,

$$n^pr = \frac{n\,!}{(n-r)\,!}$$ ஆகும்.

எனவே, $n^pn = \dfrac{n\,!}{(n-r)\,!} = \dfrac{n\,!}{0\,!}$ ஆகும்.

ஆனால், $n^pn = n\,!$ என மேலே பார்த்தோம். ஆகவே $\dfrac{n\,!}{0\,!} = n\,!$ எனப் பெறுகிறோம். $0\,! = \dfrac{n\,!}{n\,!} = 1$

$\therefore\ 0\,! = 1$ ...(5)

(viii) விளக்க மாதிரிகள்

மாதிரி 1 : 0, 3, 5, 6, 7, 8 என்னும் இலக்கங்களைக் கொண்டு ஒரு முறை வந்த எண் திரும்பியும் வராதபடி எத்தனை மூன்றிலக்க முள்ள ஒற்றைப்படையெண்களை அமைக்கலாம் ?

கொடுத்த நிபந்தனைக்குட்பட்டு 3 இடங்களை நாம் கொடுக்கப் பட்ட இலக்கங்களால் பூர்த்தி செய்ய வேண்டும்.

ஒற்றைப்படை எண்களே தேவையாதலால், ஒன்றுவது இடம் 3 அல்லது 5 அல்லது 7 ஆகவே அமைய வேண்டும். ஆகையால் ஒன்றுவது இடம் 3 வழிகளில் நிரப்பப்படலாம். இப்படி மேற் கொள்ளும் ஒவ்வொரு வழியிலும் 2 ஒற்றைப் படை எண்கள் விடு பட்டுப்போய்விடும். 0 தவிர, மேலும் இரண்டு இலக்கங்கள் உள்ளன. ஆகவே 5 இலக்கங்கள் உள்ளன. இவற்றில் முதல் இடத்தில் 0 வரக் கூடாதாதலால், முதல் இடத்தை நிரப்ப 4 இலக்கங்களே உள்ளன. எனவே, முதல் இடத்தை 4 வழிகளில் நிரப்பலாம். இப்படி முதல் இடத்திற்கு ஓர் இலக்கமும், கடைசி இடத்திற்கு ஓர் இலக்கமும் போக மீதி உள்ள 4 இலக்கங்களில் 0 உள்பட ஏதேனும் ஓர் இலக்கம் இடை இடம் வகிக்கலாம். ஆகையால் இடை இடம் ஏதேனும் 4 வழிகளில் நிரப்பப்படலாம்.

ஆகவே 4 காலியிடங்களையும் $4 \times 4 \times 3$ வழிகளில் நிரப்பலாம்.

$\therefore$ கொடுத்த நிபந்தனைக்குட்பட்டு மூன்றிலக்க ஒற்றைப் படை எண்களின் எண்ணிக்கை $= 48$.

மாதிரி 2 : '*FATHER*' என்னும் சொல்லிலுள்ள எழுத்து களை வரிசை மாற்றம் செய்து பெற்றவற்றை அகராதி முறைப்படி அமைத்தால் கொடுத்த சொல் எத்தனையாவது இடத்தில் காணப்படும் ?

கொடுத்த சொல்லில் 6 எழுத்துகள் உள்ளன. *A*-யுடன் ஆரம்பிக்கும் சொற்கள் முதலில் வரும். பின் *E*-யுடன் தொடங்கும் சொற்கள் இடம் பெறும். பிறகு மற்றைய எழுத்துகள் தொடர் புற்று வரும்.

A-யுடன் ஆரம்பிக்கும் சொற்களின் எண்ணிக்கை, *A*-க்கு அடுத்து வரும் இதர 5 எழுத்துகளையும் வரிசை மாற்றம் செய்து பெறும் எண்ணிக்கையேயாம். இந்த எண்ணிக்கை $5p5$ (அதாவது $5!$ ஆகும்.

அடுத்து *E*-யுடன் ஆரம்பிக்கும் சொற்களின் எண்ணிக்கை 5 ! ஆகும்.

பிறகு *F* உடன் ஆரம்பிக்கும் சொற்கள் வரும். அவற்றுள் *FAE* உடன் ஆரம்பிக்கும் சொற்கள் முதலில் வரும். அவற்றின் எண்ணிக்கை 3 ! ஆகும்.

பிறகு *FAH* உடன் ஆரம்பிக்கும் சொற்களின் எண்ணிக்கை 3 ! ஆகும்.

அதன் பிறகு, *FAR* உடன் ஆரம்பிக்கும் சொற்களின் எண்ணிக்கை 3 ! ஆகும்.

பிறகு *FATE* உடன் ஆரம்பிக்கும் சொற்களின் எண்ணிக்கை 2 ! ஆகும். அடுத்த சொல் *FATHER* ஆகும்.

∴ அகராதியில் இந்த சொல்லின் இடம் $5!+5!+3!+3!+3!+2!+1$ ஆகும்.

அஃதாவது $120+120+6+6+6+2+1=261$ ஆவது இடமாகும்.

விளக்க மாதிரி 3.

4 மாணவர்கள், 3 மாணவிகள் கொண்ட குழுவொன்றை வரிசையாக உட்கார வைக்க வேண்டும். கீழ்க் கொடுக்கப் பட்டுள்ள நிபந்தனைக்குட்பட்டு எத்தனை விதமாய் வரிசையை அமைக்கலாம் எனக் காண்க.

(i) மாணவிகள் யாவரும் ஒன்ருகச் சேர்ந்து உட்கார வேண்டும்.

(ii) எல்லா மாணவிகளும் ஒன்ருகச் சேர்ந்து உட்கார லாகாது.

(iii) எவ்விரு மாணவிகளும் ஒன்ருகச் சேர்ந்து உட்கார லாகாது.

(iv) மாணவர்கள் யாவரும் ஒன்ருகவும், மாணவிகள் யாவரும் ஒன்ருகவும் அமரவேண்டும்.

தீர்வு :

(i) மூன்று மாணவிகளையும் ஒரு தொகுதியாகக் கொள்க. நான்கு மாணவர்களோடு ஒரு குறிப்பிட்ட மாணவிகளையும்

கூட்டி வெவ்வேறு பட்டவர்களாகக் கருதி வரிசை மாற்றம் செய்தால், அது $5p5 = 5!$ வழிகளாகும். இனி இந்த வரிசை மாற்றங்கள் ஒவ்வொன்றிலும், 3 மாணவிகள் தமக்குள்ளே $3p3 = 3!$ வழிகளில் வரிசைப்பட்டு அமரலாம்.

ஆகவே, மொத்தம் $5! \times 3! = 120 \times 6 = 720$ வரிசை மாற்றங்கள் வந்தமையும்.

(ii) எவ்வித நிபந்தனையுமில்லாமல், 4 மாணவர்கள், 3 மாணவிகள் ஆக மொத்தம் 7 பேர்களும் தமக்குள்ளே $7p7$ அல்லது $7!$ அதாவது 5040 வரிசைகளில் அமரலாம். இவற்றுள் 720 வரிசை மாற்றங்களில் 3 மாணவிகளும் ஒன்று சேர்ந்து உட்காருகிறார்கள்.

ஆகவே $5040 - 720$ அதாவது 4320 வரிசை மாற்றங்களில் மாணவிகள் மூவரும் ஒன்றாகச் சேர்ந்து உட்கார மாட்டார்கள்.

(iii) எவ்விரு மாணவிகளும் சேர்ந்து உட்காரக்கூடாது எனின், முதலில் 4 மாணவர்களை $4p4$ அதாவது 24 வழிகளில் அமரச் செய்யும். இவற்றில் ஒரு வரிசையை எடுத்துக் கொண்டால், மாணவர்களுக்கு இடையே 3 இடங்களும், முன்னே முகப்பில் ஓர் இடமும், அப்பால் பின்னே இறுதியில் ஓர் இடமுமாக 3 மாணவிகளை அமர்த்த 5 இடங்கள் வாய்க்கின்றன. இந்த 5 இடங்களில் ஏதேனும் 3 இடங்களில் 3 மாணவிகளை உட்காரவைப்பின், எவ்விரு மாணவிகளும் ஒன்று சேர்ந்து வர முடியாது. இதை $5p3$ அதாவது $5 \times 4 \times 3 = 60$ வழிகளில் செய்யலாம். இவ்விதமாக மேற்கூறிய 24 வழிகளில் செய்ய, நமக்கு $24 \times 60 = 1440$ வரிசைகள் வரும். ஆகவே எவ்விரு மாணவிகளும் ஒன்று சேர்ந்து உட்காராமல் 1440 வரிசைகளில் அவர்களை அமர்த்தலாம்.

(iv) 4 மாணவர்களை அவர்களுக்குள்ளே $4p4$ அல்லது $4!$ விதமாய் வரிசையாய் அமர்த்தலாம்.

3 மாணவிகளை தமக்குள்ளே $3p3$ அதாவது $3!$ வழிகளில் வரிசையாய் உட்கார வைக்கலாம்.

மாணவ, மாணவி என இரு பிரிவுகளை அவர் தம் முள் $2!$ விதமாய் அமைக்கலாம்.

ஆகவே மாணவர்கள் ஒன்றாகவும், மாணவிகள் ஒன்றாகவும் $4! \times 3! \times 2!$ விதமாய் உட்கார வைக்கலாம்,

அதாவது $24 \times 6 \times 2 = 288$ வரிசைகளில் அமர்த்தலாம்.

பயிற்சி 6-1.

1. மதிப்பைக் கண்டறிக : (i) $12P4$ (ii) $5P5$
[விடை : 11880 ; 120]

2. *A* இடம் 5 வேறான புத்தகங்களும், *B* இடம் 6 வேறான புத்தகங்களும் உள்ளன. எத்தனை வெவ்வேறு விதங்களில் *A*-ம், *B*-ம் ஒவ்வொரு புத்தகத்தைத் தங்களுக்குள் மாற்றிக் கொள்ளலாம் ? [விடை : 30]

3. ஒருவன் சென்னையிலிருந்து மதுரை செல்ல 6 வழிகள் உள்ளன வென்றால், ஏதாமொரு வழியாகச் சென்று மற்றொரு வழியாகத் திரும்ப விரும்பினால், எத்தனை விதங்களில் அவன் தன் பயணத்தை முடிக்கலாம் ?
[விடை : 30]

4. எழுத்துப் பூட்டொன்றில் 3 வளையங்கள் உள்ளன. ஒவ்வொரு வளையத்திலும் 6 வேறு எழுத்துகள் பொறிக்கப்பட்டுள்ளன. திறவுச் சொல்லை (key word) அறியாதவனொருவன் அப் பூட்டைத் திறக்க முயலுகையில் எத்தனை முயற்சிகள் பயனற்றவை ஆகுமெனக் காண்க.
[விடை : 215]

5. ஆறு பொருளியல் நூல்களும், மூன்று கணித நூல்களும், இரண்டு வரலாறு நூல்களும் ஓரடுக்குத் தட்டில் இடம் பெறும் பொழுது ஒரே பொருளைப் பற்றிய நூல்கள் ஒருங்கு நிற்க வேண்டுமென்றால் இவற்றை எத்தனை வகையாக வரிசைப் படுத்தலாம் ?
[விடை : $6! \times 3! \times 2! \times 3!$]

6. "*STRANGE*" என்னும் சொல்லில் உள்ள எழுத்துகளை வரிசை மாற்றம் செய்யுங்கால், உயிரெழுத்துகள் (vowels) ஒற்றையிடங்களில்தான் இருக்கலாமென்றால், எத்தனை வரிசை மாற்றங்கள் வரும் ? [விடை : 1440]

7. 5 இந்துக்கள், 3 முஸ்லிம்கள், 2 கிறித்தவர்கள் ஒரு வரிசையில் அமர்த்தப்பட வேண்டும். கிறித்தவர்கள் எவரும் முதல் நான்கு இடங்களைத் தவிர பிற இடங்களில் அமரக்கூடாது என்றும், முஸ்லிம்கள் எவரும் முதல் எட்டு இடங்களைத் தவிர பிற இடங்களில் அமரக் கூடாது என்றும் உள்ள நிபந்தனைகளை யொட்டி எத்தனை

வழிகளில் அவர்களை வரிசையாக அமர்த்தலாம் என்று காண்க. [விடை : 172800]

8. 2, 4, 5, 7, 8 என்னும் எண்களைக் கொண்டு ஒரு முறை வந்த எண் திரும்பவும் வராதபடி நான்கிலக்க எண்கள் எத்தனை அமைக்கலாம்? [விடை : 120]

9. 0, 5, 6, 2, 4 என்னும் எண்களைக் கொண்டு ஒரு முறை வந்த எண் திரும்பவும் வராதபடி மூன்றிலக்க எண்கள் எத்தனை அமைக்கலாம்? [விடை : 48]

10. 0, 1, 2,.........9 என்னும் இலக்கங்களைக் கொண்டு ஒரு முறை வந்த எண் திரும்பவும் வராதபடி, எத்தனை

(i) ஐந்திலக்கமுள்ள எண்களை அமைக்கலாம்? [விடை : $9 \times {}^{9}P_{4}$]

(ii) மூன்றிலக்கமுள்ள ஒற்றைப் படை எண்களை அமைக்கலாம்? [விடை : 320]

(iii) நான்கிலக்க முள்ள இரட்டைப்படை எண்களை அமைக்கலாம்? [விடை : 2296]

11. 0, 1, 2......9 என்ற இலக்கங்களைக் கொண்டு, ஒரு முறை வந்த இலக்கம் திரும்பவும் வராதபடி, 1000-க்கு மேற்பட்டு, 10,000-க்கு உட்பட்டு எத்தனை ஒற்றைப் படை எண்கள் அமைக்கலாம்? அவற்றில் எத்தனை 5ஆல் மீதியின்றி வகுபடக் கூடியவை? [விடை : 2240; 448]

12. 0, 1, 2,......9 என்ற இலக்கங்களைக் கொண்டு ஒரு முறை வந்த இலக்கம் திரும்பவும் வராதபடி 1000-க்கு உட்பட்டு 5ஆல் மீதியின்றி வகுபடக் கூடிய எண்கள் எத்தனை அமைக்கலாம் எனக் காண்க. [விடை : 154]

13. 1, 2, 3, 4 என்னும் இலக்கங்கள் ஒவ்வோர் எண்ணிலும் ஒரு முறையே உபயோகித்து அமைத்துக் கொண்ட எல்லா எண்களின் கூட்டுத் தொகையைக் கண்டறிக. [விடை : 66660]

14. *MOTHER* என்னும் சொல்லிலுள்ள எழுத்துகளை வரிசை மாற்றம் செய்து பெற்றவற்றை அகராதி முறைப்படி அடுக்கினால், கொடுத்த சொல் எத்தனையாவது இடத்தில் காணப்படும்? [விடை : 309]

15. ஒரு தேர்வுக்கு ஆறு வினாத்தாள்கள் ஏற்படுத்தப் பட்டுள்ளன. இவற்றுள் இரண்டு தாள்கள் கணித பாடத்தைச் சார்ந்தனவாகும். கணித பாடத்திற்குரிய தாள்கள் அடுத்தடுத்து வராதபடி தேர்வுகளை எத்தனை வழிகளில் நடத்தலாம்? [விடை : 480]

16. 6 சிறுவர்களும் 4 சிறுமிகளும் ஒரு நேர் வரிசையில் நிறுத் தப்படும் பொழுது எவ்விரண்டு சிறுமிகளும் ஒன்று சேர்ந்து நிற்கக்கூடாது என்னும் நிபந்தனைக்குட்பட்டு அவர்களை எத்தனை வரிசைகளில் நிறுத்தலாம்? [விடை : $6! \times 7p4$]

4. சேர்வுகள் (Combinations)

(i) வரையறை வெவ்வேறு பட்ட பொருள்களைக் கொண்ட ஒரு திரளிலிருந்து ஒவ்வொரு தடவையும் ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணிக் கையான பொருள்களையெடுத்து வரிசை முறை நோக்காமல் சேர்த் தமைத்த பொறுக்கு வகைகளே சேர்வுகள் எனப்படும். ... (1)

(ii) $n^c1 = n$

n பொருள்களிலிருந்து தடவைக்கு ஒன்றாக எடுத்துச் சேர்த் தால், சேர்க்கும் விதங்களின் எண்ணிக்கை n ஆகும் என்பது வெளிப்படையாகும்.

(iii) $n^c1 = 1$ ...(2)

n பொருள்களிலிருந்து எல்லாப் பொருள்களையும் பொறுக்கு வது ஒரே முறையில்தான் செய்ய முடியும்.

(iv) n^cr-ன் மதிப்பைக் காணுதற்கான சூத்திரம்

n வகையான பொருள்கள் a, b, c, d.........என்பனவாகுக.

ஒருதடவைக்கு r வீதம் எடுத்தமைக்க வரும் சேர்வுகளின் எண்ணிக்கை எவ்வளவு எனக் காணவேண்டும்.

இதை n^cr எனக் குறிப்போம்.

இனி n^cr சேர்வுகளைப் பூர்த்தியாக எழுதி அவைகள் எல்லா வற்றிலும் எழுதப்பட்ட எழுத்துகளின் மொத்த எண்ணிக் கையைக் கண்டறிவோம்.

ஒவ்வொரு சேர்விலும் r எழுத்துகள் உள்ளதால்' n^cr சேர்வுகள் அனைத்திலும் காணும் எழுத்துகளின் மொத்த எண்ணிக்கை $r \times n^cr$ ஆகும்.

இதையே மற்றொரு முறையிலும் காண்போம்.

n^cr சேர்வுகளில் உள்ள எழுத்துகளை, a வருவனவும், b வருவனவும், c நிற்பனவும் என இவ்வாறு எழுத்துதொறும் கண்டறிந்து தொகுப்பு செய்யலாம்.

இனி a என்னும் எழுத்து எத்தனை முறை தோன்றுகிறது எனக் காணுதற்கு, aஐத் தனிப்பட வைத்து எஞ்சிய $n-1$ எழுத்துகளிலிருந்து தடவைக்கு $r-1$ எழுத்துகள் வீதம் பொறுக்கியமைந்த $n-1^cr-1$ சேர்வுகள் ஒவ்வொன்றுடனும் aஐ இணைக்கவும். இப்படி ஏற்பட்ட சேர்வுகள் ஒவ்வொன்றிலும் a என்ற எழுத்தும், மற்றும் $(r-1)$ எழுத்துகளும் இருக்கும். ஆகவே n^cr சேர்வுகளில் $n-1^cr-1$ சேர்வுகளில் a என்ற எழுத்து தோன்றும். aஐப் பற்றிய இந்த முடிவு b, c, d,... என்ற ஒவ்வொரு எழுத்துக்கும் பொருந்தும்.

ஆகவே a, b, c, d, ... என்ற எழுத்துகள் ஒவ்வொன்றும் $n-c^cr-1$ சேர்வுகளில் வரும்.

$\therefore$ n^cr சேர்வுகளில் உள்ள எழுத்துகளின் மொத்த எண்ணிக்கை $n \times {}_{n-1}{}^cr-1$ ஆகும்.

$$\therefore \quad r \times n^cr = n \times {}_{n-1}{}^cr-1$$

$$\therefore \quad n^cr = \frac{n}{r} + n-1^cr-1 \qquad \ldots (3)$$

இச் சுருக்க வாய்பாட்டில் (Reduction formula) n-க்கு வரிசையாக $n-1$, $n-2$ முதலாகிய மதிப்புகளையும், r-க்கு $r-1$, $r-2$,...முதலாகிய மதிப்புகளையும் கொடுத்து, அவ்வாறு வருவனவற்றைப் பின்வருமாறு அமைத்து நிறுத்தலாம்.

$$n^cr = \frac{n}{r} \times n-1^cr-1$$

$$n-1^cr-1 = \frac{n-1}{r-1} \times n-2^cr-2$$

$$n-r+2^c2 = \frac{n-r+2}{2} \times n-n+1^c1$$

$$n-r+1^c1 = n-r+1$$

இருபக்கங்களையும் நேர்மேலாகப் பெருக்கி, ஒத்த உறுப்புகளை நீக்க, நாம் பெறுவது,

$$n^cr = \frac{n(n-1)(n-2)......(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)......1} \quad ...(4)$$

(v) n^cr-ன் மதிப்பைக் காரணீயக் குறியீட்டு முறையில் எழுதுதல்

$$n^cr = \frac{n(n-1)(n-2)......(n-r+1)}{r(r-1)(n-2)......1}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)......(n-r+1)}{r!}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)......(u-r+1)\cdot(n-r)(n-r-1)......}{r1, \quad (n-r)(n-r-1)......}$$

(அதாவது) $$n^cr = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad ...(5)$$

(vi) n^cr-ன் மதிப்பை n^pr-ன் மதிப்பைக் கொண்டு காணல்

ஒன்றற்கொன்று வேறுபட்ட n பொருள்களிலிருந்து தடவைக்கு r பொருள்களாகப் பொறுக்கிச் சேர்த்து ஏற்படும் சேர்வுகளின் எண்ணிக்கையையே n^cr எனக் குறிப்பிடுகிறோம். இதன் மதிப்பை நாம் கண்டறியவேண்டும்.

இதன் மதிப்பைக்காண, ஒவ்வொரு சேர்விலுமுள்ள r பொருள்களை அவற்றிற்குள்ளே வரிசை மாற்றஞ் செய்க. ஒவ்வொரு சேர்வில் உள்ள r பொருள்களை $r!$ முறைகளில் வரிசையாய் வைக்கமுடியும். இவ்வாறே n^cr சேர்வுகளிலும் உள்ள பொருள்களை வரிசை மாற்றஞ் செய்ய, மொத்தம் $n^cr \times r!$ வரிசை மாற்றங்கள் கிடைக்கும்.

ஆகவே, முதலில் n பொருள்களிலிருந்து தடவைக்கு r ஆக எடுக்கவரும் n^cr சேர்வுகளை அமைத்துக் கொண்டு பிறகு ஒவ்வொரு சேர்விலுமுள்ள r பொருள்களை அவை தமக்குள்ளே வரிசை மாற்றஞ் செய்து $n^cr \times r!$ எனும் மாற்றங்கள் பெற்றிருக்கிறோம்.

இம் முறையால் n பொருள்களில் தடவைக்கு r ஆக எடுத்தமைப்பதற்குச் சாத்தியமான எல்லா வரிசை மாற்றங்களையும் பெற்று விட்டோம். அதாவது இந்த வரிசை மாற்றங்கள் யாவும் n பொருள்களின் r பொருள்கள் எடுத்து அமைக்கும் வரிசை மாற்றங்களேயாகும்.

எனவே, $n^c r \times r\,! = n^p r$ ... (6)

(அதாவது) $n^c r \times r\,! = \dfrac{n\,!}{(n-r)\,!}$

$\therefore\ n^c r = \dfrac{n\,!}{r\,!\,(n-r)\,!}$ ... (7)

(vii) **நிரப்பும் சேர்வுகள் (Complementary Combinations)**

$n^c r = n^c n-r$ என நிறுவுக.

n பொருள்களிலிருந்து r பொருள்கள் கொண்ட ஒரு தொகுதியை எடுத்தோமானால், $(n-r)$ பொருள்கள் கொண்ட ஒரு தொகுதி தானாகவே, தவிர்க்கப்பட்டு பொறுக்கப்பட்டு விழுகின்றது. ஆகவே, ஒவ்வொரு விதமாக r பொருள்கள் பொறுக்கப்படும் போதும், $(n-r)$ கொண்ட தொகுதியொன்று விடப்படும்.

$\therefore$ 'r' பொருள்கொண்ட சேர்வுகளின் எண்ணிக்கை

$= (n-r)$ பொருள் கொண்ட சேர்வுகளின் எண்ணிக்கை

(அதாவது) $n^c r = n^c n-r$ ... (8)

மாற்று வழி $n^c r = \dfrac{n\,!}{r\,!\,(n-r)\,!}$

$$n^c n-r = \frac{n\,!}{(n-r)\,!\,\{n-(n-r\}\,!} = \frac{n\,!}{(n-r)\,!\,r\,!}$$

$\therefore\ n^c r = n^c n-r$ ஆகும்.

கிளைத் தேற்றம் :

$n^c x = n^c y$ ஆனால், $x=y$ ஆகிலும், $x+y=n$ ஆகிலும் இருக்க வேண்டும்.

(viii) $n^c r = n^c n-r$ என்னும் வாய்பாடு எண் கணிதச் செயல் முறைகளைச் சுருக்குவதில் அதிக பயனுடையதாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக, $100^c98 = 100^c(100-98) = 100^c2$

$$= \frac{100 \times 99}{1 \times 2} = 4950$$

(ix) n^c0-ன் மதிப்பை அறிதல்.

$r=0$ என்றிட, நாம் பெறுவது,

$n^cn = n^cn-0$ என்ற வாய்பாட்டில்

$n^c0 = n^cn-0 = n^cn$

ஆனால் $n^cn = 1$ என்றறிவோம்.

$\therefore$ $n^c0 = 1$ என்று விளக்கம் பெறுகிறோம். ... (9)

(x) $n^cr = n-1^cr + n-1^cr-1$ என நிறுவுக.

n பொருள்களைத் தடவைக்கு r ஆக எடுத்து அமைக்கிற சேர்வுகளின் தொகையைப் பின்வரும் இரு பகுதிகளாகப் பிரிக்கலாம்.

(i) ஒவ்வொரு சேர்விலும் ஒரு குறிப்பிட்ட 'a' என்னும் பொருளைக் கொண்டிருக்கும் சேர்வுகள்.

(ii) அக் குறிப்பிட்ட பொருளைப் பெறாத சேர்வுகள் இவ்விரண்டின் கூட்டுத் தொகையே n^cr-ன் மதிப்பாகும். (i)ஐப் பெற முதலில் 'a'ஐ அப்பாற்படுத்தி வைத்து, எஞ்சிய $(n-1)$ பொருள்களிலிருந்து தடவைக்கு $(r-1)$ பொருள்களாக எடுக்க வரும் தொகுதிகள் ஒவ்வொன்றினோடும் a ஐச் சேர்க்க, இப்படி ஏற்பட்ட சேர்வுகள் ஒவ்வொன்றிலும் a என்ற பொருளும், மற்றும் $(r-1)$ பொருள்களும் இருக்கும். ஆகவே n^cr சேர்வுகளில் $n-1^cr-1$ சேர்வுகளில் 'a' என்ற பொருள் தோன்றும்.

(ii) ஐப் பெற 'a' ஐ அடியோடு அகற்றி, எஞ்சிய $(n-1)$ பொருள்களிலிருந்து தடவைக்கு எடுக்க வேண்டிய எல்லா r பொருள்களையும் எடுத்துச் சேர்வுகள் அமைத்தால், 'a' என்ற பொருள் வராத சேர்வுகள் வரும்.

இவற்றின் எண்ணிக்கை $n-1^cr$ ஆகும்.

ஆகவே $\underline{nr = n-1^cr + n-1^cr-1}$ ... (10)

மாற்றுவழி : $n^{c}r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ என்ற வாய்பாடு கொண்டும் நிறுவலாம்.

வலப்பக்கம் $= n-1^{c}r + n-1^{c}r-1$

$$= \frac{(n-1)-!}{r!\,(n-1r)!} + \frac{(n-1)!}{(r-1)!\,(n-r)!}$$

$$= \frac{(n-1)!}{r!\,(n-r-1)} + \frac{(n-1)!}{(r-1)!\,(n-r)!}$$

$$= \frac{(n-1)!}{(n-r-1)!\,(r-1)!}\left[\frac{1}{r} + \frac{1}{n-r}\right]$$

$$= \frac{(n-1)!(n-r+r)}{r!\,(n-r)!}$$

$$= \frac{n\,(n-1)!}{r!\,(n-r)!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

$= n^{c}r =$ இடப் பக்கம்

(xi) விளக்க மாதிரிகள் :

மாதிரி 1 : ஒன்பது மெய்யெழுத்துகளையும், நான்கு உயிரெழுத்துகளையும் கொண்டு சொற்களை அமைக்குங்கால், இரண்டு உயிரெழுத்துகளும் 4 மெய்யெழுத்துகளுமே இடம் பெறும் சொற்கள் எத்தனை வரும் ?

4 உயிரெழுத்துகளிலிருந்து 2 உயிரெழுத்துகளை $4^{c}2$ வகையில் தேர்ந்தெடுக்கலாம்.

9 மெய்யெழுத்துகளிலிருந்து 4 மெய்யெழுத்துகளை $9^{c}4$ வகைகளில் தேர்ந்தெடுக்கலாம்.

∴ இரு எழுத்துக்களையும் சேர்ந்து தேர்ந்தெடுக்கும் கூட்டு வகைகள் $9^{c}4 \times 4^{c}2$ ஆகும்.

இவை ஒவ்வொன்றிலும் 6 எழுத்துகள் உள்ளன.

அவை தமக்குள் 6! வழிகளில் வரிசை மாற்றஞ் செய்யலாம்

ஆகவே, நமக்கு கிடைக்கும் சொற்களின் எண்ணிக்கை

$= 9^{c}4 \times 4^{c}2 \times 6!$ ஆகும்.

மாதிரி 2: 8 ஆசிரியர்களும், 6 மாணவர்களும் உள்ள அமைப்பிலிருந்து அறுவரைக் கொண்ட குழுவை அமைக்குங்கால், ஆசிரியர்களுக்கே பெரும் பங்கு கிடைக்கவும், குறைந்தது ஒரு மாணவராவது இடம் வகிக்கும்படியும் அக் குழுவை எத்தனை வகைகளில் அமைக்கலாம் ?

6 பேர் குழுவில், பெருவாரியான இடங்கள் ஆசிரியர்களுக்குக் கிடைக்க வேண்டுமானால், அவர்களுக்கு குறைந்தது $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ அதாவது $\left(\frac{6}{2}+1\right) = 4$ இடங்கள் ஒதுக்கப்பட வேண்டும்.

ஆகவே அக் குழுவை

(i) 4 ஆசிரியர், 2 மாணவர் (அல்லது) (ii) 5 ஆசிரியர், 1 மாணவர் சேர்ந்தேனும் தனித்தனியான வகைகளில் அமைக்கலாம்.

எட்டு ஆசிரியர்களிலிருந்து 4 ஆசிரியர்களை 8^c4 விதங்களில் தேர்ந்தெடுக்கலாம்.

6 மாணவர்களிலிருந்து 2 மாணவர்களை 6^c2 வழிகளில் தேர்ந்தெடுக்கலாம்.

இவ்விரண்டும் தனித்தனி செயல்கள்.

ஆகவே, 4 ஆசிரியர்களையும், 2 மாணவர்களையும் கொண்ட குழுவை $8^c4 \times 6^c2$ வகைகளில் அமைக்கலாம். இவ்வாறே, 5 ஆசிரியர்கள், 1 மாணவர் கொண்ட குழுவை $8^c5 \times 6^c2$ வகைகளில் அமைக்கலாம்.

எனவே, அக் குழுவை $8^c4 \times 6^c2 + 8^c5 \times 6^c1$ விதங்களில் அமைக்கலாம்.

அதாவது $70 \times 15 + 56 \times 6 = 1050 + 336 = 1386$ வழிகளில் அமைக்கலாம்.

பயிற்சி 6-2.

1. மதிப்பைக் காண்க : (i) 50^c48 (ii) 25^c24 (iii) 20^c0 (iv) 100^c1 (v) 15^c15

2. (i) $17^c3r-1 = 17^c2r-7$ எனில், r-ன் மதிப்பென்ன ?
[விடை ; $r=5$]

(ii) $n^c n-2=15$ ஆனால், n-ன் மதிப்பென்ன ?
[விடை : $n=6$]

(iii) $n^c 9=n^c 11$ ஆனால், n^c 18-ன் மதிப்பென்ன ?
[விடை : 190]

3. n பக்கங்கள் உள்ள ஒரு பல் கோணத்தில், எத்தனை மூலை வரைகள் உள்ளன ? அப்பல் கோணத்தின் உச்சிகளைச் சேர்ப்பதால், எத்தனை முக்கோணங்கள் உண்டாகும் ?
[விடை : $n(n-3)/2$; $n^c 3$]

4. A என்பவன் 5 புத்தகங்களையும், B என்பவன் 6 புத்தகங்களையும் வைத்திருக்கிறார்கள். A-யின் புத்தகங்களுள் இரண்டனை B-ன் புத்தகங்களில் இரண்டனுக்கு எத்தனை வழிகளில் தங்களுக்குள் மாற்றிக் கொள்ள முடியும் ?
[விடை : 150]

5. எத்தனை வழிகளில் 15 புத்தகங்களிலிருந்து 5 புத்தகங்கள் பொறுக்கி யெடுக்கப்படும் ? இவற்றுள் எத்தனை வழிகள் ஒரு குறிப்பிட்ட புத்தகத்தை (i) பெற்றிருக்கும் (ii) பெருதிருக்கும் ? [விடை : 3003; 1001; 2002]

6. r அடுத்தடுத்த நேர் முழு எண்களின் பெருக்குத் தொகை $r!$ஆல் மீதியின்றி வகுபடுமென நிறுவுக.

7. பன்னிரண்டு விபரல்களும் ஒன்பது கன்சர்வேடிவ்களும் உள்ள தொகுதியிலிருந்து 8 பேரைக் கொண்ட குழுவை அமைக்க வேண்டும். இக் குழுவில் விபரல்களே பெருவாரியான இடம் கிடைக்க வேண்டுமாயினும், குறைந்த பட்சம் 2 கன்சர்வேடிவ்களாவது அங்கம் வகிக்க வேண்டும் என்னும் நிபந்தனைக்குட்பட்டு, இக் குழுவை எத்தனை வழிகளில் அமைக்கலாம் ?
[விடை : $12^c 5\times 9^c 3+12^c 6\times 9^c 2$]

8. ஏழு ஆடவரும், 4 மகளிரும் கொண்ட பகுதியிலிருந்து அறுவரைக் கொண்ட குழுவொன்றை அமைக்க வேண்டும். அக் குழுவில் (i) சரியாக இரண்டு மகளிரே இடம் பெறுவதானுலும், (ii) குறைந்த பட்சம் இரண்டு மகளிரேனும் இடம் வகிக்க வருமானுலும், அக்குழுவை எத்தனை வகைகளில் அமைக்கலாம்? [விடை : 210; 371]

9. பொருளியலில் 6 நூல்களும், கணிதத்தில் 3 நூல்களும், வணிகவியலில் இரண்டு நூல்களும் உள்ளன. இப்பதி

ஞெரு நூல்களிலிருந்து ஒவ்வொரு பாடத்திலும் குறைந்த பட்சம் இரண்டு புத்தகங்களேனும் இடம் பெறும்படி எத்தனை வழிகளில் 8 புத்தகங்களைச் சேர்க்கலாம்.?

[விடை : 65]

10. கீழ்க்காணும் நிபந்தனைக் குட்பட்டு கிரிக்கெட் (cricket) குழுவிற்கு வேண்டிய 11 பேர்களை எத்தனை வழிகளில் தேர்ந்தெடுக்கலாம் ?

(i) ஆட்டக்காரர் பதின்மூவர். அவர்களில் இருவரே விக்கெட் காப்பதற்குத் தகுதியுடையவர்.

[விடை : 132]

(ii) ஆட்டக்காரர் 20 பேர். இவர்களில் குறிப்பிட்ட ஐவர் விளையாடியாக வேண்டும். எஞ்சியோருள் இருவரில் ஒருவர் விக்கெட் காத்து நிற்கத் தேர்ந்தெடுத்தாக வேண்டும். [விடை : $2 \times 14c5$]

11. ஏழு கிரிக்கட் ஆட்டக்காரர்களைக் கொண்ட ஒரு குழுவிலிருந்தும், 9 ஆட்டக்காரர்களைக் கொண்ட மற்றொரு குழுவிலிருந்தும் பதினொரு ஆட்டக்காரர்களைக் கொண்ட ஒரு குழுவை தேர்ந்தெடுக்க வேண்டியதாகின்றது. இதில் எழுவரைக் கொண்டுள்ள குழுவிலிருந்து ஐவருக்குக் குறையாமல் ஆட்களை பொறுக்க வேண்டுமெனில், இதன் படி எத்தனை வழிகளில் ஆட்டக்காரர்களை தேர்ந்தெடுக்கலாம். [விடை : 2772]

12. 7 இந்துக்கள், 3 முஸ்லிம்கள், 2 கிறித்தவர்கள் கூடிய தொகுதியிலிருந்து எண்மரைக் கொண்ட மந்திரி சபையை அமைக்குங் காலத்தில் எம் மதமும் பிரதி நிதித்துவம் பெறுதொழிதல் கூடாது. மேலும் இச் சபையில், முஸ்லிம்களின் எண்ணிக்கைக்கு கிறித்தவர்கள் தொகை எப்பொழுதும் குறைந்திருக்கவும் கூடாது என்றால், இச் சபையை எத்தனை வழிகளில் அமைக்கலாம்.

[விடை : 210]

13. ஆறு ஆசிரியர்களும், 4 மாணவர்களும் உள்ள தொகுதியிலிருந்து 8 பேரைத் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும். இக் குழுவில் (i) 4 ஆசிரியர்களுக்குக் குறையாமல் இருக்க வேண்டும் (ii) ஆசிரியர்களே பெரும் பங்கு இருக்க வேண்டும் என்ற விதிகளுக்கு ஏற்பத் தனித்தனியே இக் குழுவை எத்தனை வழிகளில் அமைக்கலாம் ?

[விடை 45, 30]

14. ஓர் அலுவலகத்தில் மூன்று தட்டெழுத்தாளர்களின் (typists) இடங்களும், இரண்டு எழுத்தர்களின் (clerks) இடங்களும் காலியாக உள்ளன. முன்னிடங்கள் பெண்கள் மட்டும் வகிக்கத்தக்கன. பின்னிடங்கள் ஓரிடமாவது ஆண்களுக்கு ஒதுக்கப்படல் வேண்டும். இவ்வுத்தியோக இடங்கள் எல்லாம் வெவ்வேறானவையாகும். அவற்றிற்கு 5 பெண்களும், 4 ஆண்களும் விண்ணப்பம் செய்திருந்தால், அவ்விடங்களை எத்தனைவழிகளில் நிரப்பலாம்? [விடை : 140]

15. மூன்று முஸ்லிம்களும், 50 இந்துக்களுமாகிய மாணவர்களைக் கொண்டதொரு பள்ளிக் கூடத்திற்கு நான்கு உபகாரச் சம்பளங்கள் கிடைக்கப் பெறும். இவற்றை வழங்கப் பெறுவோருள் ஒரு முஸ்லிம் மாணவனாவது இருக்கவேண்டு மென்பது நிபந்தனையானால், இதனை எத்தனை வழிகளில் வழங்கலாம்? [விடை : 62525]

16. ஒன்பது பேரை உள்ளேயும், 6 பேரை வெளியேயும் சுமந்து கொண்டு போகக்கூடியதோர் உந்து வண்டியில் 15 பேர் பயணம் செய்ய வேண்டியதாகின்றது. இவர்களுள் மூவர் வெளியிலிருப்பதற்கும் இருவர் உள்ளே போவதற்கும் இசையாதவர்களானால் இக் கூட்டத்தினரை எத்தனை வகையில் உள்ளேயும் வெளியேயுமாகப் பிரிக்கலாம்? [விடை : 210]

17. ஒரு கிரிக்கெட் கழகம் 14 அங்கத்தினரைக் கொண்டுள்ளது. இவர்களுள் ஐவர்தாம் பந்தை எறியக் கூடியவராவர் (bowlers). பந்தெறியக் கூடியவர்கள் குறைந்தது மூன்று பேராவது இருக்கும்படி பதினொருவரை எத்தனை வழிகளில் தேர்ந்தெடுக்கலாம்? [விடை : 354]

18. எட்டுத் துடுப்புடைய படகொன்றில், எட்டுப் பேருளர். இவர்களுள் மூவர் ஒரு பக்கத்திலும் இருவர் மற்ற பக்கத்திலும் மட்டுமே துடுப்பைப் பிடித்து ஓட்டமுடியும். என்றால், பக்கத்துக்கு நால்வராக இவர்களை எத்தனை வகைகளில் வரிசையாக அமர்த்தலாம்? [விடை : 1728]

19. பக்கத்துக்கு எண்மராக அமரக் கூடியதொரு நீண்ட மேசையின் மேல் 16 பேருக்காக ஒரு தேநீர் விருந்து ஏற்பாடாயிற்று. அவர்களுள் நால்வர் ஒரு பக்கத்திலும் இருவர் மறுபக்கத்திலுமே அமர விரும்பினால், அவர்களை எத்தனை வகையாக அமர்த்தலாம்? [விடை : $210\times(8!)^2$]

7. ஈருறுப்புக் கோவைத் தேற்றம்
(Binomial Theorem)

1. $(x+a)$ என்பது ஓர் ஈருறுப்புக் கோவையாகும்.

முதலில், n சாதாரண முழு எண் (Positive integer) என்றால், விரிவு $(x+a)^n$ என்ன என்பதைக் காண்போம்.

சாதாரணப் பெருக்கல் வழியாக, நாம் கீழ்க்கண்டதை அறிவோம்.

$$(x+a)^2 = x^2+2xa+a^2$$
$$(x+a)^3 = x^3+3x^2a+3xa^2+a^3$$

ஆனால் இவ்வாறாக $(x+a)^{10}$-ன் விரிவைப் பெருக்கல் வழிக் காணப்புகுவோமானால், பெருக்கிக் காணும் முயற்சியில் ஏற்படும் உழைப்பு மிக அதிகம். இன்னும் அதிக அடுக்குக்கு உயர்த்திப் பலனைக் காண முற்படும்போது, முயற்சியையே கைவிட்டுவிடத் தோன்றும்.

இவ்வாறு பெருக்கல் வழி ஏற்படும் உழைப்பைத் தவிர்த்து $(x+a)^n$-ன் விரிவை ஒரு தொடராகக் கண்டு பிடித்து உலகிற்கு வழங்கிய பெருமை, உலகப் புகழ்பெற்ற கணித மேதை சர். ஐசக் நியூட்டன் என்பவரைச் சாரும். இவர் இத் தேற்றத்தைக் கி.பி. 1665-க்கு அண்மையில் வெளியிட்டார்.

2. ஈருருப்புக் கோவைத் தேற்றம் (நேர் முழு எண் அடுக்கிற்கு) (Binomial Theorem for a positive integral index)

தேற்றம் :

$$(x+a^n) = x^n+{}^nC_1x^{n-1}a+{}^nC_2x^{n-2}a^2+\dots+{}^nC_rx^{n-r}a^r+\dots+a^n.$$

இதுவே ஈருறுப்புக் கோவைத் தேற்றமாகும்

நிருபணம் :

$$(x+a_1)(x+a_2) = x^2+x(a_1+a_2)+a_1a^a{}_2$$

$$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3) = x^3+x^2(a_1+a_2+a_3)+x(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)+a_1a_2a_3$$

என நேரடியாகப் பெருக்கி அறியலாம்.

இனி $(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)......(x+a_n)$ என்னும் n காரணி களின் பெருக்கற் பலனைக் கீழ்க்காணும் முறையில் எழுதலாம்:

$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)......(x+a_n)$

$= x^n+x^{n-1}(a_1+a_2+a_3+......$ என $^nC_1$ உறுப்புகள்)

$+x^{n-2}(a_1a_2+a_1a_3+......$ என $^nC_2$ உறுப்புகள்)

$+x^{n-r}(a_1a_2a_3...o^r+......$ என ^nC_r உறுப்புகள்)

$+a_1a_2a_3......a_n$ என ^nC_n அல்லது 1 உறுப்பு

$a_1, a_2,......a_n$ இவை ஒவ்வொன்றிற்கும் a எனப் பிரதியிட்டுச் சுருக்க,

$\therefore\ (x+a)^n = x^n+{}^nC_1x^{n-1}a+{}^nC_2x^{n-2}a^2+\cdots+{}^nC_rx^{n-r}a^r+\cdots+a^n$ என வருகிறது.

குறிப்பு : மேற்கூறிய $(x+a)^n$-ன் விரிவில் கவனிக்கத்தக்கவை:

(i) $(x+a)^n$-ன் பெருக்கத்தில் $(n+1)$ உறுப்புகள் உள்ளன.

(ii) x-ன் அடுக்கு ஒவ்வொன்ருகக் குறைய, a-ன் அடுக்கு ஒவ்வொன்ருக அதிகமாகிறது.

(iii) $^nC_1, {}^nC_2,......{}^nC_r, {}^nC_n$ என்பன ஈருறுப்பு விரிவுக் கெழுக் கள் (Binomial Coefficients) எனப்படும்.

(iv) முதல் உறுப்புக்கெழு $= 1 = {}^nC_0$

கடைசி உறுப்புக்கெழு $= {}^nC_n = 1$

இரண்டாவது உறுப்புக்கெழு $^nC_1 = n$

கடைசியிலிருந்து இரண்டாவது உறுப்புக்கெழு $= {}^nC_n - 1$
$= {}^nC_n = n$

இவ்வாறாக எழுதிப் பார்த்தால், முதலிலிருந்தும், கடைசியிலிலிருந்தும் சமதூரத்திலுள்ள உறுப்புகளின் கெழுக்கள் சமம்.

(v) $(x+a)^n$-ன் விரிவில், $(r+1)$ஆவது உறுப்பு பொது உறுப்பாகக் கொள்வது வழக்கம். இதை T_{r+1} எனக் குறிப்போம்.

$T_{r+1} = {}^nC_r\, x^{n-r}a^r$ ஆகும்.

(vi) $(x-a)^n = x^n - {}^nC_1x^{n-1}a + {}^nC_2x^{n-2}a^2 \ldots + (-1)^{r\,n}C_rx^{n-r}a^r + \ldots\ldots + (-1)^na^n$

(vii) $(x+1)^n = x^n + {}^nC_1x^{n-1} + {}^nC_2x^{n-2}t\ldots\ldots {}^nC_rx^{n-r} + \ldots + 1$

(viii) $(1+x)^n = 1 + {}^nC_1x + {}^nC_2x^2 + \ldots\ldots {}^nC_rx^{n-r}{}_r + \ldots + x^n$

(vi), (vii), (viit) என்பவற்றைக் கிளைத் தேற்றமாகக் கொள்ளலாம்.

3. nபடி ஈருறுப்புக் கோவையின் விரிவமைப்பில் உள்ள கெழுக்களைத் தழுவிய சில முற்றொருமைகள்

ஈருறுப்புக் கோவையின் விரிவில் தோன்றும் கெழுக்கள் ${}^nC_0$, ${}^nC_1$, ${}^nC_2$,……${}^nC_n$ என்பனவாகும்.

இவற்றில், n என்ற முன் அடி எழுத்தை (prefix) விலக்கி C_0, C_1, C_2,……C_n என்று சுருக்கி வரைவது வழக்கம்.

(i) $C_0+C_1+C_2+\ldots\ldots+C_n=2_n$ எனக் காட்டுக !

நாம் $(1+x)^n = C_0+C_1x+C_2x^2+\ldots\ldots+C_nx^n$ எனப் பெற்றிருக்கின்றோம்.

இதில் $x=1$ என இருபுறமும் ஈடுசெய்ய

$$2^n = C_0+C_1+C_2+\ldots\ldots+C_n \text{ எனவரும்.}$$

$$\therefore\ C_0+C_1+C_2+\ldots\ldots+C_n = 2^n \text{ ஆகும்.}$$

(ii) $C_0 - C_1 + C_2 - {}_3 + \ldots\ldots + (-1)^nC^n = 0$ என நிறுவுக.

$(1+x)^n = C_0+C_1x+C_2x^2+\ldots\ldots+C_nx^n$ என்ற விரிவில்,

$x = -1$ என ஈடு செய்தால்

$0 = C_0-C_1+C_2-C_3\ldots\ldots+(-1)^nC_n$ எனவரும்.

$\therefore\ C_0-C_1+C_2-C_3\ldots\ldots+(-1)^nC_n = 0$ ஆகும்.

(iii) $C_0+C_2+C_4\ldots=C_1+C_3+C_5\ldots+=2^{n-1}$ என நிறுவுக.

மேல் (ii)-ல் காட்டியதிலிருந்து, இடம் மாற்றுவகையால், $C_0+C_2+C_4+\ldots=C_1+C_3+C_5+\ldots$ என்றாகும்.

ஆகவே, இவற்றுள் ஒவ்வொரு பக்கத்துக் கோவையும்

$=\frac{1}{2}(C_0+C_2+C_4+\ldots+C_1+C_3+C_5+\ldots)$

$=\frac{1}{2}(C_0+C_1+C_2+C_3+\ldots)$

$=\frac{1}{2}\times2^n=2^{n-1}$

$\therefore\ C_0+C_2+C_4+\ldots=C_1+C_3+C_5+\ldots=2^{n-1}$ ஆகும்.

4. விளக்க மாதிரிகள் :

மாதிரி 1 : $\left(x^2-\dfrac{1}{x}\right)^{89}$-ன் விரிவில்

(i) x சாராத தனி உறுப்பைக் கண்டுபிடி.

(ii) 7 ஆவது உறுப்பைக் கண்டறிக.

(iii) $\dfrac{1}{x^8}$-ன் கெழு யாது ?

(iv) நடு உறுப்பைக் காண்க :

பொது உறுப்பு : ${}^{89}C_r\,(x^2)^{89-r}\left(-\dfrac{1}{x}\right)^r$

$= (-1)^r\,{}^{89}C_r\,x^{78-2r}\,\dfrac{1}{x^r} = (-1)^r\,{}^{89}C_r\,x^{78-3r}$ ஆம்.

(i) தனியுறுப்பைப் பெற, $78-3r=0$ ஆதல் வேண்டும்.

$\therefore\ r=26$

$\therefore$ தனியுறுப்பு $= (-1)\,{}^{98}C_{26}={}^{89}C_{18}$

(ii) 7ஆவது உறுப்பைப் பெற, $r=6$ என்றிடல் வேண்டும்.

$\therefore$ 7ஆவது உறுப்பு$=(-1)^6\ {}^{39}C_6\ x^{78-18}={}^{39}C_6\ x^{60}$

(iii) $\frac{1}{x^3}=x^{-3}$-ன் கெழுவைக்காண, $78-3r=-3$ ஆதல் வேண்டும்.

$-3r=-81 \quad \therefore \quad r=27$

$\therefore \quad x^{-3}$-ன் கெழு$=(-1)^{27}\ {}^{39}C_{27}=\ -{}^{39}C_{27}$ ஆகும்

$=-{}^{39}C_{27}$

(iv) கொடுத்த கோவையின் விரிவில் $39+1=40$ உறுப்புகள் இருக்கும்.

ஆகையால், 20-ம், 21-ம் நடு உறுப்புகள் ஆகும்.

20ஆம் உறுப்பைப்பெற, $r=19$ எனப் பிரதியிட வேண்டும்.

21ஆம் உறுப்பைப்பெற, $r=20$ எனப் பிரதியிட வேண்டும்.

$r=19$ ஆனால், $T_{20}=(-1)^{19}\ 39C_{19}\ x^{78-57}=-{}^{39}C_{19}\ x^{21}$

$r=20$ ஆனால், $T_{21}=(-1)^{20}39C_{20}\ x^{78-60}={}^{39}C_{20}\ x^{18}$

மாதிரி 2 : $(1{\cdot}02)^6$-ன் மதிப்பை மூன்று தசம பின்னத் திருத்தமாகக் காண்க.

$(1{\cdot}02)^6=(1+{\cdot}02)^6$

$=1+6c1\ ({\cdot}02)+6c2\ ({\cdot}02)^2+6c3\ ({\cdot}02)^3+\ldots\ldots$

$=1+6\times{\cdot}02+15\times{\cdot}0004+20\times{\cdot}000008+\ldots\ldots$

$=1+{\cdot}12+{\cdot}006+.00016+\ldots\ldots$

$=1{\cdot}12616\ldots=1{\cdot}126$ (3 தசம பின்னத்திருத்தமாக)

பயிற்சி-7.

1. $\left(x^2-\frac{2}{x^2}\right)^{17}$-ன் விரிப்பில் x^{11}-ன் கெழு என்ன ?

[விடை 0]

2. $\left(2x^2+\frac{3}{x}\right)^{21}$-ன் விரிப்பில் நடுவுறுப்புகளைக் கண்டெழுதுக.

[விடை : $2^{11}\,3^{10}\,21c\;10\;x^{12}$; $2^{10}\,3^{11}\,21c\;11\;x^{9}$]

3. $\left(x^{\frac{1}{2}}-\frac{2}{x^8}\right)^{24}$-ன் விரிப்பில் x சாராத தனியுறுப்பைக் கண்டெழுதுக. [விடை : $16\times{}^{20}C_4$]

4. $(1\cdot02)^5$-ன் மதிப்பை நான்கு தசம பின்னத்திற்குத் திருத்தமாகக் காண்க. [விடை : $1\cdot104$]

5. ஈருறுப்புத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி $(\cdot99)^{10}$ ஐந்து தசம பின்னத்திற்குத் திருத்தமாக காண்க.

[விடை : $\cdot90438$]

6. $(1+x)^{43}$ன் விரிப்பை x-ன் அடுக்கு நோக்கி ஏறு வரிசையில் எழுதுங்கால் $(2r+1)$ ஆவது $(r+2)$ ஆவது உறுப்புகளின் கெழுக்கள் சமமானால், rஐக் கண்டறிக.

[விடை : $r=14$]

7. $(1+x)^{23}$-ன் விரிப்பில் r ஆவது விரிப்பின் கெழுவும், $(r+1)$ ஆவது உறுப்பின் கெழுவும் 1:5 விகிதத்தில் இருந்தால், r-ன் மதிப்பைக் கண்டறிக. [விடை $r=4$]

8. $(1+x)^{44}$-ன் விரிப்பில் 21 ஆவது, 22 ஆவது உறுப்புகள் சமமானால், x-ன் மதிப்பைக் கண்டறிக.

[விடை : $x=7/8$]

9. $(1+x)^n$-ன் விரிப்பில் 5ஆவது, 6ஆவது, 7ஆவது உறுப்புகள் கூட்டுத் தொடரில் இருந்தால், nஐக் காண்க.

[$n=7$ அல்லது 14]

10. $(1+ax)^n$-ல் n ஒரு நேர் முழு எண்ணாகவும் அக் கோவையின் விரிப்பில் முதல் மூன்றுஉறுப்புகள் $1+6x+16x^2$ ஆகவும் இருப்பின், a, n-களைக் கண்டறிக.

[விடை : $a=\frac{2}{3}$; $n=9$]

11. $(x+a)^n$-ன் விரிப்பில், மூன்றாவது, நான்காவது, ஐந்தாவது உறுப்புகள் முறையே 84, 280, 560 ஆகும் எனின், x, a, n-களைக் கண்டறிக. [விடை : 1, 2, 7]

12. பின்வரும் தொடர்களைக் கூட்டுக !

(i) $C_0+{}^3C_1+{}^5C_2+\ldots\ldots+(2n+1)\,C_n$

[விடை : $(n+1)2^n$]

(ii) ${}^2C_0+{}^5C_1+{}^8C_2+\ldots\ldots+(3n+2)\,C_n$

[விடை : $(3n+4)2n^{-1}$]

(iii) $\frac{C_1}{C_0}+\frac{C\,c_2}{C_1}+\frac{{}^8C_1}{C_2}\ldots\ldots\ldots+\frac{n\,C_n}{C_n-1}$

[விடை : $\frac{n\,(n+1)}{2}$]

8. விகிதமுறு படிக்கு ஈருறுப்புக் கோவைத் தேற்றம்

(Binomial Theorem for a Rational Index)

1. n **ஒரு நேர் முழு எண்ணாயின்**

$(1+x)^n = 1 + {}^nC_1\, x + {}^nC_2 x^2 + \ldots\ldots + {}^nC_n x^n$ என்ற தேற்றத்தை முற்பகுதியில் நிறுவினோம்.

ஆனால், nஐ அவ்வாறு நிபந்தனைக்குட்படுத்தாமல், n ஒரு விகிதமுறு மதிப்பேற்குமாயின் இத் தேற்றத்தின் அமைப்பைக் கவனிப்போம்.

முதற்கண், n ஒரு நேர் முழு எண்ணாக இல்லாவிடில், ${}^nC_1$, ${}^nC_2$........என்ற குறியீட்டு முறை பொருளற்றதாகும்.

ஆகவே, $1 + {}^nC_1\, x + {}^nC_2\, x^2 + \ldots\ldots\ldots$ என்ற தொடரை

$$1 + nx \;+\; \frac{n\,(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n\;(n-1)\;(n-2)}{3!}\;x^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

என்று எழுதிக் கொள்வோம்.

n ஒரு நேர் முழு எண்ணாக இருந்தால், இத் தொடர் ஒரு முடிவுள்ள தொடர் ஆகும். இதில் $(n+1)$ உறுப்புகள் இருக்கும்.

n ஒரு நேர் முழு எண்ணாக இல்லாவிடில், இத் தொடர் முடிவற்றதாகும். இதை n–க்கு சில பின்ன மதிப்புக் கொடுத்துக் காணலாம்.

இப்பொழுது, ஒரு முடிவற்ற தொடர் ஒரு திட்டமான மதிப் பேற்கும் என்று கூற இயலாது. அது குவியலாம், அல்லது விரிய லாம் அல்லது அலைவெய்தலாம்.

மேற் கூறிய தொடர், சில நிபந்தனைக்குட்பட்டு, குவியலாம் என நிறுவப்பட்டுள்ளது.

$|x|<1$ ஆயின், n எந்த விகித முறு மெய்யெண் மதிப்பை ஏற்றாலும், மேற்கூறிய தொடர் குவிந்து அதன் மதிப்பு $(1+x)^n$ ஆகுமென உயர் வகுப்புகளில் நிறுவப்பட்டுள்ளது.

2. விகிதமுறு படிக்கு ஈருறுப்புக் கோவைத் தேற்றம்

தேற்றம் : $|x|<1$ ஆனால், n-ன் விகித முறு மதிப்புகளுக்கெல் லாம், $(1+x)^n=1+nx+\dfrac{n-(n-1)}{2!}x^2+\ldots\infty$

[குறிப்பு : இத் தேற்றத்தின் நிரூபணம் இந் நிலைக்கு மேற் பட்டதாதலால், இத் தேற்றத்தின் முடிவை உண்மையெனக் கொள்வோம்.

(ii) x ஒரு நேர்தகுபின்னமாகவோ, அல்லது எதிர்தகு பின்னமாகவோ இருக்கலாம். ஆனால், அதன் தனி மதிப்பு (absolute value) 1-க்குக் குறைவாக இருக்கவேண்டும்.

இதையே $|x|<|1$ என்ற குறியீட்டால் குறிப்பிடுகிறோம்.

எடுத்துக்காட்டாக, $x=\frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{5}{6}\ldots$ என்றோ, அல்லது, $-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, \ldots$ என்றோ எந்த பின்ன மதிப்பையும் கொள்ளலாம்.

(iii) n-ன் மதிப்பு ஓர் எதிர் முழு எண்ணாகவோ, நேர் பின்னமாகவோ அல்லது எதிர் பின்னமாகவோ இருக்கலாம்.

(iv) $x=1$ ஆகி, $n>-1$ ஆனாலும், $x=-1$ ஆகி, $n>0$ ஆனாலும், ஈருறுப்புத் தேற்றம் உண்மையாகும்.

(v) $\left|\dfrac{x}{y}\right|<|1$ ஆனால்,

$(x+y)^n = y^n\left(1+\dfrac{x}{y}\right)^n$ என எழுதி விரிவு படுத்தலாம்.

(vi) $\frac{x}{y} < 1$ ஆனால்,

$$(x+y)^n = x^n \left(1 + \frac{y}{x}\right)^n$$ என எழுதி விரிவு படுத்தலாம்]

3. பின்வருவன, ஈருறுப்புத் தேற்றத்தை யொட்டிய விரிவுகள். இவைகள் அடிக்கடி பயன்படுவதால், இவ் விரிவுகளைச் சரி பார்த்து மனத்திற் கொள்ளவும்.

(i) $(1-x)^{-1} = 1+x+x^2+\ldots\ldots+x^n+\ldots\ldots\infty$

(ii) $(1+x)^{-1} = 1-x+x^2-\ldots\ldots+(-1)^n x^n+\ldots\ldots\infty$

(iii) $(1-x)^{-2} = 1+2x+3x^2+\ldots\ldots+(n+1)x^n+\ldots\ldots\infty$

(iv) $(1+x)^{-2} = 1-2x+3x^2+\ldots+(-1)^n(n+1)x^n+\ldots\ldots\infty$

....

....

(v) $(1-x)^{-n} = 1+nx+\frac{n(n+1)}{2!}x^2+\ldots\ldots\infty$

(vi) $(1+x)^{-n} = 1-nx+\frac{n(n+1)}{2!}x^2-\ldots\ldots\infty$

(vii) $$(1-x)^{-p/q} = 1+\frac{p}{1!}\frac{x}{q}+\frac{p(p+q)}{2!}\left(\frac{x}{q}\right)^2 + \frac{p(p+q)(p+2q)}{3!}\left(\frac{x}{q}\right)^3+\ldots\ldots\infty$$

(viii) $$(1+x)^{-p/q} = 1-\frac{p}{1!}\frac{x}{q}+\frac{p(p+q)}{2!}\left(\frac{x}{q}\right)^2 - \frac{p(p+q)(p+2q)}{3!}\left(\frac{x}{q}\right)^3+\ldots\ldots\infty$$

4. விளக்க மாதிரிகள்

மாதிரி 1 : (i) $(1+x)^{3/2}$ (ii) $(1-x)^{-4}$ (iii) $(1+2x)^{-1/2}$ என்பவற்றின் விரிவுகள் x-ன் எம்மதிப்புகளுக்கு உண்மையாகுமெனக் கூறு.

(i) இங்கு $n=\frac{3}{2}$; இது -1ஐவிடவும், 0ஐவிடவும் அதிக மாதலால், $(1+x)^{3/2}$-ன் விரிவு $x=1$-க்கும், $x=-1$-க்கும் சேர்ந்து $|x| \leq 1$-க்கு உண்மையாகும்.

(ii) இங்கு $n=-4$. இது 0ஐவிடவும், -1ஐ விடவும் குறைவாகும். ஆகையால் $(1-x)^{-4}$-ன் விரிவு $x=1$-க்கும், $x=-1$-க்கும் உண்மையாகாது இதன் விரிவு $|x|<|$க்கு மட்டும் உண்மையாகும்.

(iii) இங்கு, $n=-\frac{1}{2}$; இது 0 ஐவிடக் குறைவு. ஆகையால், இதன் விரிவு $2x=-1$-க்கு உண்மையாகாது. ஆனல் $n>-1$ ஆதலால், இதன் விரிவு $2x=1$-க்கு உண்மையாகும். ஆகவே $(1+2x)^{-1/2}$-ன் விரிவு $|2x|<1$-க்கும், $2x=1$-க்கும் உண்மை யாகும். (அதாவது) $-1<2x\leq 1$ (அதாவது)$-\frac{1}{2}<x\leq\frac{1}{2}$ என்ற மதிப்புகளுக்கே விரிவு உண்மையாகும்.

மாதிரி 2: x மிகச் சிறியதானல்,

$$\frac{(1+x)^{1/2}(4-3x)^{3/2}}{(8+5x)^{1/3}} = 4-\frac{10x}{3} \text{ (தோராயமாக) என}$$

நிறுவுக.

x மிகச் சிறியதாகையால், x^2, x^3...ன் மதிப்புகள் குறைந்து கொண்டே போகும். ஆகையால், அவற்றைப் பொருட்படுத்தத் தேவையில்லை.

$(1+x)^{1/2} = 1+\frac{1}{2}x$, தோராயமாக

$(4-3x)^{3/2} = 4^{3/2}\left(1-\frac{3x}{4}\right)^{3/2} = 8\left(1-\frac{9x}{8}\right)$ தோராயமாக

$(8+5x)^{1/3} = 8^{1/3}\left(1+\frac{5x}{8}\right)^{1/3} = 2\left(1+\frac{5x}{8}\right)^{1/3}$

ஆகையால், கொடுத்த கோவை $= \dfrac{\left(1+\frac{1}{2}x\right)\times 8\left(1-\frac{9x}{8}\right)}{2\left(1+\frac{5x}{8}\right)^{1/3}}$

$$= 4\left(1+\tfrac{1}{2}x\right)\left(1-\frac{9x}{8}\right)\left(1+\frac{5x}{8}\right)^{-1/3}$$

$$= 4\left(1+\tfrac{1}{2}x\right)\left(1-\frac{9x}{8}\right)\left(1-\frac{5x}{24}\right)$$

$$= 4\left\{1+\left(\frac{1}{2}x-\frac{9x}{8}-\frac{5x}{24}\right)\ldots\ldots\ldots\right\}$$

$$= 4\left\{1-\frac{5}{6}x\right\}$$ தோராயமாக

$$= 4-\frac{10x}{3},$$ தோராயமாக.

மாதிரி 3 : $(1\cdot01)^{1/2}-(0\cdot99)^{1/2}$-ன் மதிப்பை 6 தசமத்தானத் திருத்தமாகக் காண்க.

$$(1\cdot01)^{1/2}=(1+\cdot01)^{1/2} = 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{100}+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2\,!}\cdot\frac{1}{10000}$$
$$+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3\,!}\;\frac{1}{1000000}+\ldots\ldots$$

$$= 1+\cdot005-\cdot0000125+\cdot0000000625-\ldots\ldots$$

$$(\cdot99)^{\frac{1}{2}} = (1-\cdot01)^{\frac{1}{2}}$$
$$= 1-\cdot005-\cdot0000125-\cdot0000000625$$

$$\therefore\; (1.01)^{\frac{1}{2}}-(\cdot99)^{\frac{1}{2}} = 2[\cdot005+\cdot0000000625]$$
$$= \cdot010000125$$
$= \cdot010000$(6 தசமத்தானத் திருத்தமாக)

மாதிரி 4 :

$$1+\frac{2}{6}+\frac{2\cdot5}{6\cdot12}+\frac{2\cdot5\cdot8}{6\cdot12\cdot18}+\ldots\ldots\ldots\infty$$

என்ற தொடரின் கூட்டுத் தொகை காண்க. கொடுக்கப்பட்ட தொடரை

$$S = 1+\frac{2}{1!}\;\frac{1}{6}+\frac{2\cdot5}{2\,!}\left(\frac{1}{6}\right)^2+\frac{2\cdot5\cdot8}{3\,!}\left(\frac{1}{6}\right)^3+\ldots\ldots\ldots$$

என எழுதலாம்.

இதை $(1-x)^{-p/q}$-ன் விரிவுடன் ஒப்பிட்டு நோக்க,

$p=2\,;\; q=3\,;\; \dfrac{x}{q} = \dfrac{1}{6}$ எனக் காணலாம்.

அதாவது $\frac{x}{3} = \frac{1}{6}$

$\therefore x = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

ஆகவே $S = (1-x)^{-p/q} = \left(1-\frac{1}{2}\right)^{-2/3}$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^{-2/3} = 2^{\frac{2}{3}}$

பயிற்சி-8.

1. $(1+)^{\frac{2}{3}}$-ன் விரிப்பில், பொது உறுப்பை எழுதுக.

2. $(1+3x)^{\frac{5}{2}}$-ன் விரிப்பு, x-ன் எம்மதிப்புக்கு உண்மையாகும்? அம் மதிப்பிற்கு முதல் நான்கு உறுப்புகளை எழுதுக.

3. $\left(\frac{0{\cdot}998}{1{\cdot}002}\right)^{-2/3}$-ன் மதிப்பை நான்கு தசமத்தானத் திருத்தமாகக் காண்க. [விடை : 1·0027]

4. $\frac{1}{(9998)^{1/4}}$ -ன் மதிப்பை 6 தசமத் தானத்திருத்தமாகக் காண்க. [விடை : ·100005]

5. x-ன் மதிப்பு மிகச் சிறியதாயின்,
$\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2+1} = 1-\frac{x^2}{4}+\frac{7}{64}x^4$ (தோராயமாக)
எனக் காண்பி.

6. x-ன் மதிப்பு மிகப் பெரியதாயின்,
$\sqrt{x^2+16} - \sqrt{x^2+9} = \frac{7}{2x}$ (தோராயமாக) என் நிறுவுக.

7. l உடன் ஒப்பிடும் போது, c மிகக் குறைவானுல்
$\left(\frac{l}{l+c}\right)^1 + \left(\frac{l}{l-c}\right)^1 = 2+\frac{3c^2}{4l^2}$ (தோராயமாக)
என நிறுவுக.

8. x-ன் மதிப்பு மிகச் சிறியதாயின்,

$$\frac{(9+2x)^{\frac{1}{2}}\,(3+4x)}{\sqrt[5]{1-x}}=9+\frac{74}{5}x$$ (தோராயமாக) எனக் காண்பி.

9. p அல்லது q வுடன் ஒப்பிடும்போது $(p-q)$-ன் மதிப்பு மிகச் சிறியதாயின்,

$$\sqrt[n]{\frac{p}{q}}=\frac{(n+1)\,p+(n-1)q}{(n+1)p+(n+1)q}$$ (தோராயமாக) என நிறுவுக. இதைப் பயன்படுத்தி $\sqrt[7]{\frac{131}{133}}$-ன் மதிப்பைக் கண்டறிக.

10. கீழ்வரும் முடிவற்ற தொடர்களின் கூட்டுத் தொகை காண்க.

(i) $1+\frac{3}{4}+\frac{3\cdot5}{4\cdot8}+\frac{3\cdot5\cdot7}{4\cdot8\cdot12}+\ldots\infty$ [விடை : $2\sqrt{2}$]

(ii) $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{3}+\frac{1\cdot3}{2!}\,\frac{1}{3^2}+\frac{1\cdot3\cdot5}{3\,!}\,\frac{1}{3^3}+\ldots\ldots\infty$

[விடை : $\sqrt{3}$]

(iii) $1+\frac{2}{9}+\frac{2\cdot5}{9\cdot18}+\frac{2\cdot5\cdot8}{9\cdot18\cdot27}+\ldots\ldots$

[விடை : $\sqrt[3]{9/4}$]

9. அடுக்குக்குறித் தேற்றம்
(The Exponential Theorem)

1. 'e' என்னும் எண்

ஒரு வட்டத்தின் சுற்றளவுக்கும், அதன் விட்டத்திற்கும் உள்ள விகிதத்தைக் குறிக்கும் π என்னும் எண், திரிகோண கணிதத்தில் தனிச்சிறப்புப் பெற்று அமைந்திருப்பதைபோல், இயற் கணிதத்தில் 'e' என்னும் எண் மிக முக்கியத்துவம் வாய்ந்து காணப்படுகிறது.

$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots\ldots$ என்பது ஒரு முடிவிலாத் தொடர் ஆகும்.

இத் தொடர் குவியும் தன்மை உடையது.

இம் முடிவிலாத் தொடரின் கூட்டுத் தொகை 'e' எனக் குறிக்கப்படுகிறது.

எனவே $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ (1)

2. 'e'ன் மதிப்பு 2-க்கும் 3-க்கும் இடைப்பட்ட எண்

e என்பது $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}$ என்ற நேர் ராசிஉறுப்புகளைக் கொண்ட முடிவிலாத் தொடரின் கூட்டுத் தொகையாதலால், e ஆனது அத் தொடரின் முதல் இரண்டு உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகையைவிட அதிகமாகும்,

$\therefore\ e > 1 + \frac{1}{1!}$ அல்லது $e > 2$

மேலும் $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots$

$$= 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\ldots$$

$$= 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\ldots$$

$$< 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots$$

$< 1+1/(1-\frac{1}{2})$ அல்லது 3

$\therefore\ 2 < e < 3$

[குறிப்பு : தொடர் (1)ஐப் பயன்படுத்தி, e-ன் மதிப்பை வேண்டிய அளவுக்கு நாம் தோராயமாய்ப் பெறலாம்]

இவ்விதமாக $e = 2{\cdot}71828$ (ஐந்து தசமத்தானத்திருத்தமாக)

3. அடுக்குக் குறித் தேற்றம் (The Exponential Theorem)

$e = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots\infty$ ஆனால்,

x-ன் எல்லா விகிதமுறு மெய்யெண் மதிப்புக்களுக்கும்

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\infty$$

இத் தேற்றத்தை நிறுவும் முறை இந் நிலையில் இயலாததலின், இதை உண்மையெனக் கொள்வோம்

4. எல்லா முறைப்படியும் இத் தேற்றத்தைப் பெறலாம்.

தேற்றம் :

x எந்த மெய்யெண் மதிப்பு ஏற்றாலும், n ஒரு நேர் முழு எண்ணாயின்,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots\ldots\infty$$

இத் தேற்றத்தையும் நிறுவுவது இந் நிலையில் இயலாதாதலின் இதை உண்மையெனக் கொள்வோம்.

குறிப்பாக, $x=1$ ஆனால்,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1}=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots\ldots\infty=e$$

இனி, $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty} 1+\left(\frac{1}{\frac{n}{x}}\right)^{n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n}{x}}\right)^{n/x}\right]=e^{x} \text{ ஆகும்.}$$

எனவே $e^{x}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{3}}{3!}+\ldots\ldots\infty$

ஆகையால் $e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots\ldots\infty$ ஆனால்,

$e^{x}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{3}}{3!}+\ldots\ldots\ldots\infty$ என

நிறுவப்பட்டது. இது x-ன் எல்லா மெய்யெண் மதிப்புகளுக்கும், பொருத்தமாகும்.

[குறிப்பு: x-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும், e^{x} ஒரு நேர் ராசியாகும்.]

5. e என்பது ஒரு விகிதமுரு எண்ணாகும்.

கூடுமானால், $e=\frac{p}{q}$ (p, q நேர் முழு எண்கள்) எனக் கொள்வோம்.

அப்பொழுது,

$$\frac{r}{q}=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{q!}+\frac{1}{(q+1)!}+\frac{1}{(q+2)!}+\ldots.$$

இரு பக்கங்களையும் $q!$ ஆல் பெருக்கினால்,

$$(q-1)!\,p = \text{நேர் முழு எண்} + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \ldots\ldots$$

$$\text{இனி } \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \ldots\ldots < \frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)^2} + \ldots$$

$$< \frac{1/(q+1)}{1-\frac{1}{q+1}} = \frac{1}{q}$$

ஆகவே, நாம் பெறுவது,

ஒரு நேர் முழு எண் = ஒரு நேரி முழு எண் + ஒரு பின்னம்
இது ஒரு பொருந்தா முடிவு.

எனவே $e = r/q$ என நாம் முதலில் கொண்டதை ஏற்க முடியாது.

ஆகையால் e என்பது ஒரு விகிதமுறா எண்ணாகும்.

6. அதி பரவளைவுச் சார்புகள் (Hyperbolic functions)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots\ldots \text{என அறிவோம்.} \quad \ldots(1)$$

இதில் x-க்கு $-x$ எனப் பிரதியிட

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots \text{ எனப்பெறுகிறோம்.} \quad \ldots(2)$$

(1) + (2)-லிருந்து

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\ldots \text{ எனவும்,} \quad \ldots(3)$$

(1) − (2)லிருந்து

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots\ldots \text{ எனவும்,} \quad \ldots(4)$$

பெறுகிறோம்.

கோண கணிதத்தில், $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ எனவும், ...(5)

$$\sinh x = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2} \text{ எனவும்} \quad ...(6)$$

வரையறையாகக் கொள்கிறோம்.

$$\text{ஆகவே, } \cosh x = \tfrac{1}{2}(e^x+e^{-x}) = 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots\ldots \quad ...(7)$$

$$\sinh x = \tfrac{1}{2}(e^x-e^{-x}) = x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots\ldots \quad ...(8)$$

இவைகள் அதி பரவளைவுச் சார்புகள் (Hyperbolic functions) எனப்படும்.

மேற்கூறிய வரையறைகளிலிருந்து, கீழ்க்காணும் மற்ற அதி பரவளைவுச் சார்புகளின் மதிப்புகளைத் தரும் உறவுகளைப் பெறுகிறோம்.

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} \quad ...(9)$$

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} \quad ...(10)$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x+e^{-x}} \quad ...(11)$$

$$\operatorname{cosech} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x-e^{-x}} \quad ...(12)$$

7. e^x-ன் விரிவில் இருந்து பெறும் சில எளிய தொடர்கள்

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}\ \ldots\ldots\ \infty \text{ என அறிவோம்.} \quad ...(1)$$

e^x-ன் விரிவில், $x=-1$ என பிரதியிட

$$e^{-1} = 1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\ \ldots\ \infty \text{ எனப் பெறுகிறோம்.} \quad ...(2)$$

(1)+(2)-லிருந்து

$$\frac{e+e^{-1}}{2} = 1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{6!}\ \ldots\ldots\ \infty \text{ எனவும்} \quad ...(3)$$

(1) − (2) லிருந்து

$$\frac{e-e^{-1}}{2} = 1+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{7!} \ldots\ldots \infty \text{ எனவும் } \ldots(4)$$

பெறுகிறோம்.

இந்தப் பலன்கள் சில எளிய கூட்டுத் தொகைகளைக் காணப் பயன்படும்.

(8) a^x-ன் விரிவு

$a > 0$ ஆயின், $a^x = e^{x\log_e a}$

$$= 1 + x\log_e a + \frac{x^2(\log_e a)^2}{2!} + \ldots\ldots \infty$$

(9) விளக்க மாதிரிகள்

மாதிரி 1: கீழ்க் காணும் முடிவிலாத் தொடரின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

$$1+\frac{2}{1!}+\frac{3}{2!}+\ldots\ldots$$

தொடரின் கூட்டுத் தொகை S எனக் கொள்க

r ஆவது உறுப்பு $= t_r = \dfrac{r}{(r-1)!} = \dfrac{(r-1)+1}{(r-1)!}$

ஆகவே, $S = \sum_{1}^{\infty} t_r = \sum_{1}^{\infty} \dfrac{1+(r-1)}{(r-1)!} = \sum_{1}^{\infty} \dfrac{1}{(r-1)!} + \sum_{2}^{\infty} \dfrac{1}{(r-2)}$

$$= \frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots\ldots$$

$$+\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots\ldots$$

$$= e + e = 2e$$

மாதிரி 2: $1+\dfrac{a+bx}{1!}+\dfrac{(a+bx)^2}{2!}+\ldots\ldots$

என்னும் முடிவிலாத் தொடரில் x^r-ன் கெழு என்ன ?

கொடுக்கப்பட்ட தொடர் $= e^{a+bx} = e^a \cdot e^{bx}$

$$= e^a \left[1 + \frac{bx}{1!} + \frac{b^2x^2}{2!} + \ldots\ldots \right]$$

ஆகவே, x^r-ன் கெழு $= \dfrac{e^a \cdot b^r}{r!}$

பயிற்சி-9.

1. $\sqrt{e}$ ன் மதிப்பை நான்கு தசமத்தானத் திருத்தமாகக் காண்க.

2. பின் வருவனவற்றை நிறுவுக :

(i) $\dfrac{2}{3!} + \dfrac{4}{5!} + \dfrac{6}{7!} + \ldots\ldots = \dfrac{1}{e}$

(ii) $\dfrac{e-1}{e+1} = \left(\dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{4!} + \dfrac{1}{6!} + \ldots\right) \Big/ \left(\dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{5!} + \ldots\right)$

(iii) $\dfrac{e^2+1}{e^2-1} = \left(1 + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{4!} + \ldots\right) \Big/ \left(1 + \dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{5!} + \ldots\right)$

3. பின்வரும் முடிவிலாத் தொடர்களின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க :

(i) $1 + \dfrac{2^3}{2!} + \dfrac{3^3}{3!} + \dfrac{4^3}{4!} + \ldots \infty$ [விடை : $5e$]

(ii) $\dfrac{3^2}{1!} + \dfrac{4^2}{2!} + \dfrac{5^2}{3!} + \ldots \infty$ [விடை : $10e - 4$]

(iii) $\dfrac{5}{1!} + \dfrac{7}{3!} + \dfrac{9}{5!} + \ldots \infty$ [விடை : $\dfrac{5e}{2} - \dfrac{3}{2e}$]

(iv) $\dfrac{1}{1!} + \dfrac{4}{2!} + \dfrac{7}{3!} + \ldots \infty$ [விடை : $e+2$]

(v) $\frac{1}{1!}+\frac{1+3}{2!}+\frac{1+3+3^2}{3!}$

$+\frac{1+3+3^2+3^3}{4!}+\dots\infty$ [விடை : $\frac{1}{3}e(e^3-1)$]

(vi) $\frac{1}{1!}+\frac{1+5}{2!}+\frac{1+5+5^2}{3!}$

$+\dots\infty$ [விடை : $(e^5-e)/4$]

4. கீழ்க் காணும் முடிவிலாத் தொடரில் x^n-ன் கெழு என்ன?

$1+\frac{(1+2x)}{1!}+\frac{(1+2x)^2}{2!}+\dots$ [விடை : $e\cdot 2^n/n!$]

5. $(1+x)\,e^{1+x}$-ன் விரிவில் x^n-ன் கெழு காண்க.

[விடை : $(n+1)\,e/n!$]

6. $\frac{1+2x+3x^2}{e^x}$-ன் விரிவெழுதி x^n-ன் கெழு காண்க.

[விடை : $(-1)^n\,(3n^2-5n+1)/n!$]

7. அதிபர வளைவுச் சார்புகளை யொட்டிய கீழ்க்காணும் உறவுகளை நிறுவுக :

(i) $\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$

(ii) $\operatorname{sech}^2 x+\tanh^2 x=1$

(iii) $\coth^2 x-\operatorname{cosech}^2 x=1$

(iv) $\sinh(x+y)=\sinh x\cosh y+\cosh x\sinh y$

(v) $\cosh(x+y)=\cosh x\cosh y+\sinh x\sinh y$

(vi) $\cosh(-x)=\cosh x$; $\sinh(-x)=-\sinh x$

$\tanh(-x)=-\tanh x$

8. $\log 2-\frac{1}{2!}(\log 2)^2+\frac{1}{3!}(\log 2)^3-\dots=\frac{1}{2}$ என நிறுவுக.

10. இலாகரிதத் தொடர் அல்லது மடக்கைத் தொடர்
(Logarithmic Series)

(1) $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \ldots\ldots \infty \ldots (1)$

என்ற முடிவிலாத் தொடர் மடக்கைத் தொடர் எனப்படும். இத் தொடர் $|x|<1$, என்ற நிபந்தனையில், ஓர் அறவே குவியும் தொடராகும்.

$x=1$ ஆகும் போது, அதாவது $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\ldots\ldots$ என்பது ஒரு குவித் தொடர். ஆனால் அறவே குவியும் தொடரல்ல.

2. **மடக்கைத் தேற்றம் :** $-1<x\leq 1$ ஆனால்,

$$\log_e (1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - + \ldots (-1)^{n-1} \frac{x}{n} \ldots \ldots \infty$$

குறிப்பு : $1+x>0$ ஆனால்தான், $\log (1+x)$ என்ற மெய் யெண்ணுக்கு, ஒரு மெய்யெண் மடக்கையுண்டு.

$1+x<0$ ஆனால், $\log (1+x)$ என்பது ஒரு எதிரெண்ணின் மடக்கையாகும். எதிரெண்ணின் மடக்கை கற்பனை எண்ணாகும்.

இத் தேற்றத்தை நிறுவ, இந் நிலையில் இயலாதாகையால், இதன் முடிவை உண்மையெனக் கொள்வோம்.

3. கிளைத்தேற்றங்கள்

சமன் (2)-ல் x-க்கு $-x$ எனப் பிரதியிட,

$$\log_e(1-x) = -\left[x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots\ldots\right], -1 \le x < 1 \ldots (3)$$

(2), (3) லிருந்து

$$\log_e \frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\ldots\right) \quad \ldots (4)$$

எனப் பெறுகிறோம்.

(4)-ல் $\frac{1+x}{1-x} = \frac{m}{n}$ என பிரதியிட, (அதாவது) $x = \frac{m-n}{m+n}$ ஆதலால்,

$$\log \frac{m}{e^n} = 2\left[\frac{m-n}{m+n} + \frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^5 + \ldots\right] \quad \ldots (5)$$

என்ற பலனை அடைகிறோம்.

குறிப்பு : $\because x = \frac{m-n}{m+n}$ ஆதலால், $|x| > 1$ ஆனுல்,

$\left|\frac{m-n}{m+n}\right| < 1$ ஆதல் வேண்டும். (அதாவது) $-1 < \frac{m-n}{m+n} < 1$ இந்த நிபந்தனைக்குட்பட, m, n இரண்டும் எதிரெண்ணுகவோ, இரண்டும் நேரெண்ணுகவோ இருக்கவேண்டும்.

(5)-ல், $\frac{m}{n} = x$ எனக் கொண்டால்,

$$\log_e x = 2\left[\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + \ldots\ldots\infty\right] \quad \ldots (6)$$

எனப் பெறுகிறோம்.

4. நேப்பியரின் மடக்கை (Napierian Logarithm)

இவ்வதிகாரத்தில் மேற்கூறிய பிரிவுகள் 2, 3–ல் கண்ட மடக்கைகள் எல்லாம் e என்னும் அடிக்குக் கண்டவைகள் ஆகும்.

உயர் கணிதத்தில் மடக்கைகள் எல்லாம் e என்ற அடிக்கே காணப்படும்.

இவ்வாறு 'e' என்னும் அடிக்குக் காணும் இலாகரிதம், 'நேப்பியரின் இலாகரிதம்' அல்லது 'இயற்கை இலாகரிதம்' எனப்படும்.

5. பொது மடக்கை (Common Logarithm)

எல்லாச் செய்முறை கணக்கீடுகளிலும், 10ஐ அடி எண்ணுகக் கொண்ட முறை பயன்படுகிறது. இலாகரிதத் தொடரைப் பயன் படுத்தி, e என்னும் அடிக்கு மடக்கைகள் காணப்படுகின்றன. பிறகு 'அடிமாற்றம்' விதியைப் பயன்படுத்தி, 10ஐ அடி எண்ணுகக் கொண்ட மடக்கைகள் பெறப்படுகின்றன.

$$\log_{10} N = \frac{\log_e N}{\log_e 10} = \frac{1}{\log_e 10} \log_e N = \mu . \log_e N$$

இங்கு $\mu = \dfrac{1}{\log_e 10} = \cdot 4343$ ஆகும்.

இதனுல், eஐ அடி எண்ணுகக் கொண்டு அமைந்த இலாகரிதங்களை μ என்ற 'மாற்ற அளவை' (Modulus) யால் பெருக்கி, 10 என்னும் அடிக்குரிய இலாகரிதங்கள் பெறலாம்.

6. விளக்க மாதிரிகள்

மாதிரி 1 : $\log_e 2, \log_e 3, \ldots\ldots\ldots$ **முதலியவற்றின் மதிப்பறிதல்.** சமன் (2) ஐப் பயன் படுத்திஞல்,

$\log_e 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \ldots\ldots$ எனப் பெறுகிருேம்.

இது மிக மெதுவாகக் குவியுந் தொடர். ஆகையால், இதைப் பயன்படுத்தி $\log_e 2$ஐக் கணக்கிடுவதற்குப் பதிலாக, மிகவேக மாகக் குவியுந் தொடராகிய (5) ஐப் பயன்படுத்துவோம்.

$m = 2$, $n = 1$ எனக் கொண்டால்,

$$\log_e 2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3^5} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3^7} + \ldots\ldots\right)$$

வலது புறமுள்ள தொடரின் தசமத்தான மதிப்புகளைப் பிரதியிட,

$\log_e 2 = \cdot 6931$ (தோராயமாக)

$\log_e 3$ ஐக் காண, $m = 3$, $n = 2$ எனக் கொள்வோம்.

$$\log_e\left(\frac{3}{2}\right) = 2\left[\frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5^3} + \ldots\ldots\right]$$

$$= 2\,(.20273) \text{ (தோராயமாக)}$$

(அதாவது) $\log_e 3 - \log_e 2 = \cdot 40546$

$$\therefore \quad \log_e 3 = \cdot 40546 + \cdot 6931 = 1\cdot 09856$$

$$\log_e 4 = 2\cdot \log_e 2 = 2 \times \cdot 6931 = 1\cdot 3862$$

இவ்வாறே,

$m-5$, $n=4$ எனப் பிரதியிட்டு, $\log_e 5$-ன் மதிப்பையும், $m=6, n=5$ எனப் பிரதியிட்டு, $\log_e 6$-ன் மதிப்பையும், தொடர்ந்து $\log_e 7$, $\log_e 8$...என்பவற்றின் மதிப்புகளையும் காணலாம்.

மாதிரி 2 : $\log^e (1-x-2x^2)$-ன் விரிவில் x^n-ன் கெழு என்ன?

$$\log (1-x-2x^2) = \log_e (1+x)(1-2x)$$

$$= \log_e (1+x) + \log_e (1-2x)$$

$$= \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \dots\dots \right]$$

$$- \left[(2x) + \frac{(2x)^2}{2} + \dots \frac{(2x)^n}{n} + \dots\dots\dots\dots \right]$$

ஆகவே, x^n-ன் கெழு $= (-1)^{n-1} \frac{1}{n} - \frac{2^n}{n}$ ஆகும்

இவ்விரிவு (i) $-1 < x \le 1$-க்கும் (ii) $-1 < -2x \le 1$-க்கும் அதாவது $\frac{1}{2} > x \geq -\frac{1}{2}$-க்கும் உண்மையாகும்.

ஆகவே இவ்விரிவு $-\frac{1}{2} \le x < \frac{1}{2}$ என்ற மதிப்புகளுக்கே உண்மையாகும்.

மாதிரி 3 : $\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{x}{2\cdot 3} + \frac{x^2}{3\cdot 4} - \dots\dots\infty$ எனும் முடிவிலாத் தொடரின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$\therefore \frac{x^{n-1}}{n(n+1)} = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) x^{n-1}$$

$\therefore$ கொடுத்த தொடர்

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)x + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)x^2 - \dots\dots$$

$$= \left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\ldots\ldots\right)+\left(-\frac{1}{2}+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{4}+\ldots\ldots\right)$$

$$= \frac{1}{x}\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots\ldots\right)$$

$$+\frac{1}{x^2}\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots\ldots\ldots\right)$$

$$= \frac{1}{x}\log(1+x)+\frac{1}{x^2}[\log(1+x)-x]$$

$$= \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\log(1+x)-\frac{1}{x}$$

மாதிரி 4 : $a+b+c=0$ ஆனால்,

$$\frac{a^5+b^5+c^5}{5}=\frac{a^3+b^3+^3}{3}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$$ என நிறுவுக.

இப்பொழுது,

$$(1-ax)(1-bx)(1-cx)=1(a+b+c)x+(bc+ca+ab)x^2-abc\ x^3$$

$$=1+(bc+ca+ab)x^2-abc\ x^3$$

$$[\because\ a+b+c=0]$$

$bc+ca+ab=p$ எனவும், $abc=q$ எனவும் கொள்க.

$$\therefore\ (1-ax)(1-bx)(1-cx)=1+p\ x^2-qx^3$$

$$\therefore\ \log(1-ax)(1-bx).(1-cx)=\log(1+px^2\ \ qx^3)$$

அதாவது $\log(1-ax)+\log(1-bx)+\log(1-cx)$

$$=\log[1-x^2(qx-p)$$

இரு பக்கங்களையும், மடக்கைத் தொடர் தேற்றத்தின்படி விரித்தெழுதினால்,

$$(ax+\tfrac{1}{2}a^2x^2+\tfrac{1}{3}a^3x^3+\ldots\ldots\ldots)+bx+\tfrac{1}{2}b^2x^2+\ldots\ldots\ldots)$$

$$+(cx+\tfrac{1}{2}c^2x^2+\ldots\ldots)=x^2(qx-p)+\tfrac{1}{2}[x^4(qx-p)^2]+\ldots\ldots\ldots$$

x^2, x^3, x^5–ன் கெழுக்களை இரு பக்கங்களிலும் கண்டு, சமனிட,

$\frac{1}{2}(a^2+b+c^2)=-p$; $\frac{1}{3}(a^3+b^3+c^3)=q$

$\frac{1}{5}(a^5+b^5+c^5)=-\frac{5}{2}\times 2\,pq=-pq$

ஆகையால், $\dfrac{a^5+b^5+c^5}{5}=\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}\times\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}$

பயிற்சி-10.

1. $\log_2 e-\log_4 e+\log_8 e-\log_{16} e+\ldots\ldots\infty=1$ என நிறுவுக.

2. $\log_3 e-\log_9 e+\log_{27} e-\log_{81} e+\ldots\ldots\infty=\log e^2/\log e^3$ என நிறுவுக.

3. $\log\dfrac{n+1}{n}=2\left[\dfrac{1}{2n+1}+\dfrac{1}{3(2n+1)^3}\right.$
$$+\frac{1}{5(2n+1)^5}+\ldots\ldots$$ என நிறுவுக.

இதைப் பயன்படுத்தி $\log_e 17$ என்பதை 4 தசமத்தானத் திருத்தமாகக் காண்க : $\log_e 2=\cdot 6932$ எனக் கொள்க.

4. $\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{2\cdot 7^2}+\dfrac{1}{3\cdot 7^3}-\dfrac{1}{4\cdot 7^4}+\ldots\ldots$
$$=\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\,\frac{1}{8^2}+\frac{1}{3}\,\frac{1}{8^3}+\ldots+\frac{1}{r}\,\frac{1}{8^r}+\ldots\ldots$$
என நிறுவுக.

5. $\log\dfrac{4}{e}=\dfrac{1}{1\cdot 2}-\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}-\dfrac{1}{4\cdot 5}\ldots$ என நிறுவுக.

6. $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{2(n+1)^3}+\dfrac{1}{3(n+1)^3}+\ldots\ldots=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{2n^2}$
$$+\frac{1}{3n^3}\ldots\ldots$$ எனக் காட்டுக.

7. $x>0$ ஆனால்,
$$\log x=\frac{x-1}{x-1}+\frac{1}{2}\,\frac{x^2-1}{(x+1)^2}+\frac{1}{3}\,\frac{x^3-1}{(x+1)^3}\ldots\ldots$$
என நிறுவுக.

8. a, b, c என்பன மூன்று அடுத்தடுத்த நேர் முழு எண்களானல்

$$\log_e b = \frac{1}{2}\log_e a + \frac{1}{2}\log_e c + \frac{1}{(2ac+1)}$$

$$+ \frac{1}{3(2ac+1)^3} + \frac{1}{5(2ac+1)^5} \ldots$$ எனக் காட்டுக.

9. $\log_e 3 = 1 + \frac{1}{3\cdot 2^2} + \frac{1}{5\cdot 2^4} + \frac{1}{7\cdot 2^6} + \ldots\ldots$ எனக் காட்டுக.

10. $\log\sqrt{12} = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)\frac{1}{4^2}$

$$+ \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)\frac{1}{4^3} +$$ எனக் காட்டுக.

11. $\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)\frac{1}{9} + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right)\frac{1}{9^2}$
$+ \ldots\ldots$ என்னும் முடிவிலாத் தொடரின் கூட்டுத்தொகை அறிக. [விடை : $9\log_e 3 - 12\log_e 2$]

12. $\frac{5}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{7}{3\cdot 4\cdot 5} + \frac{9}{5\cdot 6\cdot 7} + \ldots\ldots\infty = 3\log_e 2 - 1$ எனக் காட்டுக.

13. $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 7} + \frac{1}{4\cdot 9}\ldots\ldots\infty = \log\frac{e^2}{4}$ எனக் காட்டுக.

14. $\frac{1}{1\cdot 1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 5\cdot 7} + \frac{1}{4\cdot 7\cdot 9} + \ldots\ldots\infty$

$= 2\log 2 - 1$ எனக் காட்டுக.

15. $\log(3+2x-x^2)$-ன் விரிவு x-ன் எம் மதிப்புகளுக்கு உண்மையெனக் காண்க. இவ்விரிவில் x^n-ன் கெழு $= \frac{1}{n}\left[(-1)^{n-1} - \frac{1}{3^n}\right]$ எனக் காட்டுக.

[விடை : $-1 < x \leq 1$]

16. $\log(1-5x+6x^2)$-ன் விரிவில் x^n-ன் கெழு என்ன ?

[விடை : $-(3^n+2^n)/n$]

17. $x^2+px+q=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் a, b ஆனால்

$$\log(1-px+qx^2)=(a+b)\,x-\frac{a^2+b^2}{2}x^2+\frac{a^3+b^3}{3}x^3\ldots$$

என நிறுவுக.

18. $a+b+c=0$ ஆனால்,

$$\frac{a^7+b^7+c^7}{7}=\frac{a^5+b^5+c^5}{5}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$$

என நிறுவுக.

பாகம் II

கோண கணிதம்
(Trigonometry)

தோற்றுவாய்
(Introduction)

பண்டைக் காலத்தில் பல்வேறு கணிதத்துறையின் பிரிவுகள் இந்திய நாட்டில் தோன்றி வளர்ந்து வந்தன. அவற்றுள் ஒன்று திரிகோண கணிதமாகும். ஆரியபட்டர் (5 - நூற்), வராக மிகிரர் (6 – நூற்), பிரமகுப்தர் (7 – நூற்), பாஸ்கரர் (12-நூற்) முதலியோரால் நன்கு வளர்க்கப்பட்டபின், அராபியர் மூல மாகக் கைமாறி ஐரோப்பிய நாடுகளுக்குச் சென்றது. அங்கு விளங்கிய கணித மேதைகளின் அயராத உழைப்பின் பயனாகவே 16 ஆம் நூற்றாண்டுக்குப் பிறகு தற்காலத் திரிகோண கணிதம் உருவாகியது. வயிட்டா (Vieta 16-நூற்), ஆயிலர் (Euler 18-ஆம் நூற்) முதலியோர் இப் பிரிவின் வளர்ச்சியில் பெரும் பங்கு கொண்டவர்களாகக் கருதப்படுகின்றனர்.

கோணங்கள், தூரங்கள் ஆகியவற்றின் அளவுகளை ஆராயும் கணிதத்துறையே திரிகோண கணிதம் எனப்படும். Trigonometry என்பது Trigonon, Metron என்னும் இரண்டு கிரேக்க மொழியா லாகிய சொற்றொடராகும். அது முக்கோணங்களின் அளவுகள் எனப் பொருள்படும். இத் துறையில் முதன் முதல் முக்கோணத் திற்குச் சம்பந்தப்பட்ட கோணங்களையும் பக்கங்களையும் பற்றிய

தொடர்புகளே கண்டறியப்பட்டன. வரவர இப் பெயரானது பல முக்கோணங்களாகப் பகுப்புறும் வடிவங்களையும் உட்படுத்திக் கொண்டு, பொதுவாக வடிவங்களுக்குரிய கோணப் பருமன்களைப் பற்றிய ஆய்வுகளையெல்லாம் தழுவிக் கொள்ளுவதாயிற்று.

இக் காலத்தில் திரிகோண கணிதத்தைத் தளதிரிகோண கணிதம் (Plane T) எனவும், கோள திரிகோண கணிதம் (Spherical T) எனவும் இரு பெரும் பிரிவாக அமைத்துள்ளனர்.

திரிகோண கணிதத்தின் மூலம் வானோங்கிய பொருள்களின் உயரங்களையும், திசை நீண்ட பொருள்களின் தொலைவுகளையும் குறிப்பிட்ட பரப்புகளின் அளவுகளையும் கணக்கிட இயலும். வானவியல், இயற்பியல் போன்ற பல துறைகளில் குவிந்து கிடக்கும் அறிவைப்பெற திரிகோண கணிதம் மிகவும் இன்றியமையாத அடிப்படையாகும். இற்றை நாளில் மேனிலைக் கணிதத்தில் கோணங்களின் சார் பலன்கள் வாயிலாகப் பலவகை இயற்கணித வடிவக்கணித சம்பந்தப்பட்ட ஆராய்ச்சிகள் நடைபெறுகின்றன. இதனுல் இப் பிரிவின் பயன்பாடு நன்கு புலப்படுவதாகும்.

1. கோணங்களை அளக்கும் முறைகள்

(Measurement of Angles)

1. (i) அறுபான் முறை அளவை (Sexagesimal measure)

ஆரம்ப வடிவ கணிதத்தில், கோணங்களை அளப்பதற்கு ஒரு செங்கோணத்தை அலகாகக் கொள்கிறோம். இது பயிற்சியில், பழக்கமாக மேற்கொள்வதற்கு ஒரு பெரிய அலகாகும் என்பது வெளிப்படை.

ஆகவே, ஒரு செங்கோணத்தை 90 சம பகுதிகளாகப் பிரிக்கிறோம். அப் பிரிவுகளில் ஒவ்வொன்றும் ஒரு பாகை (degree) எனப்படும். ஒவ்வொரு பாகையும் 60 சம பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்படுகிறது. இப்பிரிவு ஒவ்வொன்றும் ஒரு கலை (minute) எனப்படும். ஒவ்வொரு கலையும் 60 சம பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்படுகிறது. அப் பிரிவு ஒவ்வொன்றும் ஒரு விகலை (second) எனப்படும்.

எனவே, ஒரு செங்கோணம் = 90 பாகைகள் (90°)
ஒரு பாகை (1°) = 60 கலைகள் ($60'$)
ஒரு கலை ($1'$) = 60 விகலைகள் ($60''$)

இப் பகுப்பு முறையால் சிறிய கோணங்களையும் அளப்பதற்கு வழி ஏற்படுகிறது.

x பாகைகளும் (degrees), y கலைகளும் (minutes), g விகலைகளும் (seconds) கொண்டிருக்கும் கோணமானது சுருக்கமாக $x^0\ y'\ z''$ என்றெழுதப்படும்.

இவ்வமைப்பு முறை 'அறுபான் அளவை முறை' எனப்படும். இதனை பிரிட்டிஷ் முறை எனவும் கூறுவர். இம் முறை எல்லா எண்முறைக் கணக்கீடுகளிலும், அன்றாடச் செயல் வகைகளிலும் பயன்படுத்தப்பட்டு வருகின்றது.

(ii) நூற்று முறை அமைப்பு (Centesimal system): ஃபிரெஞ்சுப் புரட்சிக் காலத்தில் எழுந்ததொரு முறையானது தசாம்ச அளவை அடிப்படையில் பொதுவாக அமைக்கப்பட்டு 'நூற்றுமுறை' என வழங்குகின்றதாகும்.

இந்த முறையில், ஒரு கோணத்தின் மூல அலகு ஒரு செங் கோணமே. ஆனல், இதன் பகுப்பு முறை வேறாகும்.

இம் முறையிலமைந்த பகுப்புகளாவன:

1 செங்கோணம் = 100 கிரேடுகள் (100^g)

1 கிரேடு = 100 கலைகள் ($100'$)

1 கலை = 100 விகலைகள் ($100''$)

x கிரேடுகளும், y கலைகளும், z விகலைகளும் கொண்டுள்ள தொரு கோணம் சுருக்கமாக $x^g\, y'\, z''$ என்றெழுதப்படும்.

தசாம்ச முறை எளிதேயாயினும் திரிகோணத் தகவுகளுக்கு ஏற்கெனவே அமைந்துள்ள அட்டவணைகளையெல்லாம் இம் முறையின் கீழ்க் கொண்டுவர மறுபடியும் திருப்பிக் கணிக்க வேண்டிய நிலை ஏற்படுகிறது. இது பேருழைப்பை மேற்கொள் வதாகும். ஆகையால், இம் முறை அனுபவ சாத்தியமன்று எனக் கைவிடப்பட்டது. இவ்வமைப்பு முறை அது தோன்றிய ஃபிரெஞ்சு நாட்டிலும் வழக்காற்றில் இல்லை.

(iii) ஆரையன் (Radian) அல்லது வட்ட அளவை (Radian or circular measure): உயர் கணிதத்தில் பயன்படும் அளவை வட்ட அளவை ஆகும். இதில் கோணத்தை அளக்க 'ரேடியன்' அல்லது ஆரையன் என்பதை அலகாகக் கொள்கிறோம்.

ரேடியன்: வரையறை

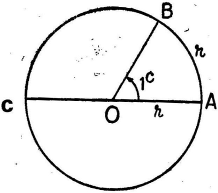
ஒரு வட்டத்தில், அதன் ஆரத்தின் நீளங் கொண்ட வில் அவ் வட்டத்தின் மையத்தில் தாங்கும் கோணம் ஓர் ஆரையன் அல்லது ரேடியன் எனப்படும்.

ஓர் ஆரையன் என்பது 1^c எனக் குறிப்பிடப்படும்.

தேற்றம்

(2) ஆரையன் ஒரு மாறிலிக் கோணமாகும் (The Radian is a constant angle)

படத்தில், O என்பது வட்டத்தின் மையப்புள்ளியாகும். அதன் ஆரம் r எனக் கொள்க.



படம் 2

ஆரத்தினளவு நீளமுள்ள AB என்னும் வில்லைக் குறித்துக் கொள்க.

அது வட்டத்தின் மையத்தில் AOB என்னும் கோணத்தைத் தாங்கும்.

வரையறையின் படி $\angle AOB = 1^c$ ஆகும்.

ஓர் ஆரையன் அளவு மாறுததாகும் என்றும், அது குறிப்பிட்ட எந்த வட்டத்தையும் எவ்வகையாலும் சார்ந்ததன்று என்றும் நிரூபித்தல்.

வரைவுமுறை : AO ஐ C வரையில் AOC என்பது ஒரு விட்டம் ஆகுமாறு நீட்டுக.

அப்பொழுது ABC ஓர் அரை வட்டப் பரிதியாகும்.

நிரூபணம் : ஒரு வட்டத்தின் மையத்திலுள்ள இரண்டு கோணங்களின் விகிதம் அவற்றை ஏற்று நிற்கும் வட்ட வில்களின் நீளங்களின் விகிதத்திற்குச் சமம்.

$$\text{எனவே,}\quad \frac{\angle AOB}{\angle AOC} = \frac{\text{வில் } AB}{\text{வில் } ABC} = \frac{r}{\pi r} = \frac{1}{\pi}$$

$$\text{(அதாவது)}\quad \frac{1^c}{2 \text{ செங்கோணங்கள்}} = \frac{1}{\pi}$$

$$\therefore\quad 1^c = \frac{2 \text{ செங்கோணங்கள்}}{\pi} \qquad \ldots (1)$$

இங்குச் செங்கோணத்தின் அளவும், π-ன் அளவும் மாறிலிகளாகும்.

$\therefore$ 1^c மாறிலியாகும்.

குறிப்பு

(i) பலன் (1)-லிருந்து, பின்வரும் தொடர்புகளைப் பெறுகிறோம்.

$$\pi^c = 2 \text{ செங்கோணங்கள்}$$

$$\frac{\pi^c}{2} = 1 \text{ செங்கோணம்}$$

$$\frac{\pi^c}{3} = 60^\circ ; \frac{\pi^c}{4} ; 45^\circ ; = \frac{\pi^c}{6} = 30^\circ$$

(ii) ஓர் ஆரையனின் அளவு பலன்

$$\text{(1)-லிருந்து } 1^c = \frac{2 \text{ செங்கோணங்கள்}}{\pi}$$

$$= \frac{180^\circ}{\pi}$$

$$= 57^\circ\ 17'\ 45'' \text{ (தோராயமாக)}$$

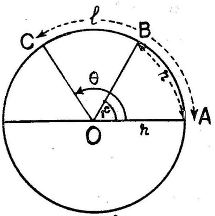
(iii) ஒரு முறையமைப்பிலிருந்து மற்றொரு முறையமைப்புக்கு மாற்றங்காணப் பின்வரும் தொடர்பு பயன்படுவதாகும்.

$$\pi^c = 2 \text{ செங்கோணங்கள்} = 180^\circ = 200^g$$

(3) வில், ஆரம், கோணம் இவற்றிடையேயுள்ள தொடர்பு (Relation between arc, radius and angle)

O என்பது படத்தில் காட்டிய வட்டத்தின் மையப் புள்ளியாகுக. வட்டத்தின் ஆரம் *r* எனக் கொள்க.

AC என்னும் *l* நீளமுள்ள தொரு வில்லானது வட்ட மையத்தில் θ ஆரையன்கள் அளவுள்ள *AOC* என்னும் கோணத்தைத் தாங்குவதாகக் கொள்க.



படம் 3

$l = r\,\theta$ என நிரூபித்தல்

A-யிலிருந்து தொடங்கி, *r* அளவு நீளமுள்ள *AB* என்பதொரு வில்லை அளந்தெடுத்துக் கொள்க.

இதனால், வரையறைப்படி, $\angle AOB = 1^c$ ஆகும்.

நிரூபணம்

இப்பொழுது $\frac{\angle AOC}{\angle AOB} = \frac{\text{வில் } AC}{\text{வில் } AB} = \frac{l}{r}$

அதாவது $\frac{\angle AOC}{1^c} = \frac{l}{r}$

$\therefore \quad \angle AOC = \frac{l^c}{r}$

ஆனல், $\angle AOC = \theta^c$

$\therefore \quad \theta = \frac{l}{r}$

அல்லது $\underline{l = r\,\theta}$

கிளை : ஒரு வட்டப் பகுதி (Sector) AOC-ன் பரப்பு

$= \frac{1}{2}\,lr = \frac{1}{2}\,r\theta \cdot r = \frac{1}{2} r^2 \theta$

4. விளக்க மாதிரிகள்

மாதிரி 1 : ஓர் ஒழுங்கான தசகோணத்தினுடைய (Decagon) உட்கோணத்தின் அளவை மூவகையான அளவை முறைகளிலும் காண்க.

ஓர் ஒழுங்கான n-கோணத்தின் உட்கோணம் $= \frac{2n-4}{n}$ செங்கோணங்களாகும்.

$\therefore$ ஓர் தச கோணத்தின் உட்கோணம்

$= \frac{2 \times 10 - 4}{10}$ அல்லது $\frac{8}{5}$ செங்கோணம்

1 செங்கோணம் $= 90^\circ = 100^g = \frac{\pi^c}{2}$ ஆதலால்,

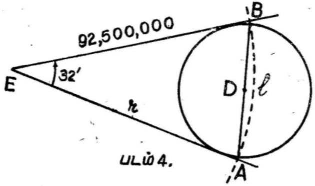
ஒரு தசகோணத்தின் உட்கோணம் $= 144^\circ = 160^g = \frac{4\pi^c}{5}$

மாதிரி 2 : பூமியிலிருந்து 9,25,00,000 மைல் தொலைவிலுள்ள சூரியனது விட்டம், அதனை நோக்குங்கால் கண்ணிடத்தில் 32′ எதிர்கொள்ளுமானல், சூரியனது விட்டத்தைக் கணக்கிடுக.

படத்தில், AB என்பது சூரியனது விட்டம். E என்பது கண்ணைக் குறிக்கிறது. EA, EB கண்ணிலிருந்து சூரியனது தூரத்தைக் குறிக்கின்றது.

$\angle AEB = 32'$

சூரியனது விட்டம் Dமைல்கள் எனக்கொள்வோம். சூரியனது விட்டத்தினால் கண்ணிடத்தே எதிர்கொள்ளும் கோணம் மிகச்



படம் 4.

சிறியதாகையால், அதன் விட்டம் D ஐ, கண்ணை மையமாகக் கொண்டு, EA-ஐ ஆரமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சிறிய வில் எனத் தோராயமாகக் கொள்ளலாம்.

(அதாவது) $D =$ விட்டம் $AB \approx$ வில் AB

வில், ஆரம், கோணம் இவற்றிடையே உள்ள தொடர்பின்படி

$\frac{l}{r} = \theta$ ஆதலால்,

$\frac{D}{92500000} = 32'$ உள்ள ஆரையன் அளவு.

இப்பொழுது $32'$ உள்ள ஆரையன் அளவு

$$= \frac{32}{60} \times \frac{\pi}{180} = \frac{2\pi}{675}$$

$$\therefore \quad D = \frac{2\pi}{675} \times 92500000 \text{ மைல்கள்}$$

$= 861373$ மைல்கள் (தோராயமாக)

பயிற்சி 1

1. 67° 30′ஐ ஆரையன்களாக மாற்றுக. [விடை : $\frac{3\pi^c}{8}$]

2. $\frac{5\pi}{27}$ ஆரையன்களை அறுபான் முறையில் மாற்றுக.
[விடை : 33° 20′]

3. ஓர் ஒழுங்கான ஐங்கோணத்தின் உட்கோண அளவை மூவகையான அளத்தல் முறைகளாலும் குறிப்பிடுக.
[விடை : 108°, $\frac{3\pi^c}{5}$, 120^g]

4. பூமியின் ஆரம் 4,000 மைல் எனக் கொண்டு ஓரிடத்திற்கு வடக்கே மற்றோரூர் 440மைல் தூரத்தில் இருக்குமானால், அவ்விடங்களின் அட்சரேகைகளின் வித்தியாசத்தைக் காண்க. [விடை : 6·3°]

5. ஒரு கடிகாரம் $3\frac{1}{2}$ மணியைக் காட்டும்போது, அதன் மணி முள்ளுக்கும் நிமிட முள்ளுக்கும் இடையில் அடங்கியிருக்கும் கோணத்தினளவை மூவகை அளத்தல் முறைகளாலும் குறிப்பிடுக. [விடை : 75°, $\frac{5\pi^c}{12}$, $83{\cdot}3^g$]

6. ஒரு கோணத்தின் பாகைகள் (degrees), கிரேடுகள், ஆரையன்கள் இவற்றின் எண்ணிக்கை முறையே D, G, θ ஆனால், $\frac{D}{90} = \frac{G}{100} = \frac{2\theta}{\pi}$ என நிறுவுக.

7. பூமியிலிருந்து 378000 கிலோ மீட்டர் தொலைவிலுள்ள சந்திரனது விட்டமானது அதனை நோக்கி நிற்போனது கண்ணிடத்தில் 31′ஐ எதிர் கொண்டு விளங்குமானால், அக் கோளத்தின் விட்டத்தைக் கண்டறிக.
[விடை : 3410 மீட்டர்]

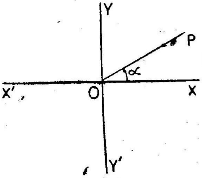
8. 31′ கோண விட்டமுள்ள முழுமதியை முற்றிலும் சரியாக மறைத்து நிற்கும்படியாக 1 செ.மீ. விட்டமுள்ள நாணயத்தைக் கண்ணெதிரே எவ்வளவு தூரத்தில் நிறுத்த வேண்டும்? [விடை : 110·9 செ.மீ.]

2. திரிகோணச் சார்புகளும் அவற்றின் தொடர்புகளும்

(Trigonometrical Functions and their Relations to one another)

(1) நேர், எதிர் ராசிக் கோணங்கள் (Positive and Negative angles)

OP என்னும் நேர்கோடானது *OX*-ல் இருந்து தொடங்கி, *O*வைச் சுற்றிச் சுழன்று வருங்கால் இடப் பக்கமாகச் சுழன்று சென்றால் நேர் ராசிக் கோணங் களேயும், வலப்பக்கமாகச் சுழன்று சென்றால், எதிர் ராசிக் கோணங்களேயும் அமைப்பதாகக் கொள்ளப் படும்.



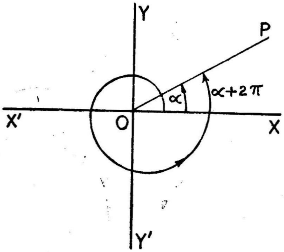
படம் 5

வடிவ கணிதத்தில் (Geometry) இரண்டு செங்கோணங் களுக்குக் குறைந்தவற்றையே காண்கிறோம்.

ஆனல், திரிகோண கணிதத்தில் எந்த அளவுள்ள கோணமும் இடம் பெறுவதாகும்.

OP ஆனது *OX*-ல் தொடங்கியெழுந்து *XOP* என்னும் கோணத்தை ($\angle XOP = \alpha$ என்க) உண்டாக்கட்டும். *OP* ஆனது மீண்டும் *OX*-ல் தொடங்கி முன்சென்ற திசையிலே இடஞ்சுழியாக

ஒரு சுற்றுச்சுற்றி OXஐத் தாண்டி OP என்ற நிலேக்கே வந்தெய் தட்டும். இப்பொழுது OP ஆனது OX உடன் $\alpha+2\pi$ என்னும் கோணத்தை உண்டாக்கும். இதைப் படத்தில் காட்டியபடி குறிப்



படம் 6

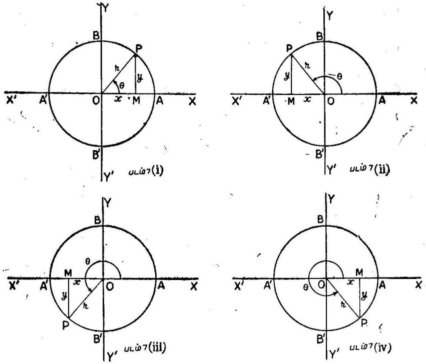
போம். இவ்வாறே OP ஆனது OX-ல் தொடங்கி, இருமுறை இடஞ்சுழியாகச் சுழன்று முன்னிலேக்கே வந்தெய்துவதால் ஏற்படும் கோணம் $\alpha+4\pi$ ஆகும். இவ்வாறே ஒவ்வொரு முழுச் சுற்றுக்கும் 2π கோணம் அதிகப்படும்.

(2) எந்த அளவுள்ள கோணத்திற்கும் திரிகோணத் தகவுகள் (Trigonometrical ratios for an angle of any magnitude)

ஒரு கோடு OX என்னும் நிலேத்த கோட்டில் இருந்து தொடங்கி இடஞ் சுழியாகச் சுழன்று θ என்னும் ஏதேனும் அளவுள்ள ஒரு கோணத்தை உண்டாக்கி OP என்னும் நிலேயை அடையட்டும்.

OP ஏதேனுமொரு வட்ட நாற்கூறில் அமையலாம். OP முதல் நாற்கூறிலமைந்தால் θ ஒரு குறுங்கோணமாகும். OP இரண்டாம் கால் வட்டத்திலமைந்தால், θ ஒரு விரிகோணமாகும். OP மூன்றும் கால் வட்டத்திலமைந்தால், θ ஒரு பின் வளேகோண மாகும். OP நான்காம் கால் வட்டத்திலமைந்தால், θ இன்னெரு பின் வளே (Reflex) கோணமாகும். பொதுவாக, θ-ன் அளவு $0 \leq \theta \leq 360°$ என்றதற்கேற்ப எதுவாக வேண்டுமானுலும் இருக்க லாம்.

$X'OX$ஐ x அச்சாகக் கொள்க. $X'OX$-க்குக் குத்தாக $Y'OY$ என்ற கோடு வரைக. $Y'OY$ ஐ y அச்சாகக் கொள்க. P-லிருந்து



படம் 7.

OX அல்லது OX-ன் நீட்டலுக்கு PM என்னும் ஒரு குத்துக் கோடு வரைக.

P-ன் ஆயத் தொலைகள் x, y ஆகுக. OP-ன் நீளம் r ஆகுக.

θ அமைந்திருக்கும் கால்வட்டப் பகுதிக்கேற்ப x, y-ன் குறிகள் மாறுகின்றன. ஆனல், r எப்பொழுதும் நேர் ராசியாகவே கொள்ளப்படும்.

இனி, θ எந்த நாற் கூறிலமைந்தாலும், பின்வரும் 6 வகையான கோண கணிதத் தகவுகளின் வரையறைகளைப் பெறுகிறோம்.

(1) $\dfrac{MP}{OP} = \dfrac{y}{r}$ என்னும் விகிதம் sine θ எனப்படும்.

(2) $\dfrac{OM}{OP} = \dfrac{x}{r}$ என்னும் விகிதம் cosine θ எனப்படும்.

(3) $\dfrac{MP}{OM} = \dfrac{y}{x}$ என்னும் விகிதம் tangent θ எனப்படும்.

(4) $\dfrac{OP}{MP} = \dfrac{r}{y}$ என்னும் விகிதம் cosecant θ எனப்படும்.

(5) $\dfrac{OP}{OM} = \dfrac{r}{x}$ என்னும் விகிதம் secant θ எனப்படும்.

(6) $\dfrac{OM}{MP} = \dfrac{x}{y}$ என்னும் விகிதம் cotangent θ எனப்படும்.

குறிப்பு 1 : மேற் கண்ட விகிதங்கள் சுருக்கமாக sin θ, cose θ, tan θ, cosec θ, sec θ, cot என்று வரையப்படும்.

குறிப்பு 2 : மேற்கூறிய வரையறைகள் θ-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் பொருந்தும்.

குறிப்பு 3 : வெக்டர் ஆரமான OP (radius vector) இடம் பெறும் கால் வட்டத்திற்கேற்பக் கோடுகளும், கோணங்களும் குறித்து அமைத்துக் கொள்ளவேண்டிய இராசிக் குறி விதிகளைக் கொள்ளவேண்டும்.

குறிப்பு 4 : சுழல் கோட்டின் மேல் P என்னும் புள்ளியை எவ்விடத்தில் எடுத்துக் கொண்டாலும் கொடுக்கப்பட்ட θ என்னும் யாதொரு கோணத்திற்குரிய தகவுகள் அனைத்தும் மாறிலிகள் ஆகும். அதாவது இத் தகவுகள் கோணத்தின் மதிப்பைப் பொறுத்ததேயன்றி, அக் கோணத்தையுடைய செங்கோண முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் நீளங்களைப் பொறுத்ததன்று.

குறிப்பு 5 : எல்லாப் படங்களிலிருந்தும், நாம் அறிவது, கோணம் எத்தகையதாயினும், P-ன் ஆயத் தொலைகள் x, y என்பன $r = OP$ஐ விட அதிகமல்ல என்பதாகும். ஆகையால், கோணம் எதுவாயினும், அதன் sine, cosine விகிதங்கள் மதிப்பில் 1ஐ விட அதிகமாகாது.

குறிப்பு 6 : θ ஒரு குறுங்கோணமானால், பின்வரும் வரையறைகள் உண்மையெனக் காணலாம்:

$$\sin\theta = \frac{MP}{OP} = \frac{\text{எதிர்ப் பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}}$$

$$\cos\theta = \frac{OM}{OP} = \frac{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}}$$

$$\tan\theta = \frac{MP}{OM} = \frac{\text{எதிர்ப் பக்கம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}$$

குறிப்பு : 7 மேற் கண்ட விகிதங்களனைத்தும், நீளத்தை நீளத்தால் வகுத்துப் பெற்றவையாதலின், அவை எண்கள் மட்டுமேயாகும்.

(3) கோண கணிதத் தகவுகளிடையே உள்ள தொடர்புகள்
(Relations between the Trigonometrical ratios of an angle)

திரிகோண கணிதத்தகவுகளின் வரையறைகளிலிருந்து, நாம் கீழ்க்கண்டவற்றை எளிதில் பெறுகிறோம் :

(i) $\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$; $\sin\theta = \frac{1}{\operatorname{cosec}\theta}$; $\operatorname{cosec}\theta \sin\theta = 1$

(ii) $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$; $\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$; $\sec\theta\cos\theta = 1$

(iii) $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$; $\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$; $\cot\theta\tan\theta = 1$

(iv) $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ என நிறுவுக.

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{MP}{OP} \div \frac{OM}{OP} = \frac{MP}{OM} = \tan\theta$$

(v) $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

(vi) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ (θ-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்குமாம்) என நிறுவுக.

முதலில், $(\sin\theta)^2$ என்பது $\sin^2\theta$ என்றெழுதப்படும் என அறிதல் வேண்டும்.

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = (\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = \left(\frac{MP}{OP}\right)^2 + \left(\frac{OM}{OP}\right)^2$$

$$= \frac{MP^2}{OP^2} + \frac{OM^2}{OP^2} = \frac{MP^2 + OM^2}{OP^2} \quad \text{(படம் 7)}$$

$$= \frac{OP^2}{OP^2} \quad \text{(பிதாகரஸ் தேற்றப்படி)}$$

$$= 1$$

ஆகவே, $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

(vii) θ-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$ என நிறுவுக.

$$1+\tan^2\theta=1+(\tan\theta)^2=1+\left(\frac{MP}{OP}\right)^2=1+\frac{MP^2}{OM^2}$$

$$=\frac{OM^2+MP^2}{OM^2}=\frac{OP^2}{OM^2}\text{(பிதாகரஸ் தேற்றப்படி)}$$

$$=\left(\frac{OP}{OM}\right)^2=(\sec\theta)^2=\sec^2\theta$$

$$\therefore\ 1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$$

(viii) θ-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் $1+\cot^2\theta=\operatorname{cosec}^2\theta$ என நிறுவுக.

$$1+\cot^2\theta=1+(\cot\theta)^2=1+\left(\frac{OM}{MP}\right)^2$$

$$=1+\frac{OM^2}{MP^2}=\frac{MP^2+OM^2}{MP^2}$$

$$=\frac{OP^2}{MP^2}\text{ (பிதாகரஸ் தேற்றப்படி)}$$

$$=\left(\frac{OP}{MP}\right)^2$$

$$=\operatorname{cosec}^2\theta$$

$$\therefore\ 1+\cot^2\theta=\operatorname{cosec}^2\theta$$

(4) விளக்க மாதிரி

$\dfrac{\cos A}{1-\tan A}+\dfrac{\sin A}{1-\cot A}=\sin A+\cos A$ என நிறுவுக.

$$\text{இடப்பக்கம்}=\frac{\cos A}{1-\dfrac{\sin A}{\cos A}}+\frac{\sin A}{1-\dfrac{\cos A}{\sin A}}$$

$$=\frac{\cos^2 A}{\cos A-\sin A}+\frac{\sin^2 A}{\sin A-\cos A}$$

$$= \frac{\cos^2 A}{\cos A - \sin A} - \frac{\sin^2 A}{\cos A - \sin A}$$

$$= \frac{\cos^2 A - \sin^2 A}{\cos A - \sin A}$$

$$= \cos A + \sin A$$

= வலப்பக்கம்

குறிப்பு : இப்பொழுது பயிற்சி 2·1-ஐச் செய்யலாம்.

(5) கோண கணிதத் தகவுகளின் குறிகள்

θ ஆனது 0° யிலிருந்து 360° வரையில் மதிப்பு மாறும்போது அதன் கோணத்தகவுகளுக்குரிய இராசிக் குறிகளில் காணப்படும் மாறுபாடுகளை தொடர்ந்தறிதல்.

(i) நமது வரையறையின்படி, $\sin \theta = \frac{MP}{OP}$ ஆகும்.

OP ஆனது எப்பொழுதுமே நேர் ராசியாகக் கருதப்படுகிறது.

ஆகவே $\sin\theta$ ஆனது MPயின் இராசிக் குறியையே கொள்ளும்.

θ ஆனது 0°-க்கும் 180°-க்கும் இடைப்படுங்கால் MP நேர் ராசியாகவும், 180°-க்கும் 360°-க்கும் இடைப்படுங்கால் எதிர் ராசியாகவும் விளங்கும்.

ஆதவே $\sin \theta$-ன் தகவுகள் முதலிரண்டு கால் வட்டங்களில் நேர் ராசியாகவும், மூன்றாவது, நான்காவது கால் வட்டங்களில் எதிர் ராசியாகவும் இருக்கும்.

இனி, $\operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta}$ ஆதலின், $\operatorname{cosec} \theta$ ஆனது $\sin \theta$-க்கு உரிய குறிகளையே பெறும்.

(ii) $\cos \theta = \frac{OM}{OP}$ ஆதலின், OM-க்கு உரிய இராசிக் குறியையே $\cos \theta$ பெறும்

ஆதலால், $\cos \theta$ ஆனது முதலாவது, நான்காவது கால் வட்டங்களில் நேர் ராசியாகவும், இரண்டாவது, மூன்றாவது கால் வட்டங்களில் எதிர் ராசியாகவும் விளங்கும்.

மேலும், $\sec \theta$ ஆனது $\cos \theta$-வின் குறிகளையே பெறும்.

(iii) $\tan\theta = \frac{MP}{OM}$ ஆதலின், MP-ம் OM-ம் ஒரே குறியைப் பெறும்பொழுது $\tan\theta$ நேர் ராசியாகவும், அவை மாறுபட்ட குறியைப் பெறும் பொழுது எதிர் ராசியாகவும் இருக்கும்.

ஆகவே, $\tan\theta$ ஆனது முதலாவது, மூன்றுவது, கால் வட்டங்களில் நேர் ராசியாகவும், இரண்டாவது, நான்காவது கால் வட்டங்களில் எதிர் இராசியாகவும் இருக்கும்.

மேலும், $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$ ஆதலின், $\cot\theta$ ஆனது $\tan\theta$ வின் குறிகளையே பெறும்.

மேல் மொழிந்தவற்றால், முதல் கால் வட்டத்தில் எல்லாத் திரிகோணத் தகவுகளும் + ஆமென்றும்

இரண்டாம் கால் வட்டத்தில் sine, coscant மட்டும் + ஆமென்றும், மூன்றாங் கால் வட்டத்தில் tan, cot மட்டும் + ஆமென்றும், நான்காம் கால் வட்டத்தில் cos, sec மட்டும் + ஆமென்றும் அறியப்படும்.

IIஆம் கால் வட்டம் sin,cosec மட்டும் + ஆகும்	Iஆம் கால் வட்டம் எல்லாத் தகவுகளும் + ஆகும்
IIIஆம் கால் வட்டம் tan, cot மட்டும் + ஆகும்	IVஆம் கால் வட்டம் cos, sec மட்டும் + ஆகும்

6. விளக்க மாதிரி

A ஒரு விரிகோணமும், $\sin A = \frac{20}{29}$-ம் ஆனால், $21\tan A - 29\cos A = 1$ என நிறுவுக.

$$\sin A = \frac{20}{29}$$

$$\therefore \cos^2 A = 1 - \sin^2 A = 1 - \left(\frac{20}{29}\right)^2 = \frac{49\times 9}{29^2}$$

$$\therefore \cos A = \pm\frac{21}{29}$$

A விரிகோணமாதலால், $\cos A$ எதிர் ராசியாகும்.

$\therefore \cos A = -\frac{21}{29}$ எனக் கொள்ள வேண்டும்

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{20/29}{-21/29} = -\frac{20}{29}$$

A விரிகோணமாதலால், tan *A* எதிர் ராசியாகவே அமைய வேண்டும் என்பதற்கேற்ப tan *A*-ன் மதிப்பும் ஒத்திருக்கிறது.

இனி, $21 \tan A - 29 \cos A = 21\left(\frac{-20}{21}\right) - 29\left(\frac{-21}{29}\right)$

$= -20+21=1$ ஆகும்.

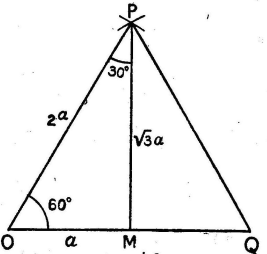
குறிப்பு : பயிற்சி 2·2ஐச் செய்யலாம்.

7. சில முக்கிய கோண கணிதத் தகவுகளின் மதிப்புகளைக் காணல்

0°, 30°, 60°, 45°, 90°, 180°, 270°, 360° **என்பவற்றின் கோணத் தகவுகளின் மதிப்புகளைக் கண்டறிதல்.**

(i) 60° கோணத் தகவுகள்

OQP என்பது சம பக்க முக்கோணமாகட்டும். ஆகவே, ஒவ்வொரு கோணமும் 60° ஆகும். ஒவ்வொரு பக்கமும் $2a$ ஆக இருக்கட்டும்.



படம் 8

OQ-விற்கு *P*-யிலிருந்து *PM* என்னும் செங்குத்துக் கோடு வரைக.

M என்னும் புள்ளி *OQ*ஐ இரு சம பாகமாக்கும். அப்போது, $OM = MQ = a$ ஆகும்.

OMP என்ற செங்கோண முக்கோணத்தில்,

$$OM = a, \; OP = 2a, \; \underline{|O} = 60°$$

$$\therefore \; PM^2 = OP^2 - OM^2 \quad \text{(பிதாகரஸ் தேற்றத்தின்படி)}$$

$$= (2a)^2 - a^2 = 3a^2$$

$$\therefore \; PM = \sqrt{3}\,a$$

ஆகவே, $\sin 60° = \dfrac{MP}{OP} = \dfrac{\sqrt{3}\,a}{2a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$\cos 60° = \frac{OM}{OP} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60° = \frac{MP}{OM} = \frac{\sqrt{3}\,a}{a} = \sqrt{3}$$

(ii) 30°-ன் கோணத் தகவுகள்

மேலே உள்ள படத்தில், $\angle OPM = 30°$ ஆகும்.

$$\therefore \; \sin 30° = \frac{\text{எதிர்ப்பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30° = \frac{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30° = \frac{\text{எதிர்ப் பக்கம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}} = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{1}{\sqrt{3}a}$$

குறிப்பு : 60°-ம், 30°-ம் ஒன்றுக்கொன்று நிரப்பும் கோணங்களாகும்.

ஒரு கோணத்தின் sin விகிதம் அக் கோணத்தினுடைய நிரப்பின் cos விகிதத்திற்குச் சமம் எனக் காண்கிறோம். இவ்வாறே ஒரு கோணத்தின் cos, tan, cosec, sec, cot விகிதங்கள் முறையே அந்தக் கோணத்தினது நிரப்பியின் sin, cot, sec, cosec, tan விகிதங்களுக்குச் சமமாகும். இது பொதுவாக எந்தக் கோணம் θ-விற்கும் அதன் நிரப்பும் கோணம் $90-\theta$-விற்கும் உள்ள விகிதங்களுக்கு உண்மையெனப் பின்பு காண்போம்,

(iii) 45° தகவுகள்

இவ்வதிகாரம் பிரிவு 2, படம் 7 (i)-ல், $\theta = 45^\circ$ ஆனுல், $OM = MP$ ஆகும். ஒவ்வொன்றும் a எனக் கொள்வோம்.

அப்பொழுது, $OP^2 = OM^2 + MP^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$

$\therefore \ OP = \sqrt{2a}$ ஆகும்.

$$\therefore \ \sin 45^\circ = \frac{MP}{OP} = \frac{a}{\sqrt{2}\,a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{OM}{OP} = \frac{a}{\sqrt{2}\,a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{MP}{QP} = \frac{a}{a} = 1$$

(iv) 0°-கோணத் தகவுகள்

படம் 7 (i)-ல் $\angle XOP = \theta$

புள்ளி P யானது, புள்ளி A ஐ நோக்கி வட்டத்தின்மீது நகரும் போது, θ-ன் மதிப்பு குறையக் குறைய MP-ம் குறைந்து கொண்டும், OM வளர்ச்சி பெற்றும் புள்ளி A யுடன் P ஒன்று சேரும் பொழுது, θ-ன்மதிப்பு பூச்சியத்தையடைய MP பூச்சியத்தையும், OM ஆனது OPஐயும் அடையும். இதையே குறியீட்டு முறையில் $P \to A$ என்ற நிலையில் $\theta \to 0$, $MP \to 0$, $OM \to OA$ என எழுதப்படுகிறது.

$$\sin 0^\circ = \underset{\theta \to 0}{Lt} \sin \theta = \underset{MP \to 0}{Lt} \frac{MP}{OP} = \frac{O}{OP} = 0$$

$$\cos 0^\circ = \underset{\theta \to 0}{Lt} \cos \theta = \underset{OM \to OP}{Lt} \frac{OM}{OP} = \frac{OP}{OP} = 1$$

$$\tan 0^\circ = \underset{\theta \to 0}{Lt} \tan \theta = \underset{\substack{MP \to 0 \\ OM \to OP}}{Lt} \frac{MP}{OM} = \frac{0}{OP} = 0$$

கிளைத்தேற்றம் : $\cot 0^\circ = \infty$; $\sec 0^\circ = 1$; $\operatorname{cosec} 0^\circ = \infty$.

(v) 90° கோணத் தகவுகள்

படம் 7 (i)-ல், $\angle XOP=\theta$

புள்ளி P யானது, புள்ளி B ஐ நோக்கி வட்டத்தின் மீது நகரும் போது θ-ன் மதிப்பு சிறிது சிறிதாக MP அதிகமாகிக் கொண்டும், OM குறைந்து கொண்டும், புள்ளி B யுடன் P ஒன்று சேரும் பொழுது θ-ன் மதிப்பு 90° ஐ யடைய, MP யானது OP ஐயும் OM பூச்சியத்தையும் அடையும்.

இதையே குறியீட்டு முறையில் $P\to B$ என்ற நிலையில் $\theta\to 90°$, $MP\to OP$, $OM\to 0$ என எழுதப்படுகிறது.

$$\therefore\ \sin 90° = \underset{\theta\to 90°}{Lt} \sin\theta = \underset{MP\to OP}{Lt} \frac{MP}{OP} = \frac{OP}{OP} = 1$$

$$\cos 90° = \underset{\theta\to 90°}{Lt} \cos\theta = \underset{OM\to 0}{Lt} \frac{OM}{OP} = \frac{0}{OP} = 0$$

$$\tan 90° = \underset{\theta\to 90°}{Lt} \tan\theta = \underset{\substack{MP\to OP\\ OM\to 0}}{Lt} \frac{MP}{OM} = \infty$$

கிளைத்தேற்றம் 1 (i) $\cot 90°=0$; $\sec 90°=\infty$; $\operatorname{cosec} 90°=1$

(vi) 180°-ன் கோணத் தகவுகள்

படம் 7 (ii)ல் $\angle XOP=\theta$

புள்ளி P யானது, புள்ளி A'ஐ நோக்கி வட்டத்தின்மீது நகரும் பொழுது θ-ன் மதிப்புச் சிறிது சிறிதாக அதிகமாக MP குறைந்து கொண்டும் θM வளர்ச்சி பெற்றும், புள்ளி A' யுடன் P ஒன்று சேரும் பொழுது θ-ன் மதிப்பு 180° ஐயடைய MP பூச்சியத்தையும், OM ஆனது OP ஐயும் அடையும்.

இதையே குறியீட்டு முறையில் $P\to A'$ என்ற நிலையில்

$\theta\to 180°$, $MP\to 0$, $OM\to OP$ (எண் அளவில் ஆனால்,

அதாவது $OM\to -OP$ எதிர் இராசி யாகும்)

$$\therefore\ \sin 180° = \underset{\theta\to 180°}{Lt} \sin\theta = \underset{MP\to 0}{Lt} \frac{MP}{OP} = \frac{0}{OP} = 0$$

$$\cos 180° = \underset{\theta\to 180°}{Lt} \cos\theta = \underset{OM\to OP-OP}{Lt} \frac{OM}{OP} = \frac{-OP}{OP} = -1$$

$$\tan 180° = \underset{\theta\to 180°}{Lt} \tan\theta = \underset{\substack{MP\to 0\\ OM\to -OP}}{Lt} \frac{MP}{OM} = \frac{O}{-OP} = 0$$

கிளைத் தேற்றம் : $\cos 180° = -\infty$, $\sec 180° = -1$; $\operatorname{cosec} 180° = \infty$

(vii) 270°-ன் கோணத் தகவுகள்

படம் 7 (iii)-ல், $\angle XOP = \theta$

புள்ளி P யானது B' ஐ நோக்கி வட்டத்தின் மீது நகரும் பொழுது, θ-ன் மதிப்பு சிறிது சிறிதாக அதிகமாக MP வளர்ச்சி பெற்றும், OM குறைந்து கொண்டும், புள்ளி B' யுடன் P ஒன்று சேரும் பொழுது θ-ன் மதிப்பு 270° ஐ யடைய MP யானது OP யையும் OM பூச்சியத்தையும் அடையும்.

இதையே குறியீட்டு முறையில் $P\to B'$ என்ற நிலையில் $\theta\to 270°$, $MP\to OP$ (எண் அளவில் ஆனல் எதிர் இராசியாகும்)

அதாவது $MP\to -OP$

மேலும் θ, 270°-க்கு அநேகமாக சமமாக, OM மிகவும் சிறியதும் எதிர் இராசியும் உடையதாகையால் $-\epsilon$ என எடுத்துக் கொண்டு $\theta\to 270°$, $OM = -\epsilon$ இங்கு $\epsilon\to 0$ எனக் கொள்ளலாம்.

$$\therefore \sin 270° = \underset{\theta\to 270°}{Lt} \sin\theta = \underset{MP\to OP-OP}{Lt} \frac{MP}{OP} = \frac{-OP}{OP} = -1$$

$$\cos 270° = \underset{\theta\to 270°}{Lt} \cos\theta = \underset{\substack{OM-\epsilon\\ \epsilon\to 0}}{Lt} \frac{OM}{OP} = 0$$

$$\tan 270° = \underset{\theta\to 270°}{Lt} \tan\theta = \underset{\substack{MP\to OP-\\ OM\to\theta \\ \epsilon\to 0}}{Lt} \frac{MP}{OM} = \infty$$

கிளைத்தேற்றம்: $\cot 270° = 0$; $\sec 270° = -\infty$; $\operatorname{cosec} 270° = -1$

(viii) 360°-ன் கோணத் தகவுகள்

படம் 7 (iv)-ல் $\angle XOP = 0$

புள்ளி P யானது, புள்ளி A ஐ நோக்கி வட்டத்தின்மீது நகரும் பொழுது, θ–மதிப்பு சிறிது சிறிதாக அதிகமாக MP குறைந்து கொண்டும் OM வளர்ச்சி பெற்றும், புள்ளி A யுடன் P ஒன்று சேரும் பொழுது θ-ன் மதிப்பு 360° ஐயடைய MP பூச்சியத்தையும், OM ஆனது OP ஐயும் அடையும்.

இதையே குறியீட்டு முறையில் $P \to A$ என்ற நிலையில் θ ஆனது 360°-க்கு அதிகமாக சமமாக PM மிகச் சிறியதும் எதிர்க் குறியை உடையதாகையால் $-\epsilon$ என எடுத்துக் கொண்டு $\theta \to 360°$, $MP = -\epsilon$ இங்கு $\epsilon \to 0$ எனக் கொள்ளலாம்.

$OM \to OP$

$$\therefore \sin 360° = \underset{\theta \to 360}{Lt} \sin \theta = \underset{\substack{MP = -\epsilon \\ \epsilon \to 0}}{Lt} \frac{MP}{OP} = 0$$

$$\cos 360° = \underset{\theta \to 360°}{Lt} \cos \theta = \underset{OM \to OP}{Lt} \frac{OM}{OP} = \frac{OP}{OP} = 1$$

$$\tan 360° = \underset{\theta \to 360°}{Lt} \tan \theta = \underset{\substack{MP = -6 \\ \epsilon \to 0 \\ OM \to OP}}{Lt} \frac{MP}{OM} = 0$$

கிளைத் தேற்றம் : $\cot 360° = -\infty$; $\sec 360° = 1$; $\operatorname{cosec} 360° = -\infty$

குறிப்பு : ஆர·வெக்டரானது (Radius vector) OX–லிருந்து தொடங்கி ·ஒரு முழுச் சுற்றை முடித்தால், அது 360° ஐ ஏற்படுத்திய பின், OX என்னும் ஆரம்பக் கோட்டுடனேயே கலந்து நிற்கும். அதனால் 0° கோணமும், 360°-ன் கோணத் தகவுகளெல்லாம் 0°-ன் தகவுகளேயாகும் என்பது வெளிப்படை.

(ix) $(\alpha + 2n\pi)$-ன் கோணத் தகவுகள்

n ஆனது நேர் இராசி அல்லது எதிர் இராசி முழு எண்ணாகும் பொழுது, α கோணமும், $\alpha + 2n\pi$ கோணமும் ஒரே இறுதி நிலையுடைய ஆர வெக்டரைக் கொள்ளுகின்றன. ஆகவே α-ம், $\alpha + 2n\pi$-ம் ஒரே கோணத் தகவுகளையே கொள்ளும்.

இனி, இது காறும் கண்டறிந்த பலன்களைப் பின்வரும் அட்டவணையில் தொகுத்துக் காணலாம்.

	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	−1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0	1
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$	0	$+\infty$	0

8. விளக்க மாதிரி

$2 \sec^2 180° \cos 0° + 3 \sin^3 270° - \operatorname{cosec} 90°$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

$\cos 180° = -1$ ஆகும் $\therefore$ $\sec 180° = -1$ $\therefore$ $\sec^2 180° = 1$

$\cos 0° = 1$ ஆகும்.

இனி, $\sin 270° = -1$ ஆகும் $\therefore$ $\sin^3 270° = (-1)^3 = -1$

$\sin 90° = 1$ $\therefore$ $\operatorname{cosec} 90° = 1$

$\therefore$ கொடுத்த கோவையின் மதிப்பு,

$= 2(1)(1) + 3(-1) - 1 = 2 - 3 - 1 = -2$ ஆகும்.

குறிப்பு : இப்பொழுது பயிற்சி 2-3 ஐச் செய்யலாம்.

9. கோணத் தகவுகளின் மதிப்புகளுக்கு எல்லை வரம்புகள்

$$\sin\theta = \frac{MP}{OP};\ \cos\theta = \frac{OM}{OP}$$

எந்தச் செங்கோண முக்கோணத்திலும் கர்ணத்தைவிட மற்ற இரண்டு பக்கங்களில் யாதொன்றும் பெரியதாகாது. ஆகவே, $\sin\theta$-ன் எண் மதிப்பு 1-க்கு மிகாததாகும். இவ்வாறே, $\cos\theta$-ன் மதிப்பும் 1-க்கு மிகாததாகும்.

$\operatorname{cosec}\theta$ ஆனது $\frac{1}{\sin\theta}$ ஆதலால், அதன் மதிப்பு எண்ணளவில்

1-க்குக் குறையாததாகும். இவ்வாறே $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ ஆதலின், அதன் மதிப்பும் எண்ணளவில் 1-க்குக் குறையாததாகும்.

எனினும் $\tan\theta$, $\cot\theta$-க்களின் மதிப்புகளுக்குக் கட்டில்லையாகும். அவை $-\infty$-க்கும் $+\infty$-க்கும் இடையே எந்த மதிப்பையேனும் பெற்று நிற்கலாம்.

பயிற்சி 2-1.

பின்வரும் முற்றொருமைகளை நிறுவுக !

1. $\frac{\sin\theta}{\operatorname{cose}\theta} + \frac{\cos\theta}{\sec\theta} = 1$

2. $(\sin A + \cos A)(\tan A + \cot A) = \sec A + \operatorname{cosec} A)$

3. $\sin^2 A\cos^2 B + \cos^2 A\sin^2 B + \sin^2 A\sin^2 B + \cos^2 A\cos^2 B = 1$

4. $(1+\sin\theta+\cos\theta)^2 = 2(1+\sin\theta)(1+\cos\theta)$

5. $(1+\tan^2\theta)(1-\sin^2\theta) = 1$

6. $\frac{\cos A+\cos B}{\sin A-\sin B} + \frac{\sin A+\sin B}{\cos A-\cos B} = 0$

7. $\frac{\sin A}{1+\cos A} = \frac{1-\cos A}{\sin A}$

8. $\cos^4 A-\sin^4 A=\cos^2 A-\sin^2 A$

9. $\sec^4 A-\sec^2 A=\tan^4 A+\tan^2 A$

10. $\cot^4 A+\cot^2 A=\operatorname{cosec}^4 A-\operatorname{cosec}^2 A$

11. $\sec^4 A-1 = 2\tan^2 A+\tan^4 A$

12. $\frac{\sin A}{1+\cos A} + \frac{1+\cos A}{\sin A} = 2\operatorname{cosec} A$

13. $\sqrt{\sec^2 A+\operatorname{cosec}^2 A} = \tan A+\cot A = \sec A\operatorname{cosec} A$

14. $(\operatorname{cosec}\theta-\sin\theta)(\sec\theta-\cos\theta)(\tan\theta+\cot\theta) = 1$

15. $\frac{\sec A-\tan A}{\sec A+\tan A} = 1-2\sec A\tan A+2\tan^2 A$

16. $\operatorname{cosec}^6 A - \cot^6 A = 3\operatorname{cosec}^2 A \cot^2 A + 1$

17. $\dfrac{\operatorname{cosec} A}{\operatorname{cosec} A - 1} + \dfrac{\operatorname{cosec} A}{\operatorname{cosec} + A} = 2\sec^2 A$

18. $\dfrac{\cos^3 A + \sin^3 A}{\cos A + \sin A} + \dfrac{\cos^3 A - \sin^3 A}{\cos A - \sin A} = 2$

19. $\dfrac{\cot\theta}{1 - \tan\theta} + \dfrac{\tan\theta}{1 - \cot\theta} = 1 + \sec\theta \operatorname{cosec}\theta$

20. $\dfrac{\cot\theta}{\operatorname{cosec}\theta - 1} + \dfrac{\cot\theta}{\operatorname{cosec}\theta + 1} = 2 \sec \theta$

21. $3(\sin x - \cos x)^4 + 6(\sin x + \cos x)^2 + 4(\sin^6 x + \cos^6 x) = 13$

22. $\dfrac{1}{1 + \tan\theta} + \dfrac{1}{1 + \cot\theta} = \dfrac{1}{1 + \cot^2\theta} + \dfrac{1}{1 + \tan^2\theta}$

23. $\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta = 4$ ஆனல், $\cos\theta$ எவ்வளவு ?

[விடை : $\frac{15}{17}$ அல்லது -1]

24. $2\sin\theta + \cos\theta = 2$ ஆனல், $\sin \theta$ எவ்வளவு ?

[விடை : 1 அல்லது $\frac{3}{5}$]

25. $a \cos\theta + b \sin\theta = c$, $b \cos\theta - a \sin\theta = d$ ஆனல், $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ என நிறுவுக.

26. $\sec\theta - \tan\theta = a$ ஆனல், $\sin\theta = 1$ அல்லது $\dfrac{1 - a^2}{1 + a^2}$ எனக் காட்டுக.

27. $\sin\theta = \dfrac{2ab}{a^2 + b^2}$ எனின், $\sec\theta - \tan\theta$-ன் மதிப்பைக் கணக்கிடுக.

பயிற்சி 2-2.

1. $\tan A = -\dfrac{15}{8}$ ஆனல், A இரண்டாம் வட்டப் பகுதியில் இருந்தால் $\sin A$, $\cos A$ என்பவற்றைக் கண்டறிக.

[விடை : $\sin A = \dfrac{15}{17}$; $\tan A = -\dfrac{8}{17}$]

2. $\cos\theta = \frac{-12}{13}$ ஆனால், எவ் வட்டப் பகுதிகளில் θ அமையும்? $\sin\theta$, $\tan\theta$ என்பவற்றைக் கண்டறிக.

[விடை : $\sin\theta = \pm\frac{5}{13}$; $\cos\theta = \pm\frac{5}{12}$]

3. $\tan\alpha = \frac{4}{15}$-ம், $180° < \alpha < 270°$-ம் ஆனால், $\frac{5\sin\alpha + 7\cos\alpha}{6\cos\alpha - 3\sin\alpha}$-ன் மதிப்பைக் கண்டறிக.

[விடை : $\frac{125}{78}$]

4. $\operatorname{cosec}\theta = \frac{41}{40}$-ம், $90° < \theta < 180°$-ம் ஆனால், $\frac{2\sin\theta + 5\cos\theta}{3\sin\theta - 10\cos\theta}$-ன் மதிப்பு என்ன? [விடை : $\frac{1}{6}$]

பயிற்சி 2-3.

கீழ் வருவனவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க :

1. $\operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{4} \cdot \sec^2\frac{\pi}{6} \ \sin^8\frac{\pi}{2} \cdot \cos\frac{\pi}{3}$ [விடை : $\frac{4}{3}$]

2. $\cot^2 30° - 4\cos^2 45° + 3\sec^2 60$ [விடை : 13]

3. $2\sec^2 180° \cos 0° + \cot 270° - 3\tan^2 30°$ [விடை : 1]

4. $(\sin 60° + \sin 30°)^2 + \cos 60° - \cos 30°)^2$ [விடை : 2]

5. $\sec\frac{\pi}{3}\left(\sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6}\right)\left(\sin\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{3}\right)$

[விடை : 1]

3. சில துணைக் கோணங்களின் கோண கணிதத் தகவுகள்; கோண கணித அட்டவணைகள்; கோண கணித தகவுகளின் வரைபடங்கள்

1. $\frac{\pi}{2} \pm \theta$; $\pi \pm \theta$; $\frac{3\pi}{2} \pm \theta$; $2\pi - \theta$ அல்லது $-\theta$; $2\pi + \theta$; $2n\pi + \theta$ என்னும் இவற்றின் கோணத் தகவுகளை θ-ன் தகவுகளைப் பொருத்திக் கண்டறிதல்.

(i) θ-ன் தகவுகளைப் பொருத்தி, $(90° - \theta)$-ன் தகவுகளைக் கண்டறிதல்.

படம் 9-ல்காட்டியபடி, OX-உடன் OP, OQ என்பன முறையே θ, $90° - \theta$ என்னும் கோணங்களை உண்டாக்கி நிற்பதாகக் கொள்வோம். $OP = OQ$ ஆகுக. OX-க்கு PM, QN என்னும் செங்குத்துக் கோடுகளை வரைக.

OPM, OQN என்னும் இரண்டு முக்கோணங்களில்,

$\angle POM = \angle OQN$, ஒவ்வொன்றும் θ-க்குச் சமமாதலால்,

$\angle M = \angle N$, ஒவ்வொன்றும் செங்கோண மாதலால்,

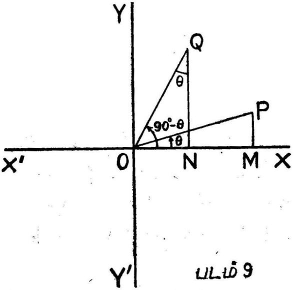
$OP = OQ$ (வரைவு முறையால்)

$\therefore$ இவ்விரண்டு முக்கோணங்களும் சர்வசமம் ஆகும்.

$\therefore$ ஒத்த பக்கங்கள் தமக்குள் சமமாகும்.

$\therefore$ $ON = MP$ (அளவிலும், குறியிலும்)

$NQ = OM$ (,, ,,)



படம் 9

ஆகவே, $\sin(90-\theta) = \dfrac{NQ}{OQ} = \dfrac{OM}{OP} = \cos\theta$

$$\cos(90-\theta) = \frac{ON}{OQ} = \frac{MP}{OP} = \sin\theta$$

$$\tan(90^\circ-\theta) = \frac{NQ}{ON} = \frac{OM}{MP} = \cot\theta$$

இவ்வாறே $\operatorname{cosec}(90^\circ-\theta) = \sec\theta$; $\sec(90^\circ-\theta) = \operatorname{cosec}\theta$; $\cot(90^\circ-\theta) = \tan\theta$ என்பனவும் அமையும்.

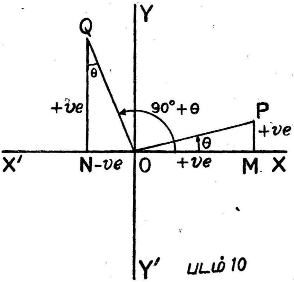
[குறிப்பு. 1 : θ என்பது குறுங்கோணமாகிய வகைக்கு இப் படம் வரையப்பட்டிருந்தாலும், இங்குப் பெற்ற பலன்கள் θ-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் ஏற்புடையனவேயாகும். θ-ன் மற்ற மதிப்புகளுக்குத் தேவையானபடி படங்களை வரைந்து, இப் பலன்கள் பொருந்த நிற்கும் நிலைமையினைச் சரி பார்த்துக் கொள்ள வேண்டும்.

குறிப்பு 2 : இரண்டு கோணங்களின் கூட்டுப் பலன் 90° ஆகுங்கால், அவை ஒன்றற்கொன்று நிரப்புக் கோணங்கள் (Complementary angles) எனப்படும். θ-ம், $90^\circ-\theta$-ம் இவ்வாறுனவையாகும்,]

ஒரு கோணத்தின் sin விகிதம் அக்கோணத்தினுடைய நிரப்பியின் cos விகிதத்திற்குச் சமம் எனக் காண்கிறோம். இவ்வாறே ஒரு கோணத்தின் cos, tan, cosec, sec, cot விகிதங்கள் முறையே அந்தக் கோணத்தினது நிரப்பியின் sin, cot, sec, cosec, tan விகிதங்களுக்குச் சமமாகும். இதன் உண்மையை 30°, 60° ஆகியவற்றின் தகவுகளைப் பெறும்போது கண்டோம்.

(ii) $90°+\theta$-ன் கோணத் தகவுகளை, θ-ன் தகவுகளை யொட்டி அறிதல்

OP, OQ என்பன *OX*-உடன் முறையே $\theta°$, $(90°+\theta)$ என்ற கோணங்களை உண்டாக்கட்டும்.



படம் 10

$OP=OQ$ ஆக அமைக்க *OX*-க்கு *PM*, *QN* என்னும் செங்குத்துக் கோடுகளை வரைக.

OPM, *OQN* என்னும் முக்கோணங்களில்,

$\angle POM = \angle OQN$ (θ)

$\angle M = \angle N$ (ஒவ்வொன்றும் செங்கோணம்)

$OP = OQ$ (அமைப்பு)

$\therefore$ *OPM*, *OQN* என்னும் இரண்டு முக்கோணங்களும் சர்வ சமமாகும். ஒத்த பக்கங்கள் தமக்குள் சமமாகும்.

$\therefore$ $NQ = MP$ (அளவிலும், குறியிலும்)

$ON = -MP$ (இராசிக் குறியை அனுசரிக்குமிடத்து)

$$\therefore \sin(90+\theta) = \frac{NQ}{OQ} = \frac{OM}{OP} = \cos\theta$$

$$\cos(90°+\theta) = \frac{ON}{OQ} = -\frac{MP}{OQ} = -\sin\theta$$

$$\tan(90°+\theta) = \frac{NQ}{ON} = -\frac{OM}{MP} = -\cot\theta$$

இவ்வாறே, $\operatorname{cosec}(90°+\theta) = \sec\theta$ என்பதும்,

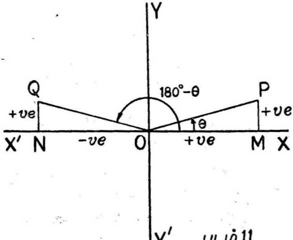
$\sec(90°+\theta) = -\operatorname{cosec}\theta$ என்பதும், $\cot(90+\theta) = -\tan\theta$ என்பதும் பெறப்படும்.

[குறிப்பு : இப்பலன்கள் θ-ன் எல்லா அளவுகளுக்கும் ஏற்கும். படங்கள் வரைந்து பார்க்கவும்.]

பயிற்சி : 120°, 135°, 150° ஆகியவற்றின் கோணத் தகவுகளைக் கண்டறிக:

120° = 90° + 30° எனவும் கொள்ளவும்.

(iii) $(180°-\theta)$-ன் தகவுகளை, θ-ன் தகவுகளை யொட்டி அறிதல்



படம் 11

OP, OQ என்பன OX உடன் முறையே θ, $180°-\theta$ என்னும் கோணங்களை உண்டாக்கட்டும்.

$OP=OQ$ ஆக அமைக்க; OX-க்கு PM, QN என்னும் செங் குத்துக் கோடுகளை வரைக.

OPN, OQN என்னும் முக்கோணங்களில்,

$\angle POM = \angle HON \ (=\theta)$

$\angle M = \angle N$ (செங்கோணங்கள்)

$OP=OQ$ (வரைவு)

$\therefore$ இரு முக்கோணங்களும் சர்வ சமமாகும்.

$\therefore$ ஒத்த பக்கங்கள் தமக்குள் சமமாகும்.

$\therefore$ $NQ=MP$ (அளவிலும், குறியிலும்)

$ON+-OM$ (இராசிக் குறியை அனுசரிக்க)

$$\therefore \ \sin\ (180^\circ-\theta) = \frac{NQ}{OQ} = \frac{MP}{OP} = \sin\theta$$

$$\cos\ (180^\circ-\theta) = \frac{ON}{OQ} = -\frac{OM}{OP} = -\cos\theta$$

$$\tan\ (180^\circ-\theta) = \frac{NQ}{ON} = \frac{MP}{-OM} = -\tan\theta$$

இவ்வாறே $\operatorname{cosec}(180^\circ-\theta) = \operatorname{cosec}\theta$; $\sec(180-\theta) = -\sec\theta$; $\cot(180^\circ-\theta) = -\cot\theta$ ஆகக் கண்டறியப்படும்.

[குறிப்பு : இப்பலன்கள் θ-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் ஏற்கும் படங்கள் வரைந்து பார்க்கவும்.]

பயிற்சி 1 : 120°, 135°, 150° என்னும் இவற்றின் தகவுகளை அறிக.

$120^\circ = 180^\circ - 60^\circ$ எனக் கொள்க.

$135^\circ = 180^\circ - 45^\circ$ எனக் கொள்க.

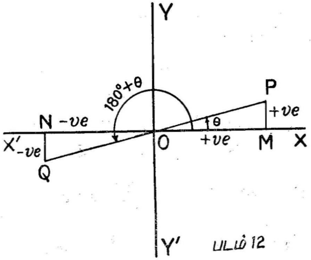
$150^\circ = 180^\circ - 30^\circ$ எனக் கொள்க.

பயிற்சி 2 : $180^\circ-\theta$-ன் தகவுகளை பிரிவு 2ஐப் பயன்படுத்திக் காண்க.

(அதாவது) $180^\circ - \theta = 90 + \overline{90-\theta}$ என எழுதிக் காண்க,

(iv) $(180°+\theta)$-ன் தகவுகளை, θ-ன் தகவுகளை யொட்டி அறிதல்.

OP, OQ என்பன, OX உடன் முறையே θ-ம் $(180°+\theta)$-ம் ஆகிய கோணங்களை அமைக்கட்டும்.



படம் 12

$OP=OQ$ ஆக வரைக. PM, QN என்பனOX-க்கு வரைந்த செங்குத்துக்கோடுகளாகும். இனி, OPM, OQN என்னும் முக்கோணங்களில்,

$\angle POM=\angle QON\ (=\theta)$

$\angle M=\angle N\ (=90°)$

$OP=OQ$ (வரைவு)

∴ இரண்டு முக்கோணங்களும் சர்வ சமம்.

∴ ஒத்த பக்கங்கள் தமக்குள் சமமாகும்.

∴ $NQ=-MP$ (இராசிக்குறியை அனுசரிக்குங்கால்)

$ON=-OM$ (இராசிக் குறியை அனுசரிக்குங்கால்).

$$\therefore \sin(180°+\theta) = \frac{NQ}{OQ} = -\frac{MP}{OP} = -\sin\theta$$

$$\cos\theta\,(180°+\theta) = \frac{ON}{OQ} = -\frac{OM}{OP} = -\cos\theta$$

$$\tan(180°+\theta) = \frac{NQ}{ON} = \frac{-MP}{-OM} = \tan\theta$$

இவ்வாறே, $\operatorname{cosec}(180°+\theta)=-\operatorname{cosec}\theta$, $\sec(180°+\theta)=-\sec\theta$, $\cot(180°+\theta)=+\cot\theta$ என்றறியப்படும்.

[குறிப்பு: இப் பலன்கள் θ-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் ஏற்கும். θ-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் படங்கள் வரைந்து பார்க்கவும்.]

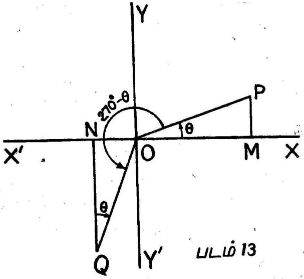
பயிற்சி 1 : 210°, 225°, 240° என்னும் கோணங்களின் தகவுகளைக் காண்க.

$210°=180°+30°$ எனவும், $225°=180°+45°$ எனவும், $240°=180°+60°$ எனவும் எழுதித் தகவுகளைக் காணவும்.

பயிற்சி 2 : $180°+\theta$-ன் தகவுகளைப் பிரிவு 2ஐப் பயன்படுத்திக் காண்க. அதாவது $180°+\theta=90°+90+\theta$ என எழுதிக் காண்க.

(v) θ-ன் தகவுகளை யொட்டி, $(270°-\theta)$-ன் தகவுகளைக் கண்டறிதல்

OP, OQ என்பன, OX உடன் முறையே θ, $270°-\theta$ என்னுங் கோணங்களை உண்டாக்கட்டும்.



படம் 13

$OP=OQ$ வாக அமைக்கவும். OX-க்கு, PM, QN என்னும் செங்குத்துக் கோடுகளை வரைக

இனி, OMP, ONQ என்னும் முக்கோணங்களில்,

$\angle MOP=\angle OQN\ (=\theta)$

$\angle M = \angle N$ செங்கோணங்கள்

$OP = OQ$ (வரைவு)

$\therefore$ இரு முக்கோணங்களும் சர்வசமம்.

$\therefore$ ஒத்த பக்கங்கள் தமக்குள் சமமாகும்.

$\therefore$ $ON = -MP$ (இராசிக் குறியை அனுசரிக்க)

$NQ = -OM$ (இராசிக் குறியை அனுசரிக்க)

$$\therefore \sin(270° - \theta) = \frac{NQ}{OQ} = \frac{-OM}{OP} = -\cos\theta$$

$$\cos(270° - \theta) = \frac{ON}{OQ} = \frac{-MP}{OP} = -\sin\theta$$

$$\tan(270° - \theta) = \frac{NQ}{ON} = \frac{-OM}{-MP} = \frac{OM}{MP} = \cot\theta$$

இவ்வாறே, $\operatorname{cosec}(270° - \theta) = -\sec\theta$; $\sec\theta$; $\sec(270° - \theta) = -\operatorname{cosec}\theta$; $\cot(270° - \theta) = \tan\theta$ எனக் காணலாம்.

[குறிப்பு 1 : இப் பலன்கள் θ-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் பொருந்தும். θ-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் படங்கள் வரைந்து பார்க்கவும்.

பயிற்சி 1. 210°, 225°, 240° என்னும் கோணங்களின் தகவுகளைக் காண்க.

$210° = 270° - 60°$ எனவும், $225° = 270 - 45°$ எனவும், $240° = 270° - 30°$ எனவும் எழுதித் தகவுகளைக் காணவும்.

பயிற்சி 2. $270° - \theta$-ன் தகவுகளை $(180° + 90° - \theta)$ என எழுதிக் காணவும்.

(vi) $270° + \theta$-ன் தகவுகளை, θ-ன் தகவுகளை யொட்டி அறிதல்

OP, OQ எண்பன OX உடன் முறையே θ, $270° + \theta$ என்னும் கோணங்களை உண்டாக்கி நிற்கட்டும். $OP = OQ$வாக அமைக்கவும்.

OX-க்கு, PM, QN என்னும் செங்குத்துக் கோடுகள் வரைக.

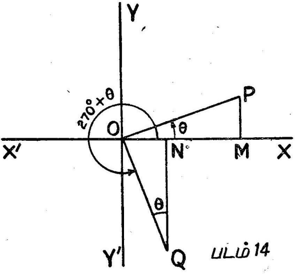
இனி, OMP, ONQ என்னும் மூக்கோணங்களில்,

$\angle MOP = \angle OQN \; (= \theta)$

$\angle M = \angle N$ (செங்கோணங்கள்)

$OP = OQ$ வரைவு

$\therefore$ முக்கோணங்களிரண்டும் சர்வ சமமாகும்.



படம் 14

$\therefore$ ஒத்த பக்கங்கள் தமக்குள் சமமாகும்.

$\therefore$ $NQ = -OM$ (ராசிக் குறியை யொட்டி)

$ON = MP$

$$\therefore \sin(270°+\theta) = \frac{NQ}{OQ} = \frac{-OM}{OP} = -\cos\theta$$

$$\cos(270°+\theta) = \frac{ON}{OQ} = \frac{MP}{OP} = \sin\theta$$

$$\tan(270°+\theta) = \frac{NQ}{ON} = \frac{-OM}{MP} = -\cot\theta$$

இவ்வாறே, $\operatorname{cosec}(270°+\theta) = -\sec\theta$; $\sec(270\theta+\theta) = \operatorname{cosec}$; $\cot(270°+\theta) = -\tan\theta$ எனக் காணலாம்.

[குறிப்பு : இப் பலன்கள் θ-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் பொருந்தும். θ-ன் மற்ற மதிப்புகளுக்குப் படம் வரைந்து பார்க்கவும்.]

பயிற்சி 1. 300°, 315°, 330° ஆகியவற்றின் கோணத் தகவுகளைக் காண்க :

300° = 270°+30° எனவும், 315° = 270+45° எனவும், 330° = 270°+60° எனவும் எழுதிக் காணவும்.

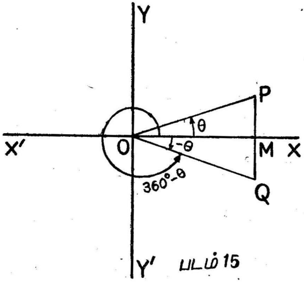
பயிற்சி 2. 270°+θ-ன் தகவுகளை, 270°+θ = $180+\overline{90+\theta}$ என எழுதிக் காணவும்.

(vii) $-\theta$ அல்லது 360°$-\theta$-வின் தகவுகளை, θ-ன் தகவுகளைத் தழுவி அறிதல்.

OP, OQ என்னும் சம நீளக் கோடுகள் *OX* உடன் முறையே θ, $-\theta$ என்னும் கோணங்களை உள்ளடக்கி நிற்பதாகக் கொள்க.

PQ ஐச் சேர்க்குங்கால், அது *OX* ஐ *M* என்னுமிடத்தில் *a* வெட்டட்டும்.

[குறிப்பு : 360°$-\theta$வும், $-\theta$வும் ஒரே கோணத்தையே குறிக்கும் எனக் காண்க.]



படம் 15

இனி, △ *OPM*, △ *OQM* என்பவற்றுள்,

OP = *OQ* (வரைவு)

OM (பொது)

∠*POM* = ∠*QOM* (வரைவு)

$\therefore$ முக்கோணங்கள் சர்வ சமமாகும்.

$\therefore$ ஒத்த கோணங்களும், பக்கங்களும் சமமாகும்.

$\therefore \angle OMP = \angle OMQ$

ஆனால் இவை அடுத்துள்ள கோணங்களாதலால், ஒவ்வொன்றும் ஒரு செங்கோணமாகும்.

$\therefore$ PM, QM முறையே P, Q-விலிருந்து OX-க்கு வரையப்பட்ட செங்கோடுகள் ஆகும்.

மேலும், $MQ = -MP$ (ராசிக் குறியை யொட்டி)

$$\therefore \sin(-\theta) = \frac{MQ}{OQ} = \frac{-MP}{OP} = -\sin\theta$$

$$\cos(-\theta) = \frac{OM}{OQ} = \frac{OM}{OP} = \cos\theta$$

$$\tan(-\theta) = \frac{MQ}{OM} = \frac{-MP}{OM} = -\tan\theta$$

இவ்வாறே, $\operatorname{cosec}(-\theta) = -\operatorname{cosec}\theta$; $\sec(-\theta) = \sec\theta$; $\cot(-\theta) = -\cot\theta$ ஆகும்.

குறிப்பு : θ-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் இப் பலன்கள் பொருந்தும்.

பயிற்சி (i) -30°, -45°, -60° என்பவற்றின் தகவுகளை அறிக.

(ii) 330°, 315°, 300° என்பவற்றின் தகவுகளை அறிக. $330^\circ = (360^\circ - 30^\circ)$ (அதாவது) -30° என எழுதிக் காணவும்.

(viii) $360^\circ + \theta$; $\theta \pm n \cdot 360^\circ$-ன் தகவுகளைக் காணல்

கீழ்வரும் கோணங்களுக் கெல்லாம், சுழன்று வரும் ஆரவெக்டாரின் எல்லை நிலை ஒன்றாகவே அமையும். (i) θ, (ii) $360^\circ + \theta$, (iii) $-360^\circ + \theta$, (iv) $2 \times 360^\circ + \theta$, (v) $-2 \times 360 + \theta$......பொதுவாக $\pm n \times 360^\circ + \theta$ ஆகிய கோணங்களின் எல்லை நிலை θ-வின் எல்லை நிலையேயாகும்.

ஆகவே 360°-ன் எம் மடங்கையும் ஒரு கோணத்தோடு கூட்டினாலும், அல்லது அதிலிருந்து கழித்தாலும், அவற்றின் கோணத் தகவுகள் வேறுபடமாட்டா.

அதாவது $\sin(\theta \pm n\,360°) = \sin\theta$

$\cos(\theta \pm n\,360°) = \cos\theta$

$\tan(\theta \pm n\,360°) = \tan\theta$

இவ்வாறே பிறவும் காணவும்.

(ix) மேலே (i) முதல் (viii) முடிய உள்ள பகுதிகளில் பெற்ற பலன்களை எல்லாம் கீழ்க்கண்ட அட்டவணை காட்டி நிற்பதாகும்.

x	$\frac{\pi}{2}-\theta$	$\frac{\pi}{2}+\theta$	$\pi-\theta$	$\pi+\theta$	$\frac{3\pi}{2}-\theta$	$\frac{3\pi}{2}+\theta$	$2\pi-\theta$ or $-\theta$	$2\pi+\theta$
$\sin x=$	$\cos\theta$	$\cos\theta$	$\sin\theta$	$-\sin\theta$	$-\cos\theta$	$-\cos\theta$	$-\sin\theta$	$\sin\theta$
$\cos x=$	$\sin\theta$	$-\sin\theta$	$-\cos\theta$	$-\cos\theta$	$-\sin\theta$	$+\sin\theta$	$\cos\theta$	$\cos\theta$
$\tan x=$	$\cot\theta$	$-\cot\theta$	$-\tan\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$-\cot\theta$	$-\tan\theta$	$\tan\theta$

மேற்கண்ட பலன்கள் யாவும் பின் வரும் விதியால் நினைவுறப்படும்.

n ஆனது ஓர் இரட்டை முழு எண்ணுக்கும் பொழுது, $n\,90° \pm \theta$-ன் யாதொரு கோணத் தகவும் எண்ணளவு மட்டில் θ-ன் தகவிற்குச் சமமாகும்.

n ஆனது ஓர் ஒற்றை முழு எண்ணுக்கும் பொழுது, $n\,90° \pm \theta$-ன் யாதொரு கோணத் தகவும் எண்ணளவு மட்டில், θ sin விகிதம் cosine ஆகவும், cos விகிதம் sin விகிதமாகவும், tan விகிதம் cot விகிதமாகவும், cosec விகிதம் sec விகிதமாகவும், sec விகிதம் cosec விகிதமாகவும், cot விகிதம் tan விகிதமாகவும் மாறும்.

இராசிக் குறியை அறிய, $n\,90° \pm \theta$ ஆனது எந்தக் கால் வட்டத்தில் இடம் பெறுமோ, அங்கு (θ ஆனது குறுங்கோணமாகக் கருதி) கொடுக்கப்பட்ட தகவுக்கு இராசிக் குறி விதிப்படி என்ன குறி பெறக்கூடுமோ, அதனை முன்னேயிட்டு எழுதிகொள்ள வேண்டும்.

(x) யாதொரு கோணத்தின் தகவையும் 0° முதல் 45° வரையில் உள்ள கோணத்தின் தகவிற்கு மாற்றலாம்

ஒரு கோணமானது 360°-க்கு மேற்பட்டிருந்தால், 360°-ன் மடங்குகளைக் கழித்து விட்டு, அதனை 0-°-க்கும், 360°-க்கும் இடைபடுமாறு செய்யலாம்.

பிறகு $180^\circ \pm \theta$, $90^\circ \pm \theta - \theta$ என்பவற்றிற்கு மேலே பெற்ற வாய்பாடுகளைப் பயன்படுத்தி, கோணத்தகவை 0°-க்கும் 45°-க்கும் இடையேயுள்ள ஒரு கோணத்தின் தகவாக மாற்றலாம்.

எடுத்துக்காட்டு

(a) $\sin 947^\circ = \sin (2\times 360+227^\circ) = \sin 297^\circ$

$= \sin (180^\circ + 47^\circ) = -\sin 47^\circ = -\sin(90^\circ - 43^\circ)$

$= -\cos 43^\circ$

$\therefore$ $\sin 947^\circ = -\sin 47^\circ = -\cos 43^\circ$ ஆகும்.

(b) $\tan 1142^\circ = \tan (3\times 360^\circ + 62^\circ) = \tan 62^\circ$

$= \tan (90^\circ - 28^\circ) = \cot 28^\circ$

$\therefore$ $\tan 1142^\circ = \tan 62^\circ = \cot 28^\circ$ ஆகும்.

(c) $\cot (-1106^\circ) = \cot (-3\times 360^\circ - 26^\circ)$

$= \cot (-26^\circ) = -\cot 26^\circ$

$\therefore$ $\cot (-1106^\circ) = -\cot 26^\circ$

(xi) கோணத் தகவுகளை முதல் கால்வட்ட கோணங்களின் தகவுகளாக மாற்றல்

கோணத் தகவுகளை முதல் கால் வட்டத்தில் உள்ள கோணங்களின் தகவுகளாக மாற்றக் கீழ்வரும் விதியையும் பயன்படுத்தலாம்.

யாதொரு கோணத்தினுடைய எந்தத் தகவையேனும் கண்டறிய முதலில் θ-ன் முடிவு நிலைப் பக்கத்துக்கும் x அச்சுக்கும் இடைப்படும் குறுங்கோணத்திற்குரிய அதே விகிதச் சார்பைக் கொள்க.

பிறகு, கொடுக்கப்பட்ட கோணத்தின் ஆர முடிவு நிலை எந்தக் கால் வட்டத்தில் அமைகிறதெனக் கண்டு, அந்தக் கால்

வட்டத்திற்குரிய இராசிக் குறியை மேலே கண்ட விகிதச் சார் புடன் இணைத்துக் கொள்ள வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு

cos 255° என்ற கோண விகிதத்தைப் பார்ப்போம்.

இது OX' உடன் 75° குறுங்கோணத்தை ஏற்படுத்துகிறது.

ஆகவே cos 255° எண்ணளவில் cos 75° ஆகும்.

ஆனால் 255° மூன்றும் கால் வட்டத்தில் அமைகிறது.

இங்கு cos விகிதம் எதிர் இராசியாகும்.

ஆகவே cos 255° = −cos 75° ஆகும்.

2. கோண கணித அட்டவணைகள் (Trigonometric Tables)

0°-க்கும், 90°-க்கும் இடைப்பட்ட எல்லாக் கோணங்களில் தகவுகளும் கவனமாகக் கணிக்கப்பட்டு அட்டவணைகளாகக் கிடைக்கின்றன.

கோண கணிதத் தகவுகளின் அட்டவணைகளில் ஓரத்தில் இடது பக்கத்தில் முதல் பத்தியில் 0°, 1°....89° முடிய ஒன்றன் கீழ் ஒன்றாகக் காணப்படும். இவ்வாறு அட்டவணையில் 90 வரிகள் உள்ளன. முதல் பத்தியை அடுத்துள்ள பத்து நிரல்களின் உச்சியில் 0′, 6′, 12′,.........54′ எனக் காணலாம். ஒவ்வொரு தலைப்பின் கீழும் ஒவ்வொரு வரியிலும் மதிப்புகள் நான்கு இலக்கங் களாகக் காணப்படுகின்றன. 9707 எனக் காணப்பட்டால், ·9707 எனப் பொருளாகும்.

இவ்வாறாக sin, cos, tan முதலாகிய தகவுகளின் மதிப்புகள் 6 கலைகள் (Minutes) வித்தியாசத்திற்கு நான்கெண்களாகக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

இப் பத்து நிரல்களை அடுத்து 'சராசரி வேறுபாடுகள்' (Mean Differences) என்னும் தலைப்பின் கீழ் இன்னும் 5 நிரல்கள் 1 முதல் 5 வரை இலக்கங்களை உச்சியில் கொண்டு காணப்படுகின்றன. இப் பத்திகளில் 1, 2, 3, 4, 5 கலைகள் வித்தியாசத்துக்கான சிறு மதிப்புகள் தரப்பட்டுள்ளன.

கோணத்தினளவு 0°யிலிருந்து 90°-க்கு அதிகரிக்கையில், sin, tan, sec, ஆகிய தகவுகளும் அதிகரித்துச் செல்லுமாதலால், அவற்றிற்கு வேறுபாடு நிரல்களில் (difference columuns) கண்ட எண்ணை அட்டவணையின் அகத்தில் கொடுத்துள்ள மதிப்பு களோடு கூட்டிக் கொள்ள வேண்டும். cos, cosec, cot ஆகிய

வற்றின் மதிப்புகள் கோணம் ஏற ஏற, குறைவுறுதலால் அவற்றிற்கு அட்டவணையின் அகத்தில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள எண்களிலிருந்து வேறுபாடு நிரல்களில் காணும் எண்களைக் கழித்துக் கொள்ள வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு

sin 53° 17′ஐ அறிய வேண்டுமென வைத்துக் கொள்வோம்.

முதலில் 53°-ன் இடத்தை sin விகிதப்பட்டியலில் குறித்துக் கொள். 53° என்னும் வரிசையில் 12′ என்ற தலைப்பின் கீழ் உள்ள பின்னத்தைக் குறித்துக் கொள். இது 8007 ஆகும். அதே வரிசையில் பிற்பாடுள்ள வேறுபாடு பகுதியில் 5-க்குக் கீழ் உள்ள 9 என்னும் இலக்கத்தை முன் கண்ட பின்னத்தோடு கூட்டுக.

இவ்வாறாக sin 53° 17′ = 8016 ஆகும்.

மறுதலையாகத் தகவுகளின் மதிப்பிலிருந்து கோணத்தைக் காணும் முறை

·8412ஐ cos விகிதமாகக் கொண்ட கோணம் யாது ?

cos பட்டியலில், ·8412-க்கு மிக அண்மையிலுள்ள ·8415 ஐக் குறிக்கவும். இதற்குரிய கோணம் 32° 42′ ஆகும்.

இனி ·8412ஐப் பெற, ·8415-லிருந்து ·0003ஐக் கழிக்க வேண்டும்.

ஆகவே 0003-க்குரிய கோண மதிப்பைச் சராசரி வேறுபாட்டில் காண்க. இது 2′ என அறியப்படும். கோணம் அதிகரிக்கும் போது cos விகிதம் குறைவதால், ·8415-க்குரிய கோணமதிப்பான 32° 42′ உடன், ·0003-க்குரிய கோண மதிப்பான 2′ ஐக் கூட்டி, ·8412-க்குரிய கோண மதிப்பை பெறலாம்.

ஆகவே ·8412-க்குரிய கோணம் 32° 44′ ஆகும்

3. திரிகோணச் சார்புகளின் வரைபடங்கள் (Graphs of Trigonometric Functions)

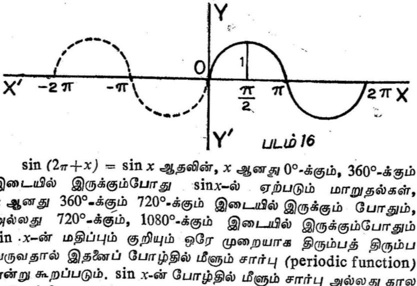
(i) sin x-ன் வளை வரை வரைதல்.

$y = \sin x$ எனக் கொள்வோம்.

x-க்குப் பல மதிப்புகள் கொடுத்து அவற்றிற்கு நேர் சரியான y மதிப்புகளைக் கண்டு, அவற்றைக் கீழ்க் காட்டியபடி அட்டவணையில் குறிக்கலாம்.

x	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
$y=\sin x$	0	·5	·71	·87	1	·87	·71	·5	0	$-\cdot 5$	$\overline{\cdot 71}$	$\overline{\cdot 87}$	-1	$\overline{\cdot 87}$	$\overline{\cdot 71}$	$-\cdot 5$	0

x, y என்பவற்றின் ஒவ்வொரு இணை மதிப்புகளை ஆயங்களாய்க் கொண்ட புள்ளியைக் குறித்து, புள்ளிகளை எல்லாம் சேர்த்தால் $\sin x$-ன் வளைவரை கிடைக்கும்.



படம் 16

$\sin(2\pi+x) = \sin x$ ஆதலின், x ஆனது 0°-க்கும், 360°-க்கும் இடையில் இருக்கும்போது $\sin x$-ல் ஏற்படும் மாறுதல்கள், x ஆனது 360°-க்கும் 720°-க்கும் இடையில் இருக்கும் போதும், அல்லது 720°-க்கும், 1080°-க்கும் இடையில் இருக்கும்போதும் $\sin x$-ன் மதிப்பும் குறியும் ஒரே முறையாக திரும்பத் திரும்ப வருவதால் இதனைப் போழ்தில் மீளும் சார்பு (periodic function) என்று கூறப்படும். $\sin x$-ன் போழ்தில் மீளும் சார்பு அல்லது கால வட்டம் 2π ஆகும்.

(ii) $\cos x$-ன் வளை வரை வரைதல் :

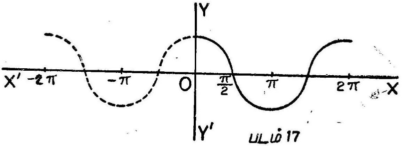
$y=\cos x$ எனக் கொள்வோம்.

x–க்குப் பல மதிப்புகள் கொடுத்து அவற்றிற்கு நேர் சரியான y மதிப்புகளைக் கண்டு அவற்றைக் கீழ்க் காட்டியபடி அட்டவணையில் குறிக்கலாம்.

x	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°
$y = \cos x$	1	·87	·71	·5	0	$-$·5	$-$·71	$-$·87	$-$1	$-$·87	$-$·71

x	240°	270°	300°	315°	330°	360°
$y = \cos x$	$-$·5	0	·5	·71	·87	1

x, y என்பவற்றின் இணை மதிப்புகளை ஆயங்களாகக் கொண்ட புள்ளிகளைக் குறித்து, அப் புள்ளிகளை எல்லாம் சேர்த்தால் $\cos x$-ன் வளைவரை கிடைக்கும்.



படம் 17

$\cos (2\pi+x) = \cos x$ ஆதலின், $\cos x$-ன் போழ்தும் 2π ரேடியன்கள் ஆகும்.

$\sin x$ஐப் போல், $\cos x$-ன் வளை வரையில், 0°-க்கும், 360°-க்கும் இடையிலுள்ள வளை வரையைப்போல், வலது பக்கமும், இடது பக்கமும் எண்ணற்றவை அடங்கியிருக்கின்றன.

மேலும், $\sin x$–ன் வரை படத்தில், OY நேர் ராசி திசையில் $\frac{\pi}{2}$ ஆரையன் தூரம் தள்ளி நிறுத்தினால், $\cos x$-க்குரிய வரை படம் வரக் காண்கிறோம்.

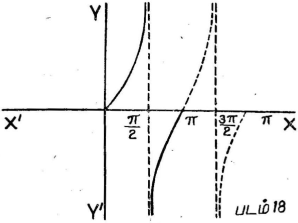
(iii) tan x-ன் வளைவரை வரைதல்

$y = \tan x$ எனக் கொள்வோம்.

x-க்குப் பல மதிப்புகள் கொடுத்து, அவற்றிற்கு நேர் சரியான y-ன் மதிப்புகளைக் கண்டு, அவற்றைக் கீழ்க் காட்டியபடி அட்டவணையில் குறிக்கலாம்.

x	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$y = \tan x$	0	·58	1	1·73	$\pm\infty$	−1·73	−1	−·58	0

x, y என்பவற்றின் இணை மதிப்புகளை ஆயங்களாகக் கொண்ட புள்ளிகளைக் குறித்து, அப் புள்ளிகளைப் படத்தில் காட்டியபடி இணைத்தால், tan x-ன் வளைவரை கிடைக்கும்.



படம் 18

$x \to \frac{\pi}{2}$ ஆகும்போது, $\tan x \to \infty$. ஆகவே வளைவு கோடு, $\frac{\pi}{2}$ என்னுமிடத்தில் நாட்டிய செங்குத்துக் கோட்டுடன் அநந்த நிலைக்குச் செல்கிறது ஆனால் x ஆனது $\frac{\pi}{2}$ ஐ விட ஓர் இம்மி அளவு அதிகமானாலும், tan x ஆனது திடீரென்று $-\infty$-க்கு செல்கிறது. கீழே அநந்த தூரத்தில் தொடங்கி, கோணம் 180° ஆகும்போது $\tan x = 0$ ஆகிறது.

$\tan(\pi + x) = \tan x$ ஆதலால், tan x-ன் போழ்து π ஆகும்.

பயிற்சி 3.1.

1. அட்டவணையைப் பயன்படுத்தாமல் பின் வருவனவற்றின் மதிப்புகளைக் கண்டெழுது :

   (i) $\sec(-420°)$ (ii) $\operatorname{cosec} 225°$ (iii) $\cot(-270°)$

   (iv) $\tan 1395°$ (v) $\sin(-1080°)$ (vi) $\cos(1050°)$

2. பின் வருவனவற்றின் மதிப்புகளை 45°-க்குக் குறைந்த கோணங்களுடைய தகவுகளை யொட்டி எழுதுக.

   (i) $\sin(-890°)$ (ii) $\cos(-987°)$ (iii) $\tan 1000°$

   (iv) $\operatorname{cosec}(-670°)$ (v) $\sec(-1530°)$ (vi) $\cot \dfrac{23\pi}{4}$

3. அட்டவணையைப் பயன்படுத்தாமல் மதிப்புகளைக் கண்டு அறிக.

   (i) $\sin 510° \cos(-570°) - \sin 330°. \operatorname{cosec} 90°$
   [விடை : $(4-\sqrt{3})/4$]

   (ii) $\sin 600° \cos 330° + \cos 120° \sin 150°$ [விடை : -1]

4. சுருக்குக :

   (i) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)+\sin(\pi-\theta)-\sin(\pi+\theta)-\sin(-\theta)$
   [விடை : $2\sin\theta$]

   (ii) $\dfrac{\sin(180°+A)\cos(90°-A)\tan(270°-A)}{\sec(540°-A)\cos(360°+A)\cos(-A)}$
   [விடை : $\sin A$]

   (iii) $\dfrac{\tan(90°+\theta)\cot(\theta-360°)}{\sec(630°-\theta)\sec(90°-\theta)}$
   $\dfrac{-\sec(\theta-90)\operatorname{cosec}(\theta-540°)}{+\tan(270°-\theta)\tan(90°-\theta)}$ [விடை : -1]

5. நிறுவுக :

   (i) $\tan 10° \tan 20° \tan 30° \tan 40° \tan 50° \tan 60° \tan 70° \tan 80° = 1$

   (ii) $\cos 33° \tan 33° \tan 57° \operatorname{cosec} 57° = 1$

   (iii) $\cos\dfrac{\pi}{9}+\cos\dfrac{4\pi}{9}+\cos\dfrac{5\pi}{9}+\cos\dfrac{8\pi}{9}=0$

(iv) $\tan\frac{\pi}{13}+\tan\frac{5\pi}{13}+\tan\frac{8\pi}{13}+\tan\frac{12\pi}{13}=0$

(v) $\sin^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{3\pi}{8}+\sin^2\frac{5\pi}{8}+\sin^2\frac{7\pi}{8}=2$

பயிற்சி 3-2.

1. 0°-க்கும் 360°-க்கும் இடையே உள்ள எந்த மதிப்புகள் கீழ்க்கண்ட சாம்யங்களுக்குப் பொருந்தும் ?

   (i) $\sin\theta=-\frac{1}{2}$ (ii) $\cot\theta=-\sqrt{3}$ (iii) $\cos\theta=\frac{1}{2}$

   (iv) $\tan\theta=-1$ (v) $\sec\theta=-\frac{2}{\sqrt{3}}$ (vi) $\operatorname{cosec}\theta=-\sqrt{2}$

2. அட்டவணைகளிலிருந்து (i) $\sin 23° 42'$ (ii) $\cos 69° 22'$ (iii) $\tan 49° 16'$ ஆகியவற்றின் தகவுகளை அறிக.

3. அட்டவணையின் துணை கொண்டு பின்வரும் சமன்பாடுகளைக் கோணத்தின் கலைக்குச் சுத்தமாகத் தீர்வு காண்க.

   (i) $\cos x=\cdot3530$ (ii) $\tan x=1\cdot634$ (iii) $\sin x=\cdot7218$

4. $2\sin^2\theta=3\cos\theta$-வுக்குப் பொருந்துவதாகி 0°-க்கும் 360°-க்கும் இடைப்பட்டிருக்கும் θ-வின் மதிப்புகளைக் காண்க. [விடை : 60° அல்லது 300°]

5. $9(\cos^2x+\sin x)=11$ஐ விடுவித்து x-ன் குறுங்கோண மதிப்பைக் காண்க. [விடை : 41° 49′ or 19° 28′]

6. $15\sin x+2\cos^2x-9=0$ஐ விடுவித்து x-ன் குறுங்கோண மதிப்பைக் கண்டறிக. [விடை : $x=\pi/6$]

பயிற்சி 3-3

1. (i) cosec$x$, (ii) sec$x$, (iii) cot$x$ ஆகியவற்றின் வரை படங்களை வரைக.

2. $2\cos x+5\sin x$-ன் வரை படத்தை வரைந்து அதனைப் பயன்படுத்தி $2\cos x+5\sin x=2$ என்னும் சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

4. கூட்டுக் கோணங்கள், மடங்குக் கோணங்கள், கீழ் மடங்குக் கோணங்கள், பெருக்கல் வாய்பாடுகள்

(Addition and Duplication formulae; Product formulae)

1. கூட்டுக் கோணங்கள்

$$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$$

$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$$

$$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$$ என நிறுவுக.

$\angle XOY=A$, $\angle YOZ=B$ எனக் கொள்க. இதனால் $\angle XOZ=A+B$ ஆகும். இவ்வாருகிய கூட்டுக் கோண (compound Angle)த்தின் எல்லைக் கோடாகிய OZ-ன் மேல் யாதேனும் P என்னும் ஒரு புள்ளியை எடுத்து, அங்கிருந்து PM, PN என்னும் கோடுகளை முறையே OX, OY என்பவற்றிற்குச் செங்குத்தாக வரைக. N என்னும் புள்ளியிலிருந்து செங்குத்துக் கோடுகளை வரைக.

இப்பொழுது $\angle RPN=90°$ $\angle PNR=\angle PNO-\angle PNR$

$$=\angle RNO$$

$$=\angle QON \text{ (ஒன்று விட்ட கோணம்)}$$

$$=\angle A$$

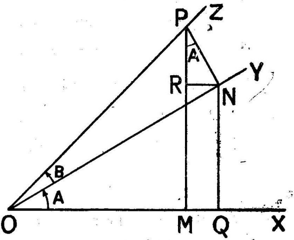
இனி, $\sin(A+B) = \frac{MP}{OP} = \frac{MR+RP}{OP} = \frac{QN+RP}{OP}$

$$= \frac{QN}{OP} + \frac{RP}{OP}$$

$$= \frac{QN}{ON}\,\frac{ON}{OP} + \frac{RP}{PN}\,\frac{PN}{OP}$$

$$= \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$\therefore \quad \sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$ ஆகும்.



படம் 19

$\cos(A+B) = \frac{OM}{OP} = \frac{OQ-MQ}{OP} = \frac{OQ-RN}{OP}$

$$= \frac{OQ}{OP} - \frac{RN}{OP}$$

$$= \frac{OQ}{ON}\,\frac{ON}{OP} - \frac{RN}{PN}\,\frac{PN}{OP}$$

$$= \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$\therefore \quad \cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$

$\tan(A+B) = \frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)} = \frac{\sin A \cos B + \cos A \sin B}{\cos A \cos B - \sin A \sin B}$

தொகுதியையும், பகுதியையும் $\cos A \cos B$ ஆல் வகுக்கவும்.

$\therefore \quad \tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$ ஆகும்.

கிளை : 75°, 105° ஆகியவற்றின் கோணத் தகவுகளைக் காண்க.

$$\sin 75° = \sin(45° + 30°) = \sin 45° \cos 30° + \cos 45° \sin 30°$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$ எனக் கொள்க.

இவ்வாறே, $\cos 75° = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ எனக் கண்டறியப்படும்.

$$\tan 75° = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{3-1} = 2+\sqrt{3}$$

இனி, $105° = 60° + 45°$ என எழுதி 105° கோணத் தகவுகளைப் பெறலாம்.

அல்லது $\sin 150° = \sin(180° - 75) = \sin 75°$

$$\cos 150° = \cos(180° - 75°) = -\cos 75°$$

$$\tan 105° = \tan(180° - 75°) = -\tan 75°$$

2. கழித்தல் வாய்பாடுகள்

இவ்வதிகாரம் பிரிவு 1-ல் பெற்ற பலன்களில், $B = -B$ என்று இடுக.

அப்பொழுது, $\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$

$$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

$$\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1+\tan A \tan B}$$

எனக் கிடைக்கப் பெறுகின்றோம்.

கிளை 1 : 15°-ன் கோணத் தகவுகள் :

$$\sin 15° = \sin(45° - 30°) = \sin 45° \cos 30° - \cos 45° \sin 30°$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

இவ்விதமே,

$$\cos 15° = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$\tan 15° = 2\sqrt{3}$ என்றும் அறியலாம்,

கிளை 2 : $\sin(A+B)\sin(A-B)=\sin^2 A=\sin^2 B$

$\sin(A+B)\sin(A+B)$

$=(\sin A\cos B+\cos A\sin B)(\sin A\cos B-\cos A\sin B)$

$=\sin^2 A\cos^2 B-\cos^2 A\sin^2 B$

$=\sin^2 A(1-\sin^2 B)-(1-\sin^2 A)\times\sin^2 B$

$=\sin^2 A-\sin^2 B$ ஆகும்.

கிளை 3 : $\cos(A+B)\cos(A+B)=\cos^2 A-\sin^2 B$

3. மடங்குக் கோணங்களும், கீழ் மடங்குக் கோணங்களும் 2 A-ன் கோணத் தகவுகள்

மேலே பெற்ற $(A+B)$-ன் கோண விதிதங்களில், $A=B$ எனப் பிரதியிடுக.

$\therefore\ \sin 2A=2\sin A\cos A$

$\cos 2A=\cos^2 A-\sin^2 A$

$=2\cos^3 A-1$

$=1-2\sin^2 A$

$\tan 2A=\dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$ என்பனவற்றைப் பெறுகிறோம்.

கிளை 1 : $2\cos^2 A=1+\cos^2 A$

கிளை 2 : $\sin 2A=2\sin A\cos A=\dfrac{2\sin A}{\cos A}\cdot\cos^2 A$

$$=2\tan A\cos^2 A=\frac{2\tan A}{\sec^2 A}=\frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$$

$$\cos 2A=\cos^2 A-\sin^2 A=\cos^2 A\left(1-\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}\right)$$

$$=\cos^2 A(1-\tan^2 A)=\frac{1-\tan^2 A}{\sec^2 A}$$

$$=\frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$$

கிளை 3 : $\tan A = \dfrac{1-\cos 2A}{\sin 2A} = \dfrac{\sin 2A}{1+\cos 2A} = \sqrt{\dfrac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A}}$

கிளை 4 : இப்பிரிவில் கண்ட 2*A*-ன் கோண விகிதங்களின் பலன்களில், 2*A*-க்குப் பதிலாக *A* எனப் பிரதியிட்டால்,

$$\sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$$

$$\cos A = \cos^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{A}{2}$$

$$\tan A = \frac{2\tan\frac{A}{2}}{1-\tan^2 A/2}$$ என வரும்.

இவ்வாறே கிளை 1, கிளை 2, கிளை 3-ல் பெற்ற பலன்களில் 2*A*-க்குப் பதில் *A* எனப் பிரதியிட்டு, விடைகளை எழுதிக் கொள்.

4. **3*A*-ன் கோணத் தகவுகள்!**

(i) $\sin 3A = \sin(2A+A)$

$= \sin 2A\cos A + \cos 2A\sin A$

$= 2\sin A\cos^2 A + (1-2\sin^2 A)\sin A$

$= 2\sin A(1-\sin^2 A) + (1-2\sin^2 A)\times\sin A$

$= 3\sin A - 4\sin^3 A$

$\therefore$ $\underline{\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A}$

(ii) $\cos 3A = \cos(2A+A)$

$= \cos 2A\cos A - \sin 2A\cdot\sin A$

$= (2\cos^2 A - 1) - 2\sin A\cos A\sin A$

$= 2\cos^3 A - \cos A - 2\cos A(1-\cos^2 A)$

$= 4\cos^3 A - 3\cos A$

$\therefore$ $\underline{\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A}$

(iii) $\tan 3A = \tan(2A+A)$

$$= \frac{\tan 2A + \tan A}{1-\tan 2A\cdot\tan A}$$

$$= \frac{\frac{2\tan A}{1-\tan 2A} + \tan A}{1 - \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}\cdot \tan A}$$

$$= \frac{2\tan A + \tan A\,(1-\tan^2 A)}{(1-\tan^2 A) - 2\tan^2 A}$$

$$= \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$$

$$\therefore \quad \tan 3A = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$$

5. திரிகோண முறையில் $\sin 18°$, $\cos 36°$ என்பவற்றின் மதிப்புகளைக் கண்டறிதல்.

θ என்பது $18°$ ஐக் குறிப்பதாகக் கொள்வோமானால்,

$5\theta = 90°$ ஆகும்.

$\therefore\ 2\theta = 90° - 3\theta$ ஆகும்.

$\therefore \sin 2\theta = \sin (90 - 3\theta)$

$= \cos 3\,\theta$ ஆகும்.

(அதாவது) $2\sin\theta\cos\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ ஆகும்.

$\cos\theta$ $\cos 18°$, ஒரு நேர் ராசி எண்

ஆகவே, $\cos\theta$ ஆல் இரு பக்கங்களையும் வகுக்க,

$2\sin\theta = 4\cos^2\theta - 3$ எனப் பெறுகிறோம்.

(அதாவது) $2\sin\theta = 4(1-\sin^2\theta) - 3$ ஆகும்.

$\therefore\ 4\sin^2\theta + 2\sin\theta - 1 = 0$

$\therefore\ \sin\theta = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$

$18°$ குறுங்கோண மாதலின், $\sin\theta$ ஒரு நேர் ராசி எண்ணாகும்.

ஆகவே, $\sin 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ ஆகும் $= \cos 72°$

கிளை : $\cos 18^\circ = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} = \sin 72^\circ$

$$\cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4} = \sin 54^\circ$$

$$\sin 36^\circ = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{6} = \cos 54^\circ$$

6. கூட்டல், பெருக்கல் சூத்திரங்கள் (Sum and Product Formula)

பிரிவு 1, 2-களில் கண்ட சூத்திரங்களிலிருந்து, பின் வருவன வற்றைப் பெறுகிறோம்.

$$\sin(A+B)+\sin(A-B)=2\sin A\cos B) \quad ...(1)$$

$$\sin(A+B)-\sin(A-B)=2\cos A\sin B \quad ...(2)$$

$$\cos(A+B)+\cos(A-B)=2\cos A\cos B \quad ...(3)$$

$$\cos(A+B)-\cos(A-B)=-2\sin A\sin B \quad ...(4)$$

இச் சூத்திரங்களை இடமிருந்து வலம் நோக்கிப் படிக்குங்கால், சிறுது அமைப்பு வேறுபாடு செய்து நினைவில் வைத்துக் கொள்ள வேண்டும்.

$A+B=C$, $A-B=D$ எனவும் பிரதியிடுக :

$\therefore\ A = \frac{C+D}{2}$ யும், $B = \frac{C-D}{2}$ யும் ஆகும்.

இப் பிரதியீடுகளைச் செய்தால், நாம் கீழ்க் கண்ட சூத்திரங் களைப் பெறுகிறோம்.

$$\sin C + \sin D = 2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2} \quad ...I$$

$$\sin C - \sin D = 2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2} \quad ...II$$

$$\cos C + \cos D = 2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2} \quad ...III$$

$$\cos C-\cos D = -2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}$$

அதாவது $\cos C-\cos D = 2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{D-C}{2}$ ...IV

ஆனால், அவற்றை வலமிருந்து இடம் நோக்கிப் படிக்கையில், அவையுள்ளவாறே கொண்டு படிக்கவும்.

$2\sin A\cos B = \sin(A+B)+\sin(B-B)$ ...(1)

$2\cos A\sin B = \sin(A+B)-\sin(A-B)$ ...(2)

$2\cos A\cos B = \cos(A+B)+\cos(A-B)$ ...(3)

$2\sin A\sin B = \cos(A-B)-\cos(A+B)$ ...(4)

7. விளக்க மாதிரிகள்

மாதிரி 1. $\sin\theta = \frac{\sin 3\theta}{1+2\cos 2\theta}$ என நிறுவுக.

இதைக் கொண்டு, $\sin 15°$-ன் மதிப்பைக் கண்டறிக.

வலப்பக்கம் $= \frac{\sin\theta}{1+2\cos 2\theta}$

$$= \frac{3\sin\theta-4\sin^3\theta}{1+2(1-2\sin\theta^2)}$$

$$= \frac{3\sin\theta-4\sin^3\theta}{3-4\sin^2\theta} = \frac{\sin\theta(3-4\sin^2\theta)}{(3-4\sin^2\theta)}$$

$= \sin\theta =$ இடப்பக்கம்

இப் பலனில், $\theta = 15°$ என்றிடுக.

அப்பொழுது, $\sin 15° = \frac{\sin 45°}{1+2\cos 30°} = \frac{1/\sqrt{2}}{1+2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

மாதிரி 2. அட்டவணையைப் பயன்படுத்தாமல்,
$\sin 78^\circ - \sin 18^\circ + \cos 132^\circ = 0$ என நிரூபி.

இடப்பக்கம் $= \sin 78^\circ - \sin 18^\circ + \cos 132^\circ$

$$= 2\cos\frac{78^\circ+18^\circ}{2}\sin\frac{78^\circ-18^\circ}{2} + \cos 132^\circ$$

$$= 2\cos 48^\circ \sin 30^\circ + \cos(180^\circ - 48^\circ)$$

$$= 2\cos 48^\circ \sin 30^\circ - \cos 48^\circ$$

$$= \cos 48^\circ - \cos 48^\circ = 0 \quad [2\sin 30^\circ = 2\times\tfrac{1}{2} = 1]$$

மாதிரி 3. $A+B+C=180^\circ$ ஆனால்,
$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$ என நிறுவுக.

இடப்பக்கம் $= \sin A + \sin B + \sin C$

$$= 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$A+B+C = 180^\circ; \quad \therefore \frac{A+B+C}{2} = 90^\circ \quad \therefore \frac{A+B}{2} = 90^\circ - \frac{C}{2}$$

$$\therefore \sin\frac{A+B}{2} = \sin(90 - C/2) = \cos C/2$$

$\therefore$ இடப்பக்கம் $= 2\cos C/2 \cos\frac{A-B}{5} + 2\sin C/2 \cos C/2$

$$= 2\cos C/2\left[\cos\frac{A-B}{2} + \sin C/2\right]$$

$$= 2\cos C/2\left[\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B}{2}\right]$$

$$= 2\cos C/2 \cdot 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$$

$$= 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

பயிற்சி 4-1.

$(A+B)$-ன் தகவுகள்

1. $\sin\alpha = \frac{15}{17}$, $\cos\beta = \frac{12}{13}$ எனின், $\sin(\alpha+\beta)$, $\tan(\alpha+\beta)$ என்பவற்றை மதிப்பிடுக.

   [விடை : $\frac{220}{221}$; $\frac{220}{21}$]

2. $A+B=45°$ ஆனால், $(1+\tan A)(1+\tan B)=2$ என நிறுவுக.

3. $\tan\alpha = \frac{5}{6}$, $\tan\beta = \frac{1}{11}$ என்றால், $\alpha+\beta = \frac{\pi}{4}$ எனக் காட்டுக.

4. $\cos(45°-A)\cos(45°-B)-\sin(45°-A)\sin(45°-B) = \sin(A+B)$ என நிரூபி.

5. A, B, C குறுங்கோணங்களாகவும், $\tan A = \frac{1}{2}$, $\tan B = \frac{1}{5}$, $\tan C = \frac{1}{8}$-ம் ஆனால், $A+B+C = \frac{\pi}{4}$ எனக் காட்டுக.

6. $\sin(A+B+C)$, $\cos(A+B+C)$, $\tan(A+B+C)$ ஆகியவற்றின் விரிவைக் காண்க.

7. $A+B+C=180°$ ஆகுமிடத்து பின் வருவனவற்றை நிரூபிக்க :

   (i) $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$

   (ii) $\tan 2A+\tan 2B+\tan 2C=\tan 2A\tan 2B\tan 2C$

   (iii) $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1.$

(iv) $\cot \frac{A}{2}+\cot \frac{B}{2}+\cot \frac{C}{2}$

$$= \cot\frac{A}{2} \quad \cot\frac{B}{2}\cot \frac{C}{2}$$

பயிற்சி 4-2.

[2 A, $\frac{A}{2}$, 3 A-ன் தகவுகள்]

1. $\cos \alpha = \frac{4}{5}$-ம், α குறுங்கோணமும் ஆனால்,

   $\tan \frac{\alpha}{2} = \cos 2\alpha$, $\sin 3\alpha$ ஆகியவற்றின் மதிப்பை அறிக. [விடை : $\frac{1}{3}$; $\frac{7}{25}$; $\frac{117}{125}$]

2. $\tan A = \frac{1-\cos 2A}{\sin 2A}$ என நிறுவுக.

   இதை யொட்டி, $\tan 22\frac{1}{2}°$, $\tan 7\frac{1}{2}°$-ன் மதிப்புகளைக் காண்க.

3. $\tan \frac{A}{2} = t$ ஆனால், $\sin A+\tan A=\frac{4t}{1-t^4}$ எனக் காட்டுக.

4. $\cos 2\theta$, $\sin 2\theta$-க்களை $\tan\theta$ வைச் சார்த்திக் கூறுக.

   பின் $\frac{3+\cos 4\theta}{1-\cos 4\theta} = \frac{1}{2}(\tan^2\theta+\cot^2\theta)$ என நிறுவுக.

5. $\frac{1-\cos 2\theta+\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta+\sin 2\theta} = \tan\theta$ எனக் காட்டுக.

6. $4(\cos^3 20° + \cos^3 40°) = 3(\cos 20° + \cos 40°)$ எனக் காட்டுக.

7. A ஆனது ஒரு குறுங் கோணமானால்,

   $\tan\frac{A}{2} = \frac{\sqrt{1+\tan^2 A}-1}{\tan A}$ எனக் காட்டுக; இதிலிருந்து $\tan 22\frac{1}{2}°$-ன் மதிப்பையறிக.

8. $\tan 3A-\tan 2A-\tan A= \tan 3A \tan 2A \tan A$ எனக் காண்க.

பயிற்சி 4-3.

[18°, 36°-களின் தகவுகள்]

1. $4 \sin 18° \cos 36° = 1$ எனக் காட்டுக.

2. $\cos^2 36 + \sin^2 18°$-ன் மதிப்பை அறிக. [விடை : 3/4]

3. $\sec 72° - \sec 36°$-ன் மதிப்பை அறிக. [விடை : 2]

4. $\sin 36° \sin 72° \sin 108° \sin 144° = \frac{5}{16}$ எனக் காட்டுக.

பயிற்சி 4-4.

[$A-B$)-ன் தகவுகள்

1. $$\frac{\sin (A-B)}{\cos A \cos B} + \frac{\sin (B-C)}{\cos B \cos C} + \frac{\sin (C-A)}{\cos C \cos A} = 0$$
எனக் காட்டுக.

2. $\Sigma \cos A \sin (B-C) = 0$ எனக் காட்டுக.

3. $\tan A = \frac{18}{17}$, $\tan B = \frac{1}{35}$ எனில், $A-B=45°$ என நிரூபி.

4. $\cot (A+15°) - \tan (A-15°) = \frac{4 \cos 2A}{2 \sin 2A+1}$ என நிரூபி.

5. நிரூபிக்க :

(i) $\sin 20° \sin 40° \sin 60° \sin 80° = \frac{3}{16}$

(ii) $\cos 20° \cos 40° \cos 60° \cos 80° = \frac{1}{16}$

(iii) $\sin \alpha \sin (60°-\alpha) \sin (60°+\alpha) = \frac{1}{4} \sin 3\alpha$.

பயிற்சி 4-5.

கூட்டல் பெருக்கல் சூத்திரங்கள்

1. $$\frac{\sin A + \sin 3A + \sin 5A + \sin 7A}{\cos A + \cos 3A + \cos 5A + \cos 7A} = \tan 4A$$ என நிரூபி.

2. $\cos 12° - \cos 24° - \cos 48° + \cos 60° + \cos 84° = 0$ எனக் காட்டுக.

3. $\cos 12° + \cos 84° + \cos 132° + \cos 156° = -\frac{1}{2}$ என நிரூபி.

4. $\cos^2 76° + \cos^2 16° - \cos 76° \cos 16° = \frac{3}{4}$ எனக் காட்டுக.

5. $\sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{7\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \sin \frac{11\theta}{2} = \sin 2\theta \sin 5\theta$ எனக் காட்டுக.

6. $\sin \alpha + \sin \left((\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\alpha + \sin \frac{4\pi}{3}\right) = 0$ என நிறுவுக.

7. $A+B+C=180°$ ஆனால்,
$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$
என நிறுவுக.

(ii) $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$ என நிறுவுக.

8. $A+B+C=180°$ ஆனால்,

(i) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2 \cos A \cos B \cos C$ எனக் காட்டுக.

(ii) $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cos B \cos C$ எனக் காட்டுக.

5. கலப் பெண்கள்

(Complex Numbers)

1. மெய்யெண்கள் (Real numbers)

இயற்கணித வளர்ச்சியில், எண்ணினத்தை விரிவு படுத்திக் கொண்டே செல்லவேண்டிய அவசியம் ஏற்பட்டது.

ஆதி காலத்தில் நேர் முழு எண் முறையில் தொடங்கி, பிறகுத் தேவைக்கேற்ப எதிர் முழு எண்கள், நேர் பின்னங்கள், எதிர் பின்னங்கள்—அதாவது விகிதமுறு எண்கள் (Rational numbers) என்றும், மேலும் விகிதமுறா எண்கள் (Irrational numbers) என்றும் எண் பிரிவுகள் தோன்றலாயின.

இவை யாவும் மெய்யெண்கள் (Real numbers) எனப்படும்.

2. கற்பனை எண்கள் (Imaginary numbers)

இப்போது $x^2+1=0$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்வு காண முற்படுவோம்.

$x^2+1=0$ ஆதலால்,

$x^2=-1$ ஆகும்.

எந்த எண்ணைத் தன்னாலேயே பெருக்கினால், -1 வரும் என்பது கேள்வியாகும்.

இனி, எந்த மெய்யெண்ணையும் தன்னாலேயே பெருக்கினால், -1 என்ற விடை வராது. ஆகவே. மெய்யெண்களைக் கொண்டு, இச் சமன்பாட்டைத் தீர்வு காண இயலாது.

இச் சமன் பாட்டைத் தீர்வு காண $-1=i^2$ எனக் கொள்வோம்.

ஆகவே கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு $x^2=-1=i^2$ என்றாகும்

$\therefore\ x=\pm i$ ஆகும்.

அதாவது, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டைத் தீர்வு காண,

$i^2=-1$ என்ற நிபந்தனைக்குட்பட்ட i என்ற ஓர் எண்ணை அதாவது $i=\sqrt{-1}$ என்ற எண்ணை ஏற்படுத்திக் கொண்டிருக்கிறோம்.

i என்பது ஒரு கற்பனை எண்ணாகும். ஏனெனில், இந்தக் குறி பெற்ற மெய்யெண்ணையும் இரு படிக்கு உயர்த்தினாலும், நமக்கு நேர் எண் மதிப்பே கிடைக்கும். ஆனால் $i^2=-1$ ஓர் எதிர் எண்ணாகிறது. ஆகவே, i என்பது மெய் எண் வகையிலிருந்து வேறுபட்டது. i ஐ ஒரு கற்பனை எண் எனக் கூறுகிறோம்.

3. i ஆனது இயற்கணித விதிகளுக்கு உட்பட்டது.

$i=\sqrt{-1}$ ஆகையால்,

$i^2=-1;\ i^3=i^2\times i=-1\times i=-i;$

$i^4=i^2\times i^2=(-1)\ (-1)=+1$

4. கலப் பெண் (Complex Number)

மெய் எண் இனமும், கற்பனை எண் இனமும் சேர்ந்து இயற்கணிதத்தில் மாபெரும் எண் இனமாகிய கலப்பெண் இனத்தை உருவாக்குகின்றன.

a-ம், b-ம் மெய்யெண்களானால் $a+ib$ ஒரு கலப்பெண்ணின் (complex number) வடிவமாகும்.

கலப்பெண்ணில், மெய்யெண்ணும், கற்பனை எண்ணும் அடங்கியுள்ளது.

$b=0$ ஆனால், நமக்கு மெய்யெண்கள் கிடைக்கும்.

$a=0$ ஆனால், நமக்குக் கற்பனை எண்கள் கிடைக்கும்.

5. வரைக்கணித முறையில் கலப்பெண்ணை குறிப்பது (Geometrical representation of a Complex number)

மெய்யெண்களைக் குறிப்பதற்கு ஒரு நேர்கோடே போதும். XOX என்ற ஒரு நேர் கோட்டில், O என்ற ஆதியும் ஒரு அலகும் தேர்ந்தெடுத்துக் கொண்டால், நேர் ராசி முழு எண்கள், எதிர் ராசி முழு எண்கள், நேர் பின்னங்கள், எதிர் பின்னங்கள் ஆகிய விகித முறு எண்களையும், மற்றும் விகித முரு எண்களையும் அதாவது, எல்லா மெய்யெண்களையும் இக் கோட்டில் குறிக்கலாம்.

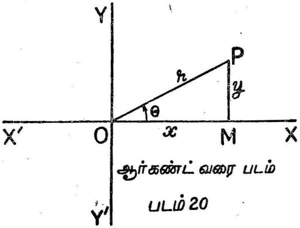
ஆகவே, ஒரு நேர் கோட்டிலுள்ள புள்ளிகள் எல்லா மெய்யெண்களையும் குறிக்கும்.

ஆனால், ஒரு தளத்தில் எண்ணிலாப் புள்ளிகள் உள்ளன. இவை யாவும் கலப்பெண்களைக் (complex numbers) குறிக்கும்.

இது எவ்வாறு என இப்பொழுது காண்போம்.

6. ஆர்கண்ட் வரைபடம் (Argand's Diagram)

சமதளத்தில் $X'OX$, $Y'OY$ என இரு செங்குத்து அச்சுகளை எடுத்துக் கொள்வோம்.



ஆர்கண்ட் வரை படம்

படம் 20

P என்பது தளத்தில் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியாகுக.

P-யிலிருந்து X அச்சிற்கு OM என்ற செங்குத்துக் கோட்டை வரைக.

OM, MP என்பவற்றின் அளவுகள் x, y. ஆனால், O என்னும் புள்ளியின் ஆயக் கூறுகள் (co-ordinates) (x, y) என்றாகும்.

P என்ற புள்ளி $(x+iy)$ என்ற கலப்பெண்ணைக் குறிப்பதாகக் கொள்ளலாம்.

P ஐத் தளத்தில் ஒரு புள்ளியாகக் கருதினால், (x, y) என்பன அப் புள்ளியின் கூறுகளாகும்.

P ஓர் எண்ணைக் குறிப்பிட்டால், அந்த எண் $x+iy$ எனவாகும்.

இவ்வாறு தளத்திலுள்ள புள்ளிகளைக் கலப்பெண்களாகக் குறிக்கும் முறை ஸ்விட்சர்லாந்தைச் சேர்ந்த ஆர்கண்ட் என்ற கணித விற்பன்னரால் முதன் முறையாக மேற்கொள்ளப்பட்டது.

இதற்கு ஆர்க்கண்ட் வரைபட முறை எனப் பெயர். $x+iy$ என்ற எண்ணைச் சுருக்கமாக z எனக் குறிப்பிடலாம்.

$y=0$ ஆனால், z என்பது மெய்யெண்ணைக் குறிக்கும்.

$x=0$ ஆனால், z என்பது ஒரு கற்பனை எண்ணைக் குறிக்கும்.

எல்லா மெய்யெண்களும் x அச்சில் இடம் பெறும். எடுத்துக் காட்டாக, $1+0i$ என்ற கலப்பெண் 1 என்னும் மெய்யெண்ணைக் குறிக்கும். $-2+0i$ என்ற கலப்பெண் -2 என்ற மெய்யெண்ணைக் குறிக்கும்.

$0+1i$ என்ற கலப்பெண், y அச்சில் இடம் பெறும் ; ஏனெனில் இது $(0, 1)$ என்ற புள்ளியைக் குறிப்பதால். இதேபோல், $0+2i$, $0-3i$...... என்பன $2i$, $-3i$ என்ற கற்பனை எண்களைக் குறிக்கும்.

ஆகவே, y அச்சு கற்பனை எண்களை மட்டும் குறிக்கப் பயன் படுகிறது.

x, y அச்சுகளைக் கொண்ட முழு தளமும் கலப் பெண்களைக் குறிக்கப் பயன்படுகிறது.

7. ஒரு கலப் பெண்ணின் எண் அளவும், வீச்சும் (Modulus and Amplitude of a complex number)

$X'OX$ என்ற கோட்டில் M என்ற ஒரு புள்ளி இருந்தால், அதன் எண் அளவு OM-ன் நீளத்தால் குறிக்கப்படும்.

அதேபோல், z என்ற கலப் பெண்ணின் எண் அளவை OP என்னும் நீளத்தால் அறியலாம்,

OP-ன் நீளம் z-ன் எண் அளவு (modulus) என்று சொல்லப் படுகிறது. ஆகவே $P,(x+iy)$ ஒரு கலப் பெண்ணைக் குறித்தால்,

$$OP = +\sqrt{x^2+y^2} \text{ ஆதலால்,}$$

இதை $|z| = |x+iy| = OP = r = +\sqrt{x^2+y^2}$ எனக் குறியிட்டு விளக்குகின்றோம்.

இந்த எண் அளவிற்கு கூட்டல் குறிதான் கொள்ளவேண்டும்.

OP என்பது OX-உடன் θ என்ற கோணம் உண்டாக்கினால், θ என்பது கலப்பெண் z-ன் வீச்சம் (amplitude) என்று வரையறுக் கப்படுகிறது.

படத்திலிருந்து, $r\cos\theta = x$; $r\sin\theta = y$ எனப் பெறுகிறோம்

$$\text{ஆகவே, } \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \ \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

எனவே, θ-வை நிர்ணயிக்க, $-\pi$-க்கும் $+\pi$-க்கும் இடையேயுள்ள எந்தக் கோணம் θ ஆனது $\cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ என்ற இரு சமன் பாடுகளுக்கும் பொருந்தமாக இருக்கிறதோ, அது தான் $x+iy$-ன் வீச்சத்தினுடைய முதல் மதிப்பு (Principal value) எனப்படும்.

8. ஒரு கலப் பெண்ணை அதன் எண்ணளவு, வீச்சம் இவற்றின் மூலம் விவரித்தல்.

கொடுக்கப்பட்ட கலப் பெண், $z = x+iy$ என்க.

அதன் எண்ணளவு (modulus) $= r$ என்றும், வீச்சம் θ என்றும் இருப்பின், படத்திலிருந்து $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ எனப் பெறுகிறோம்.

$$\therefore\ x+iy = r\cos\theta + ir\sin\theta$$

$$= r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

9. $-1-i\sqrt{3}$ என்னும் எண்ணை அதன் எண்ணளவு, வீச்சம் இவை களின் மூலம் விவரிக்க :

$-1-\sqrt{3}i = x+iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ என்க,

$\therefore \; r\cos\theta = -1$

$r\sin\theta = -\sqrt{3}$

$\therefore \; r^2 = 1+3\sqrt{4} \qquad \therefore \; r=2$

$\cos\theta = -\frac{1}{2}; \quad \sin\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

இதை யொட்டி, θ மூன்றாவது கால் வட்டத்தில் இடம்பெறும் $\therefore \; \theta = -\frac{2\pi}{3}$ என்பது முதல் மதிப்பாகும்.

குறிப்பு: θ-வை நிர்ணயிக்க, $-\pi$-க்கும் $+\pi$-க்கும் இடையே யுள்ள கோணத்தைக் கொள்ள வேண்டுமாதலால், $\theta = \frac{4\pi}{3}$ என்று கொள்ளாமல் $\theta = \frac{-2\pi}{3}$ என்று கொண்டோம்.

$$\therefore \; -1-\sqrt{3}\,i = 2\left[\cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-2\pi}{3}\right)\right]$$

இதன் பொது வடிவம்,

$$-1-\sqrt{3}\,i = 2\left[\cos\left(2n\pi\frac{-2\pi}{3}\right) + i\sin\left(2n\pi\frac{-2\pi}{3}\right)\right]$$

10. இணை கலப் பெண்கள் (Conjugate Complex Numbers)

$z = x+iy$ என்ற கலப்பெண் Pஆல் குறிக்கப்படட்டும். மெய் எண் அச்சில், P-ன் பிரதி பலிப்பு (reflection) P' எனில், P'ஐக் குறிக்கும் கலப் பெண் z-ன் இணைக் கலப்பெண் எனப்படும். P' என்னும் புள்ளி $x-iy$ என்னும் கலப் பெண்ணைக் குறிக்கிறது.

குறிப்பு: ஒரு கலப் பெண்ணையும், அதன் இணை கலப் பெண்ணையும் பெருக்கி வரும் பலன் ஒரு மெய்யெண்ணாகும்.

$$(x+iy)\,(x-iy) = x^2-i^2y^2$$
$$= x^2+y^2$$

11. இரு கலப் பெண்கள் சமமானால், அவற்றின் மெய்யெண் பாகங்களும், கற்பனை எண் பாகங்களும் தனித்தனியே சமமாகும்.

$x+iy = x'+iy'$ என்க.

$\therefore \; x-x' = i(y'-y) = -i(y-y')$

$\therefore \quad (x-x')^2 = i^2(y-y')^2 = -(y-y')^2$

$\therefore \quad (x-x')^2 + (y-y')^2 = 0$

(அதாவது) இரு நிறை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை பூச்சியமாகும். இது சாத்தியமாவதற்கு, ஒவ்வொரு வர்க்கமும் தனித்தனியே பூச்சியமாக வேண்டும்.

$\therefore \quad x = x' \; ; \quad y = y'$ ஆகும்.

12. மெய்யெண்களை வரிசைப் படுத்தலாம். ஆனால் கலப் பெண்களில் வரிசைக் கிரமம் கிடையாது. ஏதேனும் இரு கலப் பெண்கள் ஒன்றற்கொன்று சமமாகவோ அல்லது சமனில்லாமலோ இருக்கக் கூடுமே தவிர அவற்றைப் பெரிது, சிறிது என வரிசைப் படுத்த இயலாது.

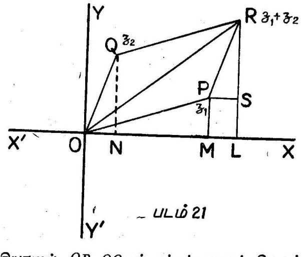
13. z_1, z_2 என்னும் இரு கலப் பெண்களின் கூடுதல்

$z_1 = x_1 + i_1 y_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ எனக் கொள்க.

$\therefore \quad z^1 + z_2 = x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$ ஆகும்.

14. z, z என்னும் இரு கலப் பெண்களின் கூடுதலை ஆர்கண்ட் தளத்தில் குறிக்க (Geometrical representation of the sum of two complex numbers)

P, Q என்ற புள்ளிகள் முறையே $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 \; x_2 iy_2$ என்ற கலப் பெண்களை ஆர்கண்ட் தளத்தில் குறிக்கட்டும்.



படம் 21

O ஆதியானால், OP, OQஐப் பக்கங்களாகக் கொண்ட $OPRQ$ என்னும் இணைகரத்தைப் பூர்த்தி செய்,

இப்பொழுது R என்னும் புள்ளி z_1+z_1-ஐக் குறிக்கும்.

நிருபணம் :

P, Q, R என்பவற்றிலிருந்து மெய் அச்சாகிய OX–க்கு PM' QN, RL என்னும் செங்குத்துக் கோடுகள் வரைக. மேலும் P-யிலிருந்து RL-க்கு PL என்னும் செங்குத்துக் கோடு வரைக.

இப்பொழுது, ONQ, PSR என்ற முக்கோணங்களில், $OQ=PR$; அன்றியும் OQ-ம் PR-ம் இணை கோடுகள்

ON–வும் PS-ம் இணையாக உள்ளன.

மேலும், QN-ம் RS-ம் இணையாகும்.

ஆகவே $\triangle ONQ \equiv \triangle PSR$

$\therefore \quad ON = PS; \quad NQ = SR$

$$\begin{aligned} \therefore \quad OL &= OM+ML \\ &= OM+PS \\ &= OM+ON \\ &= x_1+x_2 \end{aligned}$$

$$LR = LS+SR = MP+NQ = y_1+y_2$$

எனவே R என்னும் புள்ளியின் கூறுகள் x_1+x_2, y_1+y_2 ஆகும்.

$\therefore$ R என்னும் புள்ளி $x_1 \times x_2+i\,(y_1+y_2)$ என்னும் எண்ணைக் குறிக்கின்றது.

(அதாவது) (x_1+iy_1) + (x_2+iy_2) (அதாவது) z_1+z_2 ஐக் குறிக்கிறது.

ஆகையால் z_1, z_2 என்ற இரு கலப்பெண்களை P, Q என்னும் புள்ளிகள் குறித்தால், z_1+z_2 ஐக் குறிக்கும் புள்ளி R ஆனது OP, OQ ஐ அடுத்துள்ள பக்கங்களாகக் கொண்ட இணைகரத்தினுடைய O வழியே செல்லும் மூலை விட்டத்தின் முனைப் புள்ளியாகும்.

குறிப்பு 1 ஒரு முக்கோணத்தில் ஏதேனும் ஒரு பக்கம் மற்ற இரு பக்கங்களின் கூடுதலைவிட அதிகமாய் இருக்க முடியாது.

ஆகையால், முக்கோணம் OPR லிருந்து,

$$OR \leqslant QP+PR$$

அதாவது $OR \leqslant OP+OQ$ [$\because PR = OQ$]

z_1+z_2 ஐ R குறிப்பதால், $OR = |z_1+z_2|$ ஆகும்.

மேலும் $OP = |z_1|$; $OQ = |z_2|$ ஆகும்.

$\therefore \ |z_1+z_2| \leq |z^1| + |z_2|$

இங்கு, $\angle XOP = \angle XOQ$ ஆனால் மட்டும்,

(அதாவது) வீச்சம் $z_1 =$ வீச்சம் z_2 ஆனால் மட்டும்,

$|z_1+z_2| \doteq |z_1| + |z_2|$ என்ற தொடர்பு பொருந்தும் எனக் கவனத்தில் கொள்ள வேண்டும்.

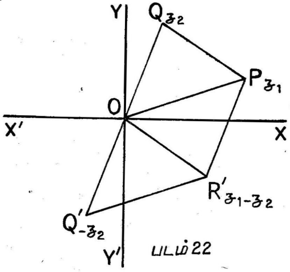
15. z_1, z_2 என்னும் இரு கலப் பெண்களின் வித்தியாசம்.

$z_1 = x_1+iy_1$; $z_2 = x_2+iy_2$ ஆனால்,

$$z_1-z_2 = (x_1+iy_1) - (x_2+iy_2)$$
$$= (x_1-x_2) + i(y_1-y_2)$$

16. z_1, z_2 என்னும் இரு கலப் பெண்களின் வித்தியாசத்தை ஆர்கண்ட் களத்தில் குறிக்க.

P, Q என்ற புள்ளிகள் முறையே z_1, z_2வைக் குறிக்கட்டும். QOவை, $OQ' = OQ$ ஆகும்படி நீட்டுக. எனின் Q' என்னும்



படம் 22

புள்ளி, $-z_2$ ஐக் குறிக்கும். R' என்னும் புள்ளியை $OPR'Q'$ ஓர் இணைகரமாக இருக்கும்படி எடுத்துக் கொள்,

P ஆனது z_1ஐயும், Q' ஆனது $-z_2$ ஐயும் குறிப்பதால்,

R' ஆனது $z_1+(-z_2)$ (அதாவது) z_1-z_2 ஐக் குறிக்கும்.

குறிப்பு 1 : $|z_1-z_2| = OR'$ ஆகும் ; (z_1-z_2)-ன் வீச்சம் $= \angle XOR'$

குறிப்பு 2 : $QP = OR' = |z_1-z_2|$ (அதாவது) Q, P என்ற புள்ளிகள் இடையேயுள்ள தூரம் $= |z_1-z_2|$

குறிப்பு 3 : ஒரு முக்கோணத்தின் ஏதேனும் ஒரு பக்கம் மற்ற இரு பக்கங்களின் வித்தியாசத்தை விடக் குறைவாய் இருக்க முடியாது.

ஆகையால் முக்கோணம் $OQ'R'$ லிருந்து $OR \geqslant Q'R' = OQ'$

(அதாவது) $|z_1-z_2| \geqslant |z_1| \sim |z_2|$

17. (i) z_1, z_2 என்னும் இரு கலப்பெண்களின் பெருக்கல் பலன்.

$z_1 = x_1+iy_1$; $z_2 = x_2+iy_2$ ஆனால்,

$$z_1, z_2 = (x_1+iy)\,(x_2=iy_2)$$
$$= x_1x_2+ix_1y_2+ix_2y_1+i^2y_1y_2$$
$$= (x_1x_2-y_1y_2)+i\,(x_1y_2+x_2y_1)$$

(ii) இதையே எண்ணளவு, வீச்சு முறையில் காண்போம்.

$z_1 = r_1\,(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$

$z_2 = r_2\,(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ என்க.

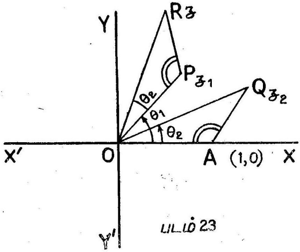
$$\therefore\ z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin_2\theta)$$
$$= r_1 r_2 [(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+i(\sin\theta_1\cos\theta_2 +\cos\theta_1\sin\theta_2)]$$
$$= r_1 r_2 [\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$$

18. இப்பொழுது கலப் பெண்கள் பெருக்கற் பலனை வரை கணித முறைப்படி காண்போம்.

ஆர்கண்ட் தளத்தில் z_1, z_2 ஐக் குறிக்கும் புள்ளிகளை P, Q எனக் கொள்வோம்.

A என்ற புள்ளியை $OA = 1$ என்று இருக்குமாறு, OX அச்சில் குறித்துக் கொள்.

OP மீது, OPR என்ற முக்கோணத்தை $\triangle OAQ$விற்கு நேர் வடிவொத்ததாக வரை.



படம் 23

அப்பொழுது R என்னும் புள்ளி $z_1 z_2$ என்னும் கலப் பெண்ணைக் குறிக்கும் என நிறுவலாம்.

ஏனெனில், $\dfrac{OR}{OP} = \dfrac{OQ}{OA}$ [$\because \triangle OPR \parallel\!\!\mid \triangle OAQ$]

அதாவது) $\dfrac{OR}{|z_1|} = \dfrac{|z_2|}{1}$

R என்னும். புள்ளி z என்னும் கலப் பெண்ணைக் குறித்தால்
$OR = |z| = |z_1| \ |z_2| = r_1 r_2$ ...(i)

மேலும், $\angle XOR = \angle XOP + \angle POR$

$= \angle XOP + \angle AOQ$

$= \theta_1 + \theta_2$

(அதாவது) z-ன் வீச்சம் $=$ z_1-ன் வீச்சம் $+$ z_2-ன் வீச்சம் (ii)

$\therefore$ R என்ற புள்ளி, $r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$ என்ற புள்ளியைக் குறிக்கின்றது.

(அதாவது) R என்ற புள்ளி $z_1 \times z_2$ என்ற கலப் பெண்ணைக் குறிக்கின்றது. [பிரிவு 17 ஐக் காண்க].

குறிப்பு 1: இரு கலப் பெண்களின் பெருக்கற் பலனின் எண்ணளவு (modulus), அக் கலப் பெண்களின் எண்ணளவுகளின் பெருக்கத்திற்குச் சமமாகும்.

மேலும் இரு கலப் பெண்களின் பெருக்கற் பலனின் வீச்சம் அக்கலப் பெண்களின் வீச்சங்களின்கூடுதல் ஆவதைக் காண்கிறோம்

குறிப்பு 2: z^2-ன் வீச்சம் $=$ $z \cdot z$-ன் வீச்சம் $=$ z-ன் வீச்சம் $+ z$-ன் வீச்சம் $= 2$ (z-ன் வீச்சம்)

$$|z^2| = |z \cdot z| = |z| \cdot |z| = |z|^2$$

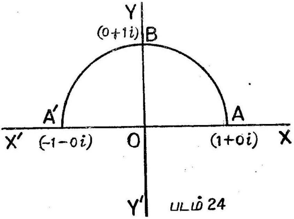
இம்மாதிரியே, z^n-ன் வீச்சம் $= n$ (z-ன் வீச்சம்)

மேலும் $|z^n| = |z|\ |z| \ldots\ldots = |z|^n$

குறிப்பு 3: z_2-ன் வீச்சத்தின் குறி கழித்தல் குறியானால், (அதாவது) θ_2 எதிர் குறியானால், OPமீது வரையும் முக்கோணம் OPR OP-க்குக் கீழே அமையும்.

குறிப்பு 4: i என்பதனால் பெருக்கி வரும் பலனை வரைபடத்தால் விளக்குதல்

i யினால் பெருக்கினால் ஒரு செங்குத்துக் கோண அளவு சுழற்சியை ஏற்படுத்தும் என நிறுவலாம். ஏனெனில், கலப்பெண்



படம் 24

ஒன்றை, ($\cos\theta + i\sin\theta$)-வினால் பெருக்கும் போது, அக் கலப் பெண்ணின் வீச்சம் θ அளவு அதிகரிக்கும்.

ஆகவே, $i = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ வினால் ஓர் எண்ணைப்

பெருக்கும் போது. அது $\frac{\pi}{2}$ அளவு இடஞ் சுழியாக ஏற்படும் சுழற்சியை மேற்கொள்ளும்.

மெய் அச்சின்மீது 1ஐக் குறிக்கும் A என்ற புள்ளியை எடுத்துக் கொண்டால், $i \times 1$ என்பது, OA ஐ 90° சுழல வைத்து OY அச்சில் OB என்ற நிலைக்குச் சேர்க்கும்

இப்பொழுது i யினால் மேலும் ஒரு பெருக்கல் செய்தால், $i \times i \times 1$ என்பது, OBஐ மீண்டும் 90° சுழல வைத்து, மறுபடியும் X அச்சில் இடப் புறமாக OA' என்ற நிலைக்கு வருமாறு செய்யும். மொத்தத்தில் OA ஆனது 180° சுழற்சி செய்ததாகக் கொள்ளலாம்

அப்பொழுது OA ஆனது OA' ஆகிறது அதாவது $-OA$ ஆகிறது.

$\therefore$ $i \times i$ யினால் பெருக்கலும், -1 ஆல் பெருக்கலும், ஒரே பயனை உண்டாக்குவதாகக் கொள்ளலாம்.

இதனை $i^2 = -1$ என எழுதிக் குறிக்கலாம்.

இப்படி வரை கணித முறைப்படி காணும் விளக்கமும் நாம் தொடக்கத்தில் $i^2 = -1$ என்று கொடுத்த வரையறையும் பொருந்தியிருப்பதைக் காண்கிறோம்.

19. கலப்பெண் வகுத்தல்

$z_1 = x_1 + i\, y_1$, $z_2 = x_2 + i\, y_2$ ஆனால்.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + i\, y_1}{x_2 + i\, y_2}$$

$$= \frac{(x_1 + i\, y_1)\,(x_2 - i\, y_2)}{(x_2 + i\, y_2)\,(x_2 - i y_2)}$$

$$= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + i\,(y_1 x_2 - y_2 x_1)}{x_2^2 + y_2^2}$$

(ii) இதையே எண்ணளவு, வீச்சு முறையிலும் காணலாம்

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1\,(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2\,(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)}$$

$$= \frac{r_1}{r_2} \frac{(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2-i\sin\theta_2)}{(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)(\cos\theta_2-i\sin\theta_2)}$$

$$= \frac{r_1}{r_2} \frac{[\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2+i(\sin\theta_1\cos\theta_2-\cos\theta_1\sin\theta_2)}{\cos^2\theta_2+i^2\sin^2\theta_2}$$

$$= \frac{r_1}{r_2} \frac{[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-{}^{\circ}{}_2)]}{\cos^2\theta_2+\sin^2\theta^2}$$

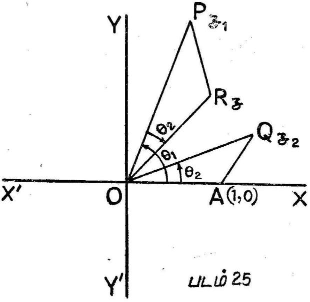
$$= \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]$$

20. $\frac{z_1}{z_2}$ ஐ வரை கணித முறைப்படி காணுதல்

$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$,

$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\cdot\sin_2\theta)$

ஆர்கண்ட் தளத்தில், z_1 z_2 ஐக் குறிக்கும் புள்ளிகள் P, Q ஆகுக.



படம் 25

z_1-ன் வீச்சம் $\theta_1 > z_2$-ன் வீச்சம் θ_2 A என்ற புள்ளியை OX அச்சில். $OA=1$ இருக்குமாறு குறித்துக் கொள்.

R என்ற புள்ளி OP-க்குக் கீழ் இருக்குமாறும் $\triangle OPR$ என்னும் முக்கோணம் $\triangle OQA$ என்னும் முக்கோணத்திற்கு நேர் வடிவொத்ததாக இருக்குமாறும் வரைக.

இனி R என்ற புள்ளி $\frac{z_1}{z_2}$ என்ற எண்ணைக் குறிக்கும் என நிறுவலாம்.

முக்கோணங்கள் வடிவொத்தமை ஆதலால்,

$$\frac{OR}{OA} \quad \frac{OP}{OQ}$$

அதாவது $OR = \frac{OP}{OQ}$

$$\therefore \; |z| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{r_1}{r_2}$$

மேலும், $\angle XOR = \angle XOP - \angle POR$

$$= \angle XOP - QOA$$

$$= \theta_1 - \theta_2$$

$\therefore$ z-ன் வீச்சம் $= \theta_1 - \theta_2 = z_1$-ன் வீச்சம் $- z_2$-ன் வீச்சம்

$\therefore$ R குறிக்கும் கலப்பெண் $\frac{r_1}{r_2}\,[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin (\theta_1 - \theta_2)]$

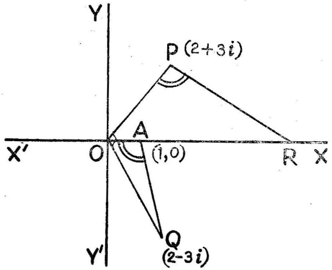
$= \frac{z_1}{z_2}$ [பிரிவு 19 ஐப் பார்க்கவும்.]

21. மாதிரிக் கணக்குகள்

மாதிரி 1 : $(2+3i)$, $(2-3i)$ இவற்றின் பெருக்கத்தை வரை கணித முறையில் காண்க.

$P(2+3i)$, $Q(2-3i)$ என்ற புள்ளிகளைக் குறிக்கவும். A என்ற புள்ளி $(1, 0)$ என்பதைக் குறிக்கட்டும். $\triangle OAQ$-க்கு நேர் வடிவொத்தமையாக $\triangle OPR$ ஐ வரைக.

$$\therefore \; \frac{OA}{OP} = \frac{AQ}{PR} = \frac{OQ}{OR}$$



படம் 26

$$\therefore \quad OR = OP \cdot OQ$$
$$= |2+3i| \; |2-3i|$$
$$= \sqrt{13}\sqrt{13} = 13$$

மாதிரி 2 : வரை கணித முறைப்படி $\frac{1+i}{1-i} = i$ என நிறுவுக.

P என்ற புள்ளி $1+i$ ஐக் குறிக்கட்டும். Q என்ற புள்ளி $1-i$ஐக் குறிக்கட்டும். A என்ற புள்ளி $(1, 0)$ ஐக் குறிக்கட்டும். $\triangle OQA$-க்கு நேர் வடிவொத்த முக்கோணமாக OPRஐ வரைக.

$$\therefore \quad \frac{OR}{OA} = \frac{OP}{OQ}$$

அதாவது $OR = \frac{OP}{OQ} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$

மேலும் R-ன் வீச்சம் $= \theta_1 - \theta_2$ ஆகும்.

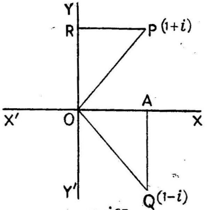
θ_1 ஆனது $1+i$-ன் வீச்சம் $= \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$

θ_2 ஆனது $1-i$-ன் வீச்சம் $= \tan^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4}$

$$\therefore \quad \theta_1 - \theta_2 = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

அதாவது R என்னும் கலப்பெண்ணின் எண்ணளவு 1 ஆகும். அதன் வீச்சம் $= \frac{\pi}{2}$ ஆகும்.

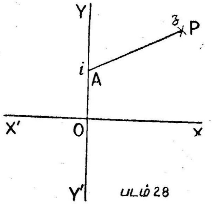
$$\therefore \quad R = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) \text{ ஆகும்.}$$



படம் 27

ஆகவே, R என்னும் புள்ளி i என்னும் கலப்பெண்ணைக் குறிக்கும்.

மாதிரி 3 : z என்னும் ஒரு கலப்பெண் மாறி கீழ்க்கண்ட நிபந்தனைக்குட்பட்டு நகர்ந்தால் அதன் நியமப்பாதை என்ன ?



படம் 28

(i) $|z-i| = 3$

(ii) வீச்சம் $(z-2-3i) = \frac{\pi}{4}$

(i) படத்தில் A என்ற புள்ளி i என்ற கலப் பெண்ணையும், P என்ற புள்ளி z என்னும் ஏதேனும் ஒரு கலப்பெண்ணையும் குறிக் கட்டும்.

இவ்வதிகாரம் பிரிவு 16 குறிப்பு (2)-ன் படி, $|z-i|=AP$ ஆகும்.

இதில் A என்பது நிலையான புள்ளி P ஒரு மாறியைக் குறிக்கும் புள்ளி. P நகரும் பொழுது, $AP=3$ என்னும் நிபந்தனைக்குட்பட்டு இயங்குவதால், P-ன் நியமப்பாதை ஒரு வட்டமாகும். இவ் வட்டத்தின் மையம் i ஐக் குறிக்கும் A என்னும் புள்ளி. இதன் ஆரம் $=3$ ஆகும்.

மறுவழி : $z=x+iy$ எனக் கொள்க.

$|z-i| =3$ ஆகும்

அதாவது $|x+iy-i| =3$

அதாவது $|x+i(y-1)|= 3$

அதாவது $\sqrt{x^2+(y-1)^2} =3$

$\therefore \quad x^2+(y-i)^2 =3^2$

இது $(0, 1)$ ஐ மையமாகவும், 3 அலகுகளை ஆரமாகவும் கொண்ட ஒரு வட்டமாகும்.

(ii) படத்தில், $(2+3i)$ என்ற கலப்பெண்ணை A என்னும் புள்ளி குறிக்கட்டும். z என்பது ஒரு கலப்பெண் மாறியைக் குறிக் கின்றது. z-ன் நிலை என்னவானாலும், z ஐயும் A ஐயும் சேர்க்கும் கோடு X அச்சுடன் $\frac{\pi}{4}$ என்ற நிலையான கோணத்தை உண்டாக்க வேண்டும் என்பது நிபந்தனை. இந் நிபந்தனைக்குட்பட்டு, z இயங்க வேண்டுமானால், அது A வழியாக X அச்சுடன் $\frac{\pi}{4}$ கோணச் சாய் வில் வரையப்படும் கோட்டின் மேல்தான் அமையவேண்டும். ஆகவே, z-ன் நியமப்பாதை மேற்கூறிய நேர்கோடாகும்.

மறுவழி : வீச்சம் $(z-2-3i) = \frac{\pi}{4}$

அதாவது வீச்சம் $(x+i\ y-2-3i) = \frac{\pi}{4}$

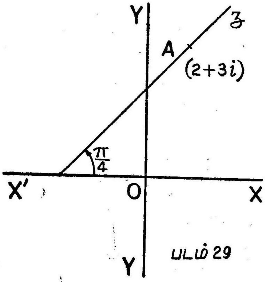
அதாவது வீச்சம் $[(x-2)+i(y-3)] = \frac{\pi}{4}$

இனி $(x-2)+i\,(y-3)=r\,(\cos\theta+i\sin\theta)$ எனின்,

$$r\cos\theta = x-2,$$

$$r\sin\theta = y-3 \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore \quad \tan\theta = \frac{y-3}{x-2}$$



படம் 29

ஆனால், $\theta = \pi/4$

$$\therefore \quad \tan\frac{\pi}{4} = \frac{y-3}{x-2}$$

$$\therefore \quad \frac{y-3}{x-2} = 1 \text{ (அதாவது) } y-3 = x-2 \text{ ஆகும்.}$$

$\therefore\ x-y+1 = 0$ ஆகும்.

$\therefore$ z-ன் நியமப்பாதை ஒரு நேர் கோடாகும்.

பயிற்சி-5.

1. பின் வருவனவற்றை எண்ணளவு-வீச்சு வடிவத்தில் எழுதுக.

(i) $-\sqrt{3}+i$ (ii) $-3-4\,i$ (iii) $-i$

(iv) $\dfrac{(1+\sqrt{3}\,i)\,(2\sqrt{3}+2\,i)}{3\,(1+i)}$ (v) $1-\sqrt{3}\,i$

[விடை : (i) $2\cos\frac{5\pi}{6}$; (ii) $5\cos(-126^\circ 52)$;

(iii) $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)$; (iv) $\frac{4}{3}\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}$;

(v) $2\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$]

2. $3+7i, -5+11i, -8-15i$ என்ற புள்ளிகள் ஒரு செங் கோண முக்கோணத்தை உருவாக்கும் என நிரூபி.

3. கீழ்க் காணும் எண்களை $p+iq$ என்ற வடிவில் எழுதுக.

$3-\frac{4}{i}$, $\frac{3}{2}(7i-1)(1-i)$, $\frac{5(i-3)}{i+1}$, $\frac{2(t-18)}{(1+i)^2}$

இந்த எண்களைக் குறிக்கும் புள்ளிகள் ஒரு சதுரத்தின் உச்சிகளாகும் என நிறுவுக.

4. $\sqrt{3}+i$, $\sqrt{2}+i\sqrt{2}$, $1+i\sqrt{3}$ ஐக் குறிக்கும் புள்ளிகள் இரு சமபக்க முக்கோணத்தின் உச்சிகள் என நிறுவுக.

5. $(1+i)^4=-4$ என நிறுவுக.

6. $(1+2i)$ என்னும் கலப்பெண்ணைக் குறிக்கும் புள்ளியை ஆதியைச் சுற்றி 30° இடமாகச் சுழற்றினால், கிடைக்கும் புதிய புள்ளியைக் குறிக்கும் கலப்பெண்ணைக் கண்டுபிடி.

[விடை : $\frac{\sqrt{3}}{2}-1+i\left(\sqrt{3}+\frac{1}{2}\right)$]

7. z_1 என்பது ஒரு நிலையான கலப்பெண். z என்பது ஒரு கலப் பெண்மாறி. $|z-z_1|=k$ எனில், z-ன் நியமப் பாதை யைக் காண்க.

8. z_1 என்பது ஒரு நிலை யான கலப்பெண் z என்பது ஒரு கலப் பெண் மாறியாகும். வீச்சம் $(z-z_1)$ = ஒரு மாறிலி யானால், z-ன் நியமப் பாதை என்ன ?

9. $\frac{z-i}{z-1}$ என்பது மெய்யெண் கலவாத கற்பனை எண் மட்டுமே யானால் z என்பது ஒரு வட்டத்தில் அமையும் எனக் காட்டுக.

1. z, α, β என்ற எண்களில், முதல் எண் கலப்பெண் யாகவும், மற்ற இரண்டும் நிலையான கலப்பென் கவும் இருப்பின், கீழ்க் கண்ட சமன்பாடுகளுக்கெ நியமப் பாதைகள் யாவை ?

(i) $|z-\alpha| = |z-\beta|$

(ii) $|z-\alpha| \dots |\beta|$

2. α, β இரு நிலையான கலப்பெண்களாகவும், k ஓர் யெண்மாறிலியாகவும், $\dfrac{|z-\alpha|}{|z-\beta|} - k$ ஆகவும் இருந் $P(z)$-ன் நியமப்பாதை

(i) ஒரு வட்டம் $(k \neq 1)$

(ii) ஒரு நேர் கோடு $(k=1)$ என நிறுவுக.

பாகம் III

நுண் கணிதம்
(Calculus)

1. சார்புகள், எல்லைகள், சார்புகளின் தொடர்ச்சித் தன்மை, வரைபடங்கள்
(Functions, Limits, Continuity and Graphs)

1. தோற்றுவாய்

நவீன கணிதமானது பெரும்பாலும் நுண் கணிதத்தை அடிப்படையாகக் கொண்டே அமைந்துள்ள தெனலாம். இம் முறையானது விஞ்ஞானம், பொறியியல் ஆகியவற்றின் பிரிவுகளைத் தினும் பேரளவு பயன்பட்டு நிற்கின்றது.

இத் தலை சிறந்த பிரிவிற்குச் சுமார் 400 ஆண்டுகட்கு முன்னர் தான் அடிகோலப்பட்டது. இதற்கு வித்திட்ட பெருமை ஆங்கில நாட்டுப் பெரிய கணித மேதையான சர். ஐசக் நியூட்டன் என்பவரையும், ஜெர்மனி நாட்டுத் தத்துவ அறிஞரும், கணித மேதையுமான லைப்னிட்ஸ் (Leibnitz) என்பவரையும் சாரும்.

நுண்ணிய மாறுதல்களையும், அவை மாறும் வீதங்களையும், நுண்ணிய மாறுதல்கள் காரணமாக ஏற்படும் தொகைகளையும் கணித்து ஆராய்வதே நுண் கணிதத்தின் நோக்கமாகும்,

2. தொடர்ச்சியான மாறுபாடு (Continuous variation)

ஒரு மாறி (variable) என்பது பல்வேறு எண் மதிப்புகளை ஏற்கத்தக்கதொரு பரிமாணமாகும்.

ஒரு பொருளின் வெப்ப நிலை, ஒரு குளத்தில் எறிந்த கல்லால் விளையும் சிற்றலையின் பரப்பு, ஆரம்ப நிலையிலிருந்து இயக்க நிலை பெற்றதொரு பொருள் சென்ற தூரம் ஆகியவை ஒரு மாறியின் தன்மையைப் புலப்படுத்தும். ஒரு மாறியை x, y, z போன்ற எழுத்துகளால் குறிக்கலாம்.

ஒரு மாறிலி (constant) என்னும் நிலை யெண்ணானது எடுத்துக் கொண்ட விடயத்திற்கு ஏற்றதாகிய நிலையான மதிப்பைப் பெறுவதாகும்.

ஒரு மாறிலியை a b, c என்ற எழுத்துகளால் குறிப்பது வழக்கம்.

$S=ut+\frac{1}{2}at^2$ என்னுஞ் சமன்பாட்டில், s, t என்பன மாறிலி களாகும். u, a, $\frac{1}{2}$ என்பன மாறிகளாகும். இங்கு மாறிலிப் பரி மாணங்கள் இரு வகையாக இருக்கக் காண்கிறோம். $\frac{1}{2}$ என்பது போன்ற மாறிலியானது எக் காலத்தும் ஒரே மதிப்புடையதாகும். ஆகவே இது தனி மதிப்பெண் (absolute constant) எனப்படும். u, a போன்ற மாறிலிகள் எந்தநிலையான மதிப்பையேனும் பெறும். ஒரு குறிப்பிட்ட பிரச்சினையைப் பொறுத்த மட்டில்தான் இந் நிலை பொருந்தும். அத்தகையவை அறிகுறியாகிய அல்லது தற்காலிக மான மாறிலிகள் (symbolic or arbitrary constants) எனக் கருதப் படும்.

ஒரு மாறியானது சாத்தியக் கூறாகப் பெறக் கூடிய மதிப்பு களின் மொத்தத் தொகுப்பும் அதனது 'வீச்செல்லை' (Range or field) எனக் கருதப்படும்.

3. சார்புகள் (Functions)

அன்றாட வாழ்க்கையிலும், நமது அனுபவத்திலும், விஞ் ஞானப் பிரச்சினைகளிலும் ஆய்வுக்குரிய எந்தப் பரிமாணமும் பல் வகையான இராசிகளை அனுசரித்திருக்கவும், அவற்றுள் ஒன்றையோ, பலவற்றையோ யொட்டி உண்டாகும் மாறுதல், அம் முழுப் பரிமாணத்திலேயே மாறுதல் செய்வதைக் காண் கிறோம். யாங்ஙனமெனில் ஓரிடத்தின் தட்ப வெப்ப நிலையானது அதன் உயரத்தையும், அட்ச ரேகையையும், கடலுக்கு அணித் தாதல் ஆகியவற்றை அனுசரித்தலையும் அறிகிறோம். ஒரு முக்

கோணத்தின் பரப்பு அதன் அடிக் கோட்டையும், குத்துயரத்தை யும் பொறுத்துள்ளதாகும்.

இங்ஙனம் ஒரு பரிமாணவானது பலவேறு பரிமாணங்களைத் தழுவியுள்ள நிலைமையைக் கணித மொழியில் சார்பு உறவு (Functional Relationship) அல்லது சார்புத் தொடர்பு என்பர்.

$C=2\pi r$ என்னுந் தொடர்பைக் கருதுவோம்.

இங்கு C-ன் மதிப்பு r-ன் மதிப்பைப் பொறுத்துள்ளதாகும்.

நாம் விரும்பியபடி எல்லாம் மதிப்புகளை ஏற்றுக் கொள்ளும் ஒரு மாறியானது சார்பில் மாறி அல்லது சாராமாறி (Independent variable) என்றும், இதன் விளைவாகத் தனக்குத் தக்க மதிப்பை பெறும் மாறியானது சார்புடை மாறி (Dependent variable) எனப்படும்.

மேற்கூறிய சூத்திரத்தில் r ஆனது சார்பிலா மாறியாகவும், C என்பது சார்புடை மாறியாகவும் இருப்பது பற்றி, C ஐ r-ன் சார்பு எனக் கூறுகின்றோம்.

இதனை $C = f(r)$ எனக் குறியீடு செய்து காட்டுகின்றோம்.

இங்ஙனமே, $r = \frac{C}{2\pi}$ என்று எழுதக் கூடுமாதலால் rஐ C-ன் சார்பாகவும் காண்கிறோம்.

$2x^2-4x+1$, $3x-4$, $\sin x$, $\cos x$ போன்றவை x என்னும் ஒரு மாறியைப் பொறுத்துள்ள சார்புகளுக்கு எடுத்துக்காட்டுகளாகும்.

இங்கு ஒரு நாள் பொழுதில் நிகழும் வெப்பநிலை அந் நாளின் நேரத்தோடு சம்பந்தப்பட்டிருப்பதனைச் சார்புத் தொடர்பால் கூற முடியாது. அதனை வரைபடம் மூலமாகத்தான் குறித்துக் காட்ட முடியும் என்பது கவனிக்கத் தக்கதாகும்.

சார்பின் வரைவிலக்கணம் (Definition of a Function)

y ஆனது x-ன் சார்பாக வேண்டுமானால், x ஆனது தனக்குரிய மதிப்புகளின் வீச்சில் (range) பெறும் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் ஒத்தனவாகிய நிச்சயமான மதிப்புகளை y பெறத்தக்கதாக இருத்தலொன்றே சாலும்.

4. சார்புக் குறியீட்டு முறை (Functional notation)

(i) ஒரு மாறியை யொட்டிய சார்புகள்

y ஆனது x-ன் சார்பாகுமானல், $y = f(x)$ என அதைக் குறிக்கின்றோம்.

மாறி x-ன் சார்புகளை,

$f(x)$, $F(x)$, $\phi(x)$, $\phi(x)$...... அல்லது $f_1(x)$, $f_2(x)$......என்பன போன்ற குறியீடுகளால் குறிக்கின்றோம் f, F, ϕ போன்றவை சார்பு குறிகளாகக் கருதப்பட வேண்டுமே தவிர, அவை பெருக்கும் எண்கள் அல்ல என்பதை அறியவேண்டும்.

$f(a)$ என்பது $x = a$ ஆகுங்கால் $f(x)$–ன் மதிப்பைக் குறிக்கும்

(ii) ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட மாறிகளைக் கொண்ட சார்புகள்

z-ன் மதிப்பானது x, y என்னும் இரண்டு சார்பிலா மாறிகளை யொட்டி அமையுமாயின், zஐ x, y-களின் சார்பெனக் கூறுவோம்.

இதனை $z = f(x, y)$ எனக் குறியீடு செய்வோம்.

எடுத்துக்காட்டு

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ என்னுந் தொடர்பைக் கருதுவோம். இங்கு V ஆனது, r, h என்ற மாறிகளின் மதிப்பைச் சார்ந்திருக்கிறது. இதை $V = f(r, h)$ என்கிறோம்.

5. பல வகைப்பட்ட சார்புகள்

(i) வெளிப்படைச் சார்புகள் (Explicit functions)

y ஆனது நேர் முகமாக xஐச் சார்ந்த ஒரு தொடர்பாகக் கொடுக்கப்பட்டால், அது வெளிப்படைச் சார்பு எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டுகள்

(i) $y = 2x^2 - x + 3$

(ii) $y = x + \cos x$

(ii) மறைமுகச் சார்புகள் (Implicit functions)

x-க்கும், y-க்கும் உள்ள தொடர்பானது நேர்முகமாக இல்லாமல், கலப்புற்று நின்றால், yஐ x-ன் மறை முகச் சார்பு எனச் சொல்லுவோம்.

எடுத்துக்காட்டு : $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

(iii) தனிப் பெறுமானச் சார்பு (Single valued function)

x-ன் ஒவ்வொரு மதிப்புக்கும் ஒரே ஒரு மதிப்பு இருப்பின், y ஆனது x-ன் தனிப் பெறுமானச் சார்பு எனப்படும். எடுத்துக் காட்டு : $y = 3x-2$

(iv) பன் மதிப்புடைச் சார்பு (Many valued functions)

ஆனால் x-ன் ஒவ்வொரு மதிப்புக்கும், y-க்கு ஒன்றுக்கு மேற் பட்ட மதிப்புகள் இருப்பின், y ஆனது x-ன் பன் மதிப்புடைச் சார்பு எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு : $x^2+y^2 = 9$ என்ற சமன் பாட்டிலிருந்து $y = \pm\sqrt{9-x^2}$ என்ற நேர் முகச் சார்பைப் பெற முடிகிறது. ஆனால், குறிப்பிட்ட x-க்கு இரண்டு மதிப்புகள் பெறப்படு கின்றன. ஆகவே y ஆனது x-ன் இரு மதிப்புடைச் சார்பாகும்.

(v) ஒற்றைச் சார்புகள் : $f(-x) = -f(x)$ ஆனால், $f(x)$ ஒற்றைச் சார்பாகும்.

எடுத்துக்காட்டுகள் : $\sin x$, $\tan x$, x^3+x என்பன.

(vi) இரட்டைச் சார்புகள் : $f(-x) = f(x)$ ஆனால், $f(x)$ இரட்டைச் சார்பு எனப்படும். எடுத்துக்காட்டுகள் : $\cos x$, $\sec x$, x^4+x^2+1 என்பன.

(vii) கால வட்டச் சார்புகள் (Periodic functions)

$f(x) = f(x+p) = f(x+2p) = \ldots\ldots$ ஆனால், $f(x)$ ஆனது ஒருகால வட்டச் சார்பாகும். ஏனெனில் x-ன் மதிப்பு படிப்படி யாக p, p,......என அதிகரிக்கும்போது, சார்பின் மதிப்பு மீண்டும் மீண்டும் $f(x)$-ன் மதிப்புக்கே திரும்புகிறது. ஆகவே, இஃது ஒரு மீளும் சார்பு அல்லது கால வட்டச் சார்பு எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு : $\sin x$ என்பது 2π காலவட்டம் கொண்ட சார்பாகும்.

$\cos x$ என்பது 2π காலவட்டம் கொண்ட சார்பாகும்.

ஏனெனில்,

$$\sin x = \sin(x+2\pi) = \sin(x+4\pi) \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\cos x = \cos(x+2\pi) = \cos(x+4\pi) \ldots\ldots\ldots\ldots$$

ஆனால் $\tan x$ என்பது π காலவட்டம் கொண்ட சார்பாகும். ஏனெனில், $\tan x = \tan(x+\pi) = \tan(x+2\pi) = \ldots\ldots\ldots$

(viii) சார்பின் சார்புகள் (Function of a function)

$z = f(y)$, $y = \varphi(x)$ என்ற முறையில், ஒரு சார்பின் சார்பை வரையறுக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு : $y = \sin^8 5x$

இங்கு $5x$ என்பது x-ன் சார்பாகும்; $\sin 5x$ என்பது $5 = x$-ன் சார்பாகும், $\sin^8 5x$ என்பது $\sin 5x$-ன் சார்பாகும். $5x = v$; $\sin 5x = \sin v = u$ எனவும் கொண்டால், $y = u^8$ $u = \sin v$; $v = 5x$ என எழுதலாம்.

6. ஒரு மாறியின் எல்லை (Limit of a variable)

x-ன் எண்ணளவை $|x|$ (Modulus) எனக் குறிப்போம். இவ்வாறாக $|-7| = 7$ ஆகும். $|7| = 7$ என்பது தெரிந்ததே.

(i) $x \to l$

x என்னும் மாறியானது

$1{\cdot}9$, $1{\cdot}99$, $1{\cdot}999, \ldots\ldots$ அல்லது $2{\cdot}1$, $2{\cdot}01$, $2{\cdot}001, \ldots\ldots\ldots$ என்பனபோல 2-க்கு வர வர கிட்டியனவாக விளங்கும் வரிசையான மதிப்புகளைப் பெறுமானால், அப்பொழுது x ஆனது 2-ன் மதிப்பை நோக்கிச் செல்வதாகக் கூறுகின்றோம்.

இதனைக் குறியீட்டு முறையில்,

$x \to 2$ என வரைகின்றோம். இங்கு 2 ஐ x-ன் எல்லையாகக் கொள்கிறோம். அத்தகைய நிலையில் $|x-2|$ ஆனது இறுதியாக மிகக் குறைந்த மதிப்புடையதாகும்.

(ii) $x \to \infty$: x என்னும் மாறியானது வரம்பற்றுப் பெருகும் மதிப்புகளை முடிவுறாமல் பெறுமானால், அது முடிவிலியாகிய (infinity) போக்கு அடைவதாகச் சொல்லப்படும். இதனைக் குறியீடு செய்யுங்கால், $x \to \infty$ என வரைவோம்.

(iii) $x \to -\infty$: x என்னும் மாறியானது தொடர்ச்சியான எதிர் மதிப்புகளைப் பெற்று, எண் மானத்தைப் பொறுத்த மட்டில் அதன் மதிப்பு வர வரப் பெரிதும் அதிகரித்துக் கொண்டே முடிவின்றிப் போகுமானுல், x ஆனது $-\infty$ ஐ நோக்கிய போக்குடையதாகுமென்று கூறுவோம். இதனை $x \to -\infty$ எனக் குறியிட்டுக் காட்டலாம்.

∞ **என்பது பற்றி ஒரு குறிப்பு!** $x \to \infty$ என்று கூறுவதைக் கொண்டு, கந்தழி (infinity) என்பது 10^{100} (கூகூல் Googool) என்னும் மாபெரும் எண்ணுகுமென்று கருதக் கூடாது. கந்தழி அல்லது முடிவிலி ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணன்று. சாதாரணமாக சமம் என்னும் கருத்தில் கொள்வதுபோல, $x = \infty$ என்று கொண்டால், அச் சமன்பாடு அர்த்த மற்றதாகும். $x \to \infty$ என்று சொல்லுவது x-ன் மதிப்புப் போகப்போக வரையறை படாமல் பெருகிக் கொண்டே செல்லுகின்றதென்பதே கருத்தாகும். அதாவது இறுதியாக வரம்பு கடந்து வளர்கின்றது என்பதாகும்.

(iv) $x \to 0$: மாறி x-ன் எண் மதிப்பு, மிகச்சிறியதென நம்மால் குறிக்கப்படும் எச் சிறிய நேர் எண்ணுக்கும் குறைவுடையதாக, மாறுபட்டுக் கொண்டே சென்றுல், அது பூச்சியத்தை எல்லையாகக் கொண்டு நெருங்குகிறதெனக் கூறுவோம். இதை $x \to 0$ எனக் குறிப்பிடுவோம்.

7. சார்புகளின் எல்லைகள் (Limits of Functions)

சார்புகளின் மதிப்புகளில் உண்டாகும் மாறுபாடுகளைக் கண்டறிதல் நுண்கணிதத்தின் நோக்கங்களில் ஒன்ருகும். y ஆனது x-ன் சார்பாகுமானுல், x-க்குக் கொடுத்த மதிப்புக்குத்தக y-க்கு பொதுவாக ஒரு மதிப்பு அமையும். எனினும், x ஆனது ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்பைப் பெறுங்காலத்தில், y ஆனது அர்த்த மற்றதாயும், யாதொரு நிலையான மதிப்பைப் பெறமாட்டாததாயும் போவதுண்டு. அந் நிலைமை பின்வருமாற்ருல் புலனுகும்:

பூச்சியத்தால் வகுத்தல்! நாம் வகுத்தல் முறையினைப் பெருக்கல் முறைக்கு எதிர் நிலையுடையதென வரையறை செய்கின்ருேம். அதாவது $\frac{8}{2} = x$ எனின், $2 \times x = 8$ என அமைவதொரு எண் x ஆகுமென்கிருேம். அதாவது $x = 4$.

இவ்வரையறைப்படி, $\frac{3}{0} = x$ எனின்,

$0 \times x = 3$ ஆகும்.

ஆனால் $0 \times x$ எப்பொழுதுமே 0 ஆகும்.

ஆகவே $\frac{3}{0}$ என்றதோர் எண் இல்லையாதல் பெறப்படும்.

இவ்வாறே 'a' என்பது பூச்சியமாகாவிடத்து, $\frac{a}{0}$ என்பதோர் எண் இல்லை என்பது தெளிவு. ...(i)

இனி, தொகுதியும் 0 ஆனால், $\frac{0}{0}$ என்ன என்பது கேள்வி. $\frac{0}{0}$ என்பது y எனின், $0 = y \times 0$ என்னும் நியமத்திற்கு உரியதாக y என்பதோர் எண் உளதாதல் வேண்டுமன்றோ? ஆனால் y பெறும் எல்லா முடிவுள்ள மதிப்புகளுக்கும் இச் சமன்பாடு பொருந்து வதைக் காண்கிறோம்.

ஆகவே $\frac{0}{0}$ என்பது தேரப்பெறுததோர் (Indeterminate) கணியம் ஆகும்.

ஆதலின், கணிதத்துறையில் பூச்சியத்தால் வகுத்தல் அனுமதிக்கப்படுவதில்லை.

மேற்கூறியவற்றான், சில சார்புகள், x பெறும் 0 போன்ற குறிப்பிட்ட மதிப்பையோ, மதிப்புகளையோயொட்டி யாதொரு குறிப்பிட்ட மதிப்பையும் தாம் தர மாட்டாமல் நிற்குமென்று நிச்சயமாகின்றது. அந் நிலைகளில், x ஆனது அக் குறிப்பிட்ட மதிப்பை மிக மிக நெருக்கமாக அணுகும்போது, அச் சார்பு எத்தகைய போக்கு உடையதாகுமெனக் கண்டறிய நாம் விரும்பு கிறோம். அச் சார்பு அப்பொழுது ஏதேனும் வரையறுத்ததொரு மதிப்பெல்லையை அடையக் கூடுமோ எனச் சோதிக்கிறோம்.

பின்வரும் எடுத்துக்காட்டு இக் கருத்தை விளக்குகின்றது.

(1) $\frac{x^2-9}{x-3}$ என்னும் சார்பைக் கருதுவோம்.

$x=3$ ஆகும் மதிப்பைத் தவிர்த்து x பெறும் பிற மதிப்புகளுக் கெல்லாம் இச் சார்பு மதிப்பெய்தும். ஆனால் $x=3$ ஆகும் பொழுது, அச்சார்பு $\frac{0}{0}$ என்னும் வடிவைப் பெறும். இவ் வடிவ நிலையில் அச்

சார்பு தேரப்படாத மதிப்பினதாக நிற்கும். ஆகையால் $x \to 3$ அதாவது x ஆனது 3-க்கு மிகச் சமீபமான மதிப்பைப் பெற்றுக் கொண்டே போகும் போது, $\frac{x^2-9}{x-3}$ என்னும் சார்பின் போக்கை ஆராய்வோம்,

$x \to 3$ ஆக, $(x-3) \to 0$ ஆகும்; ஆனால் நிச பூச்சியம் ஆகாது. ஏனெனில் x-க்கு 3-க்கு நெருக்கமான மதிப்புகளைக் கொடுக்கிறோமே தவிர 3 என்ற மதிப்பைக் கொடுப்பதில்லை. இனி $x \to$ ஆகும் போது $(x-3)$ நிச பூச்சியம் ஆகாததால் (x^2-9) ஐ $(x-3)$ ஆல் வகுக்க,

$$\frac{x^2-9}{x-3} = x+3 \text{ ஆகும். } (x \neq 3)$$

$\therefore$ $x \to 3$ ஆகுமிடத்து, $x+3 \to 6$ ஆகும். மேலும் x-க்குக் கொடுக்கும் மதிப்பைப் போதிய அளவு 3ஐக் கிட்டும்படிச் செய்தால், $\frac{x^2-9}{x-3}$-ன் மதிப்பை 6-லிருந்து எவ்வளவு சிறிய பரிமாணம் வேறுபட்டிருக்க விரும்புகிறோமோ, அவ்வளவுக்கும் குறைவுறச் செய்யலாம்.

$\therefore$ $x \to 3$ ஆகுங்கால், அச் சார்பின் எல்லை மதிப்பு 6 ஆகும். குறியீட்டில், $\underset{x \to 3}{Lt} \frac{x^2-9}{x-3} = 6$ என வடிவுபடுத்தலாம்.

வேறு வழி :

$x = 3+h$ என்றிடுக.

$x \to 3$ ஆனால், $h \to 0$ ஆகும்.

இப்பொழுது $\frac{x^2-9}{x-3} = \frac{(3+h)^2-9}{(3+h)-4} = \frac{6h+h^2}{h} = 6+h.$

(h பூச்சியத்திற்குச் சமமில்லாததால், hஆல் வகுக்க முடிகிறது.)
இனி, $h \to 0$ ஆனால், $6+h \to 6$ ஆகும்.

$$\therefore \underset{x \to 3}{Lt} \frac{x^2-9}{x-3} = 6 \text{ ஆகும்.}$$

மேலும் $\frac{x^2-9}{x-3}$ -க்கும் 6-க்கும் உள்ள வித்தியாசத்தை எவ்வளவு குறைந்த மதிப்புடையதாகவும் செய்யலாம். இதற்கு ஏற்றவாறு h ஆனது 0ஐ அணுக வேண்டியதுதான் தேவை.

குறிப்பு 1 : $x \to 3$ என்றல், x-ன் மதிப்பு 3ஐ மிக நெருங்கி அணுகுகிறது எனப் பொருளாகும். ஆனல் x ஆனது 3 என்னும் மதிப்பைக் கொள்கிறது என்று பொருளல்ல.

குறிப்பு 2 : $x=3$ ஆகுமிடத்து $\frac{x^2-9}{x-3}$ -ன் மதிப்பு தேரப் படாத நிலையிலிருக்கும்பொழுது, $\underset{x \to 3}{Lt} \frac{x^2-9}{x-3}$ -ன் மதிப்பு நன்கு வரையறுக்கப்படுகிறது. நுண் கணிதத்தில் இவ்வித எல்லை மதிப்புகளைக் கணிப்பது ஒரு முக்கிய அம்சமாகும்.

குறிப்பு 3 : $y_1 = \frac{x^2-9}{x-3}$; $y_2 = x+3$ என்ற சார்புகள் x பெறும் எல்லா மதிப்புகளுச்கும் ஒத்த மதிப்பையே பெறுவன வாகும். எனினும் $x=3$ ஆகுமிடத்து y_1-ன் மதிப்பு தேரப்படாத தாகவும், $y_2=6$ ஆகவும் நிற்றலைக் காண்க. $x \to 3$ ஆகும்பொழுது y_1—ன் எல்லை மதிப்பும், y_2-ன் எல்லை மதிப்பும் 6 ஆகும்.

$x=3$ ஆகும்பொழுது y_2-ன் மதிப்பும் 6 எல்லை மதிப்பும் 6 ஆகக் காண்கிறேம்.

இவ்வாறன சார்புகள் 'தொடர்ச்சித் தன்மை உடைய சார்புகள்' எனப்படும் (Continuous functions). இதைப் பின்பு விவரமாக ஆராய்வோம்.

2. $\underset{x \to \infty}{Lt} \frac{1}{x}$ ஐக் காண்க.

x ஆனது அளவின்றி நேர் முழு எண்கள் ஊடே அதிகரிப்ப தாகுக. x அதிகரிக்க, அதிகரிக்கச் சார்பின் மதிப்புக் குறைந்து கொண்டே போகிறது. மேலும் சார்பின் மதிப்பைப் பூச்சியத்தி லிருந்து எவ்வளவு குறைந்த பட்ச பரிமாண மேனும் வித்தியாசப் பட்டிருக்கச் செய்யலாம். இதற்கு ஏற்றவாறு x-ன் மதிப்பை எடுத்துக்கொள்ளலாம்.

ஆகவே, $\underset{x \to \infty}{Lt} \frac{1}{x} = 0$

3. முடிவிலி எல்லைகள் (Infinite limits)

(i) $\underset{x \to 0}{Lt} \frac{1}{x^2}$ ஐக் காண்க.

$x=0$ ஆகுமிடத்து, சார்பு வரையறுக்கப்படாதது. ஆகவே $x \to 0$ ஆகுமிடத்து, சார்பின் போக்கை அறிவோம்.

x-ன் மதிப்பைப் போதிய அளவுக்குச் சிறிதாக்க, $\frac{1}{x^2}$ -ன் மதிப்பை எவ்வளவு பெரிய எண் n ஆனாலும் அதை விடப் பெரிதாகும்படிச் செய்யலாம்.

இதை $\underset{x \to 0}{Lt} \frac{1}{x^2} \to \infty$ என எழுதுகிறோம்.

(ii) $\underset{x \to 0}{Lt} \frac{1}{x}$ ஐக் காண்க.

$x=0$ ஆகும்போது சார்பு விவரணத்திற்கு உட்பட்டதில்லை ஆகவே $x \to 0$ ஆகும்போது சார்பின் போக்கைக் கவனிப்போம். x வரவரச் சிறியதாகி நேர் மதிப்புகளூடே பூச்சியத்தை அணுகுமானால், $\frac{1}{x}$ ஆனது அளவின்றி அதிகரிப்பதாகும். அந் நிலையில் அது எவ்வளவு பெரிதென நம்மால் முற்படக் கருதப்பட்டதோர் எண்ணுள்ளதோ, அவ் வெண்ணினும் பெரிதாக விளங்கும்.

∴ நேர் எண்களூடே $x \to 0$ ஆகும்போது, $\underset{x \to 0}{Lt} \frac{1}{x} \to +\infty$ ஆனால், எதிர் எண்களூடே $x \to 0$ ஆகும்பொழுது

$$\underset{x \to 0}{Lt} \frac{1}{x} \to -\infty \text{ ஆகும்.}$$

ஆகவே மேற் காட்டிய சார்பு ஒரு முடிவான மதிப்பையோ அல்லது எல்லையையோ கொண்டிராத சார்புக்கு எடுத்துக்காட்டாகும்.

எல்லை வரையறை : $\underset{x \to a}{Lt} f(x) = l$ என்பதை விளக்கம் செய்து வரையறை காண்போம்.

x ஆனது 'a' ஐமிக நெருக்கமாக அணுகும்போது $f(x)$ ஆனது 'l' ஐ அணுகும் என்பது மேற்படி குறியீட்டின் பொருளாகும்.

மேலும் $f(x)$-க்கும் l-க்கும் உள்ள வேறுபாட்டின் எண்ணளவு கொடுக்கப்பட்ட எச்சிறிய எண்ணை விடவும் குறைவாகும்படி $f(x)$ ஐ l நோக்கி அணுகச் செய்யலாம். இதற்கு ஏற்றவாறு xஐ aநோக்கி அணுகச் செய்ய முடியும். (அதாவது) x-க்கும் a-க்கும்

உள்ள வேறுபாட்டின் எண்ணளவை வேண்டிய அளவு சிறிதாக்க முடியும்.

மேற்கூறிய கருத்தைக் கணித மொழியில் பின்வருமாறு கூறலாம்:

'ϵ எத்தகைய சிறு எண்ணாயினும், $|f(x)-l| < \epsilon$ என்றாகும்படி, $|x-a| < \delta$ ஆக, δ என்னும் சிறு எண் காண முடியும்' என்பதே $\underset{x\to a}{Lt}\ f(x) = l$ என்பதன் வரையறை ஆகும்.

குறிப்பு : ϵ (எப்சிலான்) δ; என்பன கிரேக்க எழுத்துகளாகும்.

8. தொடருடைச் சார்புகளும், தொடரிலாச் சார்புகளும் (Continuous and Discontinuous functions)

சார்பொன்றின் வளைவரை தொடர்ச்சியுடையதாக இருப்பின் அது தொடருடைச் சார்பு (Continuous function) எனவும், தொடர்ச்சியற்றதாக இருப்பின் அது தொடரிலாச் சார்பு (Discontinuous function) எனவும் பெயர் பெறும்.

தொடருடைச் சார்புகள்: $f(x)$ என்னும் சார்பு $x=a$ என்னுமிடத்தில் தொடர்ச்சியுள்ளதாகக் காணப்பட்டால்,

(i) $x=a$ ஆனால், $f(x)$-க்கு ஒரு முடிவுள்ள மதிப்பு உண்டு.

(ii) a-க்கு அருகில் உள்ள எல்லா x-ன் மதிப்புகளுக்கும் $f(x)$ வரையறுக்கப்பட வேண்டும்.

(iii) இரு புறங்களிலிருந்து x ஆனது a ஐ நெருங்கும்போது, (x) ஆனது $f(a)$ ஐ அணுகும்.

(அதாவது) $\underset{x\to a}{Lt}\ f(x) = f(a)$

இம்மூன்று பண்புகளும் தொடர்ச்சிக்கு அடிப்படையாகும் x^n (n நேர் முழு எண்), $\sin x$, $\cos x$ போன்ற அடிப்படைச் சார்புகள் எல்லாம் தொடர்ச்சி நிலையுடையனவாகும்.

தொடர்ச்சியுறுச் சார்புகள் (Discontinuous functions)

(i) ஒரு சார்பானது $x=a$ என்னுமிடத்தில் நன்கு விவரணம் பெறுதாயினும்,

(ii) ஒரு சார்பினது மதிப்பானது திடீரென மாறுபடுமாயினும்,

(iii) $x \rightarrow a$ ஆகுங்கால், சார்பானது கந்தழி நிலையடையுமாயினும்,

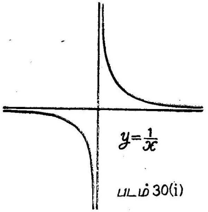
(iv) $x = a$ ஆகும்பொழுது $f(x)$-ன் மதிப்பும், $x \rightarrow a$ ஆகும்பொழுது சார்பு பெறும் எல்லை மதிப்பும் சமமாகாத பொழுதும், ஒரு சார்பானது தொடர்ச்சியுருச் சார்பெனச் சொல்லப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு

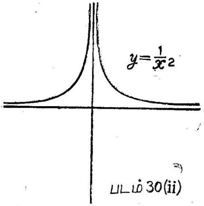
(i) $y = \tan x$ ஆனது $x = \frac{\pi}{2}$ என்னுமிடத்தில் தொடர்ச்சியற்றதாகும்,

கோண கணிதப் பகுதில், tan x–ன் வரை படத்தைக் காண்க.

$x = \frac{\pi}{2}$ என்னுமிடத்தில், y வரையறுக்கப்படவில்லை. மேலும், x ஆனது $\frac{\pi}{2}$ என்னும் மதிப்பினூடே அதிகரிக்குங்கால், y ஆனது திடீரென்று $+\infty$ யிலிருந்து $-\infty$-க்கு மாறுவதால், $x = \frac{\pi}{2}$ என்னுமிடத்தில் வரைபடமானது பெரும் பிளவு பெறுவதைப் பார்க்கின்றோம்.



படம் 30(i)



படம் 30(ii)

(ii) $x = 0$ என்னுமிடத்தில் $y = \frac{1}{x}$ தொடர்ச்சியற்றதாகக் காணப்படுகிறது.

(iii) $y = \frac{1}{x^2}$ என்பதும் $x=0$ என்னுமிடத்தில் தொடர்ச்சி அறுபட்டிருக்கக் காண்கிறோம்.

9. எல்லை பற்றிய சில தேற்றங்கள்

(i) x என்ற மாறியானது, y, z என்னும் வேறிரு மாறிகளுக்கு இடைபட்டிருக்குங்கால், அவ்விரு மாறிகளும் a என்னும் பொது வரம்பை அனுகுமானுல் x-ம் a ஐயே தனக்குரிய எல்லை மதிப்பாகப் பெறும்.

(ii) u, v முதலியன x-ன் சார்புகளானுல்,

$$\underset{x \to a}{Lt}(u \pm v) = \underset{x \to a}{Lt}\, u \pm \underset{x \to a}{Lt}\, v$$ ஆகும்

இது போலவே குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கையான சார்புகளுக்கெல்லாம் இது பொருந்தும்

(iii) $$\underset{x \to a}{Lt}(u\,v) = \underset{x \to a}{Lt}\, u\ \underset{x \to a}{Lt}\, v$$

கிளை (1) : C என்பது மாறிலி ஆனுல்,

$$\underset{x \to a}{Lt}(c\,u) = c\,\underset{x \to a}{Lt}\, u$$

கிளை (2) : $$\underset{x \to a}{Lt}(C_1 u_1 + C_2 u_2 + \ldots\ldots\ldots)$$

$$= C_1 \underset{x \to a}{Lt} - u_1 + C_2 \underset{x \to a}{Lt}\, u_2 + \ldots\ldots\ldots$$

(iv) $$\underset{x \to a}{Lt}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{\underset{x \to a}{Lt}\, u}{\underset{x \to a}{Lt}\, v}$$ ($\underset{x \to a}{Lt}\, v \neq 0$ எனின்)

கிளை 1. $$\underset{x \to a}{Lt}\left(\frac{1}{v}\right) = \frac{1}{\underset{x \to a}{Lt}\, v}$$ [$\underset{x \to a}{Lt}\, v \neq 0$ எனின்]

10. இப் பிரிவில், நாம் முக்கியமான 'நியம எல்லைகள்' (Standard limits) எனக் கருதப்படும் மூன்று எல்லைகளைக் கவனிப்போம்.

நியம எல்லை I.

$$\underset{x \to a}{Lt} \frac{x^n - a^n}{x - a} = n\, a^{n-1} \text{ என நிறுவுக.}$$

n ஒரு நேர் முழு எண் எனக் கொள்வோம்

a நீங்க ஏனைய மதிப்புகளை x பெறுமிடத்து, கொடுத்த கோவை அடையும் மதிப்பைச் சார்ந்து அதன் எல்லை மதிப்புள்ளதாகும். அப்பொழுது $(x-a)$ பூச்சியமாகாமையால், அதனால் வகுக்கலாம்.

$$\therefore \frac{x^n - a^n}{x - a} = x^{n-1} + x^{n-2}\, a + x^{n-3}\, a^2 + x^{n-4}\, a^3 + \dots\dots\dots + a^{n-1}$$

எனக் கிடைக்கும்,

$(x-a)$ எவ்வளவு சிறியதாயினும், பூச்சியமாக மட்டும் இல்லாத பொழுது இவ்வகுத்தல் ஏற்பதாகும்.

வலது புறத்தில் n உறுப்புகள் உள்ளன. $x \to a$ ஆகும் பொழுது, ஒவ்வோர் உறுப்பும் a^{n-1} ஐ எல்லையாக அடையும்.

$$\therefore \underset{x \to a}{Lt} \frac{x^n - a^n}{x - a} = n\, a^{n-1} \text{ ஆகும்.}$$

[குறிப்பு : இத் தேற்றமானது n நேர் முழு எண்ணாகுங்கால் நிறுவப்பட்டாலும், n-ன் எல்லா விகிதமுறு மதிப்புகளுக்கும் உண்மையாகும்.]

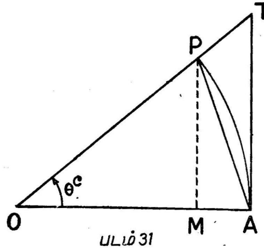
நியம எல்லை II.

$$\text{(i)} \quad \underset{\theta \to 0}{Lt} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1 \quad (\theta \text{ ரேடியன்களில் அளக்கப்படின்})$$

AOP என்பது θ^c அளவுள்ள குறுங்கோணமாகட்டும். O ஐ மையமாகக் கொண்டு ஏதேனும் வசதியான ஆரமுடையதொரு வட்டத்தை வரைக. அந்த வட்டத்தின் வில் கோணத்தின் கரங்களை A, P என்னுமிடங்களில் வெட்டுவதாகக் கொள்க.

AP ஐச் சேர்க்க வரையப்பட்ட வட்டத்திற்கு A என்னுமிடத்தில், AT என்னும் தொடு கோடுவரைக. இத் தொடுகோடு OP ஐ T என்னுமிடத்தில் சந்திக்கட்டும்.

இப்பொழுது, $\triangle OAT >$ வட்ட கோணப்பகுதி $OAP > \triangle OAP$ என்பது விளங்கும்.



படம் 31

அதாவது $\frac{1}{2}\,OA \cdot AT > \frac{1}{2}\,OA^2 \cdot \theta > \frac{1}{2}\,OA \cdot MP$

முற்றிலும் $\frac{1}{2}OA^2$ஆல் வகுக்க,

$$\frac{AT}{OA} > \theta > \frac{MP}{OP}$$ எனக் கிடைக்கும்.

அதாவது $\tan\theta > \theta > \sin\theta$

நேர் பரிமாணமாகிய $\sin\theta$ ஆல் வகுக்க ($\sin\theta$ குறுங் கோணத்தின் தகவு ஆதலால்)

$$\frac{1}{\cos\theta} > \frac{\theta}{\sin\theta} > 1$$ எனப் பெறுகின்றோம்.

$$\therefore \quad \cos\theta > \frac{\sin\theta}{\theta} < 1$$ (தலை கீழாக்க)

அதாவது θ குறுங்கோணமாகி, ஆரையன்களால் அளக்கப் படின், $\frac{\sin\theta}{\theta}$ ஆனது $\cos\theta$-க்கும் 1-க்கு இடைபட்டு நிற்கும்.

இப்பொழுது $\theta \to 0$ ஆகட்டும், எனின் $\cos\theta \to 1$ இந் நிலையில் $\cos\theta$-க்கும் இடைப்பட்டு நிற்கும்.

$\frac{\sin\theta}{\theta}$ ன் மதிப்பும் 1 ஐ நெருங்குவதாகும் [பிரிவு 9 (i)]

$$\therefore \underset{\theta\to 0}{Lt} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$ (θ ஆரையன்களாக அளவு பெறுமிடத்து)

குறிப்பு : θ பாகைகளால் குறிக்கப்படின்,

$$\underset{\theta\to 0}{Lt} \frac{\sin\theta}{\theta} = \frac{\pi}{180}$$

ஏனெனில், $$\frac{\sin\theta^\circ}{\theta} = \frac{\sin\frac{\pi\,\theta^c}{180}}{\theta} = \frac{\sin\frac{\pi\,\theta^c}{180}}{\frac{\pi}{180}\theta} \times \frac{\pi}{180}$$

இனி $\theta\to 0$ ஆகும் பொழுது $\frac{\pi\,\theta}{180}\to 0$ ஆகும்.

$$\therefore \underset{\theta\to 0}{Lt} \frac{\sin\theta^\circ}{\theta} = 1\times\frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{180}$$

நியம எல்லை II

(ii) θ ஆரையன்களில் அளக்கப்படின்,

$\underset{\theta\to 0}{Lt} \frac{\tan\theta}{\theta} = 1$ என நிறுவுக.

மேற்கண்ட தேற்றத்தில்,

$\tan\theta > \theta > \sin\theta$ ஆதல் பெற்றோம். நேர் பரிமாணமாகிய $\tan\theta$ ஆல் வகுக்க,

$$1 > \frac{\theta}{\tan\theta} > \cos\theta$$ எனப் பெறுகின்றோம்.

தலை கீழ்ப்படுத்த,

$$1 < \frac{\tan\theta}{\theta} < \frac{1}{\cos\theta}$$ ஆகும்.

$\theta \to 0$ ஆக, $\frac{1}{\cos\theta} \to 1$ ஆகும்.

ஆகவே 1-க்கும், $\frac{1}{\cos\theta}$ -க்கும் இடைப்பட்டிருக்கும்

$\frac{\tan\theta}{\theta}$ வும் $\to 1$

$$\therefore \underset{\theta \to 0}{Lt} \frac{\tan\theta}{\theta} = 1$$ (θ ஆரையன்களில் அளக்கப்படின்)

[குறிப்பு 1 : $\underset{\theta \to 0}{Lt} \quad \frac{\tan\theta^{\circ}}{\theta} = \frac{\pi}{180}$

குறிப்பு 2 : நியம எல்லைகள் II-லிருந்து, θ ஆனது மிகச் சிறிய மதிப்புகளைப் பெறுமிடத்து, $\sin\theta$, $\tan\theta$ ஒவ்வொன்றும் தோராயமாக θ-க்குச் சமம் எனக் கொள்ளலாம்.]

நியம எல்லை III.

$$\underset{x \to 0}{Lt} \quad \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$e^x - 1 = y$ எனக் கொள்க. இதனால் $x = \log(1+y)$ $x \to 0$ ஆக, y-ம் 0 ஐ அணுகும்.

$$\therefore \underset{x \to 0}{Lt} \frac{e^x - 1}{x} = \underset{y \to 0}{Lt} \frac{y}{\log(1+y)}$$

$$= \underset{y \to 0}{Lt} \frac{1}{\log(1+y)^{1/y}}$$

$$= \frac{1}{\log \underset{y \to 0}{Lt} (1+y)^{1/y}}$$

$$= \frac{1}{\log e} \left[\because \text{ இயற் கணிதத்தில் } \underset{x \to 0}{Lt} (1+x)^{1/x} = e \right]$$

$$= 1$$

கிளைத் தேற்றம் :

$$\underset{x\to 0}{Lt}\ \frac{1}{x}\log(1+x) = 1$$

$$\underset{x\to 0}{Lt}\ \frac{1}{x}\log_e(1+x) = \underset{x\to 0}{Lt}\ \log_e(1+x)^{1/x}$$

$$= \log_e\left[\underset{x\to 0}{Lt}\ (1+x)^{1/x}\right]$$

$$= \log_e e$$

$$= 1$$

11. விளக்க மாதிரிகள்

மாதிரி 1 : $\underset{x\to -2}{Lt}\ \dfrac{x^2-4}{x^2-x-6}$ ஐக் காண்க.

$\dfrac{x^2-4}{x^2-x-6}$ -ல் $x = -2$ எனப் பிரதியிட, $\dfrac{0}{0}$ எனத் தேரப் பெருத மதிப்பைப் பெறுகிறோம்.

$$\frac{x^2-4}{x^2-x-6} = \frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)(x-3)} \text{ ஆகும்.}$$

$x\to -2$ ஆகும் பொழுது, $x+2\to 0$ ஆகும். ஆனல் 0 ஆவ வதில்லை.

ஆகையால் $(x+2)$ ஆல் வகுக்க,

கொடுத்த சார்பு $= \dfrac{x-2}{x-3}$

இதில் $x\to -2$ ஆகும் பொழுது, கொடுத்த சார்பு

$\dfrac{-2-2}{-2-3} = \dfrac{4}{5}$ என்னும் எல்லையைப் பெறும்.

$$\therefore \underset{x\to -2}{Lt}\ \frac{x^2-4}{x^2-x-6} = \frac{4}{5}$$

மறுவழி : $x=-2+h,\ (h\to 0)$ என பிரதியிட்டுக் காண்க.

மாதிரி 2 : $\underset{x\to 0}{Lt} \dfrac{1-\cos x}{x \sin x}$ ஐக் காண்க.

$$\frac{1-\cos x}{x\sin x} = \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x\cdot 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{\tan\frac{x}{2}}{x} = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\tan\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}$$

இனி $x\to 0$ ஆகும்போது, $\dfrac{x}{2}\to 0$

$$\therefore \underset{x\to 0}{Lt}\frac{1-\cos x}{x\sin x} = \underset{x/2\to 0}{Lt}\frac{1}{2}\cdot\frac{\tan x/2}{x/2} = \tfrac{1}{2}\times 1 = \tfrac{1}{2}$$

மாதிரி 3 : $\underset{n\to\infty}{Lt} \dfrac{4n^2+3n-5}{5n^3-2n+7}$

தொகுதியையும், பகுதியையும் n^3 ஆல் வகுக்க

$$\frac{4n^2+3n-5}{5n^3-2n+7} = \frac{\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}-\frac{5}{n^3}}{5-\frac{2}{n^2}+\frac{7}{n^3}}$$

இனி $n\to\infty$ ஆகும்பொழுது, $\dfrac{1}{n}$, $\dfrac{1}{n^2}$, $\dfrac{1}{n^3}$ ஆகியவை 0ஐ எல்லையாகக் கொள்ளும்.

$$\therefore \underset{n\to\infty}{Lt}\frac{4x^2+3n-5}{5n^3-2n+7} = \underset{n\to\infty}{Lt}\frac{\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}-\frac{5}{n^3}}{5-\frac{2}{n^2}+\frac{7}{n^3}} = \frac{0}{5} = 0$$

பயிற்சி 1-1.

கீழ்க்காணும் எல்லைகளைக் காண்க :

(i) $\underset{x\to\infty}{Lt}\dfrac{2x+5}{3x-4}$ [விடை : $\dfrac{2}{3}$

(ii) $\underset{x\to\infty}{Lt}\dfrac{ax^2+bx+c}{lx^2+mx+n}$ [விடை : $\dfrac{a}{l}$

(iii) $\underset{x\to 0}{Lt}\dfrac{5x-2}{3x-4}$ [விடை : $\dfrac{1}{2}$]

(iv) $\underset{x\to 2}{Lt}\ \dfrac{3x-7}{2x+5}$ [விடை : $\frac{1}{9}$]

(v) $\underset{x\to 0}{Lt}\ \dfrac{(3+x)^2-9}{x}$ [விடை : 6]

(vi) $\underset{x\to a}{Lt}\ \dfrac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$ [விடை : $\frac{m}{n}a^{m-n}$]

(vii) $\underset{x\to 1}{Lt}\ \dfrac{x-1}{x^2+2x-3}$ [விடை : $\frac{1}{4}$]

(viii) $\underset{x\to 2}{Lt}\ \dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x-10}$ [விடை : $\frac{1}{7}$]

(ix) $\underset{\theta\to 0}{Lt}\ \dfrac{\sin m\,\theta}{\theta}$ [விடை : m]

(x) $\underset{\theta\to 0}{Lt}\ \dfrac{\sin a\,\theta}{\tan b\,\theta}$ [விடை : a/b]

(xi) $\underset{\theta\to 0}{Lt}\ \dfrac{1-\cos\theta}{\theta}$ [விடை : 0]

(xii) $\underset{x\to 0}{Lt}\ \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ [விடை : $\frac{1}{2}$]

(xiii) $\underset{x\to 0}{Lt}\ \dfrac{\cos 2x}{\cos x}$ [விடை : 1]

(xiv) $\underset{\theta\to 0}{Lt}\ \dfrac{\sin 5\theta-\sin 3\theta}{\sin 6\theta-\sin 2\theta}$ [விடை : $\frac{1}{2}$]

(xv) $\underset{x\to \frac{\pi}{2}}{Lt}\ \dfrac{\cos x}{\frac{\pi}{2}-x}$ [விடை : 1]

12. சார்புகளின் வரைபடங்கள்

ஒரு சார்பினது மாறுபாடு பற்றிய தன்மையை ஆராய்தலே நுண்கணிதத்தின் நோக்கமாகும். ஒரு சார்பினது முக்கியமான அம்சங்களை ஆராய்வதற்கு ஒரு வழி வரைபட முறையாகும்.

$y = f(x)$ எனக் கொள்வோம். இதில் x-க்கு மதிப்புகள் கொடுத்துச் சமன்பாட்டிற்கு இசைந்த y-ன் மதிப்புகளை ஆயத் தொலைகளாகக் கொண்டுள்ள புள்ளிகள் இயங்கும் பாதையே சார்பின் வரைபடமாகும்.

பயிற்சி 1-2.

பின்வரும் சார்புகளுடைய வரைபடங்கள் வரைக:

(i) $3+5x-4x^2$ (ii) $2x^2-5x-7$ (iii) $y^2=4x$

(iv) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ (v) $\sin x$ (vi) $\cos x$ (vii) $\tan x$

(viii) $y=\frac{1}{x}$ (ix) $y=\frac{1}{x^2}$

2. வகையிடல்
(Differentiation)

1. ஒரு சார்பினது மாறுவீதம் (Rate of change of a function)

நுண் கணிதத்தில் ஒரு சார்பினது மாறுவீதம் பற்றிய கருத் தானது அடிப்படை முக்கியத்துவம் பெற்றிருக்கிறது. அதாவது சாராமாறி பெறுகின்ற மதிப்பை யொட்டிச் சார்பானது மாறு படும் விதத்தைக் காண்போம்.

ஒரு சார்பினது மாறு வீதத்தை விவரணம் செய்வோம். நாம் சென்னையிலிருந்து 159 கிலோ மீட்டர் தொலைவிலுள்ள விழுப்புரம் என்னும் ஊருக்கு இரயில் மார்க்கமாக 3 மணி நேரத்தில் பயணம் செய்து சேருவதாகக் கருதுவோம். அப்பொழுது சராசரி வேக வீதம் மணிக்கு 53 கிலோ மீட்டர் ஆகும் எனச் சொல்லுகின்றோம். ஆனால் இரயில் வண்டியானது சில சமயங்களில் இச் சராசரி வேகத் திற்கு அதிகமாகவும், சில சமயம் குறைவாகவும், மற்றும் இடை யிடையே நிலையங்களில் நின்றும் செல்லுவதனைக் காண்கின்றோம். ஆதலின், ஒரு கால இடை வெளியில் கருதப்படும் சராசரி வேக மென்பது கற்பனையெண்ணே யாகும். ஏனெனில், அது உண்மை யோடு ஒத்திருக்கவில்லை. இதே நியாயமானது மாறுபடும் எந்த பரிமாணத்திற்கும் ஏற்புடையதாகும். நவீன விஞ்ஞான, பொறி யியல் முறைகளில், குறிப்பிட்ட கணத்தில் மாறுவீதம் காண்பதே தேவைப்படுகின்றது.

2. குறிப்பிட்ட கணத்தில் மாறு வீதத்தைக் கணக்கிடும் முறையைப் பின்வரும் எடுத்துக்காட்டால் விளக்குவோம்.

ஒரு பொருளானது ஓய்வு நிலையிலிருந்து விழுமானால் எறியுமிடத் திற்குக் கீழே அதன் தூரமானது $s=16t^2$ என்னும் சூத்திரத்தால்

கொடுக்கப்படுகின்றது. யாதேனுமொரு கணத்தில் அவ்விழு பொருளி னுடைய வேகத்தைக் காண்க.

ஆரம்பத்திலிருந்து t நேரத்தில்
பொருளின் தூரம் $s=16t^2$ ...(i)

h மிகச் சிறிய பரிமாணம் ஆகுமிடத்து, $(t+h)$ நேரத்தில், s ஆனது $s+k$க்-கு அதிகரித்திருந்தால், அப்பொழுது k ஆனது h என்னும் மிகக் குறுகிய காலத்தில் அப் பொருள் மேலும் விழுந்த மிகச் சிறிய தூரத்தை யுணர்த்தும்.

இதனல் $\frac{k}{h}$ என்பது அக் குறுகிய கால இடை வெளியில் நிகழ்ந்த சராசரி வேகமாகும்.

இதனேடு $s+k=16\ (t+h)^2$ ...(ii)

கழித்தல் முறையால், $k=16\ (t+h)^2-16\ t^2=16\ (2\ th+h^2)$

$\therefore$ t யிலிருந்து $t+h$ நேரம் கழிந்த மிகக் குறுகிய கால இடை வெளியில் சராசரி வேகமானது.

$$\frac{k}{h} = \frac{16\ (2\ t\ h+h^2)}{h} = 32\ t+16\ h \text{ ஆகும்.}$$

இது t கணத்தில் நிகழ்ந்த வேகத்தைக் குறிக்க, h என்பதி னினும் சிறிய கால இடை வெளியைக் கொள்ளுதல் வேண்டும். வேகம் கணக்கிடப்பட்ட இடைவெளி எவ்வளவுக் கெவ்வளவு சிறியதாகுமோ, அதற்கேற்ப நாம் பெறும் முடிவானது t என்னும் அக் கணத்தில் நிகழ்ந்த உண்மை வேகத்தை மிக நுணுகிய நிலையில் அறிவிப்பதாகும்.

ஆகவே மிகவும் சரியான முடிவைப் பெறுவதற்குக் கொடுத்த t என்னும் கணத்தில் தொடங்கி h என்னும் சிறிய கால இடை வெளியில் கணக்கிட்ட சராசரி வேகமானது $\frac{k}{h}$ என்பது, h என் னும் கால இடைவெளி பூச்சியத்தை நெருங்கும் நிலைமைக்கண் ஓர் எல்லை மதிப்பைப் பெற்றல், அதுவே அக் கணத்தில் நிகழும் வேகமாகும்.

$$\therefore\ t \text{ என்னும் கணத்தில் வேகம்} = \underset{h\to 0}{Lt}\ \frac{k}{h}$$

$$= \underset{h\to 0}{Lt}\ (32\ t+16\ h)=32\ t$$

3. நுண்கணிதத்தில், ஒரு சார்பினது மாறுவீதம் பற்றிய கருத்தானது அடிப்படை முக்கியத்துவம் பெற்றிருப்பதால், நாம் அதற்கு ஒரு பெயரைக் கொடுத்து, அதைப் பெறுதற்குரிய செய்முறையைப் பொதுப்படையாகக் கூறுவோம். அதே சமயத்தில், இதற்குப் பயன்படுத்தப்படும் சிறப்பான குறியீட்டு முறைகளையும் விளக்குவோம்.

4. குறியீட்டு முறை y ஆனது x-ன் சார்பாகட்டும். x-ல் உண்டாகும் மாறுபாட்டிற்கு ஏற்ப y-லும் மாறுபாடு ஏற்படும். ஒவ்வொரு மாறியிலும் ஏற்படும் மிக நுண்ணிய மாறுபாட்டை அதிகரிப்பு (increment) அல்லது ஏற்றம் என வழங்குவோம்.

x-ல் நேரெண்ணுகவோ அல்லது எதிரெண்ணுகவோ ஏற்படும் அதிகரிப்பை δx அல்லது Δx அல்லது h என்று குறிப்பிடப்படும். அதையொட்டி y-ல் ஏற்படும் அதிகரிப்பானது δy அல்லது Δy அல்லது k என முறையே குறிப்பிடப்படும்.

[குறிப்பு : δx எனின், $\delta \times x$ எனப் பொருள் படாது. δx என்ற குறியீட்டைப் பிரிக்கக் கூடாது. அது x-ல் கண்ட மிக நுண்ணிய மாறுபாட்டைக் குறிக்கும்.]

5. இனி எல்லை (limit)க் கருத்தைப் பயன் கொண்டு, ஒரு சார்பினது மாறுவீதத்தை வரையறை செய்வோம்.

வகைக் கெழு (Differential Coefficient)

$y=f(x)$ என்பது x-ன் தொடர்ச்சியான சார்பு ஆகட்டும். x ஆனது δx என்னும் மிக நுண்ணிய அதிகரிப்பைப் பெறுமிடத்து அதற்குத்தக y பெறும் அதிகரிப்பு δy ஆகட்டும்.

பின்னர் $y+\delta y=f(x+\delta x)$

அப்பொழுது, $\delta y=f(x+\delta x)-f(x)$ ஆகும்,

$$\therefore \quad \frac{\delta y}{\delta x}=\frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x} \text{ ஆகும்.} \qquad \ldots(\text{i})$$

இவ்விகிதம், x-லிருந்து $x+\delta x$ வரையிலுள்ள இடைவெளியில் சார்பானது பெறும் சராசரி மாற்றத்தைக் குறிப்பிடுவதாகும்.

x என்னுமிடத்தில் சார்பினது மாறு வீதத்தைக் காண, மேலே (i)-ல் கிட்டியபலன், $\delta x \to 0$ ஆகும் போது ஏதேனும் ஓர் எல்லை

யைச் சாருகிறதா எனக் கணிக்க வேண்டும். இந்த எல்லேயே, சார்பின் மாறு வீதத்தை x என்னும் தருணத்தில் கொடுக்கிறது.

இவ்வெல்லேயானது வகைக்கெழு அல்லது வகையீட்டுக் கெழு அல்லது வகையீட்டுக் குணகம் (Differential coefficient) அல்லது x ஐப் பொறுத்த வழிச் சமன்பாடு (Derived function) எனப்படும். இதனே $\frac{dy}{dx}$ என்னும் குறியீட்டால் குறிக்கின்றோம்.

ஆகவே, x ஐப் பொறுத்து y-ன் வகைக்கெழு மாறுவீதம் (Differential coefficient of y. w. r. t. x)

$$= \frac{dy}{dx} = \underset{\delta x \to 0}{Lt} \frac{\delta y}{\delta x} \quad \underset{\delta x \to 0}{Lt} \frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x}$$

வகைக்கெழுவைப் பெறும் செய்முறையானது வகையிடல் (Differentiation) எனப்படும்.

x ஐப் பொறுத்த y யினது வகைக்கெழுவைக் கீழ்க்கண்டவாறு வேறு வடிவங்களிலும் எழுதப்படும்.

$$\frac{dy}{dx} = \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$= \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$\frac{dy}{dx}$-ன் பிற வடிவக் குறிப்புகளாவன :

$\frac{d}{dx} y$; Dy; $D_x y$; $\frac{d f(x)}{dx}$, $\frac{df}{dx}$, $f'(x)$, y', y என்பனவாம்.

[குறிப்பு : $\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x}$ என பார்த்தோம்.

$\delta x \to 0$ ஆகும் பொழுது, இதன் எல்லேயைக் காண வேண்டும்.

இதைக் காண நாம் $\delta x = 0$ என்று இடுவதில்லே. ஏனெனில், அப்பொழுது $\delta y = 0$ ஆகும். அந் நிலேயில் $\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{0}{0}$ என நின்று தேரப்படாத தொன்றுகிவிடும். மேலும், இப்படிச் செய்ய

வேண்டிய தேவையுமில்லை. ஏனெனில், δx ஆனது 0ஐ அணுகும் பொழுது எல்லை மதிப்பைக் கணிக்க வேண்டும். சார்புக்கு $\delta x=0$ ஆகும் பொழுது என்ன ஆகின்றது என்பதல்ல நமது பிரச்சினை.

இனி, $\delta x \to 0$ அணுகுங்கால், δy-ம் பூச்சியத்தை அணுகும். ஆனால் இரு மறைவுறும் பரிமாணங்களின் விகிதம் ஒரு குறிப்பிட்ட எல்லையை அடையக் கூடும் எனப் பார்த்திருக்கிறோம். இந்த எல்லை மதிப்பு நிலையுள்ளதாயின், அது சார்பின் மாறுவீதத்தை வரையறை செய்யும்.]

6. நியமச் சார்புகளின் வகையீடு (Differentiation of Standard Forms)

(i) x^n-ன் வகைக்கெழு காணல்

$y=x^n$ ஆகட்டும். x ஆனது δx ஏற்றம் பெற, அதற்கு ஏற்ப y ஆனது δy ஏற்றம் பெறுவதாக. அப்பொழுது

$$y+\delta y = (x+\delta x)^n \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore \quad \delta y = (x+\delta x)^n - x^n$$

$$\therefore \quad \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{(x+\delta x)^n - x^n}{\delta x} = \frac{(x+\delta x)^n - x^n}{(x+\delta x)-x}$$

$$\therefore \quad \underset{\delta x \to 0}{Lt} \frac{\delta y}{\delta x} = \underset{\delta x \to 0}{Lt} \frac{(x+\delta x)^n - x^n}{(x+\delta x)-x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \underset{(x+\delta x) \to x}{Lt} \frac{(x+\delta x)^n - x^n}{(x+\delta x)-x} = nx^{n-1}$$

... [நியம எல்லை I]

$$\text{அதாவது } \frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

[குறிப்பு 1 : இச் சூத்திரமானது n-ன் எல்லா விகிதமுறு மதிப்புகளுக்கும் (Rational values of n) உண்மையாகும்.

குறிப்பு 2 : x ஐச் சார்ந்து x-ன் வகைக்கெழு 1 ஆகும்.

,, ,, x^0-ன் ,, 0 ஆகும்

,, ,, $\frac{1}{x}$-ன் ,, $-\frac{1}{x^2}$,,

,, ,, $\frac{1}{x^2}$-ன் ,, $-\frac{2}{x^3}$,,

குறிப்பு 3 : ஒரு மாறிலியின் வகைக் கெழு பூச்சியம்

$y = c$ என்ற மாறிலியானல், y-ன் மதிப்பு xஐச் சார்ந்ததல்ல.

$y+\delta y=c$

எனவே $\delta y=0$; $\frac{\delta y}{\delta x} = 0$ ஆகும்.

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \underset{\delta x \to 0}{Lt}\ 0 = 0 \quad \therefore \quad \frac{d(c)}{dx} = 0$$

(ii) sin x-ன் வகைக்கெழு காணல். (x ஆரையன்களில் அளவிடப்பட்டுள்ளது)

$$y = \sin x \text{ எனக் கொள்க.}$$

பின்னர் $y+\delta y = \sin(x+\delta x)$

$$\therefore \delta y = \sin(x+\delta x) - \sin x$$

$$= 2\cos\left(x+\frac{\delta x}{2}\right) . \sin\frac{\delta x}{2}$$

$$\therefore \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{2}{\delta x}\cos x + \frac{\delta x}{2}\sin\frac{\delta x}{2}$$

$$= \cos\left(x+\frac{\delta x}{2}\right)\left(\frac{\sin\frac{\delta x}{2}}{\frac{\delta x}{2}}\right)$$

$\delta n \to 0$ ஆக, எல்லை மதிப்பை எடுக்க,

$$\frac{dy}{dx} = \underset{\delta x \to 0}{Lt}\frac{\delta y}{\delta x} = \underset{\delta x \to 0}{Lt}\cos\left(x+\frac{\delta x}{2}\right)\underset{\delta x \to 0}{Lt}\left(\frac{\delta x\ \frac{\delta x}{2}}{\frac{\delta x}{2}}\right)$$

$$= \cos x \cdot 1$$

$$= \cos x$$

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

(iii) cos x-ன் வகைக்கெழு காணல் (x ஆரையன்களில் அளவிடப்பட்டுள்ளது).

$y = \cos x$ எனக் கொள்க.

பின்னர் $y+\delta xy = \cos(x+\delta x)$

$$\therefore \quad \delta y = \cos(x+\delta x) - \cos x$$

$$= -2\sin\left(x+\frac{\delta x}{2}\right) . \sin\frac{\delta x}{2}$$

$$\frac{\delta y}{\delta x} = -\frac{2}{\delta x}\sin\left(x+\frac{\delta x}{2}\right)\sin\frac{\delta x}{2}$$

$$= -\sin\left(x+\frac{\delta x}{2}\right) . \left(\frac{\sin\frac{\delta x}{2}}{\frac{\delta x}{2}}\right)$$

$\delta n \to 0$ ஆக, எல்லை மதிப்பை எடுக்க,

$$\frac{dy}{dx} = \underset{\delta x\to 0}{Lt}\frac{dy}{dx} = -\underset{\delta x\to 0}{Lt}\sin\left(x+\frac{\delta x}{2}\right)\underset{\delta x\to 0}{Lt}\left(\frac{\sin\frac{\delta x}{2}}{\frac{\delta x}{2}}\right)$$

$$= -\sin x \cdot 1 = -\sin x$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

(iv) e^x-ன் வகைக்கெழு காணல்

$y = e^x$ எனக் கொள்க.

பின்னர் $y+\delta y = e^{x+\delta x}$

$$\therefore \quad \delta y = e^{x+\delta x} - e^x$$

$$= e^x\,(e^{\delta x}-1)$$

$$\frac{\delta y}{\delta x} = e^x\frac{(e^{\delta x}-1)}{\delta x}$$

$\delta x \to 0$ ஆக, எல்லை மதிப்பை எடுக்க.

$$\frac{dy}{dx} = \underset{\delta x\to 0}{Lt}\frac{\delta y}{\delta x} = e^x \underset{\delta x\to 0}{Lt}\left(\frac{e^{\delta x}-1}{\delta x}\right)$$

$$= e^x . 1 = e^x$$

$$\therefore \quad \frac{d(e^x)}{dx} = e^x$$

(v) $\log x$-ன் வகைக் கெழு காணல்

$y = \log_e x$ என்க.

பின்னர் $y + \delta y = \log_e (x+\delta x)$

$$\therefore \quad \delta y = \log_e (x+\delta x) - \log x$$

$$= \log_e\left(\frac{x+\delta x}{x}\right)$$

$$= \log_e\left(1 + \frac{\delta x}{x}\right)$$

$$\therefore \quad \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{1}{\delta x} \log e\left(1 + \frac{\delta x}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{x}\left[\frac{x}{\delta x} \log e\left(1 + \frac{\delta x}{x}\right)\right]$$

$\delta x \to 0$ ஆக, எல்லை மதிப்பை எடுக்க,

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{1}{x}\left[\underset{\delta x \to 0}{Lt} \frac{x}{\delta n} \log_e\left(1 + \frac{\delta x}{x}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{x} \cdot 1 = \frac{1}{x} \quad \therefore \frac{\delta}{\delta x}(\log_e x) = \frac{1}{x}$$

7. ஆரம்பத் தத்துவத்திலிருந்து வகைக் கெழு காணல்

$\frac{dy}{dx}$ ஐக் கண்டறியும் முறையில் மாணவர்கள் பின்வரும் படிகளைக் கவனித்திருக்கலாம்;

(i) x ஆனது சிறிய ஏற்றமாகிய δx ஐப் பெறவைத்தல்.

(ii) அதற்கு ஒப்ப y-ல் விளையும் ஏற்றமாகிய δyஐப்பெறுதல்.

(iii) δy ஐ δx-க்கு விகிதப் படுத்திக் கூடுமானல், அதனைச் சுருக்கிக் கொள்ளுதல்.

(iv) $\delta x \to 0$ ஆகும்பொழுது, $\frac{\delta y}{\delta x}$-ன் எல்லையைக் காணல்.

மேற்கூறிய முறையால், ஒருசார்பின் வகைக்கெழுவைப் பெறுதலை, 'ஆரம்பத் தத்துவத்திலிருந்து வகைக் கெழு காணல்' (differentiation from first principles) எனப்படும்.

இம் முறைப்படி எந்தச் சார்பின் வகைக் கெழுவையும் காணலாம்.

விளக்க எடுத்துக்காட்டு :

ஆரம்பத் தத்துவத்திலிருந்து, xஐப் பொறுத்து $\sqrt{x}$-ன் வகைக் கெழு காண்க.

$y = \sqrt{x}$ எனக் கொள்க.

x ஆனது δx ஏற்றம் பெற, அதற்கு ஏற்ப y ஆனது δy ஏற்றம் பெறுவதாகக் கொள்க.

பின்னர் $y+\delta y = \sqrt{x+\delta x}$

$$\therefore \quad \delta y = \sqrt{x+\delta x} - \sqrt{x}$$

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\sqrt{x+\delta x} - \sqrt{x}}{\delta x}$$

$$\underset{\delta x \to 0}{Lt} \frac{\delta y}{\delta x} = \underset{\delta x \to 0}{Lt} \frac{\sqrt{x+\delta x} - \sqrt{x}}{\delta x}$$

$$= \underset{\delta x \to 0}{Lt} \frac{(\sqrt{x+\delta x} - \sqrt{x})\ (\sqrt{x+\delta x} + \sqrt{x})}{\delta x \cdot (\sqrt{x+\delta x} + \sqrt{x})}$$

$$= \underset{\delta x \to 0}{Lt} \frac{\delta x}{\delta x(\sqrt{x+\delta x} + \sqrt{x})}$$

$$= \underset{\delta x \to 0}{Lt} \frac{1}{\sqrt{x+\delta x} + \sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

[குறிப்பு : சார்புகளின் வகைக் கெழுக்களை ஆரம்பத் தத்துவங்களிலிருந்து பெறப்படுவதைவிட வெகு எளிதாகவும், விரைவாகவும் பிரிவு 6·ல் கண்ட நியமப் பலன்களை (Standard results) யும், பின்வரும் பொதுத் தேற்றங்களையும் பயன்படுத்திக் கிடைக்கப் பெறும்.]

எடுத்துக்காட்டு :

$\sqrt{x}$-ன் வகைக்கெழுவை நியமப்பலனை பயன்படுத்திக் காண்க

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^n\right) = n\,x^{n-1}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\,x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

பயிற்சி 2-1.

ஆரம்பத் தத்துவத்திலிருந்து பின்வருவனவற்றை நிறுவுக:

(i) $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$

(ii) $\frac{d}{dx}$ $(\tan x) = \sec^2 x$

(iii) $\frac{d}{x}$ $(\operatorname{cosec} x) = -\operatorname{cosec} x \quad \cot x$

(iv) $\frac{d}{dx}$ $(\sec x) = \sec x \tan x$

(v) $\frac{d}{dx}$ $(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x$

8. வகையீடு பற்றிய பொதுத் தேற்றங்கள் (General Theorems on Differentiation)

தேற்றம் (i)

குறிப்பிட்ட சார்புகளின் கூடுதலின் வகைக்கெழு ஒவ்வொன்றின் வகைக்கெழுக்களின் கூடுதலாகும்.

u, v, w.........என்பவை x-ன் சார்புகள் ஆகுக.

$y = u + v + w + \ldots\ldots$ எனின்

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dx} + \ldots\ldots$$

தேற்றம் (ii)

$y = c\,u$ ஆனால், (c ஒரு மாறிலி)

$$\frac{dy}{dx} = c\frac{du}{dx}$$

$y = c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots$ ஆனால்,

$$\frac{dy}{dx} = c_1\frac{du_1}{dx} + c_2\frac{du_2}{dx} + c_3\frac{du_3}{dx} + \ldots\ldots\ldots$$

விளக்க எடுத்துக்காட்டு :

$y = 3x^4 - 2x - 5 + \frac{1}{2}\cos x$ ஆனால்,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(3x^4) - \frac{d}{dx}(2x) - \frac{d(5)}{dx} + \frac{d}{dx}(\tfrac{1}{2}\cos x)$$

$$= 3\cdot\frac{d}{dx}(x^4) - 2\frac{d}{dx}(x) - \frac{d}{dx}(5) + \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(\cos x)$$

$$= 3\cdot 4\,x^3 - 2\times 1 - 0 + \tfrac{1}{2}(-\sin x)$$

$$= 12\,x^3 - 2 - \tfrac{1}{2}\sin x$$

தேற்றம் (iii)

இரண்டு சார்புகளது பெருக்கற் பலனின் வகைக்கெழு காணல்.

$y = u\,v$ என்க, u, v என்பன x-ன் சார்புகளாகும்

δx-ல் நேரும் அதிகரிப்புக்கு ஏற்ப, u, v களில் நேரும் ஏற்றங்களும் அவற்றின் விளைவாக y-ல் உண்டாகும் ஏற்றமும் முறையே δu, δv, δy என்போம்

$$\therefore\quad y + \delta y = (v + \delta u)\,(v + \delta v) \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore\quad \delta y = (u + \delta u)\,(v + \delta v) - uv$$

$$= u\,\delta v + v\,\delta u + \delta u\cdot\delta v$$

$$\therefore\quad \frac{\delta y}{\delta x} = u\cdot\frac{\delta v}{\delta x} + v\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta u}{\delta x}\delta v$$

$$\underset{\delta x\to 0}{Lt}\frac{\delta y}{dx} = u\cdot\underset{\delta x\to 0}{Lt}\frac{\delta v}{\delta x} + v\cdot\underset{\delta x\to 0}{Lt}\frac{\delta u}{\delta x}$$

$$+ \underset{\delta x\to 0}{Lt}\frac{\delta u}{\delta x}\delta v.$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + \frac{du}{dx}\cdot\delta v$$

$\delta x \to 0$ ஆகும் பொழுது $\delta \to 0$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

கிளை : மேற்கண்ட பலனை 3 அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட காரணிகளுக்கும் பெருக்கம் செய்து கொள்ளலாம்.

$y = u\,v\,w$ ஆனுல்

$$\frac{dy}{dx} = u\,v\frac{dw}{dx} + u\,w\frac{dv}{dx} + u\,w\frac{du}{dx}$$

அதாவது ஒரு பெருக்கற் பலனுக்கு வகைக்கெழு காண ஒவ்வொரு சார்பின் வகைக்கெழுவையும் எழுதி மற்றவற்ருல் பெருக்கிக் கொண்டு அங்ஙனம் பெற்ற பலன்களைக் கூட்டிக் கொள்ளவும்.

மேற்கண்ட பலனை u, v, w ஆல் வகுக்க,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} + \frac{1}{v}\frac{dv}{dx} + \frac{1}{w}\frac{dw}{dx}$$ எனப் பெறுகிறோம்.

தேற்றம் (iv)

இரண்டு சார்புகளின் வகுத்தல் குறித்த வகையீடு :

u, v ஆனவை x-ன் சார்புகளாஞல்,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$ என நிறுவுக.

$y = \dfrac{u}{v}$ என்க.

இதஞல், $u = v\,y$ ஆகும்.

பெருக்கல் விதிப்படி வகைக்கெழு காண,

$$\frac{du}{dx} = v\frac{dy}{dx} + y\frac{dv}{dx}$$ ஆகும்,

$$\therefore v\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - y\frac{dv}{dx}$$

$$= \frac{du}{dx} - \frac{u}{v}\frac{dv}{dx}$$

$$v\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

கிளை 1 : $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{v}\right) = -\frac{1}{v}\frac{dv}{dx}$

கிளை 2 : $\tan x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$, $\cot x$ என்ற திரிகோண கணித தகவுகளின் வகைக்கெழுக்களை மேற்கண்ட வகுத்தல் விதியினால் காணலாம்.

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)$$

$$= \frac{\cos x\frac{d}{dx}(\sin x) - \sin x\frac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= \sec^2 x$$

இவ்வாறே,

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) = -\operatorname{cosec} x \cot x \text{ ஆகும்.}$$

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x$$

தேற்றம் (v)

சார்பின் சார்பு (Function of a Function)

$y = f(u)$-ம், $u = \phi(x)$-ம் ஆனால்,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\,\frac{du}{dx} \text{ ஆகும்.}$$

x-ல் உண்டாகும் δx ஏற்றத்திற்குத் தக்கதாக u-ல் δu ஏற்றமும் அவை பற்றிய விளைவாக y-ல் δy ஏற்றமும் உண்டாவதாகக் கொள்வோம்.

அப்பொழுது $\dfrac{\delta y}{\delta x} = \dfrac{\delta y}{\delta u}\,\dfrac{\delta u}{\delta x}$ ஆகும்.

$$\underset{\delta x \to 0}{Lt} \frac{\delta y}{\delta x} = \underset{\delta x \to 0}{Lt} \left(\frac{\delta y}{\delta u} \cdot \frac{\delta u}{\delta x} \right)$$

$$= \underset{\delta x \to 0}{Lt} \frac{\delta y}{\delta u} \quad \underset{\delta x \to 0}{Lt} \frac{\delta u}{\delta x}$$

$$= \underset{\delta u \to 0}{Lt} \frac{\delta y}{\delta u} \quad \underset{\delta x \to 0}{Lt} \frac{\delta u}{\delta x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \text{ ஆகும்.}$$

கிளை 1 : y ஆனது u-ன் சார்பாகவும், y ஆனது v-ன் சார்பாகவும், v ஆனது x-ன் சார்பாகவும் அமையுமானால்,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} \text{ ஆகும்.}$$

கிளை 2 : (i) $y = \sin ax$ ஆனால், $\dfrac{dy}{dx} = a \cos ax$ ஆகும்.

(ii) $y = \sin(ax+b)$ ஆனால், $\dfrac{dy}{dx} = a\cos(ax+b)$ ஆகும்.

(iii) $y = \cos ax$ ஆனால், $\dfrac{dy}{dx} = -a \sin ax$ ஆகும்.

(iv) $y = \cos(ax+b)$ ஆனால், $\dfrac{dy}{dx} = -a\sin(ax+b)$ ஆகும்.

கிளை 3 : $\dfrac{dx}{du} = \dfrac{1}{\dfrac{du}{dx}}$

மேலேயுள்ள தேற்றம் (V)-ல், $y=x$ என்று இட்டால், இது பெறப்படும்.

தனிப்பட, ஆரம்பத்தத்துவத்திலிருந்து,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}$$ என நிறுவுக.

விளக்க மாதிரி 1 xஐச் சார்த்தி, $\sin^3 5x \cos^2 7x$-ன் வகைக்கெழு காண்க.

கொடுத்த கோவையை y எனக் குறிக்கவும்.

$u = \sin 5x$, $v = \cos 7x$ எனக் கொள்க.

$$\therefore \quad y = u^3 v^2$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = u^3 \frac{d}{dx}(v^2) + v^2 \frac{d}{dx}(u^3)$$

$$= u^3 \cdot 2v \frac{dv}{dx} + v^2 . 3u^2 \frac{du}{dx}$$

$$= 2u^3 v \frac{dv}{dx} + 3v^2 u^2 \frac{du}{dx}$$

இனி $\dfrac{du}{dx} = \cos 5x \cdot 5 = 5 \cos 5x$

$$\frac{dv}{dx} = -\sin 7x \cdot 7 = -7 \sin 7x$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = 2u^3 v(-7 \sin 7x) + 3v^2 u^2 (5 \cos 5x)$$

$$= -14. \sin^3 5x \cdot \cos 7x \sin 7x + 15 \cos^2 7x \cdot \sin^2 5x \cos 5x$$

$$= \sin 5x \cos 7x (-14 \sin^2 5x \sin 7x + 15 \cos 7x \sin 5x \cos 5x)$$

தேற்றம் (vi)

$x = f(t)$-யும், $y = \phi(t)$-யும் ஆனால்,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

$x^2+y^2=a^2$ என்னும் வட்டத்தின் மீதுள்ள புள்ளியை $x = a \cos\theta$, $y = a \sin\theta$ எனக் குறிப்பிடலாம்.

புள்ளி (x,y) யிடத்து $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{+a\cos\theta}{-a\sin\theta}$

$= -\frac{x}{y}$ ஆகும்.

பயிற்சி 2-2.

1. ஒரு பரவளைவு (parabola) மீதுள்ள புள்ளி $x=am^2$, $y=2am$ எனக் குறிக்கப்படும். அப் புள்ளியில் $\frac{dy}{dx}$ காண்க.

2. $x=a\cos\theta$, $y=b\sin\theta$ என்பன ஒரு நீள் வளையத்தின் (Ellipse) மீதுள்ள புள்ளியின் ஆயத் தொலைகளைக் குறிக்கும். அப்புள்ளியில் $\frac{dy}{dx}$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

3. ஒரு அதிபர வளைவு (Hyperbola) மீதுள்ள புள்ளி $x=a\sec\theta$, $y=b\tan\theta$ எனக் குறிக்கப்படும். அப் புள்ளியில் $\frac{dy}{dx}$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

4. ஒரு செவ்வக அதிபர வளைவின் மீதுள்ள புள்ளி, $x=ct$, $y=\frac{c}{t}$ எனக் குறிக்கப்படும். அப் புள்ளியில் $\frac{dy}{dx}$ -ன் மதிப்பைக் காண்க.

தேற்றம் (vii)

மறைவுச் சார்பு (Implicit function)களுக்கு வகையிடு காணல்

$x^2+y^2=a^2$; $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ என்பன போன்ற சார்புகளில் y ஆனது x-ன் நேர்முகச் சார்பாகக் கொடுக்கப்படாமல், x-ம், y-ம்

கலந்து கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. சமன்பாட்டிலிருந்து y-க்கு தீர்வு கண்டு, y ஐ x-ன் நேர்முகச் சார்பாகக் கண்டறிந்து, இதிலிருந்து $\frac{dy}{dx}$ ஐக் காணலாம். ஆனல் இப்படி x ஐச் சுட்டி வெளிப்படையாக y-க்கு மதிப்பு காண்பது சில சமயங்களில் இயலாததாகும். அப்படிக் காண்பது இயலுமாயினும், அத்தகைய தொடர்பு எளிதாய் இராது.

y-க்குத் தீர்வு காண முடிந்தாலும், முடியாவிடினும், x-ம், y-ம் சம்பந்தப்பட்ட சார்பிலிருந்து y ஆனது x-ன் ஒரு வகைச் சார்பு என்பது வெளிப்படை. ஆகவே, சமன்பாட்டின் இரு பக்கங்களையும் x ஐ ஒட்டி வகையீடு செய்தபின், கிட்டிய சமன்பாட்டிலிருந்து $\frac{dy}{dx}$-ன் மதிப்பைப் பெறுவோம்.

விளக்க எடுத்துக்காட்டு

$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்னும் தொடர்பிலிருந்து $\frac{dy}{dx}$ ஐக் காண்க !

y ஆனது x-ன் சார்பானதால், இரு பக்கங்களையும் x ஐ ஒட்டிய வகைக்கெழு காணவும்.

$$2ax+2h\left(y + x\frac{dy}{dx}\right) + 2by\frac{dy}{dx} + 2g + 2f\frac{dy}{dx} = 0$$

(அதாவது) $(2hx+2by+2f)\frac{dy}{dx} = -2ax-2hy-2g$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{ax+hy+g}{hx+by+f}$$

பயிற்சி 2-3

பின்வரும் தொடர்புகளிலிருந்து $\frac{dy}{dx}$ ஐக் கண்டறிக.

1. $x^2+y^2=a^2$ 2. $y^2=4ax$ 3. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

4. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 5. $xy=c^2$

9. இலாகரிதம் எடுத்து வகைக்கெழு காணல் (Logarithmic Differentiation).

சில சார்புகளின் வகைக்கெழு காண, அதன் மடக்கை எடுத்துப் பின்னர் வகைக்கெழு காணுதல் ஒரு வழியாகும்.

எடுத்துக்காட்டு :

$y = (\sin x)^x$ எனின், $\frac{dy}{dx}$ ஐக் காண்க :

இரு பக்கமும், மடக்கை எடுப்பின்,

$\log y = x \log (\sin x)$ எனவரும்.

இரு பக்கங்களிலும் x ஐ ஒட்டி வகைக்கெழு காண, நாம் பெறுவது $\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = x \cdot \frac{1}{\sin x} \cos x + \log (\sin x) \cdot 1]$

$= x \cot x + \log (\sin x)$

$\therefore \frac{dy}{dx} = y [x \cot x + \log (\sin x)$

$= (\sin x)^x [x \cot x + \log (\sin x)]$

10. நேர்மாறான சார்புகளின் வகைக்கெழு (Differentiation of Inverse functions)

$y = \sin^{-1} x$-ன் வகைக் கெழு காண்க.

$\therefore x = \sin y$

$\therefore \frac{dx}{dy} = \cos y$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

இதேபோல், $\frac{d}{dx} (\cos^{-1}x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\frac{d}{dx} (\tan^{-1}x) = \frac{1}{1+x^2}$ எனப் பெறலாம்.

பயிற்சி 2-4.

(கலப்பு வகை)

1. ஆரம்பத் தத்துவத்திலிருந்து பின்வருவனவற்றின் வகைக் கெழு காண்க.

(i) $2x^3$ (ii) x^5 (iii) $\sin 2x$ (iv) $\frac{1}{x}$

2. பின்வரும் கோவைகளுக்கு xஐ ஒட்டி வகைக்கெழு காண்க :

(i) $\frac{2}{x}+5\sqrt{x}-\frac{3}{\sqrt{x}}+x^{-2}$ (ii) $\log x-e^x-7$

(iii) $3\sin x-4\cos x+e^{2x}+\log x$

(iv) $\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)$

(v) $\sin(2x+3)$ (vi) $(ax+b)^8$ (vii) $e^x \sin x$

(viii) $2\cos x\log x-x^2\sin x$ (ix) $\cos^2(3x-2)$

(x) $x^n\cos nx$ (xi) $x^m(1-2x)^3$ (xii) $\sin^3 x\cos 2x$

(xiii) $3\sin^4 2x$ (xiv) $\sin mx\cos nx$ (xv) $x(2-x)^4$

(xvi) $\sin(2-5x)^4$ (xvii) $\frac{8x+5}{3x-4}$ (xiii) $\frac{2x^3-5x+1}{x+7}$

(xix) $(x^2-1)^m(1-x)^n$ (xx) $(1-x)^2(2-x^2)^3(x^2+1)$

(xxi) $x^2y^2+4y=0$ (xxii) $ax^2+2hxy+by^2=1$

(xxiii) $\log(ax+b)$ (xxiv) e^{8x^2} (xxv) $\sin\sqrt{x}$

(xxvi) $xe^x\log x$ (xxvii) a^x (xxviii) x^x (xxix) $(\log x)^x$

(xxx) $e^x\sin x\log x$ (xxxi) $\cos^{-1}x$ (xxxii) $\tan^{-1}x$

(xxxiii) $\sec^{-1}x$ (xxxiv) $\cot^{-1}x$ (xxxv) $\operatorname{cosec}^{-1}x$

3. (i) $x=a\cos^3\theta,\ y=b\sin^3\theta$ எனின், $\frac{dy}{dx}$ ஐக் காண்க.

(ii) $x=a(\theta+\sin\theta);\ y=a(1+\cos\theta)$ எனின், $\frac{dy}{dx}$ ஐக் காண்க.

4. கீழ்வரும் சார்புகளின் வகைக்கெழுவை, அவற்றிற்குரிய சார்பில் மாறியைப் பற்றி காண்க.

(i) $s=u\,t+\frac{1}{2}\,at^2$ (ii) $s = \dfrac{a-\cos t}{a+\cot}$ (iii) $w = \dfrac{z+1}{z-1}$.

(iv) $r = a\,(1+\cos\theta)$ (v) $w = \dfrac{1+\tan z}{1-\tan z}$

11. அடுத்தடுத்து (தொடர்ச்சியாக) வகைக்கெழு காணல் (Successive Differentiation) : உயர் வரிசை வகைக் கெழுக்கள் (Derivatives of Higher orders)

y ஆனது x-ன் சார்பானால், அதிலிருந்து பெற்ற $\dfrac{dy}{dx}$ என்னும் சார்பும் பொதுவாக ஒரு x-ன் சார்பாக இருக்கும். ஆகவே, $\dfrac{dy}{dx}$-க்கு xஐ ஒட்டிய வகைக்கெழுவினை மறுபடியும் காணலாம்.

$\dfrac{dy}{dx}$ ஐ வகையீடு செய்ததன் பயனை இரண்டாம் வகைக்கெழு எனக் கூறுகிறோம்.

இதனை $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$ எனக் குறியீடு செய்யலாம்.

$\dfrac{dy}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$ என்பதை $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ என எழுதுவது மரபு. ஆகவே, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ என்பது y என்ற சார்புக்கு xஐ ஒட்டிய இரண்டாவது வகைக்கெழு என பொருள்.

இவ்வாறே $\dfrac{d^2y}{dx^2}$-க்கு மறுபடியும் ஒரு முறை xஐப் பற்றிய வகைக்கெழு கண்டால், அது மூன்றாவது வகைக்கெழு எனப்படும். இதை $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ எனக் குறிப்போம்.

இதே குறியீட்டு முறையைப் பின்பற்றி y என்னும் சார்புக்கு n முறை அடுத்தடுத்து வகைக்கெழு கண்டு, வரும் பலனை $\dfrac{d^ny}{dx^n}$ எனக் குறிப்போம்.

நாம் $\frac{d}{dx}$ என்பதைச் செய்முறைக்கு உரிய குறியீடாகக் கொண்டு, $\frac{d}{dx}$-க்குப் பதிலாக D என்று எழுதினால்,

$\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, ... $\frac{d^ny}{dx^n}$ என்பவற்றை D_y, $D^2{}_y$, $D^3{}_y$... $D^n{}_y$ என்னும் வடிவிலும் எழுதிக் கொள்ளலாம்.

$y=f(x)$ ஆனால், அடுத்தடுத்துப் பெறப்படும் தொடர் நிலை வகைக்கெழுக்களை $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, ...$f^n(x)$ அல்லது y', y'', y'''......y^n அல்லது y_1, y_2,......y_n என்று குறியீடு செய்தலும் உண்டு.

நேரம் t ஐச் சாராமாறியாகக் கொண்டு கண்டறியும் முதலாம் இரண்டாம் வகைக்கெழுக்களை வழக்கமாக $\dot{y}$, $\ddot{y}$ எனக் குறியிடுவதும் உண்டு.

சில சார்புகளுக்கு, வகைக்கெழுக்களை எத்தனை அளவு வேண்டு மானாலும் தொடர்ந்து காணலாம். சிலவற்றிற்கு ஒரு குறிப்பிட்ட அளவுக்குமேல் வகைக்கெழுக்கள் பூச்சியமாகி விடும்.

எடுத்துக்காட்டு :

(1) $y = \frac{1}{x}$ எனக் கொள்க.

எனின், $Dy = -1 \cdot x^{-2}$; $D^2y = (-1)(-2)x^{-3}$

இவ்வாறு தொடர்ச்சியாக வகைக் கெழுக்களை எந்த அளவுக்கு வேண்டுமானாலும் கணக்கிட்டுக் கொண்டே போகலாம்.

(2) $y = \sin x$ எனக் கொள்க.

எனின், $Dy = \cos x$; $D^2y = -\sin x$; $D^2y = -\cos x$......... என்று கணக்கிட்டுக் கொண்டே போகலாம்.

(3) $y = x^n$ (n ஒரு நேர் முழு எண்)

எனின், $Dy = nx^{n-1}$; $D^2y = n(n-1)x^{n-2}$;.

$D^3y = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$......

$\therefore$ $D^ny = n(n-1)(n-2)......1. = n!$ ஆகும்.

இதற்கு மேற்பட்ட வகைக்கெழுக்கள் பூச்சியமாகின்றன.

விளக்க எடுத்துக்காட்டுகள் :

எடுத்துக்காட்டு 1 : $y=(5x-7^4)$ ஆனால், $\frac{dy^2}{dx^2}$ ஐக் காண்க.

$u = 5x-7$ எனக் கொண்டால், $y = u^4$ ஆகும்.

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(u^4) = \frac{d}{du}(u^4) \cdot \frac{du}{dx} = 4u^3.5 = 20u^3$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(20u^3\right) \cdot = \frac{d}{du}(20u^3)\frac{dn}{dx}$$

$$= 60u^2 \cdot 5 = 300u^2$$

$= 300\,(5x-7)^2$ (பிரதியீடு செய்தபின்)

எடுத்துக்காட்டு 2 : $y = 12\cos\sqrt{2}\,x - 5\sin\sqrt{2}\,x$ எனின் $\frac{d^2y}{dx^2} + 2y = 0$ எனக் காட்டுக.

$$\frac{dy}{dx} = -12\sqrt{2}\sin\sqrt{2}\,x - 5\sqrt{2}\cos\sqrt{2x}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -12\sqrt{2}.\sqrt{2}\cos\sqrt{2x}$$

$$-5\sqrt{2}\,(-\sqrt{2}\sin\sqrt{2}\,x)$$

$$= -24\cos\sqrt{2}\,x + 10\sin\sqrt{2x}$$

$$= -2\,(12\cos\sqrt{2}\,x - 5\sin\sqrt{2x})$$

$$= -2y$$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2} + 2y = 0$$

பயிற்சி 2-5.

1. $y = (1-2x)(2-3x^2)$ ஆனால், $\frac{d^2y}{dx^2}$ ஐக் கண்டறிக.

[விடை : $6\,(6x-1)$]

2. $y = 5x^2 - x\cos x$ ஆனால், $\frac{d^2y}{dx^2}$ ஐக் கண்டறிக.

[விடை : $10 + x\cos x + 2\sin x$]

3. $y = \sin\ x \cos x$ ஆனல், $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0$ எனக் காட்டுக.

4. $y = x \sin x$ ஆனல், $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + (x^2+2)\ y=0$ என நிறுவுக.

5. $y = x \cos\ x$ ஆனல், $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + (x^2+2)\ y=0$ என நிறுவுக.

6. a, b, n என்பன மாறிலிகளாகுமிடத்து $y = a \cos\ nx + b \sin nx$ ஆனல், $\frac{d^2y}{dx^2} + n^2y = 0$ எனக் காட்டுக.

7. $t^2 \frac{d^2s}{dt^2} - t \frac{ds}{dt} - 3s=0$ என்பதற்கு $s= \frac{3}{t} + 4t^3$ பொருந்துமென நிரூபிக்க :

8. $y = ax-bx^3$ ஆனல், $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 2y = 2x \frac{dy}{dx}$ என நிறுவுக.

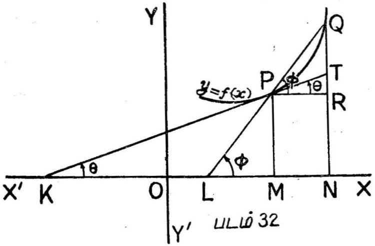
9. $y = 20 \cos 5x - 48 \sin 5x$ ஆனல், $\frac{d^2y}{dx^2} + 25\ y\ = 0$ எனக் காட்டுக.

10. $y = (x^2+a^2)^2$ என்ருல், $(x^2+a^2)\ \frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} - 4y = 0$ எனக் காட்டுக.

3. வகைக் கெழுவின் பயன்பாடுகள்
(Applications of the Derivative)

1. வகைக் கெழுவின் வடிவ கணித விளக்கம்

படம் 32-ல், $y=f(x)$ என்ற சார்பின் கோட்டுருவப்படம் வரையப் பட்டிருக்கிறது. $p(x, y)$ என்பது அவ் வளை வரையின் மீதுள்ள யாதேனுமொரு புள்ளியாகவும், $Q(x+\delta x,\ y+\delta y)$ என்பது அதற்கு அண்மையிலுள்ள தொருபுள்ளியாகவும் கொள்க.



படம் 32

P, Qவிலிருந்து முறையே PM, QN என OX க்குக் குத்துக் கோடுகள் வரைந்து, PR ஐ OX-க்கு இணையாக வரையவும். PR ஆனது NQவை R-ல் சந்திக்கட்டும். PQ ஐ ஒரு நாணாக இணைக்கவும். அது X அச்சை L என்னுமிடத்தில் சந்திக்கட்டும்.

P என்னுமிடத்தில் வளை வரைக்கு KPT என்னும் தொடு கோடு வரைக. அது X அச்சை K என்னுமிடத்திலும் NQ ஐ T என்னுமிடத்திலும் சந்திக்கட்டும்.

$\angle RPQ = \angle NLQ = \phi$ என்க; $\angle RPT = \angle NKT = \theta$ ஆகட்டும்.

இனி, $PR = MN = ON - OM = (x + \delta x) - x = \delta x$ ஆகும்

$RQ = NQ - NR = NQ - MP = (y + \delta y) - y = \delta y$ ஆகும்.

$$\therefore \quad \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{RQ}{PR} = \tan\phi$$

$\therefore \quad \frac{\delta y}{\delta x}$ ஆனது PQ என்னும் நாணினது சரிவைக் குறிக்கும்.

இப்பொழுது $\delta x \to 0$ ஆகுக. y ஆனது x-ன் தொடர்ச்சியான சார்பதலின், δy-ம் பூச்சியத்தை அணுகும். அதாவது Q ஆனது வளைவரையின் வழியே நகர்ந்து வந்து P ஐ எல்லையாக அணுகி, அடையும்.

P ஐ நிலையாகக் கொண்டு, $Q \to P$ ஆகும் போது வரும் பல நாண்கள் P-ல் வரையும் PT ஆகிய தொடு கோட்டை எல்லையாகக் கொண்டு சாரும்.

இவ்விதம் நாண்கள் அணுகும் போது $\angle QRP = \phi$ என்ற கோணம், தொடுகோடு PT ஆனது X அச்சுடன் உண்டாக்கும் θ என்னும் கோணத்தை எல்லையாகக் கொண்டு அணுகி, அடையும்.

$\therefore$ $\delta x \to 0$ என்ற நிலையில், $\underset{\delta x \to 0}{Lt} \tan \angle RPQ = \underset{\delta x \to 0}{Lt} \tan\phi$

$$= \tan \angle RPT$$
$$= \tan \angle NKT$$
$$= \tan\theta$$

ஆனால், $\underset{\delta x \to 0}{Lt} \tan \angle RPQ = \underset{\delta x \to 0}{Lt} \frac{RQ}{PR}$

$$= \underset{\delta x \to 0}{Lt} \frac{\delta y}{\delta x}$$

$$= \frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \quad \tan\theta = \underset{Q\to P}{Lt} \tan\phi = \underset{Q\to P}{Lt} \frac{RQ}{PR}$$

$$= \underset{\delta x\to 0}{Lt} \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{dy}{dx}$$

$\therefore$ ஒரு வளை வரையின்மீதுள்ள யாதேனுமொரு புள்ளியிடத்து அமைவுறும் தொடுகோட்டின் சரிவு அப் புள்ளிக்கண் $\frac{dy}{dx}$ –ன் மதிப்புக்குச் சமமாகும் என அறிகிறோம்.

[குறிப்பு 1 வளை வரையில் உள்ள புள்ளியில் அமையும் தொடு கோட்டின் சரிவே, அப் புள்ளியில் வளை வரையின் சரிவும் ஆகும்.

விளக்க எடுத்துக்காட்டு 1 :

$y = x^3 - 2x^2 + x$ என்னும் வளைவரையின்மீது எப் புள்ளி களிடத்து வரையுந் தொடுகோடானது x-அச்சுக்கு இணையாக அமையுமெனக் காண்க.

தொடுகோடு x அச்சுக்கு இணையாக அமைய, அத் தொடு கோட்டின் சரிவு பூச்சியமாக வேண்டும்.

$\therefore$ அப் புள்ளியிடத்து, $\frac{dy}{dx} = 0$ ஆகும்.

இனி, $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 4x + 1$

$\therefore \quad 3x^2 - 4x + 1 = 0$

$(x-1)(3x-1) = 0$

$\therefore \quad x = 1$ அல்லது $1/3$ ஆகும்.

கொடுத்த கோவையில், இம் மதிப்புகளைத் தனித் தனியே பிரதியிட்டால், $y = 0$ அல்லது $4/27$ எனவரும்.

$\therefore$ $(1, 0)$; $(\frac{1}{3}, \frac{4}{27})$ என்னும் புள்ளிகளில் வளை வரை x அச்சுக்கு இணையாகும்.

விளக்க எடுத்துக்காட்டு 2 :

$y = 3x^2 + 2x + 1$ என்னும் வளைவரையின்மீது $x = 1$ என்னு மிடத்து வரையும் தொடுகோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

$x=1$ எனும் x கூறுடைய புள்ளியின் y கூறைக் காண,

$y=3x^2+2x+1$-ல் $x=1$ எனப் பிரதியிடுக.

$\therefore \quad y=3\cdot1+2\cdot1+1=6$

எப் புள்ளியிலும், தொடுகோட்டின் சரிவு = அப்புள்ளியில்

$\left(\frac{dy}{dx}\right)$-ன் மதிப்புக்குச் சமமமாகும்.

இனி, $\frac{dy}{dx}=6x+2$

$$\therefore \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1,\,6)}=6\times1+2=8$$

ஆகவே $(1, 6)$ என்னுமிடத்தில் இடம் பெறும், தொடுகோட்டின் சமன்பாடு $y-6=8\ (x-1)$ ஆகும்.

அதாவது $y=8x-2$.

2. தோராய மதிப்புகள், பிழைகள் பற்றிய பயன்பாடுகள் (Applications to Approximations and Errors)

சார்பின் மாறியில் ஏற்படும் ஒரு சிறு ஏற்றத்தின் காரணமாக அச் சார்பில் ஏற்படும் மாற்றத்தைத் தோராயமாகக் காண்போம்.

$$\underset{\delta x\to 0}{Lt}\ \frac{\delta y}{\delta x}=\frac{dy}{dx} \text{ ஆகும் (வரையறை)}$$

எல்லை காண்பதற்கு முன்,

$\frac{\delta y}{\delta x}=\frac{dy}{dx}+\epsilon$ ஆகும். (ϵ என்பது பூச்சியத்தை அணுகும் மிகச் சிறிய எண்ணுகும் எனக் கொள்க.)

இப்பொழுது, $\delta x\to 0$ ஆகும்பொழுது, $\epsilon\to 0$ ஆகி,

$$\underset{\delta x\to 0}{Lt}\ \frac{\delta y}{\delta x}=\frac{dy}{dx} \text{ என்ருகிறது.}$$

ஆகவே, எல்லை காண்பதற்கு முன்,

$\frac{\delta y}{\delta x}=\frac{dy}{dx}+\epsilon$ என எழுதலாம்,

$$\therefore \quad \delta y = \frac{dy}{dx} \cdot \delta x + \epsilon \, \delta x$$

δy-ன் விரிவில் முதலுறுப்போடு ஒப்பிட இரண்டாவது உறுப்பு மிகச் சிறியதாகின்றது.

இதிலிருந்து $\delta y \approx \frac{dy}{dx} \cdot \delta x$ [$\approx$ என்ற குறி தோராய மதிப்பைக் காட்டுகிறது].

(அதாவது) $\delta y \approx f'(x) . \delta x$ ...(1)

இத் தொடர்பிலிருந்து, x-ல் ஏற்படும் சிறிய ஏற்றம் δx-க்கு ஏற்ப y-ல் ஏற்படும் சிறிய மாற்றம் δy ஐத் தோராயமாகக் காண முடிகிறது.

(i) பிழைகளும், தோராயங்களும் (Errors and Approximations)

δx ஆனது x-ல் ஏற்படும் மிகச் சிறிய வேறுபாடோ அல்லது பிழையோ ஆனல், δy ஆனது, அதற்கேற்ப உண்டாகும் வேறுபாடோ அல்லது பிழையோ ஆகும்.

(1)-லிருந்து,

y-ன் ஏற்றம் அல்லது பிழை $= \frac{dy}{dx}$ மடங்கு x-ன் ஏற்றம் அல்லது பிழையாகும்.

(ii) சார்புடைய பிழை (Relative Error)

ஒரு பலனில் தனிப்பட்ட பிழையானது (Absolute error) தனிப்பட்ட ஒரு சிறப்புத் தன்மையைக் காட்டுவதில்லை. பொதுவாகச் சார்புடைய அல்லது விகிதாசாரமான (Proportionate) பிழையே, தனிப்பட்ட பிழையைவிட, முக்கியத்துவம் வாய்ந்ததாகும்.

x-ல் விகிதாசாரப் பிழை $= \frac{\delta x}{x}$ ஆகும்.

(iii) சதவீதப் பிழை (Percentage Error)

$\frac{100 \, \delta x}{x}$ என்பது x-ல் நேரும் சதவீதப் பிழை எனப்படும்.

விளக்க எடுத்துக்காட்டு :

ஒரு கோளத்தின் ஆரம் 6 செமீ. எனக் கொள்ளப்பட்டது. ஆரத்தை அளக்குங் காலத்தில், ·04 செமீ. பிழை யேற்பட்டால், கன பரிமாணத்தில் அதற்கேற்ப உண்டாகிய பிழையைத் தோராய மாகக் கண்டறிக.

r ஆரமுடைய கோளத்தின் கன பரிமாணம் v எனக்கொள்க

அப்பொழுது $v = \frac{4}{3}\pi r^3$ ஆகும்.

ஆரத்தை அளப்பதில் நேர்ந்த சிறிய பிழை δr ஆகவும், அதை யொட்டிக் கன பரிமாணத்தைக் கணக்கிடுவதில் விளைந்த பிழை δv ஆகவும் கொண்டால்

$$\delta v \approx \frac{dv}{dr} \cdot \delta r \text{ ஆகும்.}$$

இப்பொழுது, $= \frac{dv}{dr} \frac{4}{3}\pi \,.\, 3r^2 = 4\pi r^2$

$\therefore \quad \delta v \approx 4\pi r^2 \cdot \delta r$

இங்கு $r = 6$ செமீ. ; $\delta r = \cdot 04$ செமீ. எனப் பிரதியிட,

$\delta v = 4\pi \times 36 \times \cdot 04 = 5{\cdot}76\pi$ ஆகும்.

$\therefore$ கன பரிமாணத்தைக் கணக்கிடுவதில் விளைந்த பிழை $5{\cdot}76\pi$ கன செமீ. ஆகும்.

இதையொட்டி சதவீதப் பிழை $= 100 \frac{\delta v}{v}$

$$= \frac{5{\cdot}76\pi}{4\pi\,(6)^3/3} \times 100\% = 2\%$$

3. தொடர்புறு வீதங்கள் (Related rates)

பல கணக்குகளில் ஒவ்வொன்றும் நேரத்தின் சார்பலனாகிய இரண்டு மாறிகள் இடம் பெறுவதுண்டு. நேரத்தைப் பொறுத்து ஒரு மாறியின் பெருகுவீதம் கொடுக்கப்பட்டால், அதைக் கொண்டு மற்ற மாறியானது நேரத்தைப் பொறுத்துப் பெருகும் வீதத்தை அறிய முடியும்.

விளக்க எடுத்துக்காட்டு

ஒரு மையின் துளி மையொற்றும் காகிதத்தின் மேல் விழுந்த பொழுது மையின் கறையானது வட்ட வடிவினதாகி ஒரு செகண்டுக்கு 2 சதுர செமீ. வீதம் பரப்பு பெருகுவதாகின்றது.

மைக் கறையின் பரப்பு 5 செ. மீ ஆகவுள்ள பொழுது அதன் ஆரத்தின் பெருகு வீதத்தைக் காண்க.

t செகண்டுகள் கழிந்தபின், வட்டவடிவ மைக் கறையின் ஆரம் r செமீ. ஆகவும், பரப்பு A சதுர செமீ. ஆகவும் இருக்குமானல்,

$A = \pi r^2$ ஆகும்.

கணக்கின் படி, $\frac{dA}{dt} = 2$ ஆனுல்,

$\frac{dr}{dt} =$ ஐக் கண்டறிய வேண்டும்.

இப்பொழுது, $\frac{da}{dt} = \frac{da}{dr} \; \frac{dr}{dt}$ ஆகும்.

$$\frac{dA}{dr} = 2\pi r$$

$$\therefore \; 2 = \pi r \; \frac{dr}{dt}$$

$$\therefore \; \frac{dr}{dt} = \frac{1}{\pi r} \text{ செமீ./விஞடி}$$

$A = 5$ ஆகுமிடத்து, $\pi r^2 = 5$

$$\therefore \; r = \sqrt{\frac{5}{\pi}} \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore \; \frac{dr}{dt} = \frac{1}{\pi\sqrt{\frac{5}{\pi}}} \text{ செ.மீ./விஞடி} = \frac{1}{\sqrt{5\pi}}$$

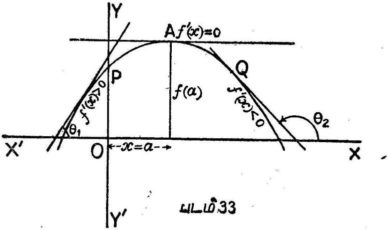
செமீ./விஞடி ஆகையால். வட்டவடிவ மைக் கறையின் ஆரமானது விஞடிக்கு $\frac{1}{\sqrt{5\pi}}$ செமீ. வீதம் மிகுவதாகும்.

4. மீப்பெரு மதிப்பும், மீச்சிறு மதிப்பும் (Maximum and Minimum values)

$y = f(x)$ என்ற சார்பின் மதிப்புகள் x-ன் மதிப்பைச் சார்ந்து மாறுவதை, அதாவது வளர்வதையும், குறைவதையும், அச் சார்பின் வரை படத்திலிருந்து காணலாம்.

படம் 33-ல், $x = a$ என்ற இடத்தில், $f(x)$-ன் வரைபடம் ஏறு முகத்திலிருந்து இறங்கு முகத்திற்கு மாறும் அல்லது திரும்பும்

நிலையைக் காண்கிறோம். இத்தகைய திரும்புநிலை 'மீப்பெருநிலை' எனப்படும்.



படம் 33

படம் 34-ல் $x = b$ என்ற இடத்தில், $f\ (x)$-ன் வரைபடம் இறங்கு முகத்திலிருந்து ஏறு முகத்திற்கு மாறுவதைக் காண்கிறோம். இத்தகைய திரும்பு நிலை 'மீச்சிறு நிலை' எனப்படும்.

இப் புள்ளிகளைத் திருப்புப் புள்ளிகள் (Turning points) எனக் குறிப்பிடுகிறோம்.

மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்பென்னும்போது அங்கு அருகில் அது ஒரு மீப்பெரு அல்லது மீச்சிறு மதிப்பு என்பதே பொருள்.

$f\ (x)$ என்பது தொடர்ச்சித் தன்மை வாய்ந்த ஒரு சார்பானல், மீப்பெரு மதிப்பும், மீச்சிறு மதிப்பும் ஒன்று விட்டொன்று வருவதைக் காணலாம்.

இனி மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புகளைக் காணும் விதிகளைப் பெறுவோம்.

(a) மீப்பெரு மதிப்பு விளங்கும் புள்ளி

படத்தில் காட்டியுள்ளது $y=f\ (x)$-ன் வரைபடமாகும். (படம் 33). $f\ (x)$ என்பது $x=a$ என்னும் புள்ளியில் மீப்பெரு மதிப்பை அடைவதாகக் கொள்வோம்.

(அதாவது) $x=a$ என்ற இடத்தில், h எவ்வளவு சிறிய நேரெண்ணுயினும், $f\ (a) > f\ (a-h)$; $f\ (a) > f\ (a+h)$ என அமைந்

தால், $f(a)$ என்பது $x=a$ என்ற நிலையில் $f(x)$-ன் மீப்பெரு மதிப்பு எனக் கூறப்படும்.

x பெருகுங்கால், சார்பு y ஆனது முதலில் p-லிருந்து A-க்குச் செல்லும்போது வளருவதாகவும், A-லிருந்து Q-க்குச் செல்லும் போது குறைவதாகவும் காண்கிறோம்.

P-லிருந்து A வரையில், வளை வரையில் x வளர வளர, y-ம் வளருகிறது. ஆகவே y-ன் வளரும் வீதம் நேர் ராசியாகும்.

(அதாவது) $\frac{dy}{dx}$ நேர்ராசி (+) ஆகும்.

வளை வரையில் A-லிருந்து Q நோக்கிச் செல்லும்போது, x வளர வளர, y குறைவதைக் காண்கிறோம்.

ஆகவே, x ஐ பொறுத்து, y-ன் வளரும் வீதம் எதிர் ராசி யாகிறது.

(அதாவது) $\frac{dy}{dx}$ எதிர் ராசி (– ve) ஆகிறது.

A யிடத்தில் சார்பு தற்காலிக நிலை பெற்றுக் காணப்படுகிறது.

ஆகவே, $\frac{dy}{dx} = 0$ ஆகும்.

இந்த முடிவுகளை, வரை கணிதப் படியும் காணலாம். P-க்கும் A-க்கும் இடையிலுள்ள யாதேனுமொரு புள்ளியிடத்தில் வளை வரைக்கு அமைக்கப்படும் தொடுகோடானது X அச்சோடு, அதன் மிகை ராசித் திசையில், ஒரு குறுங்கோணத்தை ஏற்படுத்தும். ஆகவே, $\tan\theta$ நேர் ராசியாகும்.

(அதாவது) $\frac{dy}{dx}$ நேர் ராசிக் (+) குறியைக் கொள்ளும்.

ஆனால், A-க்கும் Q-விற்கும் இடையிலுள்ள எப் புள்ளியிடத் தேனும் அமைக்கப்படும் தொடுகோடானது X அச்சுடன் விரி கோணம் அமைப்பதைக், காண்கிறோம். ஒரு விரிகோணத்தின் tangent விகிதம் எதிர் ராசியாகும்.

$\therefore$ $\frac{dy}{dx}$-ம் எதிர் ராசிக்(—) குறியைக் கொள்ளும்.

மேலும் A என்னுமிடத்தில் வளைவரைக்கு வரையும் தொடு கோடு X அச்சுக்கு இணையாக அமையும்.

ஆகவே, $\theta = 0$, $\therefore$ $\tan\theta = 0$ $\therefore$ $\frac{dy}{dx} = 0$ ஆகும்.

ஆகவே, $x = a$ என்பதற்குரிய மீப்பெரும் புள்ளியிடத்து

(i) $\frac{dy}{dx}$ அல்லது $f'(x) = 0$ ஆகும்.

மேலும் (ii) $\frac{dy}{dx}$ அல்லது $f'(x)$ன் ராசி நேர் ராசியிலிருந்து எதிர் ராசியாக மாறுகிறது.

(ii)-லிருந்து. மீப்பெரு மதிப்பு விளங்கும் புள்ளியிடத்து $\frac{dy}{dx}$ என்பது ஒரு குறையுறு சார்பாகும்.

ஏனெனில் $\frac{dy}{dx}$ நேர் ராசியிலிருந்து பூச்சியமாகிறது ; பிறகு பூச்சியத்திலிருந்து எதிர் ராசியாகிறது.

ஆகவே $\frac{dy}{dx}$ குறைந்து கொண்டே செல்கிறது.

$\therefore$ $\frac{dy}{dx^2}$-ன் வளரு வீதம் அது $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$ எதிர் ராசியாகும்.

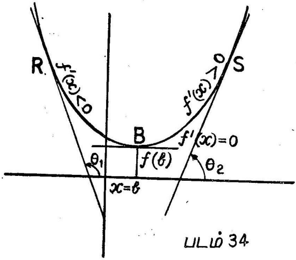
$\therefore$ மீப்பெரு புள்ளியிடத்து, $\frac{d^2y}{dx^2}$ எதிர் ராசி $(-)$ ஆகும்.

(b) மீச்சிறு மதிப்பு விளங்கும் புள்ளி

$x = b$-க்குரிய சார்பின் மதிப்பு $f(b)$ ஆனது மீச்சிறு மதிப்பானுல், $x = b$ என்ற மதிப்புக்குச் சற்றுமுன் $f(x)$ இறங்கு முகமாகவும், சற்றுப்பின் ஏறு முகமாகவும் இருக்கும்; $x = b$ என்னும் திரும்பு நிலை $f(x)$-ன் மீச்சிறு நிலையாகும். $f(b)$ அதன் மீச்சிறு மதிப்பாகும்.

$y = f(x)$ எனும் சமன்பாட்டின் வரை படத்தில், B எனும் நிலையில் சார்பு இறங்கு முகத்திலிருந்து ஏறு முகமாகத் திரும்பட்டும்.

படத்திலிருந்து, B-க்கு முன்னால் எந்தப் புள்ளியிலும், வளை வரைக்கும் வரையும் தொடுகோடு x அச்சுடன் விரிகோணத்தை ஏற்படுத்துவதைக் காண்கிறோம்.



படம் 34

ஆகவே, $\tan\theta$ எதிர் ராசியாகும்.

(அதாவது) $\frac{dy}{dx}$ எதிர் ராசி $(-v.e)$ ஆகும்.

B என்னுமிடத்தில், தொடுகோடு x அச்சுக்கு இணையாக இருக்கும்.

B யிடத்தில், $\tan\theta = 0$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = 0$ ஆகும்.

B-க்குப் பின், எப் புள்ளியிலும், வளை வரைக்கு வரையும் தொடுகோடு x அச்சுடன் குறுங்கோணத்தை அமைக்கும்.

$\therefore$ $\tan\delta$ நேர் ராசியாகும்

(அதாவது) $\frac{dy}{dx}$ நேர்ராசி $(+)$ ஆகும்.

ஆகவே மீச்சிறு நிலையில்

(i) $\frac{dy}{dx} = f'(x) = 0$ ஆகும்.

மேலும் (ii) $\frac{dy}{dx}$ அல்லது $f'(x)$-ன் ராசி, எதிர் ராசியிலிருந்து நேர் ராசியாக மாறுகிறது.

(ii)-லிருந்து. மீச்சிறு மதிப்பை அடைவதற்குச் சற்றுமுன் $\frac{dy}{dx}$-ன் மதிப்பு எதிர் ராசி மதிப்புடையதாயிருந்து திருப்பத்தில் பூச்சிய மதிப்பைப் பெற்று, உடனே நேர் ராசி மதிப்பைப் பெறுவதால், $\frac{dy}{dx}$ என்ற x-ன் சார்பு ஒரு வளரும் சார்பாகிறது.

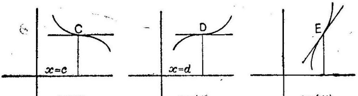
$\therefore$ அதன் வளர் வீதம் (அதாவது) $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$ நேர் ராசியாகும்.

(அதாவது) மீச்சிறு புள்ளியிடத்து $\frac{d^2y}{dx^2}$ நேர் ராசி (+) ஆகும்.

[குறிப்பு : ஒரு வளை வரையில் மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புகள் அமையும் புள்ளிகள் திருப்பப் புள்ளிகள் (turning points) எனப்படும்.

(c) வளைவு மாற்றப் புள்ளி (Point of inflexion)

வளை வரையானது தொடு கோட்டைக் கடந்து செல்லும் இடத்துள்ள புள்ளிகள் வளைவு மாற்றப் புள்ளிகள், எனப்படும்.



படம் 35 (i) படம் 35 (ii) படம் 35 (iii)

அத்தகைய புள்ளிக் கண், வளை வரையின் மேல் நோக்கிய குழிவுப் பாகம் கீழ்நோக்கியோ அல்லது இந்நிலை மறுதலையாகவோ மாறுபடும்.

C, D என்னும் வளைவு மாற்ற புள்ளிக்கண் அமைந்துள்ளது போல, தொடு கோடானது கிடை நிலையில் உள்ளதாகவும் இருக்கலாம்.

$x=c$ (c-ன் அச்சுத்தூரம்) வழியாக x ஆனது அதிகரிக்குங் கால், $\frac{dy}{dx}$ ஆனது c-க்கு முன்னே எதிர் ராசியாக இருந்து, வர வரப் பெருகி, c இடத்தில் பூச்சியம் ஆகி, மறுபடியும் குறையத் தொடங்கி எதிர் ராசியாகவே இருப்பதைக் காண்கிறோம். இதனுல், x ஆனது $x=c$ என்னும் மதிப்பின் ஊடாக வளரும்காலத் தில், வகைக்கெழுவானது இராசிக் குறியில் மாறுதலின்றியே பூச்சியமாகிறது. இதேபோல் $x=d$ (D-ன் அச்சுத்தூரம்) வழியாக x ஆனது அதிகரிக்குங்கால், $\frac{dy}{dx}$ ஆனது D-க்கு முன்னே நேர் ராசியாக இருந்து வரவரப் பெருகி D இடத்தில் பூச்சியமாகி மறு படியும் ஏறத் தொடங்கி நேர் ராசியாகவே இருப்பதைக் காண் கிறோம். C, D என்னும் புள்ளிகளிடத்து, சார்பானது மீச்சிறு மதிப்பையோ அல்லது மீப்பெரு மதிப்பையோ பெறுவதில்லை. இப் புள்ளிகள் 'வளைவு மாற்றப் புள்ளிகள்' எனப்படும்.

தொடுகோடு கிடை நிலையாக இருக்கும் வளைவு மாற்றப் புள்ளியிடத்து

(i) $\frac{dy}{dx}=0$

(ii) $\frac{dy}{dx}$-ன் ராசி மாருது.

[குறிப்பு : தொடுகோடு கிடை நிலையாக இல்லாமலே வளை வரையின்மீது வளைவு மாற்றப் புள்ளிகள் E-ல் உள்ளதுபோல் இருக்க முடியும். ஆனுல் அவை திருப்புப் புள்ளிகளுடன் (அதாவது) மீச்சிறு அல்லது மீப்பெரு புள்ளிகளுடன் கலந்து வரமாட்டாது. E என்ற புள்ளியில் $\frac{dy}{dx}$ பூச்சியம் ஆகாது. எந்தெந்த வளைவுமாற்றப் புள்ளிகளிடத்துத் தொடுவரை கிடையாக உள்ளதோ, அவையே திருப்பப் புள்ளிகளுடன் கலந்து காணப்படும்.

ஒரு வளைவு மாற்றப் புள்ளியைச் சூழ்ந்து, $\frac{dy}{dx}$ ராசி மாருதிருப் பதினுல், அதன் வளருவீதம் பூச்சியம் ஆகும்.

(அதாவது) $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$ ஆகும்.

ஆகவே, ஒரு வளைவு மாற்றப் புள்ளியிடத்து $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ ஆகும்.

ஆனால், $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ ஆவதிலிருந்து அது வளைவு மாற்றப்புள்ளி என்று நிர்ணயித்துவிட முடியாது. $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ ஆகியும் அது ஒரு திருப்பப் புள்ளியாக இருக்கக் கூடும். இதற்கு $\frac{dy}{dx}$-ன் குறியைக் கவனிக்க வேண்டும்.

மீச்சிறு, மீப்பெரு மதிப்புகளைக் காண விதிகள்

நாம் இதுவரை மீச்சிறு, மீப்பெரு மதிப்புகளைப் பற்றி கண்ட பண்புகளிலிருந்தும், வளைவு மாற்றப் புள்ளிகளின் பண்புகளிலிருந்தும் எப்படி $y=f(x)$ எனக் கொடுக்கப்பட்ட சார்பிற்கு மீச்சிறு, மீப்பெரு மதிப்புகள் காண முடியும் என்பதைத் தொகுத்து விவரிப்போம்.

(i) $y = f(x)$-ன் வகைக்கெழு $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ ஐக் காண்க.

(ii) $f'(x)=0$ என ஈடு செய்து, இச் சமன்பாட்டைத் தீர்வு காண்க. இச் சமன் பாட்டின் தீர்வுகள் α, β, γ...என்க.

(iii) $f''(x)$ ஐக் காண்க. $f''(x)$-க்கு வரும் கோவையில், $x=\alpha$ எனப் பிரதியிடுக.

$f''(\alpha)$ எதிர் ராசியானால், $x=\alpha$ என்பது ஒரு மீப்பெரு திருப்பப் புள்ளியாகும்.

$f''(\alpha)$ நேர் ராசியானால், $x=\alpha$ என்பது ஒரு மீச்சிறு திருப்பப் புள்ளியாகும்.

$f''(\alpha)$ பூச்சியமானால், $x = \alpha$-ன் அருகில் $f'(x)$-ன் ராசியைக் காண்க.

$f(x)$-ன் ராசி நேர் ராசியிலிருந்து எதிர் ராசியாக மாறினால், $x=\alpha$ என்னும் புள்ளி மீப்பெருப் புள்ளியாகும்.

$f'(x)$-ன் ராசி எதிர் ராசியிலிருந்து நேர் ராசியாக மாறின் $x=\alpha$ என்னும் புள்ளி மீச்சிறுத் திருப்பப் புள்ளியாகும்.

$f'(x)$-ன் ராசி மாறாதிருந்தால், அஃது ஒரு வளைவு மாற்றப் புள்ளியாகும்.

இதேபோல் மற்ற தீர்வுகள் β, γ..............என்பவற்றை ஒவ்வொன்றுகச் சோதித்து மீச்சிறு, மீப்பெரு மதிப்புகளேக் காணலாம்.

விளக்க எடுத்துக்காட்டு 1: $3x^4-4x^3+5$-ன் திருப்புப் புள்ளிகளேக் கண்டறிக.

$f(x) = 3x^4-4x^3+5$ என்க.

$f(x) = 12x^3-12x^2 = 12x^2(x-1)$

திருப்புப் புள்ளிகளிடத்து $f'(x)=0$ ஆகும்.

$12x^2(x-1)=0$

$\therefore$ $x=0$ அல்லது 1 ஆகும்.

இனி, $f''(x)=36x^2-24x$

இதில் $x=1$ எனப் பிரதியிட

$f''(x)=36-24=12$

இது நேர் ராசி எண்ணுகும்.

$\therefore$ $x=1$ என்னுமிடத்து $f(x)$ மீச்சிறு மதிப்பு எய்தும். மீச்சிறு மதிப்பு$=f(1)=4$ ஆகும்

$x=0$ ஆகும் பொழுது $f''(x)=0$

எனவே $x=0$-க்கு அருகில், $f'(x)$-ன் ராசியைக் காண்க.

h என்பது ஒரு சிறிய நேர் ராசி எண்ணுகட்டும்.

அப்பொழுது $f'(-h) = 12(-h)^2(-h-1)$ இஃது ஓர் எதிர் ராசி எண்ணுகும்.

$\therefore$ $f'(h) = 12h^2(h-1)$; h மிகச் சிறிய எண்ணுவதால், $(h-1)$ எதிர் ராசியாகும்.

$\therefore$ $f'(h)$-ம் எதிர் ராசியாகும்.

ஆகவே, x ஆனது 0 மதிப்பின் வழியாகப் பெருகுங்கால், $f'(x)$-ன் ராசிக்குறி மாறவில்லே.

ஆக $f(0)$ ஆனது $f(x)$-ன் திருப்பமதிப்பல்ல. ஆனல் $x=0$ என்பது சார்பின் ஒரு வளைவு மாற்றப் புள்ளியாகும்.

விளக்க எடுத்துக்காட்டு 2 : வாய் திறந்த உருளை வடிவாகிய ஒரு நீர்த் தொட்டியின் அடிப்பாகம் வட்டவடிவமானதாய்க் குறித்த அளவு நீரைக் கொள்ளத் தக்கதாய் அமைக்கப்பட்டுள்ளது. அதற்கு ஈயம் பூசுவதற்கு ஆகுஞ் செலவு மீச்சிறியதாவதற்கு அதன் ஆழத்திற்கும், ஆரத்திற்கும் உள்ள தொடர்பு என்ன ?

நீர்த் தொட்டியின் ஆழம் h என்றும், ஆரம் r என்றும் கொள்க.

அதன் கொள்ளவு $\pi r^3 h = C$ (ஒரு மாறிலி)

ஈயப் பூச்சுக்கு உரிய பரப்பு மீச்சிறியதானல், செலவும் மீச்சிறியதாகும்.

பூச்சுக்காகும் பரப்பு $\pi r^2 + 2\pi r h = A$ என்க.

A-ன் மதிப்பை ஒரே மாறியைக் கொண்டு குறிப்பிட்டால்,

$$A = \pi r^2 + 2\pi r \frac{C}{\pi r^2} = \pi r^2 + \frac{2C}{r} \text{ ஆகும்.}$$

பரம்பு மீச்சிறியதாகுங்கால்,

$$\frac{dA}{dr} = 0 \text{ ஆகும்.}$$

$$(\text{அதாவது}) = \frac{dA}{dr} = 2\pi r - \frac{2C}{r^2} = 0$$

$$\therefore \quad C = \pi r^3$$

$$\text{ஆனல்}, \ C = \pi r^2 h \qquad \therefore \ \pi r^2 h = \pi r^3$$

$$\therefore \ h = r$$

$$\text{இதனுடன்}, \ \frac{d^2A}{dr^2} = 2\pi + \frac{4C}{r^3} = 2\pi + \frac{4\cdot\pi r^3}{r^3} = 6\pi$$

இது நேர் ராசியாகும்.

$\therefore$ ஈயப்பூச்சுக்குரிய பரப்பு, $h=r$ ஆகுமிடத்துச் செலவும் மீச்சிறியதாகும்.

விளக்க எடுத்துக்காட்டு 3: x^4-ன் திருப்பப் புள்ளிகளைக் காண்க.

$$f(x) = x^4$$

$$f'(x) = 4x^3$$

திருப்பப் புள்ளியிடத்து $f'(x) = 0$ ஆகவேண்டும்.

$$\therefore\ 4x^3 = 0$$

$$\therefore\ x = 0$$

$$f''(x) = 12x^2$$

$x=0$ ஆகுமிடத்து $f''(x) = 0$ ஆகிறது. ஆகவே $x=0$ என்னு மிடத்து மீப்பெரு மதிப்பா அல்லது மீச்சிறு மதிப்பா என்று சொல் வதிற்கில்லை.

ஆகவே, $f'(x)$-ன் ராசியை $x=0$ஆல் சுட்டிக் காண்போம்.

$x=-h$ ஆனால், $f'(-h) = 4(-h)^3 = -4h^3$, ஓர் எதிர்ராசி எண்ணாகிறது.

$x = h$ ஆனால், $f'(h) = 4h^3 = +4h^3$, ஒரு நேர் ராசி எண்ணா கிறது.

ஆகவே $x=0$ இடத்துக் கொடுக்கப்பட்ட சார்பு ஒரு மீச்சிறு மதிப்பை அடைகிறது.

மீச்சிறு மதிப்பு $= 0^4 = 0$ ஆகும்.

[குறிப்பு: இங்கு $f'(x) = 0$ ஆக இருந்தும், புள்ளி வளைவு மாற்றப் புள்ளி ஆகவில்லை. ஒரு வளைவு மாற்றப் புள்ளியாவதற்கு $f'(x) = 0$ என்பது தேவை. ஆனால், அது போதாது. மேலும், $f'(x)$ அம்மதிப்பிடம் குறிமாற வேண்டும்; அல்லது $f'(x)$ அப் புள்ளியைச் சுட்டி ராசி மாறுமலிருக்க வேண்டும்.]

5. பொருளாதாரத் துறையில் வகைக்கெழுவின் பயன்பாடுகள்

(i) இறுதிநிலை வருவாய் சார்பு (The Marginal Revenue function)

கொடுக்கப்பட்ட தேவை சார்பிலிருந்து (Demand function) இறுதிநிலை வருவாய்ச் சார்பை அடைவதற்கு வகைக் கெழுக் கருத்தைப் பயன்படுத்துவோம்.

X என்னும் ஒரு பொருளில் (commodity) வேண்டப்படுவது x என்றும், விலை p என்றும், தேவைத் தொடர்பு (Demand Relation) $p = a - bx = \phi(x)$ (i) என்றும் கொள்வோம்.

எனின், மொத்த வருவாய்ச் சார்பு (Total Revenue function)

$R = px = ax - bx^2$ ஆகும்.

இப்பொழுது, 'இறுதிநிலை வருவாய்' (Marginal Revenue) என்னும் கருத்தைக் கீழ்க்காணும் முறையில் வரையறுக்கலாம்.

'உற்பத்தியின் (இறுதிநிலையாகக் கொள்ளக் கூடிய) ஒரு நிலையில், விற்பனையில் ஏற்படும் சிறிய அலகளவு மாற்றத்திற்கும், அதையொட்டி மொத்த வருவாயில் ஏற்படும் சிறிய மாற்றத்திற்கும் உள்ள விகிதங்களின் எல்லை மதிப்பே' இறுதிநிலை வருவாய் எனப்படும்.

இதன்படி, x-ல் ஏற்படும் மீச்சிறு மாற்றத்தை δx என்னும், இதனால் மொத்த வருவாய் R-ல் ஏற்படும் சிறிய மாற்றத்தை δR எனவும் குறிப்பிடுவோம்.

$$\therefore \frac{\delta R}{\delta x} = \frac{\{a(x+\delta x) - b(x+\delta x)^2\} - \{ax - bx^2\}}{\delta x}$$

$$= \frac{ax + a\delta x - bx^2 - 2bx\delta x - b(\delta x)^2 - ax + bx^2}{\delta x}$$

$$= \frac{(a\,\delta x - 2bx\,\delta x - b\,\delta x)^2}{\delta x}$$

$$= a - 2bx - b.\delta x$$

$$\therefore \underset{\delta x \to 0}{Lt} \frac{\delta R}{\delta x} = a - 2bx$$

$$\text{(அதாவது)}\ \frac{dR}{dx} = a - 2bx$$

ஆகவே மொத்த வருவாய் R என்பது x என்னும் தேவைப்படும் பொருளின் சார்பாகக் கொடுக்கப்பட்டால், இறுதிநிலை வருவாய் என்பது xஐ ஒட்டிய R-ன் வகைக் கெழு $\frac{dR}{dx}$ ஆகும்.

இவ்விதமாக இறுதிநிலை வருவாயை வரையறுப்பதே நுட்பம் வாய்ந்த சரியான முறையாகும்.

$$\text{எனவே, இறுதிநிலை வருவாய்} = \frac{dR}{dx} = \frac{d}{dx}\{x \cdot \phi(x)\}$$

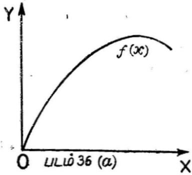
(ii) சராசரி, இறுதிநிலைமதிப்புகளுக்குள்ள தொடர்பு (Relationship between average and Marginal Values)

விலைக் கொள்கை (Price Theory) யைக் கருதும் ஆரம்ப நிலையில், ஒரு நிறுவனத்தின் 'சராசரி வருவாய் வளைவரை'(Average revenue curve) 'இறுதிநிலை வருவாய் வளைவரை' (Marginal revenue curve) ஆகிய இரண்டு வளைவரைகளும் ஒரே வரைபடத்தில் காண்பிக்கப்படுவதைக் கவனித்திருப்போம்.

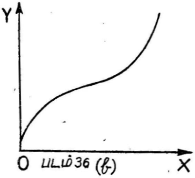
இதே போல் 'சராசரிச் செலவு'(Average cost), 'இறுதி நிலைச் செலவு' ஆகியவற்றைக் காண்பிக்கும் இரண்டு வளைவரைகளும் ஒரே வரைபடத்தில் காண்பிக்கப்படுவதைக் கவனித்திருப்போம்.

இந்த இரண்டு வகையான வளைவரைகளுக்குமுள்ள தொடர்பை அறிவது நலமாகும்.

படத்தில் காட்டியுள்ள வளைவரைகளைப் போன்ற நியம வடிவ வளைவரைகளையே இங்குக் கருதுவோம்.



படம் 36 (a)



படம் 36 (b)

படம் 36 (a)-ல் உள்ள வளைவரை ஒரு போட்டியில்லா நிறுவனத்தின் மொத்த வருவாய் வளைவரைக்கு எடுத்துக்காட்டாக அமைந்துள்ளது. படம் 36 (b) ஒரு நிறுவனத்தின் மொத்தச் செலவு (Total cost average) வளைவரைக்கு எடுத்துக் காட்டாக உள்ளது.

இனி, $f(x)$ மொத்த வருவாய் வளைவரையாகட்டும். இங்கு x என்பது ஓர் உற்பத்தி நிலையைக் குறிக்கிறது.

எனின், $\frac{f(x)}{x}$ என்பது சராசரி வருவாய் வளைவரையாகும்.

$$\frac{f(x)}{x} = g(x) \text{ எனக் கொள்க.}$$

இப்பொழுது "சாரசரி வருவாய் வளைவரை மீப்பெரு மதிப்பு அடையும் புள்ளியில், அவ்வளைவரையும், இறுதிநிலை வருவாய் வளைவரையும் ஒன்றையொன்று வெட்டிக் கொள்ளும்" என நிறுவலாம்.

இதை ஆய்வுரை மூலமாகப் பெறுவதற்குப் பெரு முயற்சி தேவைப்படும். அப்பொழுதும் கருத்து தெளிவு பெறாது.

ஆனல், இதை வகைக்கெழு கருத்தைப் பயன்படுத்தி எளிய முறையில் நிறுவலாம் என்பதைப் பார்ப்போம்.

$g(x)$ அதாவது $\frac{f(x)}{x}$ -க்கு ஒரு மீப்பெரு மதிப்பு இருக்கத் தேவையான நிபந்தனை

$$g'(x) = 0$$

அதாவது $$\frac{x \cdot f'(x) - f(x)}{x^2} = 0$$

$$\therefore \; f'(x) = \frac{f(x)}{x} = g(x) \text{ ஆகவேண்டும்.}$$

ஆகவே, சராசரி வருவாய் மீப் பெரு மதிப்பை அடையச் செய்வதற்குத் தேவையான உற்பத்தி நிலை x எதுவோ, அதே உற்பத்தி நிலை, இறுதி நிலைவருவாயைச் சராசரி வருவாய்க்குச் சமமாக்கும் எனப் பெறப்படுகிறது.

இன்னமும், $f'(x)$-ன் வளை வரையானது $g(x)$ அதாவது $\frac{f(x)}{x}$ –ன் வளைவரையை அதன் மீப்பெரு புள்ளியில் வெட்டுமெனக் காட்ட வேண்டி உள்ளது.

இதற்கு நிரூபணம் பின் வருமாறு :

$g(x) = \frac{f(x)}{x}$ -ன் மீப்பெரு புள்ளியிலே,

$g'(x) = 0$ என அறிவோம்,

ஆனுல் அட் புள்ளியில் $f'(x)$ (இறுதிநிலை வருவாய் வளைவரை) வகைக் கெழுவாகிய $f'(x)$ ஆனது, படம் 36 (a)–ல் காட்டியுள்ள உருவத்தைக் கொண்ட சார்புக்குப் பூச்சியம் ஆகாது.

ஒரே புள்ளிவழிச் செல்லும் இரு வளை வரைகளின் சரிவுகள் வெவ்வேருக இருப்பதிஞல், அவை ஒன்றையொன்று வெட்டிக் கொள்ளுமெனக் கூற முடியும்.

மேலே கூறியுள்ள முறையை அனுசரித்து, இறுதிநிலை செலவுச் வளைவரை (marginal cost curve) சராசரிச் செலவு வளைவரையின் (average cost curve) மீச்சிறு புள்ளியிடத்தில் வெட்டும் என நிறுவலாம்.

(iii) தேவை நெகிழ்ச்சி (Elasticity of Demand)

ஒரு பொருளுக்கு இருக்கும் அங்காடித் தேவையை (Market Demand) $x = \phi(p)$ என்னும் தேவைச் சார்பால் குறிக்கலாம.

இங்கு p என்பது விலையையும், x என்பது அந்த விலையில் வேண்டப்படும் பொருளின் அளவையும் குறிக்கின்றது.

இப்பொழுது 'தேவை நெகிழ்ச்சி' என்னும் கருத்தைப் பார்ப் போம்.

வரையறை :.

குறிப்பிட்ட நிலையில் உள்ள விலை, தேவை என்பவற்றில், விகிதா சார விலை ஏற்றத்திற்குத்தக விகிதாசார தேவை குறைவின் வீதத்தை அளப்பதே தேவை நெகிழ்ச்சி எனப்படும்.

ஆகவே தேவை நெகிழ்ச்சி $\in = \dfrac{\dfrac{dx}{x}}{\dfrac{dp}{p}} = \dfrac{d(\log x)}{d(\log p)}$

இதன் மதிப்பு எல்லா விலை அளவிலும் எதிர் ராசியாகவே இருப்பதால், ஓர் எதிர் குறியிட்டு அதை நேர் ராசியாக மாற்றி எழுதுவது பொருத்தமாகக் கருதப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு : தேவை சார்பு $x^{4/5} = \dfrac{8}{p}$ எனக்கொள்வோம்.

$$\therefore\ x = \left(\frac{8}{p}\right)^{5/4}$$

$$\log x = \tfrac{5}{4}\log 8 - \tfrac{5}{4}\log p$$

p ஐ ஒட்டி வகைக் கெழு காண,

$$\frac{d}{dp}(\log x) = -\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{p}$$

$$\therefore \frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{dp} = -\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{p}$$

$$\therefore \frac{p}{x}\frac{dx}{dp} = -\frac{5}{4}$$

(அதாவது) $$\frac{\frac{dx}{x}}{\frac{dp}{p}} = -\frac{5}{4}$$

$$\therefore \text{தேவை நெகிழ்ச்சி} = \epsilon = \frac{\frac{dx}{x}}{\frac{dp}{p}} = -\frac{5}{4}$$

$\therefore$ தேவை நெகிழ்ச்சியை நேர் ராசியாகக் கொண்டு $\frac{5}{4}$ எனக் கொள்ளலாம்.

(iv) விற்பனை முற்றுரிமைக்குப் பயன்பாடு (Applications to Monopoly)

விற்பனை முற்றுரிமை உடையவருக்கு மீப்பெரு லாபம் கிட்டு வதற்குத் தேவையான நிபந்தனைகளை ஆராய்வோம்.

$p = f(x)$ என்பது அவரை எதிர் நோக்கி இருக்கும் தேவைச் சார்பாகுக.

இங்கு p என்பது விலை ; x என்பது வேண்டப்படும் அளவு.

அப்பொழுது மொத்த வருவாய் (Total revenue)

$$R(x) = px = f(x).x$$

$T(x)$ என்பது அவரது செலவு சார்பாகட்டும்.

அவரது இலாபம் $\pi(x)$ எனில்,

$$\pi(x) = R(x) - T(x)$$

π (x) மீப்பெரு மதிப்படைய தேவையானதும், போதுமானது மான நிபந்தனைகள் :

$$\frac{d\pi}{dx} = 0 \qquad \text{...(i)}$$

$$\frac{d^2\pi}{dx^2} < 0 \qquad \text{...(ii)}$$

என்றுகும்.

(i) நிறைவேற, $\frac{dR(x)}{dx} - \frac{dT(x)}{dx} = 0$

(அதாவது) இறுதிநிலை வருவாய் = இறுதிநிலைச் செலவு என்பதாகும்.

(ii) நிறைவேற, $\frac{d^2R(x)}{dx^2} - \frac{d^2T(x)}{dx^2} < 0$

(அதாவது) இறுதிநிலை வருவாயின் மாறுவீதம், இறுதிநிலைச் செலவின் மாறுவீதத்தைவிடக் குறைவாக இருக்கும் நிலை ஏற்பட வேண்டும்.

6. இயற்பியல் துறையில் வகைக்கெழுவின் பயன்பாடு

(i) குறிப்பிட்டதொரு கணத்தில் வேகத்தை அறிவதற்கு ஒரு கோவை.

இப்பொழுது ஒரு நேர்கோட்டில் இயங்கும் ஒரு துகளின் இயக்க நிலையைக் கருதுவோம்.

துகள் இயங்கும் நேர்கோட்டை X அச்சாகக் கொள்வோம். ஒரு குறிப்பிட்ட கண நேரத்திலிருந்து t நேரம் கழிந்தபின் அத் துகளானது ஆதியிலிருந்து s தொலைவில் உள்ளதாகட்டும்.

s ஆனது t ஐப் பொறுத்துள்ளதால், அது t-ன் சார்பாகும். $t+\delta t$ நேரத்தில் இயங்கும் துகளானது ஆதி 0 விலிருந்து $s+\delta s$ தூரத்தில் இருக்கட்டும்.

அப்படியானுல் அது δt இடைவெளியில் δs தூரம் சென்றதாகும்.

அப்பொழுது $\frac{\delta s}{\delta t}$ என்பது δt இடைவெளியில் துகள் சென்ற சராசரி வேகத்தை உணர்த்தும்.

$\delta t \to 0$ ஆகுங்கால், $\delta s \to 0$ ஆயினும், $\frac{\delta s}{\delta t}$ என்பது ஒரு வரம்பினை அடையும்.

(அதாவது) $\underset{\delta t \to 0}{Lt} \frac{\delta s}{\delta t} = \frac{ds}{dt}$ என்ருகும்.

$\frac{ds}{dt}$ ஐ v என்று குறிப்பது வழக்கம்

$$\therefore \; v = \frac{ds}{dt}$$

இனி, $\frac{ds}{dt}$ ஆனது நேர் இராசியானுல், t-யுடன் s-ம் பெருகும். துகளும் அச்சின் வழியாக நேர் ராசி திசையில் இயங்குவதாகும். $\frac{ds}{dt}$ எதிர் ராசியானுல், t பெருகுங்கால், s குறைவுறுவதாகும்.

[குறிப்பு 1 வரைபட விளக்கக் குறிப்பில், கால-நேர வரையில் v ஆனது வரையின் சரிவைக் குறிக்கும்.]

(ii) வேக முடுக்கத்தை அறிதற்கொரு கோவை (Expression for acceleration)

ஒரு துகள் இயங்கும் காலத்தில், அதன் வேக அதிகரிப்பு வீதமே முடுக்கமென அறியப்படும். வேகம் v ஆனது t-ன் சார்பாகும்.

யாதேனுமொரு t நேரத்தில் இயங்கும் துகளின் வேகம் v ஆகவும்,

$t + \delta t$ நேரத்தில் $v + \delta v$ ஆகவும் இருக்குமானுல், அப்பொழுது δt இடைவெளியில் வேகமாற்றம் δv ஆகும்.

அப்பொழுது $\frac{\delta v}{\delta t}$ ஆனது இவ்விடை வெளியில் சராசரி வேக மாறுவீதம் அல்லது சராசரி முடுக்கம் எனப்படும்.

δt ஆனது அளவின்றி சிறியதாகுங்கால், (அதாவது $\delta t \to 0$ ஆகும்போது, சராசரி வேகம் அடையும் எல்லை மதிப்பே t கணத்தில் நிகழும் முடுக்கமாகும்.

இம் முடுக்கத்தை α எனக் குறிப்பிட்டால்,

$$\alpha = \frac{dv}{dt} \qquad \ldots(i)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2s}{dt^2} \qquad \ldots(ii)$$

மேலும், $\alpha = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{dv}{dt} \cdot v = v\frac{dv}{ds}$ ...(iii)

$$\alpha = v\frac{dv}{ds} = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}(v^2) \qquad \ldots(iv)$$

மேலும், $F = m\alpha$ ஆதலின், $F = \frac{d}{dt}(mv)$

$F = \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$ ஆகும்.

(vi) கோண வேகமும், கோண முடுக்கமும் (Angular velocity and acceleration)

ஒரு தளத்தில் ஒரு நிலையான OX என்னும் நேர்கோட்டின் மேலுள்ள O என்பதொரு நிலையான புள்ளியைச் சுற்றி P என்னும் துகளானது சுழலுவதானால், யாதேனுமொரு நேரம் t-ல் கோணம் XOP ஆவது θ ஆகக் கொள்ளப்பட்டால், நேரத்தைப் பொறுத்து θ-ல் நிகழும் மாறுவீதமே O என்னும் புள்ளியைச் சுற்றும் P-யினது கோண வேகம் அல்லது OP என்னும் நேர்கோட்டின் கோண வேகம் எனப்படும்.

கோண வேகமானது ஒரு சீராக நிகழாவிட்டால், கோண வேகத்தின் மாறுவீதம் கோண முடுக்கம் எனப்படும். t என்னும் எக் கணத்திலேனும் காணப்படும் கோண முடுக்கமானது,

$\frac{dw}{dt}$ அல்லது $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ அல்லது $w\frac{dw}{d\theta}$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு : ஒரு நிலையான் வெப்பநிலையில், ஒரு வாயுவின் கன பரிமாணம் v, அதன் அழுத்தம் p-க்கு மாறுவிகிதத்தி லுள்ளது. $v=5$ ஆகும்போது, $p=5$ எனின், $p=4$ ஆகும்போது p ஐப் பொறுத்து v அடையும் பெருகு வீதத்தைக் காண்க.

கணக்கின்படி, $v \propto \frac{1}{p}$

$$\therefore v = \frac{k}{p} \text{ ஆகட்டும் } (k \text{ ஒரு மாறிலி}).$$

$v=5$ ஆனால், $h=5$ $\quad \therefore 5 = \frac{k}{5} \quad \therefore k = 25$ ஆகும்.

$$\therefore v = \frac{25}{p} \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore \frac{dv}{dp} = -\frac{25}{p^2}$$

p 4 ஆகுமிடத்து, $\frac{dv}{dp} - -\frac{25}{16}$ ஆகும்.

$\therefore$ p ஐப் பொறுத்து கன பரிமாணத்தின் மாறுவீதம் $-\frac{25}{16}$ இங்குக் குறைராசியின் பொருள் p பெருகுமிடத்து v குறைவுறும் என்பதாம்.

பயிற்சி 3-1.

வடிவ கணித பயன்பாடுகள்

1. $y=3x^1+2x+5$ என்னும் வளைவரை y அச்சை வெட்டு மிடத்தில் அதன் தொடு கோட்டின் சமன்பாட்டையறிக. [விடை : $2x-y+5=0$]

2. $y=\frac{x^3}{3}-x^2$ என்னும் வளைவரையின் மீதுள்ள எப் புள்ளி களிடத்து அமைக்கும் தொடு கோடானது X அச்சுக்கு இணையாக இருக்குமெனக் காண்க. [விடை : $(0, 0)$; $(2, -\frac{4}{3})$]

3. $y^2=x$, $x^2=y$ என்னும் வளைவரைகள் $(1, 1)$ என்னுமிடத் தில் வெட்டிக் கொள்ளுங்கால் உண்டாகும் இடைக் கோணத்தைக் கண்டறிக. [விடை : $\tan\theta = \frac{3}{4}$]

4. $y=4-x^2$ என்னும் வளைவரைக்கு $(1, 3)$ என்னுமிடத்தில் வரையப்படும் வரைச் செங்கோட்டின் (Normal) சமன் பாடு காண்க. [விடை : $x-2y+5=0$]

5. $y=5-2x^2$ என்னும் வளைவரைக்கு $x=1$ என்னுமிடத்தில் அமைக்கும் தொடு கோடானது இரண்டு அச்சுகளையும் A, B என்னுமிடங்களில் வெட்டுமானால் OAB என்னும் முக்கோணத்தின் பரப்பளவைக் கண்டறிக.

6. $y = \dfrac{2x}{1+x^2}$ எனக் கொடுக்கப்பட்ட வளை வரைக்கு ஆதியிடத்தில் அமையும் தொடு கோட்டின் சரிவு 2 ஆகுமென நிறுவுக.

பயிற்சி 3-2.

தோராய மதிப்புகள், பிழைகள் பற்றிய பலன்பாடுகள்

1. 40 செமீ. பக்கமுள்ள சதுரத் தகடொன்று காய்ச்சப் படுங்கால் ஒரே மாதிரியாக விரிவுறுகின்றது. ஒவ்வொரு பக்கமும் ·03 செமீ. நீண்டவிடத்து அதன் பரப்பளவில் நேர்ந்த ஏற்றத்தை அறிக. [விடை : 2·4 ச. செமீ.]

2. ஒரு வட்டத்தின் ஆரத்தை அளக்குங்கால் 2% பிழையேற்பட்டது. அதன் (i) சுற்றளவு (ii) பரப்பளவு ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுவதில் நேரும் சதவீதப் பிழையைக் கண்டறிக. [விடை : 2%, 4%]

3. ஒரு கோபுரத்தின் அடிவாரத்திலிருந்து 400′ தள்ளியிருந்து நோக்கும் பொழுது அக் கோபுரத்தின் ஏற்றக் கோணம் 30° ஆகும். ஏற்றக் கோணத்தைக் கண்டறிதலில் 5′ பிழை ஏற்படுமானால், அதன் உண்மை உயரத்தில் நேரும் தோராயப் பிழையைக் கணித்தறிக. [விடை: 9·3]

4. ஒரு முக்கோணத்தின் கோணம் A ஆனது அளக்குமிடத்து 63° ஆக இருந்தது. முக்கோணத்தின் பரப்பு $\frac{1}{2}bc\sin A$ என்னும் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திக் கணிக்கப்பட்டது. கோணம் A ஐ அளப்பதில் 15′ பிழை ஏற்பட்டிருந்தால் கணக்கிட்ட பரப்பில் உண்டாயிருக்கக் கூடிய தோராய மதிப்பைக் கண்டறிக.

[விடை : $\frac{5\pi}{36}\cot 63°$]

பயிற்சி 3-3.

தொடர்புறு வீதங்கள் (Related rates)

1. ஒரு கல்லானது ஒரு குட்டையினுள் எறியப்படுகின்றது. அதனால் உண்டாகும் அலைகள் வட்ட வடிவமாகப் பரவுவனவாகும். அதன் வெளிப்புற அலையின் ஆரம் விநாடிக்கு $1\frac{1}{2}''$ பெருகுவதாகக் காணப்படுகிறது. அலையின் ஆரம் $10''$ ஆகவுள்ள பொழுது, அலை வட்டத்தின் பரப்பு எவ்வளவு விரைவாகப் பெருகுவதாகுமெனக் காண்க.

[விடை : 30π ச. அங்/செக.]

2. நீரில் சொரிந்த எண்ணெயானது வட்டவடிவாகப் பரவுகிறது. அதன் பரப்பு நிமிடத்திற்கு 6 சதுர அங்குலம் வீதம் பெருகுகிறது. அங்ஙனமானால், ஆரம் 2 அங் ஆக உள்ள பொழுது அந்த ஆரம் எவ்வளவு வேகமாக வளருவதாகும் ? [விடை : $3/2\pi$]

3. ஒரு கோணத்தின் கன பரிமாணம் ஒரு விநாடிக்கு 2 கன செமீ. வீதம் பெருகுகிறது. அதன் கன பரிமாணம் 100 கன.செமீ. உள்ள பொழுது அதன் ஆரமும், புற தளப் பரப்பும் என்ன வீதத்தில் பெருகுமெனக் காண்க.

$$\left[\text{விடை : } \frac{r}{150},\ \frac{4}{r},\ r = \sqrt[3]{75/\pi}\right]$$

4. 6 அடி உயரமுள்ள ஒருவன் மணிக்கு 4 மைல் வீதம் 20 அடி உயர முள்ள விளக்குத் தூணிலிருந்து நடந்து செல்கிறான். அவனது நிழலின் நீளம் எந்த வீதத்தில் அதிகரிக்கிறது ? [விடை : $88/35'$/செக.]

5. ஒரு வட்டமுகக் கூருருளை வடிவாகிய வடிகட்டும் காகிதமானது $1\frac{1}{2}''$ ஆரமும், $4''$ ஆழமும் கொண்டிருக்கிறது. அதிலிருந்து நிமிடத்திற்கு 2 கன அங்குலம் வீதம் நீர் வடிந்து விழுகிறது. நீராழம் $2\frac{1}{2}''$ ஆக இருக்கும்போது, நீர் மட்டம் என்ன வீதத்தில் இறங்குவதாகும் ?

[விடை : $-512/675\pi$ அங்/செ.க.]

பயிற்சி 3-4.

மீப்பெரு மதிப்பும், மீச்சிறு மதிப்பும்

1. கீழ்க்கண்ட சார்புகளுக்கு மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புகளைக் காண்க :

   (i) $x^3-3x+11$ [விடை : -1, 13, 1, 9]

   (ii) $2x^3+5x^2-4x+7$ [விடை : $\frac{1}{3}$, $6\frac{8}{27}$, -2, 19]

   (iii) $x^4-8x^3+22x^2-24x+12$ [விடை ; 1, 3; 2; 4, 3, 3]

   (iv) $(x+3)(6-x)$ [விடை : 3/2, 81/4]

   (v) $3\cos x+4\sin x$ [விடை : மீ.பெ. 5, மீ சி. -5]

2. ஒரு வளை வரையானது $y=2x\,(1+x^2)$ என்னும் தொடர்பால் குறிக்கப்படுகின்றது. அது $(1, 1)$ என்னுமிடத்தில் மீப்பெரு நிலைத் தூரத்தையும் $(-1,-1)$ என்னுமிடத்தில் மீச்சிறு நிலைத் தூரத்தையும் கொண்டுள்ளது என நிறுவுக.

3. ஒரு x-ன் முப்படிச் சார்பானது $x=1$ ஆகும் பொழுது மீப்பெரு மதிப்பு 4-க்குச் சமமாகவும், $x=5$ ஆகும் பொழுது மீச்சிறு மதிப்பு -28-க்குச் சமமாகவும் இருக்கப் பெறின், அச் சார்பைக் கண்டறிக.
   [விடை : $x^3-9x^2+15\,x-3$]

4. ஒரு பின்னமும் அதன் வர்க்கமும் மீப் பேரளவு வித்தியாசப் பட்டிருக்குமாறு அமையும் பின்னத்தைக் காண்க. [விடை : $\frac{1}{2}$]

5. ஒரு செவ்வகத்தின் சுற்றளவு 100″. அதன் பரப்பளவு மீப் பெரியதாகுமிடத்து அதன் பக்கங்களைக் கண்டறிக.
   [விடை : 25″, 25″]

6. u-ம், v-ம் நேர் ராசிகளாகவும், $u\ v$ மாறிலியாகவும் இருக்குமானால், $u=v$ ஆகுமிடத்து, $u+v$ ஆனது மீச்சிறு மதிப்பினதாகுமென நிறுவுக.

7. AB ஆனது 8″ நீளமுள்ளது. AB-ல் $3\,AC^2+BC^2$ ஆனது மீச்சிறு மதிப்புடையதாகுமாறு C என்னும் புள்ளியைக் கண்டறிக. [விடை : $AC = 2''$]

8. $ABCD$ என்னும் செவ்வகத்தில் $AC=9''$, $BC=6''$ ஆகும். CD-யில் $PC=x''$ ஆகுமாறு P என்னும் புள்ளி குறிக்கப் படுகின்றது. PA^2+PB^2 ஐ xஐ ஒட்டிக் காண்க. அது எப்பொழுது மீச்சிறு மதிப்பை அடைகிறது எனக் காண்க.

[விடை : $2x^2-18x+153$; மீச்சிறு மதிப்புக்கு P ஆனது CD-ன் மையப் புள்ளி ஆக வேண்டும்.]

9. 6 அடி நீளமுள்ள தொருமெல்லிய இரும்புக் கம்பியானது $ABCD$ என்னும் ஒரு செவ்வக வடிவமாக வளைக்கப்படு கின்றது. அங்ஙனமாகுங்கால், அக் கம்பி BC, CD, DA வழியே இரு மடிப்பாகவும், AB வழியே ஒரு மடிப்பாகவும் அமைந்துள்ளது. எனின் $ABCD$-ன் மீப்பெரு பரப்பைக் கண்டறிக.

[விடை : 3/4 ச. அடி]

10. $30''\times14''$ அளவுள்ள செவ்வக அட்டையின் நாற்புற மூலை களிலிருந்தும் சம பரப்புள்ள சதுரங்கள் வெட்டியெடுத்த பின் எஞ்சிய பாகத்தின் விளிம்புகள் மடிக்கப்பட்டு ஒரு செவ்வகப் பெட்டியாக அமைக்கப்படுகின்றது. இப் பெட்டியின் கொள்ளளவு மீப் பேரளவினதாக அமைய வேண்டுமானல், வெட்டி எடுக்கப்படும் சதுரத்தின் பக்கத்தைக் கண்டறிக. [விடை : 3″]

11. ஒரு கிரிக்கட் பந்தாட்டத் தரையானது ஒரு செவ்வக வடிவில் ஒவ்வொரு முனையிலும் அரை வட்டமொன்று அமைக்கப் பெற்று இருக்கிறது. அதன் சுற்றளவானது கால் மைல் ஓட்டப் பாதையாகப் பயன்படுத்தப்படல் வேண்டும். செவ்வக பாகம் மீப்பெரு பரப்பினதாக வேண்டுமானல், அத் தரையினது அளவுகளைக் காண்க.
[விடை : 110 கெ, 70 கெ.]

12. ஓர் ஒழுங்கான வட்டமுக உருளையின் வளை தளப் பரப்பும் முகங்களின் பரப்பும் கூடிய பரப்புத் தொகை கொடுக்கப் பட்டுள்ளது. அதன் உயரமானது அடிப்பாக ஆரத்திற்கு இரு மடங்காகுமிடத்து, அதன் கொள்ளளவு மீப்பேரள வினதாகுமெனக் காட்டுக.

13. இருபுற வாய்களும் மூடப்பட்ட நேர் வட்ட உருளை ஒன்று 12 சதுர அங்குல உலோகத் தகட்டால் செய்யப்பட

வேண்டியிருக்கின்றது. அதன் கொள்ளளவு மீப்பேரள வினதாதற்கு அதன் அடித்தளத்தின் பரப்பைக் காண்க. [விடை : 2 ச. அங்]

14. ஒரு மூடியற்ற வட்டதளங் கொண்ட உருளை வடிவாகிய நீர்த் தொட்டியானது πa^3 கன அளவு நீர் கொள்ளுமாறு ஓர் உலோகத் தகட்டால் செய்யப்படுகின்றது. அவ் வுலோகத் தகடு மீச்சிறு பரப்பளவினதாக வேண்டு மானல், அந் நீர்த் தொட்டியின் உயரத்தையும், அடித் தள ஆரத்தையும் கண்டறிக. [விடை : $r=a$; $h=a$]

15. ஒரு நேர் வட்டக் கூம்பினது அடித்தளத்து ஆரமும் உயரமும் சேர்ந்து 12″ நீள முண்டாகுமானல், அதன் மீப்பெரு கொள்ளளவினைக் கண்டறிக. [விடை : $256\pi/3$ கன அங்.]

16. ஒரு நீராவிக் கப்பலுக்கு நிலக்கரிக்காகவும், கூலிக்காகவும் ஆகும் தினச் செலவு முறையே $4\,k^3\,v^2$, $\frac{c^3}{v}$ என்னும் கோவைகளால் குறிக்கப்படுகின்றது. இங்கு k, c என்பன மாறிலிகளாகும். v என்பது வேகத்தைக் குறிக் கின்றது. கப்பல் பயணம் மிகச் சிக்கனமாகச் செலவு கட்டிவர வேண்டுமானல், நிலக்கரிக்காகுஞ் செலவு, கூலிக் காகுஞ் செலவில் பாதியாதல் வேண்டுமெனக் கண்டறிக.

பயிற்சி 3-5.

பொருளாதாரத் துறையில் பயன்பாடுகள்

1. ஒரு பொருள் X ஐ உற்பத்தி செய்யும் நிறுவனத்தின் மொத்த உற்பத்தி செலவு $C=8+2x+3x^2$ எனின், (x என்பது உற்பத்திப் பொருளின் அளவு, P இறுதி நிலை செலவுச் சார்பு) $MC=2+6x$ என நிறுவுக.

2. X என்னும் பொருளுக்கு ஒரு குடும்பத்திற்குப் பயன்பாடு சார்பு (utility function) $v=10\,x-3x^2$ எனின் இறுதி நிலைப் பயன்பாடு $MU=10-6x$ என நிறுவுக.

3. X என்னும் ஒரு பொருளை உற்பத்தி செய்ய மொத்த செலவுச் சார்பானது $TC=60-12\,x+2x^2$. எந்த உற் பத்தி நிலையில் TC மீச்சிறு மதிப்பை அடையும்? சராசரி

செலவுச் சார்பை (average cost function) கண்டு, இச் சார்பு எந்த உற்பத்தி நிலையில் மீச்சிறு மதிப்பை அடைகிறது எனவும் காண்க. அதன்பின் சராசரி செலவு வளை வரையின் மீச்சிறு புள்ளியிடத்து, இறுதி நிலைச் செலவும் சராசரிச் செலவும் சமமாகும் என நிறுவுக.

4. விற்பனை முற்றுரிமை பெற்றவரை எதிர்நோக்கி இருக்கும் தேவை வளைவரை $p=12-2x$ எனக் கொள்ளலாம். இங்கு x என்பது உற்பத்திப் பொருளின் அளவையும், p அதன் விலையையும் குறிக்கும். அவரது மொத்த செலவு வளைவரை $TC=20+2x$ எனக் கொண்டு, நிறுவனத்திற்கு மீப்பெரு இலாபம் தரும் உற்பத்தி நிலைகளையும், விலையையும் காண்க. [விடை : $x=\frac{5}{2}$; $p=7$]

5. தேவை வளைவரை $x = \dfrac{9}{p^{\frac{1}{2}}}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டால், தேவை நெகிழ்ச்சி $= \frac{1}{2}$ என நிறுவுக.

6. தேவை வளைவரை $x = \dfrac{b}{p^k}$ (b-ம், k-ம் மாறிலிகள்) எனக் கொடுக்கப்பட்டால், தேவை நெகிழ்ச்சி $=k$ என நிறுவுக.

பயிற்சி 3-6.

இயற்பியல் பயன்பாடுகள் (Physical application of the Derivative)

1. $s=50t-16t^2$ என்னும் நியமத்தை யொட்டியதாகும்படி மேலெறியப்பட்டதொரு கல்லானது t செகண்டில் s அடி தூரம் காற்றிடையே விரைந்தோடுகின்றது எனின், $\dfrac{ds}{dt}$ எதனைக் குறிப்பிடுகின்றது? ($t=1$ ஆகுமிடத்து அதன் மதிப்பென்ன? $\dfrac{ds}{dt}$ -ன் எதிர் ராசி மதிப்பின் பொருள் யாது? அக் கல்லால் அடையப்பட்ட மீப்பெரு உயரம் யாது? அது எறியப்பட்ட போதிருந்த துவக்க வேகத்தையும், அது தரை வந்து தாக்குங்கால் உள்ள வேகத்தையும் காண்க.

[விடை : 16; $39\frac{1}{16}$; 50'/செ.; $-50'$/செ.

2. ஒரு துகள் ஒரு நேர்கோட்டின் வழியே t செகண்டு களில் சென்ற தூரம் , $s=2t^3-9t^2+12t+6$ என்றதனுல் பெறப்படும். அதன் முடுக்கம் எப்பொழுது பூச்சிய மாகும் ? அச்சமயத்தின் வேகத்தை யறிக.
[விடை : $\frac{3}{2}$ செ. ; 3/2 அடி செ., 0-ஐ நோக்கி]

3. ஒரு நேர்கோட்டின் வழியே ஒரு துகளானது t செகண்டு களில் ஒரு நிலையான புள்ளியிலிருந்து கடந்து சென்ற தூரம் $s=20-5t+t^3$ என்னும் நியமத்தால் பெறப்படும். 10 செகண்டுகள் கழிந்த பின் அதன் வேகத்தையும், முடுக்கத்தையும் காண்க. [விடை : 295; 60]

4. ஒரு பொருளானது t செகண்டில் செல்லும் s அடி தூரம், $s=12t-t^3$ என்றதனுல் பெறலாகும். அதன் வேகம் எப்பொழுது, எவ்விடத்து மீச்சிறு மதிப்பினதாகும் ?

5. ஒரு நேர் கோட்டின் வழியே இயங்குவதொரு துகளின் தூர–நேர நியமம் $s=at+bt^3$ ஆகும். இங்கு a, b-க்கள் மாறிலிகளாகும். $t=4$ நேரத்தில் வேகம் பூச்சியமும், முடுக்கம் 12 அலகுகளும் ஆகுமெனின், a, b-க்களின் மதிப்புகளைக் காண்க. [விடை : $a=-24$; $b=\frac{1}{2}$]

6. $v=\dfrac{ds}{dt}$-ம், $g=\dfrac{d^2s}{dt^2}$-ம் ஆனுல், $g=v\dfrac{dv}{ds}$ ஆகு மெனக் காட்டுக.

7: ஒரு துகளானது ஒரு நேர்கோட்டில் இயங்குங் காலத் தில் 0 என்னும் நிலையான புள்ளியிலிருந்து t நேரத்தில் அது செல்லும் தூரம் $x=2\sin t+3\cos t$ என்பதனுல் பெறப்படும். எனின் அதன் முடுக்கம் எப்பொழுதும் புள்ளி 0-விலிருந்து அதன் தூரத்திற்கு எண்ணளவில் சமமாகுமெனக் காட்டுக.

8. ஒரு சக்கரம் சுழன்ற θ கோணமானது நேரம் tஐச் சார்த்தி $\theta=6t+\dfrac{3t^2}{2}-\dfrac{t^3}{3}$ என்னுஞ் சூத்திரத்தில் கொடுக்கப்படுகின்றது. இங்கு θ ஆரையன்களிலும், t செகண்டுகளிலும் அளக்கப்படுகின்றன. சக்கரம் நிற்ப தற்குமுன் எவ்வளவு நேரம் கழியுமென்பதையும், அது சுழன்ற மீப்பெரு கோணத்தையும் காண்க.
[விடை : 4·37 செகண்டுகள்]

9. ஒரு நிலையான அச்சைச் சுற்றிச் சுழலும் சக்கர மொன்று t நேரத்தில் சுற்றிய கோணம் θ ஆனது, $\theta=5\pi t\ (4-3t+t^2)$ என்னுஞ் சூத்திரத்தால் கொடுக்கப் படுகின்றது. இங்கு t செகண்டுகளாலும், θ ஆரையன் களாலும் அளக்கப்படுகின்றன. கோண வேகம் எப் பொழுது மீச்சிறு மதிப்பினதாகுமெனக் கண்டறிக. மேலும், 2 செகண்டுகள் கழித்து உண்டாகிய கோண வேகத்தையும், முடுக்கத்தையுங் கண்டறிக.

[1 செ; 20π/செ.; 30π/செ.க^2]

10. $x=A\cos(nt+B)$, $x=C\sin(nt+D)$; $x=E\cos nt+F\sin nt$ என்பவற்றுள் ஒவ்வொன்றும் $\frac{d^2x}{dt^2}+n^2x=0$ என்னும் ஒரே சமன்பாட்டை உண்டாக்குவதாகுமெனக் காட்டுக. [இங்கு A, B, C, D, E, F என்பன மாறிலி களாகும்.]

[குறிப்பு : இது சாதாரண சீரிசை இயக்கத்தின் வகையீட்டுச் சமன்பாடு எனக் கூறப்படும்.]

4. தொகை காணல்
(Integration)

1. வரை யறுக்கப் படாத தொகை (Indefinite Integrals)

வகை நுண் கணிதமானது, xஐப் பொறுத்து $y=f(x)$ என்னும் சார்பினது வகைக்கெழு அல்லது மாறு வீதத்தைக் காணும் முறைகளையும், அதன் பயன்பாடுகளையும் விவரித்தது.

தொகை நுண் கணிதமானது (Integral Calculus) வகை நுண் கணிதத்தின் தலைகீழ் மாற்று முறையாக அமைந்துள்ளது.

அதாவது xஐப் பொறுத்து y-ன் வகைக்கெழு அல்லது மாறு வீதம் கொடுக்கப்பட்டால், அது கொண்டு y என்னும் சார்பு யாது என அறிவதே, தொகை நுண் கணிதத்தின் நோக்கமாகும்.

வேறு வகையாகக் கூறுவதானால், வகை நுண்கணிதத்தில், $f(x)$ கொடுக்கப்பட்டு, அதன் வகைக்கெழு $f'(x)$ ஐக் கண்டோம்.

தொகை நுண்கணிதத்தில், $f'(x)$ தரப்பட்டு, $f(x)$ஐக் காண்கிறோம்.

$f'(x)=\phi(x)$ எனக் குறிப்போம்.

$f(x)$ என்பது $f'(x)$ அல்லது $\phi(x)$-ன் முதற் சார்பு (Primitive) எனப்படும்.

$f'(x)=\phi(x)$ தரப்பட்டு, அதன் முதற் சார்பு காண்பது வரையறுக்கப்படாத அதன் தொகை (Indefinite integral) காணல் எனப்படும்.

இந்தத் தொகையைக் குறியீட்டில் $\int f'(x)\,dx + \int \phi(x)\,dx$ எனக் குறிப்பது வழக்கம்.

வரையறை

$\frac{d}{dx}\left[f(x)\right] = \phi(x)$ ஆனல், $f(x)$ என்பது $\phi(x)$-ன் ஒரு தொகையாகும்.

இதை எழுதும் மரபு $\int \phi(x)\,dx = f(x)$ என்பதாம்.

இதை 'தொகை $\phi(x)\,dx = f(x)$ எனப் படிக்கிறேம்.

$\int \phi(x)\,dx = \int f'(x)\,dx$ காண்க என்றல், எந்தச் சார்பின் வகைக்கெழு $f'(x) = \phi(x)$ ஆகிறதோ அந்தச் சார்பைக் காண்க என்பது பொருளாகும்.

இதேபோல், $\frac{dy}{dx} = \phi(x)$ என்றல், $y = \int \phi(x)\,dx$ ஆகும்.

$\int \phi(x)\,dx = y = f(x)$ என்றல், y அல்லது $f(x)$-ன் வகைக்கெழு $\phi(x)$ எனப் பொருளாகும்.

$\int$ என்னுங் குறியானது தொகைக் குறி யெனப்படும். தொகை என்பதை ஆங்கிலத்தில் Sum என்போம். இதன் முதல் எழுத்தாகிய S என்பது மருவி $\int$ என எழுதப்படுகிறது. இஃது சார்பின் தொகை காணவேண்டும் என்று குறிக்கின்றது.

$\phi(x)$ என்பது தொகைச் சார்பு அல்லது தொடுக்கப்படும் சார்பு (integrand) ஆகும்.

dx என்பது மாறி அல்லது தொகை காணலின் x பாத மூலம் (base x) என்பதைக் குறிக்கும். $\int \phi(x)\,dx$-ல் dx என்பது $\phi(x)$ஐப் பெருக்கும் ஒரு ராசியல்ல. xஐ ஒட்டிய தொகை காண வேண்டும் என்ற பொருளைத்தான் 'dx' குறிக்கிறது.

கிடைக்கும் $f(x)$ என்னும் சார்பு வரையறைப் படா தொகையீடு அல்லது xஐப் பொறுத்த $\phi\, x$-ன் முதல் சார்பாகும்.

வகை நுண் கணிதத்தில் '$\frac{d}{dx}\left(\quad\right)$' என்னும் குறியீட்டைப்

போல், '$\int$.........dx' என்னும் குறியீடு ஒரு சார்பின் x ஒட்டிய தொகையைக் காணும் செயலைக் குறிக்கிறது.

இவ் விரு வகையான செய்வகைகளும் ஒரு சார்பைச் சார்த்தித் தொடர்ந்து செயல் படுங்கால், ஒன்றுக்கொன்று எதிர் நிலைப்பட்டு, ஒன்றையொன்று சரிக்கட்டுவதாகித் (neutralise) தொடங்கிய சார்பையே தரும்.

அதாவது $\frac{d}{dx}\left[\int \phi(x)\ dx\right] = \frac{d}{dx} f(x) = \phi(x)$

வகைக்கெழுவைக் கொண்டு, மூலச் சார்பைக் கண்டறியும் செய்முறையானது 'தொகை காணல்' எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு :

$\frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$ என அறிவோம்.

ஆதலின் xஐச் சார்த்தி $3x^2$-ன் தொகை (integral) x^3 என்று கூறுகிறோம்.

இதனை $\int 3x^2\ dx = x^3$ என எழுதுகிறோம்.

மறுபடியும், $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$ ஆதலின்

$\int \cos x\ dx = \sin x$ ஆகும்.

பொதுவாக, $\frac{d}{dx} f(x) = \phi(x)$ ஆனால்

$\int \phi(x)\ dx = f(x)$ என எழுதுகிறோம்.

கொடுக்கப்பட்ட எடுத்துக்காட்டுகளில், நாம் $f(x)$ என்னும் ஆதாரச் சார்பில் தொடங்கி, அதன் வகைக்கெழு $\phi(x)$ ஐப் பெற்று, இதிலிருந்து சுலபமாக $\int \phi(dx$-ன் மதிப்பாகிய $f(x)$ஐ எழுதினோம். ஆனால் இவ்வதிகாரத்தின் நோக்கமானது $f(x)$ஐ முன் கூட்டி அறியாமலேயே $\int \phi(x)\ dx$ஐ மதிப்பிடுவதாகும்.

2. வரையறைப்படாத பொதுத் தொகைகள்

ஒரு மாறிலியின் வகைக்கெழு பூச்சியம் என்று அறிவோம்.

$f(x)$-ன் வகைக்கெழு $\phi(x)$ ஆனால்,

$f(x)+C$ (C என்பதொரு மாறிலி)-ன் வகைக்கெழுவும் $\phi(x)$ ஆகும்.

ஆகவே, xஐப் பொறுத்து $\phi(x)$-ன் தொகையைப் பொதுவாக $f(x)+C$ என்றெழுதிக் கொள்ளலாம். இம் மாறிலியானது, தொகையீட்டு மாறிலி (Constant of Integration) எனப்படும்.

இப்பொழுது $f(x)+C$ ஆனது $\phi(x)$-ன் வரையறுக்கப்படாத பொதுத் தொகையாகும். ஏனெனில், அது மிகப் பொதுவான தொகையாயினும், C-ன் மதிப்பானது வரையறைப்படாது நிற்றலின் என்க.

கணக்கில் கொடுத்த நிபந்தனைக்கு உட்பட்டு அம் மாறிலியின் மதிப்பைக் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக, x ஐப் பொறுத்து $2x$-ன் பொதுத் தொகை (Integral) ஆனது x^2+C ஆகும். இங்கு C என்பது யாதேனுமொரு மாறிலியாகும்.

இதனது வடிவ கணித ரீதியான கருத்தைத் தெளிவுறல் வேண்டும்.

$y=x^2$, $y=x^2+1$, $y=x^2+2$, ...என்னும் வளை வரைகள் ஒவ்வொன்றிற்கும் சரிவு $2x$ ஆகும். சரிவு $2x$ என்று மட்டும் கூறப் பட்டிருப்பதால், அதற்கு இயைபுடையதொரு வளைவரையின் பொது வடிவத்தைக் குறிக் கொள்ளுவதன்றி எந்த வளை வரைவு கருத்துட் கொள்ளப்பட்டுள்ளதென்பதை நிச்சயிக்க முடியாது.

ஆனல், $x=0$ ஆகும்பொழுது, $y=3$ எனத் தெரிந்தால், $y=x^2+3$ எனக் குறிப்பிற் கொண்ட சிறப்பான வளை வரையை அறியலாம். கொடுக்கப்பட்டதொரு சரிவை அளவிலாத வளை வரைகள் பெறுமாயினும், (0, 3) என்னும் புள்ளியின் வழியாகச் செல்லக்கூடிய வளைவரை யொன்றே இருத்தல் கூடும்.

3. தொகை காணப் பயன்படும் தேற்றங்கள்

தேற்றம் (i)

x ஐ ஒட்டி x-ன் வகைக்கெழு 1 ஆகும்.

(அதாவது) $\dfrac{d}{dx}(x) = 1$

$\therefore \int 1\, dx = \int dx = x$

தேற்றம் (ii)

$$\int [f(x) \pm g(x) \pm \dots]\, dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx \pm \dots$$

தேற்றம் (iii)

$$\int C f(x)dx = C \int f(x)dx$$

பொதுவாக,

$$\int \{C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + C_3 f_3(x) + \dots\}\, dx = C_1 \int f_1(x)dx + C_2 \int f_2(x)\, dx + \dots$$

4. தொகைகளின் நியம அட்டவணை (Standard Table of Integrals)

முதலில், அறியப்பட்ட வகைக்கெழுக்களிலிருந்து அவற்றிற்குரிய தொகைகளுக்கான ஒரு பட்டியலைத் தயாரித்துக் கொள்ளுகிறோம்.

மேற்படி பட்டியலில் காணாத தொகைச் சார்பைத் தொகை காணுதற்கு ஏற்றதாகும் வடிவத்தில் மாற்றியமைத்தெழுதி, நியம வடிவங்களைச் சாதனமாகக் கொண்டு தொகை கண்டு அறியலாம்.

ஒரு தொகையினது பலனில் தவறில்லை எனச் சோதிப்பதற்குப் பெற்ற தொகையின் வகைக்கெழுவானது, கொடுக்கப்பட்ட தொகைச் சார்புக்குச் சமமாக இருத்தலைக் கண்டறியவேண்டும்.

(i) $y = x^7$ ஆகும்பொழுது, $\dfrac{dy}{dx} = 7x^6$

$$\therefore \int 7x^6 dx = x^7$$

இதிலிருந்து $\int x^6 dx = \dfrac{x^7}{7}$ எனப் பெறப்படும்.

பொதுவாக, $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C. \quad (n \neq -1) \quad \dots(i)$

(ii) $y = (ax+b)^5$ ஆகும் பொழுது,

$\dfrac{dy}{dx} = 5a\,(ax+b)^4$ எனப் பெறுகிறோம்.

ஆகையால், $\int 5a\,(ax+b)^4\, dx = (ax+b)^5$

இதிலிருந்து $\int (ax+b)^4\, dx = \dfrac{(ax+b)^5}{5a}$ எனக் கிடைக்கப் பெறும்.

பொதுவாக, $\int (ax+b)^n \, dx = \dfrac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1)\, a} + C \quad (n \neq -1)$ ...(ii)

(iii) $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \int x^{-1} \, dx = \log x + C$ ...(iii)

(iv) $\dfrac{d}{dx}\{\sin(ax+b)\} = a\cos(ax+b)$ ஆதலின்,

$\int a\cos(ax+b)\, dx = \sin(ax+b)$ எனப் பெறுகிறோம்.

$\therefore \int \cos(ax+b)\, dx = \dfrac{\sin(ax+b)}{a} + C$ ...(iv)

கிளை 1. $\int \cos ax \, dx = \dfrac{1}{a}\sin ax + C$

கிளை 2. $\int \cos x \, dx = \sin x + C$

(v) $\dfrac{d}{dx}\{\cos(ax+b)\} = -a\sin(ax+b)$ ஆதலின்,

$\int -a\sin(ax+b)\, dx = \cos(ax+b)$ ஆகும்.

$\therefore \int \sin(ax+b)\, dx = -\dfrac{1}{a}\cos(ax+b) + C$ ...(v)

கிளை 1. $\int \sin ax \, dx = -\dfrac{1}{a}\cos ax + c$

$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$

(vi) $\dfrac{d}{dx}(e^{ax}) = ae^{ax}$ ஆதலின்

$\int ae^{ax}\, dx = e^{ax}$ ஆகும்.

$\therefore \displaystyle\int e^{ax}\, dx = \frac{e^{ax}}{a} + C$ ...(vi)

(vii) பின்வரும் பலன்களையும் குறித்துக் கொள்ளவேண்டும்.

(a) $\dfrac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$ ஆதலின், $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$

(b) $\dfrac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x$

ஆதலின், $\int \operatorname{cosec}^2 x \, dx = -\cot x + C$

(c) $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$

ஆதலின், $\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + C$

(d) $\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) = -\operatorname{cosec} x \cot x$

ஆதலின், $\int \operatorname{cosec} x \cot x \, dx = -\operatorname{cosec} x + C$

5. விளக்க எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 1:

மதிப்பிடுக : $\int \left(2x^5 - 4x^2 - 5 + e^{2x} + \frac{1}{x}\right) dx$

தொகை $= \int 2x^5 \, dx - \int 4x^2 \, dx - \int 5 \, dx + \int e^{2x} \, dx + \int \frac{dx}{x}$

$$= 2 \cdot \frac{x^6}{6} - 4 \cdot \frac{x^3}{3} - 5x + \frac{e^{2x}}{2} + \log x + C$$

$$= \frac{x^6}{3} - \frac{4x^3}{3} - 5x + \frac{e^{2x}}{2} + \log x + C$$

எடுத்துக்காட்டு 2 : $\int \sin^2 \theta \, d\theta$ என்பதை மதிப்பிடுக.

$$\int \sin^2 \theta = \tfrac{1}{2} \int 2 \sin^2 \theta \, d\theta = \tfrac{1}{2} \int (1 - \cos 2\theta) \, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int 1 \, d\theta - \int \cos 2\theta \, d\theta\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\right) + C$$

எடுத்துக்காட்டு 3 : $\int \sin 2x \cos 3x \, dx$-ன் மதிப்பைக் கண்டறிக.

$$\sin 2x \cos 3x = \tfrac{1}{2} \cdot 2 \sin 2x \cos 3x = \tfrac{1}{2}[\sin(2x+3x) + \sin(2x-3x)]$$

$$= \tfrac{1}{2}[\sin 5x - \sin x]$$

$$\therefore \int \sin 2x \cos 3x \, dx = \frac{1}{2} \int (\sin 5x - \sin x) \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos 5x}{5} + \cos x\right] + C$$

$$= \frac{\cos x}{2} - \frac{\cos 5x}{10} + C$$

எடுத்துக்காட்டு 4 : (x, y) என்னும் யாதேனுமொரு புள்ளியிடத்து ஒரு வளை வரையின் சரிவு $3x-2$ ஆகும். அவ் வளைவரை $(2, -1)$ புள்ளி வழியாகச் செல்லுவதாயின், அதன் சமன்பாட்டைக் கண்டறிக.

ஒரு புள்ளியிடத்து ஒரு வளை வரையின் சரிவு, அப் புள்ளியில் வரையும் தொடுகோட்டின் சரிவுக்குச் சமம்.

இனி வளை வரையின் தொடுகோட்டின் சரிவு அப் புள்ளியில் $\frac{dy}{dx}$-ன் மதிப்பாகும்.

கணக்கின்படி, $\frac{dy}{dx} = 3x-2$

$\therefore \; y = \int (3x-2)\; dx = \frac{3x^2}{2} - 2x + C$

$x=2$, $y=-1$ ஆகும்பொழுது,

$-1 = \frac{3\,(2)^2}{2} - 2\,(2) + C$

$\therefore \quad C = -3$

$\therefore$ வளை வரையின் சமன்பாடு $y = \frac{3x^2}{3} - 2x - 3$ என்றாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5 : ஒரு துகளானது ஒரு சீரான முடுக்கம் f உடன் ஒரு நேர் கோட்டில் இயங்குங்கால், t செகண்டில் s தூரம் சென்றபொழுது அதன் வேகம் v ஆகின்றது. தொடக்கத்தில், $t=0$, $s=0$, $v=u$ எனக் கொண்டு s-க்கும், t-க்கும் உள்ள தொடர்பைக் கண்டறிக.

t நேரத்தில் வேகம் v ஆகிறது.

$\therefore$ முடுக்கம் (Acceleration) $= \frac{dv}{dt}$ ஆகும்.

கணக்கின்படி, $\frac{dv}{dt} = f \quad \therefore \quad v = \int f dt = ft + c$

ஆரம்பத்தில், $t=0$, $v=u$

$\therefore \quad u = C$ அல்லது $C = u$

$\therefore \quad \underline{v = u + ft}$ ....(i)

(அதாவது) $\frac{ds}{dt} = u + ft$

இத் தொடர்பை, t ஐப் பொறுத்துத் தொகை காண,

$s = \int (u+ft)\, dt = ut + \frac{ft^2}{2} + C$ ஆகும்.

$t=0$, $s=0$ ஆகுமிடத்து, $C=0$ ஆகும்.

$\therefore\ s = ut+\frac{1}{2}ft^2$ ...(ii)

(i), (ii)-லிருந்து t ஐ விடுவிக்க,

$v^2=u^2+2fs$ எனப் பெறுகிறோம்.

பயிற்சி 4-1

பின்வருவனவற்றிற்கு x ஒட்டிய தொகை காண்க.

(1) $(2x+3)^2$; (2) $(x+1)(x^2-1)$; (3) $(5x+6)(2x^2+3x+4)$;

(4) $(5x-8)^{10}$; (5) $(1-2x)^8$; (6) $\frac{x^4+x^2+1}{x^2}$; (7) $\frac{3x-2}{\sqrt{x}}$;

(8) $3\cos 4x$; (9) $4(\sin x-\frac{1}{2})$; (10) $\sin \frac{x}{3}$; (11) $\cos^2 x$;

(12) $2\sin 3x-7\cos 2x$; (13) $\sin^2 3x$; (14) $\sin^3 x$; (15) $\cos^3 x$;

(16) $\sin 2x \sin 3x$; (17) $\cos x \cos 3x$; (18) $\cos 4x \sin 2x$;

(19) $\sin x \cos 2x \cos 3x$; (20) $4\sin 4x \sin 2x \sin x$

(21) (0, 1) என்னும் புள்ளி வழிச் செல்லுவதாயும், (x,y) என்னுமிடத்தில் $(1-2x^2)$ சரிவுடையதாகவும் உள்ள ஒரு வளைவரையின் சமன்பாட்டைக் கண்டறிக.

(22) ஒரு வளை வரையானது x-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் $(2x-\frac{1}{2}x^2)$ என்ற சரிவுடையதாயும், (0, 1) வழிச் செல்லுவதாயும் உள்ளதாகுமானால், $x=3$ என்னுமிடத்தில் அதன் நிலைத் தூரம் என்ன?

(23) $\frac{dy}{dx} = 3x^2-2x+5$ ஆகவும், $x=2$ ஆகும்போது $y=5$ ஆகவும் இருந்தால் y-ன் மதிப்பை x ஐச் சார்த்திக் கூறுக.

(24) y ஆனது x-ன் சார்பாகி, வகைக்கெழு $2x-5$ உடையதாகியும், மீச்சிறு மதிப்பு $=\frac{1}{4}$ பெறுவதாகியும் உள்ளதானால், y ஐக் கண்டறிக.

(25) ஒரு துகள் விநாடிக்கு ஒரு மீட்டர் வேகத்தில் ஓட ஆரம்பிக்கிறது. அதன் முடுக்கம் 12 செ.மீ./விநாடி^{2} என்றால், 10 விநாடிகளில் அதன் வேகமென்ன? 10 விநாடிகளில் அது புறப்பட்ட இடத்திலிருந்து ஓடிய தூரமென்ன?

6. எத்தகைய சிக்கலான சார்பானாலும், அதன் வகைக்கெழுவைக் காண்பது எளிது. ஆனால், ஒரு சார்பின் தொகையைக் காண்பது அவ்வளவு எளிதன்று. தொகையைக் காணப் பல வகைகள் உள்ளன. அவற்றுள் இரண்டினை இங்கு ஆராய்வோம்.

(i) பிரதியிட்டுத் தொகை காணல் (Integration by substitution)

மதிப்பிடுதற்கு இடர்ப்பாடு விளைக்கும் சில தொகைகளை (integrals) தக்கபடி பிரதியீடு செய்தலால், நியம வடிவங்களுக்கு உட்பட கொண்டுவரலாம்.

$f(x)$ ஆனது x-ன் சார்பாகி, x ஆனது u-ன் சார்பாகவும் விளங்கினால், $f(x)$ ஆனது u-வின் சார்பாக அமையும்.

அப்பொழுது,

$$\frac{d}{du} f(x) = \frac{d}{dx} f(x) \cdot \frac{dx}{du}$$

$$= \phi(x) \cdot \frac{dx}{du} \left[\frac{d}{dx} f(x) = \phi(x) \text{ ஆனால்} \right]$$

u ஐ ஒட்டி இரு பக்கங்களிலும் தொகை காண

$$\int \frac{d}{du} f(x)\, du = \int \phi(x) \frac{dx}{du} \cdot du$$

$$(\text{அதாவது})\; f(x) = \int \phi(x) \frac{dx}{du} \cdot du \text{ என்றாகும்.}$$

இனி $\frac{d}{dx} f(x) = \phi(x)$ எனக் கொண்டதால்,

$$f(x) = \int \phi(x)\, dx$$

ஆகவே, $\int \phi(x)\, dx = \int \phi(x) \frac{dx}{du} \cdot du$ என்ற தேற்றத்தைப் பெறுகின்றோம்.

இதை ஓர் எடுத்துக்காட்டால் விளக்குவோம்.

எடுத்துக்காட்டு :

$\int x \sqrt{x^2+1}\, dx$ ஐ மதிப்பிடுக.

$x^2+1 = u$ எனப் பிரதியிடுக.

u ஐச் சார்த்தி வகைக்கெழு காண,

$$2x \frac{dx}{du} = 1 \qquad \therefore \frac{dx}{du} = \frac{1}{2x}$$

இனி $\int x \sqrt{x^2+1}\, dx$

$$= \int x\sqrt{x^2+1}\, \frac{dx}{du} \cdot du$$

$$= \int x \sqrt{x^2+1} \cdot \frac{1}{2x}\, du$$

$$= \frac{1}{2}\int \sqrt{u}\, du = \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{1}{3} u^{\frac{3}{2}} + C$$

$u = x^2+1$ எனப் பிரதியிட்டால்,

$$\int x \sqrt{x^2+1}\, dx = \frac{1}{3} (x^2+1)^{\frac{3}{2}} + C \text{ ஆகும்.}$$

(ii) தொகை காண மற்ெருரு முறை 'பகுதிப்படுத்தித் தொகை காணல்' (Integration by parts) எனப்படும்.

இதற்குரிய தேற்றத்தைக் காண்போம். u-வும், v-யும் x-ன் சார்புகளானால்,

$$\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

(அதாவது) $u \frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx}(uv) - \frac{du}{dx} \cdot v$

இரு பக்கங்களிலும் x ஐ ஒட்டித் தொகை காண்க.

$$\int u \frac{dv}{dx}\, dx = \int \frac{d}{dx}(uv) \cdot dx - \int \frac{du}{dx} \cdot v dx.$$

(அதாவது) $\int u dv = uv - \int v du$

இது பகுதிப்படுத்தித் தொகை காணலுக்குரிய தேற்றம்.

எடுத்துக்காட்டு

$\int x \cos x\, dx$ ஐ மதிப்பிடுக.

$u = x$; $dv = \cos x\, dx$ எனப் பிரதியிடுக.

$\therefore \quad v = \sin x$; $du = dx$ ஆகும்.

$\therefore \quad \int x \cos x\, dx = x. \sin x - \int 1 \cdot \sin x\, dx$

$= x \sin x + \cos x$

பயிற்சி 4-2.

1. பிரதியிட்டுத் தொகை காண்க.

(i) $\sin^4 x \cos x$

(ii) $\sqrt{a^2 - x^2}$

(iii) $x^2 (ax^3 + b)^3$

(iv) $x (2x^2 - 5)^3$

(v) $\frac{1}{a^2 - x^2}$

(vi) $\frac{1}{x^2 - a^2}$

(vii) $\frac{1}{ax+b}$

(viii) e^{ax+b}

(ix) $\tan x$

(x) $\cot x$

(xi) $(2x^2 - 3x + 4)(4x - 3)$

(xii) $\frac{x^2}{(1+x^3)^2}$

2. பகுதிப்படுத்தித் தொகை காண்க.

(i) $x e^x$

(ii) $\log x$

(iii) $x \sin x$

(iv) $x \log x$

(v) $x \sec^2 x$

(vi) $x \sin 3x$

(vii) $x^2 e^x$

(viii) $e^x \sin x$

(ix) $e^x \cos x$

(x) $x^2 \log x$

பாகம் IV

இரு பரிமாணப் பகுமுறை வரைகணிதம் அல்லது ஆய எண் வடிவகணிதம்

(Analytical Geometry of Two Dimensions)

தோற்றுவாய்

1. வடிவ கணிதத்தின் பண்புகளைத் தொகு முறையிலோ (Synthetic Method) அல்லது பகு முறையிலோ (Analytical Method) ஆராயலாம்.

சில வெளிப்படை உண்மைகளிலிருந்தும் (axioms), இன்னும் சில எடுகோள்களிலிருந்தும் (postulates), புள்ளி, நேர்கோடு, முக்கோணங்கள், நாற்கரங்கள், நேர்கோட்டு உருவங்கள், வட்டம் முதலியவற்றின் பண்புகளைப் பற்றிய பல்வேறு வரை கணித உண்மைகளை யூக்ளிட் (Euclid) என்ற கணிதப் பேரறிஞர் கோவையாகத் தொகுத்து அளித்திருக்கிறார். இது தொகுமுறை வரைகணிதமாகும். பதினேழாம் நூற்றாண்டு வரை இம் முறை ஒன்றே பழக்கத்தில் இருந்தது.

பகுமுறை வடிவகணிதத்தில், வடிவங்களின் பண்புகளை இயற்கணித (Algebra) முறைகளைப் பயன்படுத்திப் படிக்கிறோம்.

பதினேழாம் நூற்றாண்டுத் துவக்கத்தில், ரெனி டெகார்ட் (Rene Descartes) என்ற ஃபிரெஞ்சுப் பேரறிஞர் இயற்கணிதத்தின் உதவியால் வரைகணித உண்மைகளைக் காணும் முறையை முதன் முதலில் வகுத்தமைத்தார்.

வடிவமென்பது ஒரு புள்ளியின் நியமப் பாதை என்னுங் கருத்தினை அடிப்படையாகக் கொண்டு, அப் புள்ளியின் நிலையை இரண்டு ஆய எண்களால் குறிப்பிட்டு, அதனைக் கொடுக்கப்பட்ட வடிவம் கிடைக்கத் தேவையான நிபந்தனைக்குட்படுத்தி இயக்கு மிடத்து வடிவத்தின் நியமப்பாதை கிடைக்கின்றது. கொடுக் கப்பட்ட நிபந்தனையிலிருந்து நியமப்பாதையின் இயற்கணிதச் சமன்பாடு பெறப்படும். இந்தச் சமன்பாட்டை ஆராய்ந்து வடிவங்களின் பல்வகைப் பண்புகளைப் பெறலாம்.

டெகார்ட்டால் அமைக்கப்பட்டமையால், இதற்குக் கார்டீஷி யன் (Cartesian) முறையென்னும் பெயர் வழங்குவதாயிற்று. இதில் இயற் கணிதத்தில் வரும் தத்துவங்கள் பெரும்பான்மையாகப் பயன்படுவதால், இஃது இயல் முறை வரைகணிதம் (Algebraic Geometry) எனவும் வழங்கப்படுகிறது. இன்னும், ஆயங்களின் உதவியால் புள்ளிகளின் நிலை குறிக்கப்படுவதால், இது ஆய எண் வடிவ கணிதம் அல்லது கூற்றுமுறை வரைகணிதம் எனவும் வழங் கப்படுகிறது

2. செவ்வக அச்சுத் தூரங்கள் (Rectangular Co-ordinates)

$X'OX$, $Y'OY$ என்ற இரு நேர்கோடுகள் ஒரே தளத்தில் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக நிற்கும்படி வரைக.

சாதாரணமாக $X'OX$ கிடைக்கோடு அல்லது படுக்கைக் கோடாகவும், $Y'OY$ நிலைக்குத்துக் கோடாகவும் (vertical) அமையும்படி வரைவது வழக்கம்.

$X'OX$ ஆவது X ஆயம் அல்லது X அச்சு என்றும், $Y'OY$ ஆவது Y ஆயம் அல்லது Y அச்சு என்றும் வழங்கப்படும்.

X அச்சும், Y அச்சும் சந்திக்கும் இடம் ஆதி (origin) எனப் படும்.

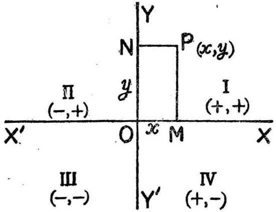
$X'OX$ லும், அதற்கு இணையாக உள்ள நேர்கோடுகளிலும், OX திசை வழியே கொள்ளப்படும் அளவைகள் நேர் ராசி அல்லது தனராசி (positive) யாகவும், OX' திசை வழியே கொள்ளப் படுவன எதிர் ராசி அல்லது ருண ராசி (negative) யாகவும் கருதப்படும்.

இதைப் போலவே, $Y'OY$ யிலும், அதற்கு இணை நிற்கும் நேர்கோடுகளிலும் OY திசை வழியே அளக்கப்படுவன நேர் ராசி யாகவும் OY' திசை வழியே அளக்கப்படுவன எதிர் ராசியாகவும் கருதப்படும்.

$X'OX$, $Y'OY$ என்னும் இரண்டு அச்சுகளும், சம தளத்தை நான்கு கால் வட்டப் பகுதிகளாகப் (Quadrants) பிரிக்கக் காண் கின்றோம்.

அதே தளத்தில் உள்ள P என்ற புள்ளியின் வழியாக $X'OX$, $Y'OY$ என்னும் ஆயங்களுக்கு முறையே PN, PM என்ற இணை கோடுகள் (parallels) வரைக. அச்சுகள் செங்குத்தாக வரையப் பட்டிருப்பதால், PM, PN-கள் முறையே $X'OX$-க்கும், $Y'OY$-க் கும் செங்குத்தாக அமையும்.

P என்ற புள்ளியை நிர்ணயிக்க 2 அளவுகள் தேவைப்படும். இப்போது P என்னும் புள்ளியை O-விலிருந்து அடைய OX என்ற



படம் 37

திசையில் OM தூரம் சென்று, பிறகு OY என்ற திசையில் MP தூரம் செல்ல வேண்டும்.

OM, MP-யின் அளவுகளும், திசையொட்டி அவற்றின் குறி களும் P நிற்குமிடத்தை நிர்ணயிக்கப் போதுமானவை.

இவற்றுள் X ஆயத்தில் அளக்கப்படும் OM ஆனது P-ன் X ஆய எண் அல்லது X அச்சுத் தூரம், அல்லது X கூறு அல்லது X-ன் ஆயத் தொலை எனப்படும். இதை P-யின் இடை அச்சுத்தூரம் (abscissa) என்றுங் கூறுவர்.

Y ஆயத்திற்கு இணையான MP யானது இவ்வாறே Y ஆய எண் எனப்படும். இதை P-ன் நிலை அச்சுத் தூரம் (ordinate) என்றுங் கூறுவர். இந்த ஆயத் தொலைகள் (x_p, y_p) என்றும் எழுதப்படும்.

பொதுவாக P என்னும் புள்ளி (x, y) என்று குறிக்கப்படும்.

ஆதி, O–வின் ஆயத் தொலைகள் $(0, 0)$ ஆகும்.

ஒரு புள்ளியின் ஆயத் தொலைகள் எந்த மதிப்பையுங் கொள்ளலாம். அத் தொலைகளின் இராசிக் குறிகள் அவை அமையும் கால் வட்டங்களை யொட்டிப் படத்தில் காட்டியுள்ளபடி அறியப்படும்.

ஒரு புள்ளி இரண்டு ஆயத் தொலைகளைக் கொண்டு நிர்ணயிக்கப்படுமாதலால், ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட புள்ளிகள் இருப்பின் அவற்றை (x_1, y_1); (x_2, y_2); (x_3, y_3)......என்னும் அச்சுத் தொலைகளால் குறிப்பர்.

[குறிப்பு 1 : அச்சுகள் செங்குத்தாக வரையப்பட வேண்டிய அவசியமில்லை. ஆயினும், செவ்வக அச்சுகளை மேற்கொண்டால், கணக்கீடுகளில் வாய்பாடுகளும் பலன்களும் எளிய முறையில் உருவாகும்.

இச் செவ்வக அச்சமைப்பு கார்டீஷியன் முறையை யொட்டியதாகும். ஆகவே, இது செவ்வகக் கார்டீஷியன் முறை (Rectangular Cartesian system) எனப்படும்.

குறிப்பு 2 : கீழே வரும் அத்தியாயங்களில், தேற்றங்களின் நிரூபணம் சாதாரணமாக முதல் கால்வட்டப் பகுதிகளில் வரைந்த படங்களிலிருந்து காணப்படும். ஆயினும், ஆயத் தொலைகளுக்கு உரிய குறிகளை எடுப்பின், சமதளத்தில் வரையக்கூடிய எல்லாப் படங்களுக்கும் தேற்றங்களின் நிரூபணம் பொருந்தும்.

எடுத்துக்காட்டாக ஒரு நேர்கோட்டில் O, M, N என்பவை ஏதாவது மூன்று புள்ளிகளானால்,

(i) $MN = -NM$

(ii) $MN = ON - OM$ என்ற விவரணம் கோட்டில், O, M, N என்ற புள்ளிகளின் எல்லா நிலைகளுக்கும் பொருந்தும்,

குறிப்பு 3: மாணவர்கள் வெவ்வேறு கால்வட்டப் பகுதிப் படங்கள் வரைந்து ஒவ்வொரு தேற்றத்தின் உண்மையையும் அனைத்துப் படங்களுக்கும் பொருந்தும் எனக் காணவேண்டும்.]

பயிற்சி 4-1.

1. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளிகளைக் குறி.
   $(-2, 3)$; $(-4, -5)$; $(3, 2)$; $(1\frac{1}{4}-\frac{3}{4})$

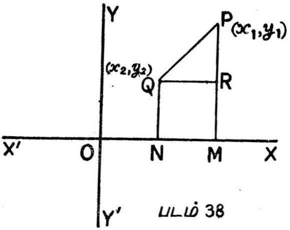
2. A, B, C என்பன ஒரு நேர்கோட்டில் உள்ள 3 புள்ளிகளாயின், $AB+BC+CA=0$ என்ற உண்மையானது நேர்கோட்டில் இடம் பெறும் A, B, C-ன் எல்லா நிலைகளுக்கும் ஏற்புடையதாகுமெனக் காண்பி.

1. தொலைவுகள், விகிதங்கள், பரப்பளவுகள்

1. இரு புள்ளிகளுக்கு இடையேயுள்ள தூரம்

$P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ என்பன இரு புள்ளிகள். PQஐக் கணக்கிடுக.

X அச்சுக்குக் குத்தாக PM, QN என்ற கோடுகள் வரை. PM-க்குக் குத்தாக QR வரை.



படம் 38

$QR = NM = OM - ON = x_1 - x_2$

$RP = MP - MR = MP - NQ = y_1 - y_2$

$\triangle PQR$-ல், $\angle QRP = 90°$

$$\therefore \quad PQ^2 = QR^2 + RP^2$$

$$= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

$$\therefore \quad PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

கிளை : ஆதியிலிருந்து $P(x_1, y_1)$-ன் தூரம்

$$OP = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

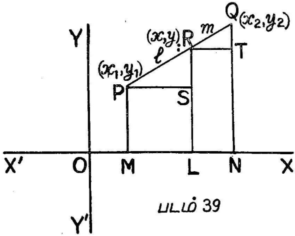
2. ஒரு நேர் கோட்டைக் கொடுத்துள்ள விகிதப்படி பிரித்தல்

$P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ என்னும் புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டினை $l{:}m$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளியின் ஆயத் தொலைகளைக் காணல்

R என்ற புள்ளி PQ ஐ $l : m$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளி எனக் கொள்வோம்.

R-ன் ஆயத் தொலைகளைக் காணவேண்டும்.

R-ன் ஆயத் தொலைகள் (x, y) எனக் கொள்க.



படம் 39

PM, QN, RL இவற்றைப் படத்தில் காண்பதுபோல் x அச்சுக்குச் செங்குத்தாக வரை.

PS ஐ RL-க்குச் செங்குத்தாகவும், RTஐ NQ-க்குச் செங்குத்தாகவும் வரை.

PSQ, RTQ வடிவொத்த (similar) முக்கோணங்கள் ஆதலின்,

$$\frac{PS}{RT} = \frac{SR}{TQ} = \frac{PR}{RQ}$$

அதாவது $\frac{x-x_1}{x_2-x} = \frac{y-y_1}{y_2-y} = \frac{l}{m}$

$$\therefore \quad m(x-x_1) = l(x_2-x)$$

$$\therefore \quad mx + lx = lx_2+mx_1$$

$$\therefore \quad x = \frac{lx_2+mx_1}{l+m}$$

இது போன்ற $\frac{y-y_1}{y_2-y} = \frac{l}{m}$ -லிருந்து,

$$y = \frac{ly_2+my_1}{l+m}$$ என வரும்.

$\therefore$ R-ன் ஆயத் தொலைகள் $\left(\frac{lx_2+mx_1}{l+m}, \frac{ly_2+my_1}{l+m}\right)$

[குறிப்பு : PQ என்ற கோட்டில் R புறத்தே இருப்பின், PR, RQ வேறுபட்ட குறியுடையனவாய் இருக்கும்.

ஆதலின் $PR : RQ$ என்ற விகிதம் $l : -m$ அல்லது $-l : m$ என்று கொள்ளவேண்டும்.]

கிளை 1: (x_1, y_1); (x_2, y_2) என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின் நடுப் புள்ளியின் ஆய எண்கள் $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

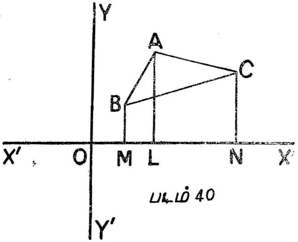
கிளை 2: (x_1, y_1) ; (x_2, y_2) ; (x_3, y_3) என்ற புள்ளிகளால் அமைந்த மையக் கோட்டுச் சந்தி (centroid)-யின் ஆயத் தொலைகள் $\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}$

3. பரப்பளவுகள்

முக்கோணத்தின் பரப்பு : $A(x_1, x_1)$; $B(x_2, y_2)$; $C(x_3, y_3)$ முக்கோணத்தின் உச்சிகள் எனக் கொள்வோம்.

OX-க்கு நேர் குத்தாக AL, BM, CN ஐ வரை

$\triangle$ ABC-ன் பரப்பு = சரிவகம் (Trapezium) $BMLA$ + சரிவகம் $ALNC$ − சரிவகம் $BMNC$



படம் 40

$$= \tfrac{1}{2}(AL+BM)\,ML+\tfrac{1}{2}(AL+NC)\,LN-\tfrac{1}{2}(BM+CN)MN$$

$$= \tfrac{1}{2}(y_1+y_2)(x_1-x_2)+\tfrac{1}{2}(y_1+y_3)(x_3-x_1)-\tfrac{1}{2}(y_2+y_3)(x_3-x_2)$$

$$= \tfrac{1}{2}[x_1\{(y_1+y_2)-(y_1+y_3)\}+x_2\{(y_2+y_3)-(y_1+y_2)\}+x_3\{(y_1+y_3)-(y_2+y_3)\}]$$

$$\triangle = \tfrac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]$$

கிளை 1. முக்கோணத்தின் பரப்பு பூச்சியம் ஆனால், மூன்று புள்ளிகளும் ஒரே நேர்கோட்டில் அமையும்.

கிளை 2. $\triangle$ AOB-ன் பரப்பு $= \tfrac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1)$

இது C என்ற புள்ளியிடத்து O என்ற புள்ளியைக் கொண்டு $x_3=0$, $y_3=0$ எனப் பிரதியிடக் கிடைக்கும்.

கிளை 3. ஒரு நாற்கரம் (Quadrilateral) அல்லது பல்கோணத்தின் (polygon) பரப்பைக்காண கொடுத்த நேர்கோட்டு உருவத்தை மூலை விட்டங்களோடு இணைத்து முக்கோணங்களாகப் பிரித்து ஒவ்வொரு முக்கோணத்தின் பரப்பையும் கண்டு அவற்றின் கூடுதலைக் கொள்ளவும்.

[குறிப்பு : நாற்கரம் அல்லது பல் கோணத்தின் பக்கங்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டாமலும் சாதாரணமானக் குவிந்த உருவமாகவும் இருக்கவேண்டும்.

ஒரு நேர்கோட்டுருவத்தின் பரப்பு நேரெண்ணுகவோ, அல்லது எதிரெண்ணுகவோ இருக்க முடியும் என்பது அறியத்தக்கது. ஓர் உருவத்தை இடமாகச் சுற்றி (anticlockwise) வரும் போது ஏற்படும் பரப்பு நேரெண்ணுகவும், வலமாகச் சுற்றி (clock wise) வரும்போது ஏற்படும் பரப்பு எதிரெண்ணுகவும் அமையும்.

4. விளக்க எடுத்துக்காட்டு :

எடுத்துக்காட்டு 1 : (0, −1) ; (2, 1) ; (0, 3) ; (−2, 1) என்ற புள்ளிகளால் அமைந்த படம் ஒரு சதுரமாகுமென நிறுவுக.

முதற்படியாக, ஆயங்களை வரைந்து புள்ளிகளைக் குறிக்க.

$A(0, -1)$; $B(2, 1)$; $C(0, 3)$; $D(-2, 1)$ எனக் கொள்ளின்

$$AB = \sqrt{(0-2)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$$

இதேபோல், $BC = CD = DA = \sqrt{8}$ எனக் கணக்கிடலாம்.

மேலும் $AC = \sqrt{(0-0)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{16} = 4$

$$\therefore \quad AB^2 + BC^2 = (\sqrt{8})^2 + (\sqrt{8})^2 = 8 + 8 = 16 = (4)^2$$
$$= AC^2$$

$\therefore$ $\angle ABC$ ஒரு செங்கோணம்.

$AB = BC = CD = DA$ என அமைவதாலும், $\angle ABC$ ஒரு செங்கோணம் ஆதலாலும், $ABCD$ ஒரு சதுரமாகும்.

[குறிப்பு : $AB = BC = CD = DA$ எனக் காட்டியபின், $AC = BD$ என நிறுவினாலும், $ABCD$ ஒரு சதுரமென ஆகும்.]

எடுத்துக்காட்டு 2 : (1, 2); (4, 5) என்ற புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டை உள்ளேயும், வெளியேயும் 2 : 3 விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளிகளின் ஆயத் தொலைகளைக் காண்க.

$P(1, 2)$; $Q(4, 5)$ எனக் கொள்க.

$l : m = 2 : 3$

உள்ளே பிரிக்கும் புள்ளியின் ஆயத் தொலைகள்,

$$x = \frac{lx_2 + mx_1}{l+m}, \quad y = \frac{ly_2 + my_1}{l+m}$$

$$\therefore\ x = \frac{2\times4+3\times1}{2+3},\ y = \frac{2\cdot5+3\cdot2}{2+3}$$

(அதாவது) $\frac{11}{5}$, $\frac{16}{5}$ என்ற புள்ளியாகும்.

வெளியே பிரிக்கும் புள்ளியின் ஆயத் தொலைகளைக் காண, $m = -3$ எனக் கொள்ளவேண்டும்.

(அதாவது) விகிதம் $= 2 : -3$ என எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும்.

$$\therefore\ x = \frac{2\cdot4-3\cdot1}{2-3},\ y = \frac{2\cdot5-3\cdot2}{2-3}\ \text{(அதாவது)}\ (-5, -4)$$

என்ற புள்ளியாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3: $(2, 3)$; $(-3, -5)$; $(-1, 9)$ என்ற புள்ளிகளை உச்சிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பு என்ன ?

$A(2, 3)$; $(-3, -5)$; $(-1, 9)$ என்ற புள்ளிகளை உச்சிகளாக கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பு என்ன ?

$A(2, 3)$; $B(-3, -5)$; $C(-1, 9)$ என கொள்ளின்,

$\triangle ABC = \frac{1}{2}\ [2(-5-9)\ -3\ (9-3)\ -1\ (3+5)]$ சதுர அலகுகள்

$= -27$ சதுர அலகுகள்.

[குறிப்பு : விடை எதிர் ராசி எண்ணாக வருவது, உச்சிகளை நாம் எடுத்துக் கொண்ட வரிசைக் கிரமம் வலஞ்சுழியாக (clock-wise) அமைந்துள்ளது என்பதையே குறிக்கிறது (புள்ளிகளைக் குறித்துச் சரிபார்). இதே புள்ளிகளின் வரிசைக் கிரமத்தை இடஞ்சுழியாக எடுத்திருந்தால் விடை நேரெண்ணாகக் கிட்டும்—செய்து பார்க்கவும்.]

பயிற்சி 1-1.

1. $(-2, 5)$; $(3, -4)$; $(7, 10)$ என்ற புள்ளிகளால் அமைந்த முக்கோணம் ஒரு இரு சமபக்க செங்கோண முக்கோணமென நிறுவுக.

2. $(-3, 3)$; $(2, -1)$; $(5, -1)$ என்ற புள்ளிகளை உச்சிகளாக உடைய முக்கோணம் ஒரு விரிகோண முக்கோணம் என நிறுவுக. [குறிப்பு : $AC^2 > AB^2 + BC^2$ எனக் காட்டுக.]

3. (3, 6); (2, −5) என்ற புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நேர் கோட்டுத் துண்டை X அச்சு எந்த விகிதத்தில் பிரிக்கும்? [விடை : 6:5]

4. ஒரு முக்கோணத்தின் இரு உச்சிகள் (3, −1); (−2, 3) அதன் நடுக்கோட்டுச் சந்தி ஆதி எனின், மூன்றுவது முனையின் ஆயத் தொலைகளைக் காண்க. [விடை : (−1, −2)]

5. ஓர் இணை கரத்தின் மூன்று அடுத்தடுத்த முனைகள் (8−5) (4, 7); (−5, 5) என்ற புள்ளிகளாகும். அந்த இணை கரத்தின் நான்காவது உச்சியின் ஆயக் கூறுகளைக் காண்க. [விடை : (−1. 3)]

6. (1, 2); (2, −1); (5, 3); (4, 6) என்ற புள்ளிகளால் அமைந்த படம் ஓர் இணைகரம் என நிறுவுக.

7. AB-ன் மையம் $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$ என்ற புள்ளியாகும். A-ன் ஆயத் தொலைகள் (5, 2) எனின், B-ன் ஆயத் தொலைகளைக் காண்க.

8. ஒரு முக்கோணத்தின் முனைகள் (−2, 10); (−8. −6); (4, 0) ஆகும். அவற்றின் மையக் கோடுகளின் (Medians) நீளங்களைக் காண்க. [விடை : 13, $\sqrt{202}$, $\sqrt{85}$]

9. A (1, −2); B (3, 2); C (6, 8) என்ற புள்ளிகள் ஓர் நேர் கோட்டில் உள என நிறுவுக. AB:BC-ன் விகிதத்தைக் காண்க. [2:3]

10. (i) (−1, 6); (−3, −9); (5. −8); (5, −8); (3, 9) என்ற புள்ளிகளை உச்சிகளாகக் கொண்ட நாற்கரத்தின் பரப்பினைக் காண்க. [விடை : 96 ச. அலகுகள்]

(ii) (1, 4); (1−, 10); (2, 1); (4, −5) என்ற புள்ளிகள் ஒரே நேர் கோட்டில் அமையுமென நிறுவுக.

5. இயங்கு வரைகளும் அவற்றின் சமன்பாடுகளும் (Loci and their equations)

1. ஒரு புள்ளி ஒரு விதிக்கிணங்க அல்லது சில விதிகளுக்கு இணங்கப் பல நிலைகள் எய்தினுல், அப் புள்ளியின் பல நிலைகள் ஓர்

இயங்கு வரையில் அமையும். அப் புள்ளியின் x, y ஆயத் தொலைகளை ஒரு சமன்பாட்டினால் குறிப்பிட முடியும். இச் சமன்பாடு அந்த இயங்கு வரையில் உள்ள புள்ளிகளின் ஆயத் தொலைகளுக்குப் பொருந்தியும், ஏனைய புள்ளிகளுக்குப் பொருந்த மின்றியும் காணப்படும். இந்தச் சமன்பாட்டினை ஆராய்ந்தால், அது குறிக்கும் நியமப் பாதையின் பண்புகள் வெளியாகும்.

2. கீழ் வருவனவற்றை நிரூபி.

(i) x அச்சின் சமன்பாடு $y=0$; ஏனெனில் x அச்சில் எப் புள்ளியை எடுத்துக் கொண்டாலும் அதன் y உறுப்பு 0 ஆகும்.

(ii) ஒரு புள்ளி x ஆயத்திற்கு C என்ற ஒரே தூரத்தில் இயங்கினால், அதன் சமன்பாடு $y=C$ ஆகும்.

இக் கோடு x அச்சுக்கு இணையாகும்.

(iii) y ஆயத்தின் சமன்பாடு $x=0$

(iv) y அச்சுக்கு இணையாக C தூரத்தில் வரையப் பட்ட கோட்டின் சமன்பாடு $x=C$

(v) $\angle XOY$ கோணத்தின் சமவெட்டி $y=x$

(vi) $\angle XOY$ கோணத்தின் சமவெட்டி $y=-x$

3. விளக்க எடுத்துக்காட்டு

$(-1, 2)$; $(2, -1)$ என்ற புள்ளிகளிகளிலிருந்து ஒரு புள்ளியின் தொலை 2:1 விகிதத்தில் இருப்பின், அப் புள்ளியின் நியமப் பாதை என்ன ?

இவ் விதிக்கிணங்கிய புள்ளிகளில் ஒன்று $P(x, y)$ என்று கொள்க. கொடுத்த புள்ளிகள் முறையே A, B என்று குறிப்பிடுக.

$P(x, y)$-க்கும் $A(-1, 2)$-க்கும் உள்ள தொலை

$$= \sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}$$

$P(x, y)$-க்கும் $B(2, -1)$-க்கும் உள்ள தொலை

$$= \sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}$$

கணக்கின்படி, $PA : PB = 2 : 1$

(அதாவது) $PA = 2PB$

$$\therefore \quad \sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2} = 2\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}$$

இரண்டு பக்கங்களையும் வர்க்கங்காண,

$$(x+1)^2+(y-2)^2 = 4\{(x-2)^2+(y+1)^2\}$$

இதைச் சுருக்குமிடத்து $x^2+y^2-6x+4y+5=0$ என வரும்.

பயிற்சி 1-2.

1. $(3,-4)$; $(-1,2)$ புள்ளிகள் வழியே செல்லும் கோட்டில் உள்ள புள்ளியொன்றின் ஆயத் தொலைகள் (x, y) எனின் (x, y) இடையுள்ள சம்பந்தத்தைக் குறிக்கும் சமன் பாட்டினைக் காண்க. [$(3,-4)$; $(-1, 2)$; (x, y) ஆல் உண்டாகும் முக்கோணத்தின் பரப்பு பூச்சியம் ஆவதால், x,y ஐ இணைக்கும் தொடர்பைக் காணலாம்.]

   [விடை : $3x+2y=1$]

2. $(-2, 3)$ என்னும் புள்ளியிலிருந்து ஒரு புள்ளியின் தொலை 5 ஆயின், அதன் நியமப் பாதையின் சமன்பாடு $x^2+y^2+4n-6y-12=0$ எனக் காண்பி.

3. $(4,-5)$; $(3, 2)$ என்னும் புள்ளிகளுக்குச் சமத் தொலைவில் இருக்கும் புள்ளியின் இயங்கு வரை $x-7y=14$ எனக் காட்டுக.

4. $(0, 2)$ என்னும் புள்ளியிலிருந்து ஒரு புள்ளியின் தூரம் x ஆயத்திலிருந்து அப் புள்ளியின் தூரத்தைப்போல் மும் மடங்கு ஆனால், அப் புள்ளியின் நியமப் பாதையின் சமன் பாட்டைக் காண்க.

   [விடை : $x^2-8y^2-4y+4=0$]

5. ABC என்ற முக்கோணத்தின் உச்சிகளான A, B முறையே $(-2, 3)$; $(4, -5)$ ஆகும். C வழியே செல்லும் மையக் கோட்டின் நீளம் 5 ஆனால், C-யின் நியமப் பாதையைக் காண்க. [விடை : $x^2+y^2-2x+2y-23=0$]

2. நேர்கோடுகள்

1. ஒரு நேர்கோட்டின் சாய்வு வீதம் அல்லது சரிவு (Slope or Gradient)

AB என்ற ஒரு நேர்க்கோடு x ஆயத்தை A என்னும் புள்ளியிலும், y ஆயத்தை B என்னும் புள்ளியிலும் சந்திக்கட்டும். x ஆயத்திற்கு மேல் பகுதியில் P என்ற புள்ளியைக் குறி. AX-லிருந்து இடஞ்சுழியாக $\angle XAP$ ஐ அளந்து θ என்று குறிப்பிடு.

x ஆயத்துடன் $\angle AB$-ன் சாய்வு (inclination) $XAP = \theta$ ஆகும்.

$\tan \theta$ = சாய்வு வீதம் அல்லது சரிவு (gradient or slope எனப்படும்.

$\tan \theta = m$ என்று குறிப்பிடுவது வழக்கம்.

2. ஒரு கோட்டை நிர்ணயிக்க, இரு கட்டுப்பாடுகள் தேவை. எடுத்துக்காட்டாகக் கொடுத்துள்ள இரு புள்ளிகள் வழியே ஒரே நேர்கோடுதான் வரையலாம். இந்த இரு கட்டுப்பாடுகளை உணர்த்தும் வகையில் ஒரு கோட்டின் சமன்பாட டில் இரு அம்சங்கள் காணப்படும்.

கொடுக்கப்பட்ட நிபந்தனைக்குட்பட்டு ஒரு புள்ளி நகருங்கால் அது ஒரு வளைவரையிலோ அல்லது நேர்கோட்டிலோ அமையும். அவ் வளை வரையில் உள்ள புள்ளிகளின் ஆயத் தொலைகள் வெவ் வேறு ஆயினும், அப் புள்ளிகள் ஒரு நியதிக் கிணங்க அமைவதால், அவற்றின் ஆயத் தொலைகளுக்குள் ஒரு நிரந்தரமான சம்பந்தம் காணப்படும். இந்தச் சம்பந்தம் அந்தப் புள்ளியின் இயங்குவரை அல்லது நியமப் பாதையின் சமன்பாடு ஆகும்.

3. இனி ஒரு நேர் கோட்டை நிர்ணயிக்க அல்லது குறிப்பிட இரண்டு நிபந்தனைகள் தேவையாவதுடன் அவையே போதுமானதாகும்.

இவ்வாறாக ஒரு கோட்டின் அம்சங்களில் கீழ்க்கண்டயாதேனும் ஒரு வகைக் கொடுக்கப்பட்டால், அவற்றைக் கொண்டு கோடு நிர்ணயிக்கப்படுவதால், அக் கோட்டின் சமன்பாட்டை எளிதில் காணலாம்.

(i) கோட்டின் சரிவும், y அச்சில் அதன் வெட்டுத் துண்டும் (Intercept slope form) (வெட்டு-சரிவு வடிவம்)

(ii) கோட்டின் சரிவும், அதன் மீதுள்ள ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியும் (புள்ளி-சரிவு வடிவம்) (Point slope form).

(iii) கோட்டின் சாய்வு கோட்டின்மீதுள்ள ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளி, கோட்டின்மீதுள்ள யாதேனும் ஒரு புள்ளிக்கும் குறிப்பிட்ட புள்ளிக்கும் இடைப்பட்ட தூரம் (சமச்சீர் வடிவம் (அ) துணை அலகு வடிவம் (அ) தூர வடிவம்—Symmetrical form or Parametric form or Distance form).

(iv) கோட்டின்மீதுள்ள இரு குறிப்பிட்ட புள்ளிகள் (இரு புள்ளி வடிவம் Two point form)

(v) இரு ஆயங்களில் கோடு உண்டாக்கும் வெட்டுத்துண்டுகளின் அளவுகள் (வெட்டுத் துண்டு வடிவம்—Intercept form)

(vi) ஆதியிலிருந்து கோட்டிற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் அளவும், அச் செங்குத்துக்கோடு x அச்சுடன் உண்டாக்கும் கோணத்தின் அளவும் (Normal form—செங்கோட்டு வடிவம்).

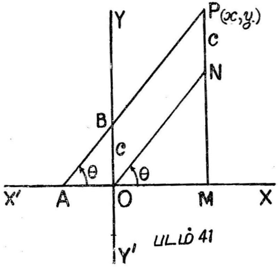
4. கோட்டின் சமன்பாடு : ஆறு வகைகளில் காணல்

(i) வெட்டுத்துண்டு—சரிவு வடிவம்: (Intercept—slope form)

AB என்ற கொடுக்கப்பட்ட கோடு x ஆயத்துடன் ஏற்படுத்தும் சாய்வு θ ஆகவும்,

y ஆயத்தில் வெட்டும் துண்டு C ஆகவும் அமையட்டும். $P(x, y)$ அந்தக் கோட்டில் உள்ள யாதேனும் ஒரு புள்ளி எனக் கொள்க.

P-லிருந்து x அச்சுக்குச் செங்குத்தாக PM வரைக. ON ஐ AB-க்கு இணையாக வரை. அது MP ஐ N-ல் சந்திக்கட்டும்.



படம் 41

அப்பொழுது, $\angle XON=\theta$ (ஒத்த கோணம்)

$$NP = OB = c$$

$$\therefore \quad MN = MP - NP = y - c; \; OM = x$$

இனி $\dfrac{MN}{OM} = \tan\theta$

(அதாவது) $\dfrac{y-c}{x} = \tan\theta$

$$\therefore \quad y - c = \tan\theta \; x$$

$$\therefore \quad y = \tan\theta \; x + c$$

$y = mx + c$, இங்கு $m = \tan\theta$

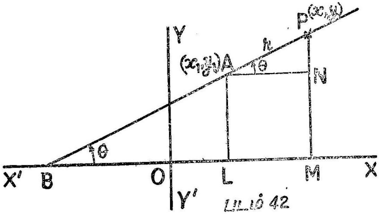
இந்த சம்பந்தம் கோட்டில் உள்ள எப் புள்ளிக்கும் பொருந்துமாகையால், இதுவே நேர்கோட்டின் சமன்பாடாகும்.

கிளை 1 : ஆதி வழியே செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு $y = mx$ ஆகும்.

கிளை 2 : x ஆயத்திற்கு இணையான கோட்டின் சமன்பாடு $y = c$ ஆகும். [ஏனெனில், $\theta = 0$, $\tan\theta = 0$; $\therefore \; m = 0$]

(ii) & (iii) புள்ளி-சரிவு வடிவமும், (Point slope form) சமச்சீர் வடிவமும் (symmetrical form),

x-ஆயத்தோடு θ சாய்வுடன், $A(x_1, y_1)$ என்னும் நிலைத்த தொரு புள்ளி வழியே செல்லும் கோட்டில், $P(x, y)$ என்பது



படம் 42

யாதேனுமொரு புள்ளியாகுக. $AP = r$ எனில், கோட்டின் சமன் பாடு.

$$\frac{x-x_1}{\cos\theta} = \frac{y-y_1}{\sin\theta} = r \text{ ஆகும் என நிறுவுக.}$$

X ஆயத்திற்கு PM, AL என்னும் செங்குத்துக் கோடுகளையும், MP-க்கு AN என்னும் செங்குத்துக் கோட்டையும் வரை.

அப்பொழுது $r\cos\theta = AN = LM = x - x_1$

$r\sin\theta = PN = MP - MN = y - y_1$

$$\therefore \frac{x-x_1}{\cos\theta} = \frac{y-y_1}{\sin\theta} = r \text{ (சமச்சீர் வடிவம்)}$$

மேற்கண்ட பலனில் r ஐ நீக்க,

$$\frac{x-x_1}{\cos\theta} = \frac{y-y_1}{\sin\theta} \text{ என்றாகும்.}$$

$$\text{(அதாவது) } \frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta = m$$

$\therefore$ $y - y_1 = m(x - x_1)$. இதுவே புள்ளி-சரிவு வடிவமாகும்.

கிளை 1 : சமச்சீர் வடிவத்திலிருந்து

$$x=x_1+r\cos\theta;\ y=y_1+r\sin\theta$$

எனப் பெறுகிறோம். இங்குP-யின் x, y கூறுகள் தனித்தனியே r-ன் சார்பாகத் தரப்படுகின்றன.

இவ்வாறு x-க்கும், y-க்கும் நேரடியாகத் தொடர்பு தரப் படாமல் x, y கூறுகள் தனித்தனியே மற்றொரு மாறி (Variable) யின் சார்பாகத் தரப்பட்டால், அத்தகைய சமன்பாடு வரையின் 'துணை அலகுச் சமன்பாடு' எனட்படும் (Parametric equation). x, y என்பன r எனும் எண்ணுல் அளக்கப் படுவதால், 'r' துணை அலகு (Parameter) எனப்படும்.

கிளை 2 : புள்ளி—சரிவு வடிவத்தில், $x_1=y_1=0$ எனப் பிரதியிட, $y=mx$ எனப் பெறுகிறோம்.

எனவே, ஆதிவழி செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு $y=mx$ ஆகும்.

(iv) குறித்த இரு புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் கோட்டின் சமன் பாடு காணல் (இரு புள்ளி வடிவம்—Two point form)

$(x_1\ y_1)$; (x_2, y_2) என்பன கொடுத்த இரு புள்ளிகளாகட்டும். கோட் டின் சமன்பாடு $y=m\ x+c$ எனக் கொள்க. ... (i)

(x_1, y_1) $x_2, y_2,)$ இக்கோட்டில் அமைவதால்,

$y_1=m\ x_1+c$ ... (ii)

$y_2=m\ x_2+c$ ஆகும். ... (iii)

$\therefore$ (i)−(ii), $y-y_1=m\ (x-x_1)$ ... (iv)

(ii)−(iii), $y_1-y_2=m\ (x_1-x_2)$ ...(v)

$\frac{(iv)}{(v)}$, $\frac{y-y_1}{y_1-y_2}=\frac{x-x_1}{x_1-x_2}$. இதுவே இருபுள்ளி வடிவம்.

கிளை 1 : ஆதியையும், (x_1, y_1) என்ற புள்ளியையும் சேர்க்குங் கோட்டின் சமன்பாடு காண, $x_2=y_2=0$ எனப் பிரதியிடுக.

$$\therefore \quad \frac{y-y_1}{y_1} = \frac{x-x_1}{x_1} \text{ (அதாவது) } \frac{y}{y_1} - 1 = \frac{x}{x_1} - 1$$

$$\therefore \quad \frac{y}{y_1} = \frac{x}{x_1} \text{ அல்லது } y = \frac{y_1}{x_1}\, x \text{ என்றாகும்.}$$

கிளை 2: (v)-லிருந்து, $y_1 - y_2 = m\,(x_1 - x_2)$ ஆதலால்,

கோட்டின் சரிவு $m = \dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$ என்றாகும்.

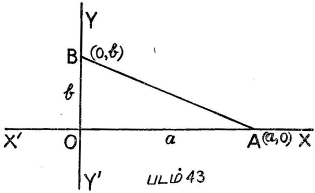
$\therefore$ (x_1, y_1) (x_2, y_2) என்னும் புள்ளிகள் வழியே செல்லும் கோட்டின் சரிவு

$$= \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$$

(v) வெட்டுத் துண்டு வடிவம் (Intercept form)

ஆயங்களில் ஏற்படும் வெட்டுத்துண்டுகளால் கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காணல்

கொடுக்கப்பட்ட AB என்னும் கோடு x, y ஆயங்களை முறையே A, B என்னுமிடங்களில் சந்திக்கட்டும். OA, OB என்னும் வெட்டுத் துண்டுகள் முறையே a, b அலகுகள் நீளமுடையன



படம் 43

வாகுக. எனின், A, B-யின் கூறுகள் முறையே $(a, 0)$; $(0, b)$ ஆகும்.

இப் புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டின் சமன்பாடு,

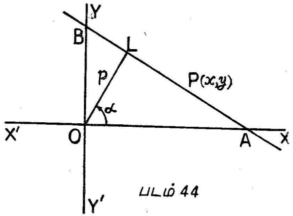
$$\frac{x-a}{a-0} = \frac{y-0}{0-b} \quad \text{[இரு புள்ளி வடிவம்]}$$

(அதாவது) $\frac{x}{a} - 1 = -\frac{y}{b}$

$$\therefore \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

(vi) ஒரு கோட்டினது சமன்பாட்டை அதற்கு ஆதியிலிருந்து வரைந்த செங்கோட்டையும், அச் செங்குத்துக் கோடு X ஆயத் தோடு அமைந்து நிற்கும் கோணத்தையும் பொருத்திக் காணல் (செங்கோடு வடிவம்—Normal-form)

சமன்பாடு காண நிற்கும் கோடு AB ஆகுக. இதற்கு ஆதி O-விலிருந்து வரைந்த செங்குத்துக் கோடு OL ஆகுக. $OL=p$



படம் 44

என்றும், இது x ஆயத்தோடு ஏற்படுத்தும் கோணம் α என்றும் கொள்க.

அக் கோட்டின் மேல், யாதேனுமொரு புள்ளி P-ன் ஆயத் தொலைகள் (x, y) ஆகுக.

இனி, முக்கோணம் OLA-விருந்து, $\frac{OA}{OL} = \sec\alpha$

$\therefore \quad OA = OL \sec\alpha = p \sec\alpha$

முக்கோணம் OLB-விருந்து, $\frac{OB}{OL} = \operatorname{cosec}\alpha$

$\therefore \quad OB = OL \operatorname{cosec}\alpha = p \operatorname{cosec}\alpha$

∴ கோட்டின் சமன்பாடு, $\frac{x}{OA} + \frac{y}{OB} = 1$ (வெட்டுத் துண்டு வடிவம்)

(அதாவது) $\frac{x}{p \sec \alpha} + \frac{y}{p \operatorname{cosec} \alpha} = 1$

(அதாவது) $x \cos \alpha = y \sin \alpha = p$

[குறிப்பு : இங்கு p என்பது எப்பொழுதும் நேர் ராசியாகவும், α என்பது $0°$-லிருந்து $360°$ வரை உள்ள கோணமாகவும் கொள்க.]

5. $ax+by+c=0$ என்னும் சமன்பாடு.

மேலே கண்ட நேர்கோட்டிற்குரிய ஆறு வகைச் சமன்பாடு களைக் கருதுமிடத்து அச் சமன்பாடு எந்த வடிவத்தில் குறிக்கப் பட்டாலும், அது x, y-களின் ஒன்றுவது படியில் அமைந்த $ax+by+c=0$ என்ற வடிவத்தில் இருப்பதை அறியலாம்.

விளக்க எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 1 : $x+\sqrt{3}y+7=0$ என்னும் கோட்டிற்கு ஆதியில் இருந்து வரையப்பட்ட செங்கோட்டின் நீளம் என்ன ?

கோட்டின் சமன்பாட்டைச் செங்கோட்டு வடிவத்தில் எழுதவும்.

$x+\sqrt{3}\,y = -7$

இரு பக்கங்களையும் $\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}$ ஆல் வகுக்க

(அதாவது) $\sqrt{1+3} = 2$ ஆல் வகுக்க.

$\therefore \quad \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = -\frac{7}{2}$

(அதாவது) $-\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y = \frac{7}{2}$ [p ஐ நேரெண்ணாக வைக்க]

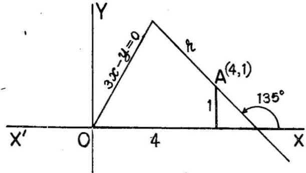
இங்கு $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$; $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $p = \frac{7}{2}$

$\therefore \quad \alpha = 240°$,

∴ கொடுத்த சமன்பாடு செங்கோட்டு வடிவத்தில் $x \cos 240° + y \sin 240° = \frac{7}{2}$ ஆகும்.

∴ செங்கோட்டின் நீளம் $= \frac{7}{2}$ அலகுகள்.

எடுத்துக்காட்டு 2. (4,1) புள்ளி வழி x ஆயத்தோடு 135° பிறப்பிக்கும் கோட்டின் சமன்பாட்டை வரைக. கோட்டின் வழி (4, 1) புள்ளியிலிருந்து $3x-y=0$. கோட்டின் தொலைவென்ன ?



படம் 45

(4, 1) புள்ளி வழி x அச்சுடன் 135° உண்டாக்கும் கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{x-4}{\cos 135°} = \frac{y-1}{\sin 135°} = r \text{ ஆகும்.} \quad (\text{சமச்சீர் வடிவம்})$$

(4, 1) விருந்து கோட்டின் வழி $(3x-y)=0$-ன் தூரம் r எனின்,

$$x = 4 + r \cos 135° \; ; \; y = 1 + r \sin 135°$$

(அதாவது) $x = 4 - \frac{r}{\sqrt{2}}$; $y = 1 + \frac{r}{\sqrt{2}}$

இப் புள்ளி $3x-y=0$-ன் மீது அமைவதால்,

$$3\left(4 - \frac{r}{\sqrt{2}}\right) - \left(1 + \frac{r}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

$$\therefore \; r = \frac{11\sqrt{2}}{4}$$

பயிற்சி 2-1

1. $P(2, -4)$; $Q(4, -2)$; $R(7, 1)$ என்ற புள்ளிகள் ஒரு நேர்கோட்டில் உள்ளன என நிறுவுக. $PQ : QR$-ன் விகிதத்தை காண்க. P, R என்ற புள்ளிகள் பற்றி Q-வின் இசை இணையைக் காண்க. [விடை : $(-8, -14)$]

2. ஒரு நேர்கோடு x ஆயத்துடன் $-60°$ சாய்ந்து, y ஆயத்தில் 4 அலகுகள் ஏற்படுத்துகிறது. அதன் சமன் பாட்டினைக் காண்க. [$y = -\sqrt{3}\, x + 4$]

3. $y = \dfrac{x}{\sqrt{3}} - 4$, $y = \sqrt{3}\, x + 3$ என்ற கோடுகள் x ஆயத்துடன் ஏற்படுத்தும் சாய்வுகள் என்ன? இதிலிருந்து அக் கோடுகளுக்கிடையே உள்ள கோணத்தைக் காண்க. [விடை : $30°, 60°; 30°$]

4. O ஆதியும், $A(0, 10)$ என்ற புள்ளியுமாகும். முக்கோணம் OAB சமபக்கமாக அமையும் வகையில் இரண்டாம் கால் வட்டப் பகுதியில் B என்ற புள்ளியை நிர்ணயிக்கவும். மேலும் $\angle OAB$-ன் இருசம வெட்டியின் சமன்பாட்டினையும் காண்க.

   [விடை : $(-5\sqrt{3}, 5)$; $\sqrt{3}x - y + 10 = 0$]

5. $(3, -2)$ என்னும் புள்ளி வழியே சென்று x அச்சுடன் $45°$ கோணத்தையுண்டாக்கும் கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க. [விடை : $y = x - 5$]

6. $(2, 3)$ என்ற புள்ளி வழித்தாகிய $2y = x$ என்னும் கோட்டிற்கு இணைக் கோட்டின் சமன்பாட்டை $\dfrac{x-2}{\cos\theta} = \dfrac{y-3}{\sin\theta} = r$ என்ற வடிவில் எழுதுக. இதைக் கொண்டு $5x - 7y = 14$ என்னும் கோட்டிலிருந்து $(2, 3)$-ன் தூரத்தை $2y = x$ என்னும் கோட்டிற்கு ஒரு போகாக அளந்தறிக.

   $\left[\text{விடை } \dfrac{25\sqrt{5}}{3}\right]$

7. $(-2, 3)$ என்னும் புள்ளி வழிச் செல்லும் கோடு y ஆயத்தில் வெட்டும் துண்டின் அளவுக்கு மும்மடங்கு நீள

முடைய துண்டினை x ஆயத்தில் உண்டாக்குமானுல், அதன் சமன்பாட்டினைக் காண்க. [விடை : $x+3y=7$]

8. $A(5, 3)$; $B(3, 1)$; $C(4, 11)$ என்ற புள்ளிகளாலமைந்த முக்கோணத்தின் உச்சிகளாயின் A வழியே செல்லும் மையக் கோட்டின் சாய்வு வீதத்தைக் காண்க. மேலும், மையக் கோட்டின் சமன்பாட்டை எழுதுக.

[-2, $y=-2x+13$]

9. இரண்டு ஆயங்களுக்குள் இடைப்பட்டுக் கிடக்கும் பகுதி (x_1, y_1) என்ற புள்ளியால் சமமாகப் பிரிக்கப்படு மெனின், அதன் சமன்பாட்டைக் காண்க.

$$\left[\frac{x}{2x_1}+\frac{y}{2y_1}=1\right]$$

10. பின்வரும் சமன்பாடுகளை $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ வகைக்கு மாற்றுக :

(i) $12x-5y-65=0$ (ii) $8x-15y+34=0$
(iii) $7x+24y-150=0$ (iv) $18x+80y+41=0$.

ஒவ்வொரு கோட்டிற்கும் ஆதியிலிருந்து வரையப்படும் நேர்குத்துக் கோட்டின் நீளத்தையும், நேர்குத்துக் கோட்டிற்கும் x அச்சிற்குமிடையிலுள்ள கோணத்தை யும் கணக்கிடுக.

5. இரண்டு கோடுகளின் வெட்டு நிலை (Intersection of two straight lines): இரு கோடுகளின் வெட்டுமிடத்தை அக் கோடு களின் சமன்பாடுகளின் தீர்வு கண்டு அறியலாம்.

6. மூன்று கோடுகளின் சந்திப்பு : ஏதேனும் இரண்டு சமன் பாடுகளை விடுவிக்க வரும் ஆயத் தொலைகள் மூன்ருவது சமன் பாட்டிற்கும் பொருந்துமா என்று சரி பார்த்தலே போதுமான தாகும்.

மற்ெருரு முறை

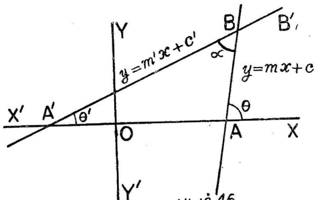
x, y-ன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும் $p\cdot(a_1x+b_1y+c_1)+q(a_2x+b_2y+c_2)+r(a_3x+b_3y+c_3)=0$ ஆக, p, q, r நிலையெண் கள் காரண இயலுமாயின், $a_1x+b_1y+c_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2=0$, $a_3x+b_3y+c_3=0$ என்ற கோடுகள் ஒரு புள்ளி வழிச் செல்லும் என நிறுவலாம்.

7. இரண்டு கோடுகளுக்கிடையிலுள்ள கோணத்தை அறிதல். அக் கோடுகள் செங்குத்தாகவோ அல்லது இணையாகவோ அமைவதற்கு வேண்டிய நிபந்தனைகளைக் காணல்.

கொடுக்கப்பட்ட கோடுகளின் சமன்பாடுகள் $y=mx+c$, $y=m'x+c'$ என்றும், அவை x ஆயத்தோடு பிறப்பிக்கும் கோணங்கள் θ, θ' என்றும் கொள்வோம்.

ஆகவே, $m=\tan\theta$; $m'=\tan\theta'$ இவ்விரு கோடுகளின் இடைப்பட்ட கோணம் α எனின்

$\alpha=\theta-\theta'$



படம் 46

$$\therefore\ \tan\alpha=\tan(\theta-\theta')$$

$$=\frac{\tan\theta-\tan\theta'}{1+\tan\theta\tan\theta'}$$

$$=\frac{m-m'}{1+mm'}$$

$$\therefore\ \tan\alpha=\frac{m-m'}{1+mm'}$$

கிளை 1 : கோடுகள் இணையாக இருப்பின், $\theta=0$; $\tan\alpha=0$

$$\therefore\ \frac{m-m'}{1+mm'}=0$$

$$\therefore\ m=m'$$

(அதாவது) இரண்டு கோடுகள் இணையாயின், அவற்றின் சரிவுகள் சமமாகும்.

கிளை 2 : கோடுகள் செங்குத்தாக இருப்பின்,

$\alpha = \pi/2$

$\cot \alpha = \cot \frac{\pi}{2} = 0$

$\therefore \quad \frac{1+m\,m'}{m-m'} = 0 \quad \therefore \quad 1+m\,m' = 0$

$\therefore \quad m\,m' = -1$

(அதாவது) இரண்டு கோடுகள் செங்குத்தாயின் அவற்றின் சரிவுகளின் பெருக்கற்பலன் -1 ஆகும்.

[குறிப்பு : 1 (i) : கோடுகள் $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$ என்னும் வடிவில் கொடுக்கப்படின், $\tan\theta = -a/b$; $\tan\theta' = -a'/b'$ என்றாகும்.]

$\therefore \quad \tan\alpha = \frac{ab'-a'b}{aa'+bb'}$

(ii) அக் கோடுகள் இணையாக இருப்பின், $ab' - a'b = 0$

$\therefore \quad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$

(iii) அக் கோடுகள் செங்குத்தாக இருப்பின்,

$aa'+bb' = 0$ ஆகும்.

[குறிப்பு : 2 (i) : $ax+by+c=0$ என்னும் கோட்டிற்கு இணையாக (x_1, y_1) வழிச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு

$ax+by = ax_1+by_1$

(ii) $ax+by+c=0$ என்னும் கோட்டிற்குச் செங்குத்தாக (x_1, y_1) வழிச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு $bx-ay = bx_1-ay_1$ என்பதாகும்.

8. குறித்த இருகோடுகள் வெட்டும் புள்ளி வழிச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு.

குறித்த இரு கோடுகளின் சமன்பாடு $ax+by+c=0$ $a'x+b'y+c'=0$ என்று கொள்வோம்.

$ax+by+c+k\ (a'x+b'y+c'=0$ சமன் பாட்டினைப் பார்ப் போம். ...(i)

இங்கு k ஒரு நிலைஎண்.

இது ஒருபடிச் சமன்பாடு. எனவே, ஒரு கோட்டினைக் குறிக்கும்.

குறித்த இரு கோடுகளும் (x_1, y_1) என்ற புள்ளியில் வெட்டிக் கொண்டால்,

$ax_1+by_1+c_1=0,\ a'x_1+b'y_1+c'=0$ என்றாகும்.

$\therefore\ ax_1+by_1+c_1+k\ (a'x_1+b'y_1+c')=0$ ஆகும்.

ஆகவே, (x_1, y_1) என்ற புள்ளியின் கூறுகள் $ax+by+c+k$ $(a'x+b'y_1+c)=0$ என்ற சமன்பாட்டிற்குப் பொருந்தும் என ஆகிறது.

$\therefore\ ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0$ என்னும் கோடும் (x_1,y_1) வழிச் செல்லும்.

k–ன் மதிப்புகளுக்குத்தக, (x_1, y_1) வழிச் செல்லும் பல கோடுகள் வரும்.

9. விளக்க எடுத்துக்காட்டுகள் :

எடுத்துக்காட்டு 1 : $x+2y+5=0$, $x-y+7=0$ என்ற கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி வழி $5x-2y+1=0$-க்கு இணையான கோட்டின் சமன்பாட்டினைக் காண்க.

முதல் இருகோடுகள் வெட்டும் புள்ளி வழிச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு.

$x+2y+5+k\ (x-y+7)=0$ என்றாகும்.

இக் கோடு $5x-2y+1=0$ என்னும் கோட்டிற்கு இணையாக அமைய வேண்டும்.

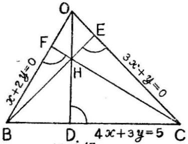
எனவே, இரு கோடுகளின் சரிவும் சமமமாக வேண்டும்.

$$\frac{-(1+k)}{2-k} = \frac{5}{2} \quad \therefore\ k=4$$

$\therefore$ தேவையான கோட்டின் சமன்பாடு

$$5x-2y+33=0$$

எடுத்துக்காட்டு 2 : $x+2y=0$, $4x+3y=5$, $3x+y=0$ கோடுகளைப் பக்கமாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் செங்குத்து மையம் (orthocentre) என்ன ?



படம் 47

$x+2y=0$, $3x+y=0$ என்னும் கோடுகள் ஆதி வழிச் செல்லும். மூன்று கோடுகளும் உண்டாக்கும் முக்கோணம் OBC எனக் கொள்க.

O, B வழிச் செல்லும் செங்கோடுகள் முறையே OD, BE எனக் கொள்வோம். OD ஆனது O வழிச் செல்வதால், அதன் சமன்பாடு $x+2y+k\,(3x+y)=0$ என்றாகும்

(அதாவது) $(1+3k)\,x+(2+k)\,y=0$

இது $4x+3\,y=5$ என்ற கோட்டிற்குச் செங்குத்தாகும்.

$\therefore\ 4\,(1+3\,k)+3\,(2+k)=0$

$\therefore\ 15\,k=-10 \quad \therefore\ k=-2/3$

$\therefore\ O\,D$-ன் சமன்பாடு $x+2y-\frac{2}{3}\,(3x+y)=0$ ஆகும்.

(அதாவது) $3x-4y=0$

இம்மாதிரியே BE-ன் சமன்பாடு $x-3y-5=0$ ஆகும்.

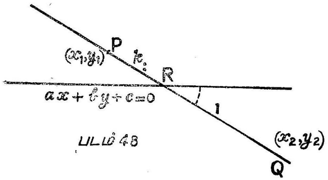
OD, BE வெட்டும் புள்ளியே செங்கோட்டு மையம், H ஆகும்.

ஆகவே H-ன் ஆயத் தொலைகளைக் காண, $x-3y-5=0$, $3x-4y=0$ என்ற சமன்பாடுகளைத் தீர்வு காணவேண்டும்.

$\therefore$ H-ன் ஆயத் தொலைகள் $(-4,-3)$

10. $ax+by+c=0$ என்னும் கோடு $P(x_1, y_1)$; $Q(x_2, y_2)$ புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டினை எத்தகவில் பிரிக்குமெனக் காணல் :

$ax+by+c=0$ எனும் கோடு, PQ–வை R என்னும் புள்ளியில் சந்திக்கட்டும்.



படம் 48

$$\frac{PR}{RQ} = R \text{ என்க (அதாவது) } PR : RQ = k : 1$$

$\therefore$ R-ன் கூறுகள் $\dfrac{x_1+k\,x_2}{1+k}$, $\dfrac{y_1+ky_2}{1+k}$

R என்னும் புள்ளி $ax+by+c=0$ வில் அமைவதால்,

$$a\;\frac{(x_1+k\,x_2)}{1+K}+b\left(\frac{y_1+ky_2}{1+K}\right)+c=0$$

$$\therefore\; k\,(ax_2+by_2+c)+(ax_1+by_1+c) = 0$$

$$\therefore\; k = -\frac{ax_1+by_1+c}{ax_2+by_2+c}$$

கிளை : ax_1+by_1+c, ax_2+by_2+c ஒரே குறியுடையனவாய் இருப்பின், k ஓர் எதிரெண்ணாகும்.

அந் நிலையில் R, PQ விற்கு வெளியே இருக்கும்.

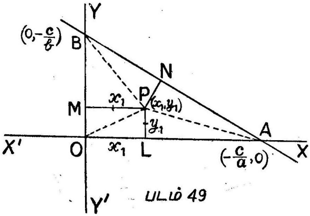
$\therefore$ P, Q என்பன $ax+by+c=0$-க்கு ஒரே பக்கத்தில் இருக்கும்.

ஆகவே, ax_1+by_1+c, ax_2+by_2+c ஒரே குறியுடையனவாயின், P, Q புள்ளிகள் $ax+by+c=0$ கோட்டினுக்கு ஒரே பக்கத்தில் அமையும்.

ax_1+by_1+c, ax_2+by_2+c என்பன மாறுபட்ட குறியுடையன வாயின், P, Q புள்ளிகள் $ax+by+c=0$ கோட்டிற்கு எதிர்ப் பக்கங் களில் (அதாவது) இரு பக்கங்களில் அமையும்.

11. (x_1, y_1)-லிருந்து $ax+by+c=0$ கோட்டினுக்கு வரையும் நேர்குத்துக் கோட்டின் நீளத்தைக் காணல்.

$ax+by+c=0$ என்னும் சமன்பாட்டைக் குறிக்கும் கோடு AB ஆகுக.



படம் 49

அது x அச்சை A-லும், y அச்சை B-லும் வெட்டுவதாகக் கொள்வோம்.

எனின், A-யின் கூறுகள் $(-c/a, 0)$

B-யின் கூறுகள் $(0, -c/b)$

$P(x_1, y_1)$ லிருந்து AB-க்கு வரையும் செங்குத்துக் கோடு PN எனக் குறிக்க.

P-யிலிருந்து x, y அச்சுகளுக்கு முறையே PL, PM என்ற குத்துக் கோடுகள் வரைக.

இனி, $\triangle OAP+\triangle PAB+\triangle BOP=\triangle OAB$

$$\triangle OAP = \frac{1}{2}\, OA \,.\, PL = \frac{1}{2}\left(-\frac{c}{a}\right).\, y_1 = -\frac{cy_1}{2a}$$

$$\triangle PAB = \frac{1}{2} PN . AB = \frac{1}{2} PN . \sqrt{\left(\frac{c}{a} - 0\right)^2 + \left(0 + \frac{c}{b}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2} PN . \sqrt{\frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2}} = \frac{1}{2} PN.C. \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}$$

$$\triangle BOP = \frac{1}{2} PM \cdot OP = \frac{1}{2} x_1 \left(-\frac{c}{b}\right) = -\frac{cx_1}{2b}$$

$$\triangle OAB = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2}\left(-\frac{c}{a}\right)\left(-\frac{c}{b}\right) = \frac{1}{2}\frac{c^2}{ab}$$

$$\therefore \frac{-cy_1}{2a} + \frac{1}{2}\frac{PN \cdot c\sqrt{a^2+b^2}}{ab} - \frac{cx_1}{2b} = \frac{1}{2}\frac{c^2}{ab}$$

$$\therefore \frac{PN \cdot c\sqrt{a^2+b^2}}{2ab} = \frac{c^2}{2ab} + \frac{cx_1}{2b} + \frac{cy_1}{2a} = \frac{c(ax_1+by_1+c)}{2ab}$$

$$\therefore PN = \frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

12. கொடுக்கப்பட்ட இரு கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணங்களின் சமவெட்டிகளின் சமன்பாடுகள் காணல் (Equation of the bisectors of the angles between given lines)

AB, CD கோடுகளின் சமன்பாடுகள் முறையே,

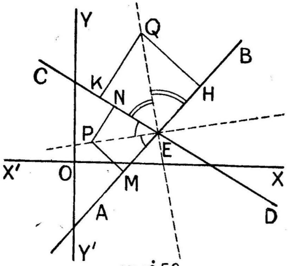
$$a_1x+b_1y+c_1=0,$$

$a_2x+b_2y+c_2=0$ எனக் கொள்வோம். அவை வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளி *E* ஆகட்டும். இரு கோடுகளிலிருந்து சம தொலைவில் நகரும் புள்ளியின் நியமப் பாதையே இருசம வெட்டி (bisector) ஆகும்.

AEC கோணத்தின் சமவெட்டியில் இருக்கும் *P* புள்ளியின் ஆயத் தொலைகள் (x_1, y_1) எனக் கொள்க.

P-யிலிருந்து *AB, CD*-க்கு *PM, PN* என்னும் நேர்குத்துக் கோடுகள் வரைக.

P-யும், O-வும் AB, CD ஆகிய ஒவ்வொரு கோட்டிற்கும் ஒரே பக்கத்தில் உள்ளதால், $PM=PN$ ஆகும்.



படம் 50

$$\therefore \quad \frac{a_1x_1+b_1y_1+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} = \frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$$

இது ஆதியை உட்கொண்ட கோணத்தின் இரு சம வெட்டியில் உள்ள எப் புள்ளிக்கும் பொருந்தும். CEB கோணத்தின் இரு சம வெட்டியிலிருக்கும் Q புள்ளியின் ஆயத் தொலைகள் (x_1, y_1) எனக் கொள்க. Q-விலிருந்து, AB, CD-க்கு QH, QK என்னும் நேர் குத்துக் கோடுகள் வரைக. Q-வும் AB, CD என்னும் கோடுகளின் இரு சமவெட்டியில் அமைவதால், எண்ணளவில் $QH=QK$ ஆகும். ஆனல், இவற்றின் குறியைக் கவனிப்போம். Q-வும், O-வும் AB என்ற கோட்டிற்கு ஒரே பக்கத்தில் இருக்கின்றன. ஆனல், CD என்ற கோட்டிற்கு Q-வும், O-வும் எதிர்ப் பக்கங்களில் அமைகின்றன.

ஆகவே, $QH=-QK$ ஆகும்.

$$\text{(அதாவது)} \quad \frac{a_1x_1+b_1y_1+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} = -\frac{a_2x_1+b_2y_1+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$$

$\therefore$ (x_1, y_1) புள்ளி சம வெட்டிகளில் ஏதாவது ஒன்றில் இருப்பின்,

$$\frac{a_1x_1+b_1y_1+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} = \pm \frac{a_2x_1+b_2y_1+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$$

∴ சம வெட்டிகளின் சமன்பாடு,

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} = \pm \frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$$

நேர் மதிப்பு எடுப்பின் ஆதியைக் கொண்ட கோணத்தின் இரு சம வெட்டியும், எதிர்மதிப்பு எடுப்பின் ஆதியைக் கொள்ளாத கோணத்தின் இரு சம வெட்டியும் வரும்.

விளக்க எடுத்துக்காட்டு :

$4x-2y=9$, $x-2y+4=0$ **என்னும் கோடுகளின் இடைப்பட்ட கோணங்களின் இருசம வெட்டிகளைக் காண்க.**

முதலில், நிலையெண் (constant) உறுப்புகளின் குறிகள் இரண்டையும் நேர் ராசியாகவோ அல்லது எதிர் ராசியாகவோ மாற்றி அமைத்துக் கொள்ளவும்.

இவ்வாறுக, $4x-2y-9=0$; $-x+2y-4=0$ என எழுதிக் கொள்ளலாம்.

இரண்டு இரு சமவெட்டிகளின் சமன்பாடு

$$\frac{4x-2y-9}{\sqrt{16+4}} = \pm \frac{-x+2y-4}{\sqrt{1+4}}$$ என்றுகும்.

(அதாவது) $4x-2y-9 = \pm 2(-x+2y-4)$

,, $6x-6y=1$-ம், $2x+2y=17$-ம் ஆகும்.

ஆதியை உள்ளடக்கியுள்ள கோணத்தின் இரு சமவெட்டியின் சமன்பாடு $6x-6y=1$ ஆகும்.

பயிற்சி 2-2.

1. $3x-2y=2, 7x+3y=43$. கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி யாது? [விடை : 4, 5]

2. $3x+y+4=0$, $3x+4y=15$, $24x-7y=3$ என்ற கோடுகள் ஒரு இரு சமபக்க முக்கோணத்தை உருவாக்குகின்றன என நிறுவுக.

3. $x-6y+a=0$, $2x+3y+4=0$, $x+4y+1=0$ என்பன ஒரே புள்ளி வழிச் செல்லின் a-ன் மதிப்பென்ன ?
[விடை : $a=5$]

4. $2x-3y+k=0$, $3x-4y-13=0$, $8x-11y-33=0$ என்பன ஓரிடத்துச் சந்திப்புடையனவானல், k-ன் மதிப்பைக் காண்க.
[விடை : $k=-7$]

5. $ax-y=1$, $x+2y=12$, $5x-ay+5=0$ ஒருங்கு சேருதற்கு a'-ன் மதிப்பையறிக.
[விடை : $a=3$]

6. $7x+3y-33=0$, $5x-2y-7=0$ என்னும் கோடுகளுக் கிடையேயுள்ள கோணத்தைக் காண்க.
[விடை : $\theta=45°$]

7. $y=x+7$, $(2+\sqrt{3})x+y=11$ என்னும் கோடுகளுக்கு இடையேயுள்ள கோணத்தைக் காண்க
[விடை : $\theta=60°$]

8. $(2+k)\,x+(1-2k)\,y+5=0$ என்பது k-ன் எல்லா மதிப்பு களுக்கும் ஒரு நிலையான புள்ளி வழிச் செல்லும் என நிறுவுக. அப் புள்ளியின் ஆயத் தொலைகளைக் காண்க.
[விடை , -2, -1]

9. $3x-4y=11$-க்கு இணையாக y ஆயத்தில் 5 அலகு வெட்டுத் துண்டு பிறப்பிக்கும் கோட்டின் சமன்பாடு யாது ?
[விடை : $3x-4y+20=0$]

10. $x-2y-2=0$, $x+3y-4=0$ கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி வழி $3x+4y+5=0$ ஒரு போகான கோட்டின் சமன்பாடு என்ன ?
[விடை : $3x+4y-10=0$]

11. ஒரு முக்கோணத்தின் உச்சிகளாவன : $A\,(5, 4)$; $B\,(-7, -4)$; $C\,(+3, -2)$. P என்பது AB-ன் நடுப் புள்ளி யாகும். P-ன் வழியாக BC-க்கு ஒரு போகாகும் நேர் கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க. அது AC-யைச் சமமாக வெட்டுவதாகவும் கண்டறிக.
[விடை : $5y=x+1$]

12. $(-3, 1)$ வழியாக, $(-4, -3)$; $(2, -2)$ என்பவற்றைச் செங்குத்தாக வரையப்படும் கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.
[விடை : $6x+y+17=0$]

13. $8px + (2-3p)y+1=0$, $px+8y+7=0$ என்னும் கோடுகள் நேர்குத்தாக இருப்பின் p-ன் மதிப்பென்ன ?

[விடை : $p=2$ அல்லது 1]

14. $x-2y+4=0$, $4x-3y+1=0$ கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி வழி $6x-5y-11=0$-க்கு நேர்குத்தான கோட்டின் சமன்பாட்டினைக் காண்க.

15. ஆதியிலிருந்து ஒரு கோட்டிற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் பாதத்தின் ஆயத் தொலைகள் (3, – 4) எனின், அக் கோட்டின் சமன்பாடு என்ன ?

[விடை : $3x-4y=25$]

16. $2x+3y=4$, $x-y+3=0$, $3x+2y=11$ என்னும் கோடுகளால் அமையும் முக்கோணத்தின் செங்குத்து மையத்தின் (ortho-centre) ஆயத் தொலைகள் கண்டறிக.

[விடை : $\frac{1}{5}$: $\frac{14}{5}$]

17. A (4, 1) ; B (7, 4) ; C (5, 2) என்பன ஒரு முக்கோணத்தின் உச்சிகளாகும். A-யிலிருந்து BC-க்குச் செங்குத்தாகச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாட்டையும், செங்குத்து மையத்தின் ஆயத் தொலைகளையும் கண்டறிக.

[விடை : $x+3y=7$; (1, 2)]

18. (– 2, 3) ; (2, –1) ; (4, 0) என்னும் உச்சிகளையுடைய முக்கோணத்தின் சுற்று வட்ட மையத்தின் (circum-centre) ஆயத் தொலைகளைக் காண்க.

[விடை : $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$]

19. (3, 4) ; (–2, 1) என்னும் புள்ளிகள் $3x-y+6=0$ என்னும் கோட்டிற்கு எதிர்ப் பக்கங்களில் அமைகின்றன எனக் காண்பி.

20. (2, 3) என்னும் புள்ளியிலிருந்து $3x+4y=10$ என்னும் கோட்டிற்கு வரையும் செங்குத்துக் கோட்டின் நீளமென்ன?

[விடை : $\frac{8}{5}$]

21. $3x+4y=5$, $12x-5y=41$ என்பவற்றிற்கு இடைப்பட்ட கோணங்களின் இரு சம வெட்டிகளைக் காண்க.
[விடை : $3x-11y=20$; $11x+3y=30$]

22. $x+y-5=0$, $x+7y+7=0$ ஆகிய கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணங்களின் இரு சம வெட்டிகளைக் காண்க.
[விடை ; $x+2y=3$; $y=2x-16$]

23. $x+1=0$, $3x-4y=5$, $5x+12y=27$ கோடுகளால் அமைந்த முக்கோணத்தின் உள் மையம் (in-centre) என்ன ?
$\left[\text{விடை : } \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$

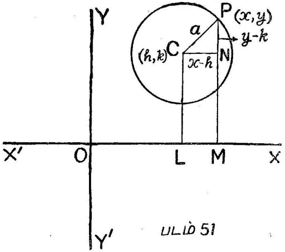
24. $3x+4y=6$, $12x-5y=3$; $4x-3y+12=0$ என்ற கோடுகளால் அமைந்த முக்கோணத்தின் உள்-மையம் என்ன ?
$\left[\text{விடை : } \frac{11}{48}, \frac{125}{48}\right]$

25. $2x+3y=7$ என்ற கோட்டில், (0, 2) என்ற புள்ளியின் விம்பப் புள்ளியை (image)-க் கண்டறிக.
[விடை : -4, -4]

3. வட்டம்

1. வரையறை : ஒரு நிலையான புள்ளியிலிருந்து மாருத தொலையுடைய ஒரு புள்ளியின் இயங்குவரை வட்டமெனப்படும்.

இவ் வட்டத்திற்கு நிலையான புள்ளி மையமாகவும், மாருத தொலை ஆரமாகவும் அமையும்.



படம் 51

2. (h, k) **என்னுமிடத்தில் மையத்தைக் கொண்டு, ஆரம்** 'a' **ஆகவுடைய வட்டத்திற்குச் சமன்பாடு காணுதல்.**

$C(h, k)$ வட்டத்தின் மையமாகவும், 'a' அதன் ஆரமாகவும் கொள்க. $P(x, y)$ என்பது வட்டத்தின் மேல் உள்ள யாதேனுமொரு புள்ளியாகட்டும்.

P, C-யிலிருந்து PM, CL என்ற கோடுகளை OX-க்குச் செங்குத்தாக வரைக. C-யிலிருந்து MP-க்குச் செங்குத்தாக CN ஐ வரைக.
இனி, $CN = LM = OM - OL = x - h$

$$NP = MP - MN = MP - LC = y - k$$

CNP என்ற செங்கோண முக்கோணத்தில், $CN^2 + NP^2 = CP^2$ ஆகும்.

(அதாவது) $(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$

கிளை 1: வட்டத்தின் மையம் ஆதியிலிருந்தால், $h = k = 0$

$\therefore$ வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2 + y^2 = a^2$ ஆகும்.

கிளை 2: $(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$ என்னும் தொடர்பை விரித்து எழுதினல், $x^2 + y^2 - 2h\,x - 2\,ky + h^2 + k^2 - a^2 = 0$ எனப் பெறுகிறோம்.

இது $\underline{x^2 + y^2 + 2g\,x + 2fy + c = 0}$ என்னும் வடிவில் அமைகிறது. இது வட்டத்தின் பொதுப்படைச் சமன்பாடு எனப்படும்.

3. மறுதலையாக $\underline{x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + 2 = 0}$ ஒரு வட்டத்தைக் குறிப்பிடுவதாகக் காட்டலாம்.

கொடுத்த தொடர்பு $x^2 + y^2 + 2\,gx + 2\,fy + c = 0$ ஆகும்.

இதனை $x^2 + y^2 + 2gx + 2\,fy = -c$ என்றெழுதலாம். இரண்டு பக்கங்களிலும் $g^2 + f^2$ ஐக் கூட்ட,

$x^2 + 2\,gx + g^2 + y^2 + 2\,fy + f^2 = g^2 + f^2 - c$ எனவரும்.

(அதாவது) $(x+g)^2 + (y+f)^2 = g^2 + f^2 - c$

$$\therefore \quad \{x - (-g)\}^2 + \{y - (-f)\}^2 = (\sqrt{g^2 + f^2 - c})$$

$(-g - f)$ என்னும் நிலையான புள்ளியிலிருந்து இயங்கும் புள்ளி (x, y)யின் தூரம் ஒரு மாறிலியாகும். எனவே, கொடுக்கப்பட்ட தொடர்பு ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கின்றது.

$(-g, -f)$ நிலையான புள்ளி வட்டத்தின் மையம் ஆகும்.
ஆரம் $= \sqrt{g^2 + f^2 - c}$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு : $5x^2+5y^2+12x+6y-11 = 0$ என்னும் வட்டத்தின் மையத்தையும் ஆரத்தையும் காண்க.

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை,

$x^2+y^2+\frac{12}{5}x+\frac{6}{5}y-\frac{11}{5}=0$ என்றெழுதலாம்.

(அதாவது) $\left(x+\frac{6}{5}\right)^2+\left(y+\frac{3}{5}\right)^2=4$

$\therefore$ வட்டத்தின் மையம் $\left(-\frac{6}{5}, -\frac{3}{5}\right)$ ஆகும்.

ஆரம் $=2$ ஆகும்.

[குறிப்பு 1 : ஒரு வட்டத்தின் சமன்பாடு இரு படிச்சமன் பாடாகும். x^2, y^2 என்பவற்றின் கெழுக்கள் சமமாக இருக்கும்.

x, y என்ற உறுப்பு யாதும் இராது.

குறிப்பு 2 : c-ன் பலவகை மதிப்புகளுக்கு ஒரே மைய வட்டங்கள் கிடைக்கப் பெறும்.

குறிப்பு 3 : வட்டம் ஆதியின் வழிச் சென்றால், அதன் சமன் பாட்டில் தனி உறுப்பு இராது.

குறிப்பு 4 : $x^2+y^2+2gx+2fy+c = 0$ என்னும் சமன்பாடு மூன்று தனிப்பட்ட மாறிலிகளைக் கொண்டுள்ளது. எனவே ஒரு வட்டத்தை அமைப்பதற்கு 3 நிபந்தனைகள் தேவைப்படும். எடுத்துக்காட்டாக, மூன்று புள்ளிகள் அறியப் பட்டால், வட்டத்தை அமைக்கலாம்.]

4. ஒரு வட்டமானது (x_1, y_1) (x_2, y_2) ஆகிய புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டினை விட்டமாகக் கொண்டுள்ளதானால், அதன் சமன் பாட்டைக் கண்டறிதல்.

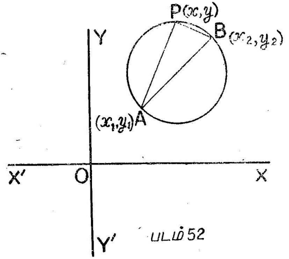
$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ விட்டத்தின் முனைகளாகுக. வட்டத்தின் மீது $P(x, y)$ என்பதொரு புள்ளியானால், P வட்டத்தில் எங்கிருந் தாலும், $\angle APB=90^\circ$ ஆகும்.

அதாவது PA, PB ஒன்றற்கொன்று செங்குத்தாகும்.

ஆகவே, அவற்றின் சரிவுகளின் பெருக்கற் பலன் -1 ஆகும்.

இப்பொழுது PA-ன் சரிவு $= \dfrac{y-y_1}{x-x_1}$

PB-ன் சரிவு $= \dfrac{y-y_2}{x-x_2}$



படம் 52

$$\therefore \quad \frac{y-y_1}{x-x_1} \cdot \frac{y-y_2}{x-x_2} = -1$$

(அதாவது) $(y-y_1)(y-y_2) = -(x-x_1)(x_1-x_2)$

$$\therefore \quad (x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$$

விளக்க எடுத்துக்காட்டு

ஒரு வட்டமானது $(6, 0)$; $(0, 8)$ என்னும் புள்ளிகளோடு ஆதியின் வழியாகவும் செல்லும்படி வரையப்பட்டால், அதன் சமன் பாட்டைக் காண்க. அதனோடு இவ்வட்டத்திற்கு ஆதியிடத்தில் அமைக்கும் தொடுகோட்டின் சமன்பாட்டையும் காண்க.

$(6, 0)$; $(0, 8)$ என்ற புள்ளிகளைக் குறித்துக் கொள். அவை முறையே A, B ஆகட்டும். வட்டம் A, B, O புள்ளிகள் வழிச் செல் கிறது.

$\angle AOB =$ ஒரு செங்கோணம்

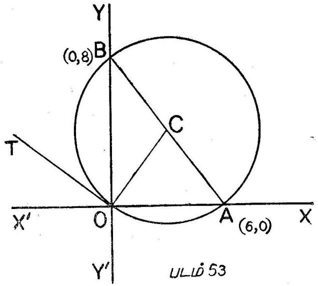
$\therefore$ தேவையான வட்டம் AB ஐ விட்டமாகக் கொண்டது.

வட்டத்தின் சமன்பாடு $(x-6)\ (x-0)+(y-0)\ (y-8)=0$ ஆகும்.

(அதாவது) $x^2-6\,x+y^2-8\,y=0$

(அதாவது) $\underline{x^2+y^2-6\,x-8\,y=0}$ ஆகும்

O என்ற புள்ளியில் வரையும் தொடுகோடு OT ஆகுக. வட்டத்தின் மையம் C ஆனால், OC ஆனது OT-க்குச் செங்குத்துக் கோடாகும்.



படம் 53

C-ன் கூறுகள் $\dfrac{0+6}{2}$, $\dfrac{8+0}{2}$ (அதாவது) $(3, 4)$ ஆகும்.

ஆகவே OC-யின் சரிவு $= \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \dfrac{4-0}{3-0} = \dfrac{4}{3}$

$\therefore$ OT-யின் சரிவு $= -\frac{3}{4}$

OT ஆனது $(0, 0)$ வழி செல்கிறது.

$\therefore$ OT-ன் சமன்பாடு, $y-0=-\frac{3}{4}\ (x-0)$ [புள்ளி-சரிவு வடிவம்]

(அதாவது) $3x+4y=0$ ஆகும்.

பயிற்சி 3.

1. $(3, -2)$ புள்ளியை மையமாகவும், ஆரை 3 ஆகவும் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாட்டினைக் காண்க. இவ் வட்டம் $(3, 1)$ என்னும் புள்ளி வழிச் செல்லும் என்று காட்டுக.

[விடை : $(x-3)^2+(y+2)^2=9$]

2. $(7, 1)$ என்னும் புள்ளியின் வழிச் செல்லும் வட்டத்தின் மையம் $(-4, -3)$ எனின் அதன் சமன்பாட்டினைக் காண்க.

[விடை : $(x+4)^2+(y+3)^2=25$]

3. $2x+3y=7$, $3x-2y=4$ என்பன ஒரு வட்டத்தின் இரு விட்டங்களின் சமன்பாடுகள் ஆகும். $(-2,-3)$ வட்டப் பரிதியிலுள்ள ஒரு புள்ளி எனின், அவ் வட்டத்தின் சமன் பாட்டைக் காண்க. மேலும் $(-2,-3)$-ல் வட்டத்திற்கு வரையும் தொடுகோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

[விடை : $x^2+y^2-4x-2y-27=0$; $x+y+5=0$]

4. $2x^2+2y^2-14x+10y+19=0$. வட்டத்தின் மையம் ஆரை இவற்றைக் கண்டறிக.

[விடை : $\left(\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}\right)$; ஆரை $=3$]

5. $x^2+y-2x+6y+6=0$ என்னும் வட்டத்தில் $(-1,-3)$ என்பதொரு விட்டத்தின் முனையாகும். மற்ற முனை யையும், அவ்விடத்தில் வரையும் தொடுகோட்டின் சமன் பாட்டினையும் காண்க.

[விடை : $(3,-3)$; $x=3$]

6. A, B என்பன $x^2+y^2+4x+12y-40=0$, $x^2+y^2-12x+2y$, $+28=0$ என்னும் வட்டங்களின் மையங்களாகும். P என்பது அவை வெட்டிக் கொள்ளுமிடமாகும். $AB^2=AP^2+PB^2$ என்று காட்டுக.

7. $x^2+y^2-4x-2y-5=0$, $x^2+y^2+8x+2y-73=0$ என்னும் வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று தொட்டு நிற்கும் என நிறுவுக. தொடு புள்ளியில் உள்ள பொதுத் தொடு கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

[விடை : $3x+y-17=0$]

8. (i) $x^2+y^2=400$, $x^2+y^2-10x-24y+120=0$ என்னும் வட்டங்கள் உள்ளே தொட்டு நிற்பனவென்றும்,
(ii) $x^2+y^2-4x+6y+8=0$; $x^2+y^2-10x-6y+14=0$ ஆவனவெளியே தொட்டுக் கிடப்பன வென்றும் காட்டுக.

9. (1, 1) ; (2, −1) ; (3, 2) ஆகிய புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.
[விடை : $x^2+y^2-5x-y+4=0$

10. (0, −8) ; (0, 9) ; (12, 0) ; (−6, 0) என்னும் புள்ளிகள் ஒரு வட்டத்தின் மேல் அமையுமெனக் காட்டுக இந்த வட்டத்தின் மையத்தையும், ஆரத்தையும் கண்டறிக.
[விடை : $\left(3, \frac{1}{2}\right)$; $\frac{5\sqrt{13}}{2}$]

11. (−1, −1) ; (0, −1) ; (−2, 0) ; (1, 1) என்னும் புள்ளிகள் ஒரு வட்டத்தின் மேல் அமையுமெனக் காட்டுக. அவ் வட்டத்தின் மையத்தையும், ஆரத்தையும் அறிக.
[விடை : $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\frac{\sqrt{5}}{2}$]

12. பின்வரும் புள்ளிகள் $x^2+y^2-4x+4y-8=0$ என்னும் வட்டத்திற்கு உள்புறத்திலா, வெளிப் புறத்திலா வுள்ள வெனக் கண்டறிக. A (0, 1) ; B (5, 7) ; C (−1, −2) ; D (−2, 3) இவற்றுள் வெளிப் புறத்திலுள்ளதொரு புள்ளியிலிருந்து வரையுந் தொடுகோட்டின் நீளத்தைக் கண்டறிக. [விடை : A, C உள்ளே ; B, D வெளியே தொடு கோட்டின் நீளம் முறையே $\sqrt{74}$, 5]

13. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ என்னுங்கோடு ஆயங்களை A, B என்னுமிடங்களில் வெட்டுகின்றதாகும். இந்த AB ஐ விட்டமாகக் கொண்டு வரையும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் கண்டறிக. ஆகவே, A, B, O, (1, 3) என்னும் புள்ளிகள் ஒரு வட்டப் பரிதியில் நிற்பதற்கு வேண்டிய நிபந்தனையைக் காண்க.

14. ஒரு வட்டமானது (3, 7) ; (5, 1) என்னும் புள்ளிகளை சேர்க்குங் கோட்டை விட்டமாகக் கொண்டு வரையப் பட்டால் அதன் சமன்பாடு யாது ? இப் புள்ளிகளிடத்து

அவ்வட்டத்திற்கு வரையும் தொடு கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் கண்டறிக. [விடை: $x^2+y^2+2x--8=0$; $4x+3y=33$; $4x+3y+17=0$]

15. (4, −10); (−8, 8) என்னும் புள்ளிகளைச் சேர்க்குங் கோட்டிற்குச் செங்குத்துச் சமவெட்டியின் சமன்பாட்டைக் கண்டறிக. $2x=y+5$-ன் மேல் மையம் அமையக் கொண்டு (4, −10); (−8, 8) என்னும் புள்ளிகளின் வழிச் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் கண்டறிக. [விடை: $2x-3y+1=0$; $x^2+y^2-8x-6y-144=0$]

16. X ஆயத்தைத் தொட்டுக் கொண்டு (1, −2); (3, −4) என்னும் புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் இரண்டு வட்டங்களின் சமன்பாடுகளை வரைக. [விடை: $x^2+y^2+10x+20y+25=0$. $x^2+y^2-6x+4y+9=0$]

17. ஆயங்களிரண்டையுந் தொட்டுக் கொண்டு (9, 2) வழியாகச் செல்லும் இரண்டு வட்டங்களின் சமன்பாடுகளைப் பெறுக. [விடை: $x^2+y^2-10x-10y+25=0$; $x^2+{}^2-y34x-34y+289=0$]

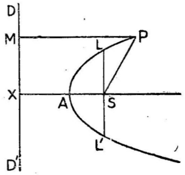
18. $x^2+y^2-2x-4y-5=0$ என்னும் வட்டத்தினுள் கிடக்கும் நாண் (2, 3) என்றதனை நடுப் புள்ளியாகப் பெறுமானால், அதன் நீளத்தை அறிக. [விடை: $4\sqrt{2}$]

19. (4, 7) என்னும் புள்ளியிலிருந்து $(x-2)^2+(y-3)^2=4$ என்னும் வட்டத்திற்கு வரையும் தொடுகோட்டின் நீளத்தை அறிக. [விடை: 4]

20. (5, 4); (−7, −4); (3, −2) என்னும் புள்ளிகளால் அமைந்த முக்கோணத்தின் ஒன்பது புள்ளி வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் கண்டறிக. [விடை: $7x^2+7y^2-30x+38y-37=0$]

4. கூம்பு வளைவுகள்
(Conics)

1. **கூம்பு வளைவு : வரையறை :** ஒரு நிலைப்புள்ளி, ஒரு நிலைக் கோடு இவற்றிலிருந்து இயங்கும் புள்ளி ஒன்றின் தொலைகளின் தகவு நிலைத்ததாக இருக்கும் வண்ணம் புள்ளி இயங்கினால், அதன் நியமப்பாதை ஒரு கூம்பு வளைவு அல்லது கூம்பின் வெட்டு முகக் கோடு எனப்படும்.



படம் 54.

நிலையான புள்ளியை S என்ற எழுத்தால் குறிப்பிடுவது மரபு. DD' நிலைக் கோடாகட்டும். P என்பது இயங்கும் புள்ளி. P-லிருந்து DD'-க்குச் செங்குத்தாக PM ஐ வரை.

$\frac{SP}{PM}$ ஒரு நிலைத்த தகவாக இருக்கும் வண்ணம் P இயங்கினால், P-ன் நியமப்பாதை ஒரு கூம்பு வளைவு எனப்படும். மறுதலையாக, P கூம்பு வளைவில் எங்கிருந்தாலும், $\frac{SP}{PM}$ -ன் விகிதம் மாறாது.

நிலைப்புள்ளி S என்பதைக் குவியம் (focus)என்றும், DD' என்ற நிலைக்கோட்டை இயக்குவரை (Directrix) என்றும், $\frac{SP}{PM}$ என்ற நிலைத்த தகவை மையத் தொலைத் தகவு (eccentricity) என்றும் கூறப்படும்.

மையத் தொலைத் தகவை e என்ற எழுத்தால் குறிப்பிடுவது மரபு. $\therefore\ \frac{SP}{PM} = e$ ஆகும்.

$\frac{SP}{PM} = 1$ ஆனால், (அதாவது) $e=1$ ஆனால், கூம்பு வளைவு பர வளைவு அல்லது பர வளையம் (Parabola) எனப்படும்.

$\frac{SP}{PM} < 1$ (அதாவது) $e < 1$ என்றிருப்பின், கூம்பு வளைவு நீள் வளையம் (ellipse) எனப்படும்.

$\frac{SP}{PM} > 1$ (அதாவது) $e > 1$ ஆனால், கூம்பு வளைவு அதி பர வளைவு அல்லது அதி பர வளையம் (hyperbola) எனப்படும்.

வரையறை

S-லிருந்து DD-க்குச் செங்குத்தாக SX வரைக. இது கூம்பு வளைவை A-ல் சந்திக்கட்டும்.

A என்பது உச்சி (vertex) எனப்படும். XAS என்ற கோடு தலையாய அச்சு (Principal axis) எனப்படும்.

கூம்பு வளைவில் ஏதேனும் இரு புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோடு நாண் (chord) எனப்படும். இந்த நாண் குவியம் (focus) வழியாகச் சென்றால், அது குவிய நாண் (focal chord) எனப்படும்.

தலையாய அச்சுக்குச் செங்குத்தாகக் குவியம் வழி வரையப்படும் குவிய நாண் கூம்பு வளைவின் நேர் அகலம் (latus rectum) எனப்படும். படத்தில் LSL' என்பது கூம்பு வளைவின் நேரகலமாகும்.

2. ஒரு கூம்பு வளைவின் சமன்பாடு இருபடிச் சமன்பாடாகும்.

குவியம் $S(x_1, y_1)$ ஆகவும், இயக்குவரை $ax+by+c=0$ எனவும், மையத் தொலைத்தகவு e எனவும், இயங்கும் புள்ளி P-ன் ஆயத் தொலைகள் (x, y) எனவும் கொண்டால்,

$$\frac{SP}{PM} = e \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore \quad SP = ePM \qquad \left[\quad PM = \frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \right]$$

$$\therefore \quad SP^2 = e^2PM^2$$

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2 = \frac{e^2(ax+by+c)^2}{a^2+b^2}$$

இச் சமன்பாட்டை விரித்தெழுதினால்,

$ax^2+2h\,xy+by^2+2gx+2fy+c=0$ என்பது போன்ற ஓர் இருபடிச் சமன்பாடு P-ன் இயங்கு வரையாகும்.

[குறிப்பு 1 : $a=b$; $h=0$ எனின், இச் சமன்பாடு ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கும்.. வட்டமும் ஒரு கூம்பு வளைவே என்பது விளங்கும்.

குறிப்பு 2 : $abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0$ எனின், இச் சமன்பாடு ஒரு ஜோடிக் கோடுகளைக் குறிக்கும்.

$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$. ஒரு ஜோடிக் கோடுகளைக் குறிக்க வேண்டுமானால், அது இரண்டு ஒருபடிக் கோவைகளின் பெருக்குத் தொகையாக இருக்கவேண்டும்.

கொடுத்த சமன்பாட்டை x-ன் இருபடிச் சமன்பாடாகக் கருதினால், $ax^2+2x(hy+g)+(by^2+2fy+c)=0$ என்றெழுதலாம்.

$$\therefore \quad x = \frac{-(hy+g) \pm \sqrt{(hy+g)^2-a(by^2+2fy+c}}{a}$$

இரண்டு ஒரு படிச் சமன் பாடுகளின் பெருக்குத் தொகையாக இருக்க,

$(hy+g)^2-a(by^3+2fy+c)$ வர்க்கமாக இருக்க வேண்டும்.

(அதாவது) $(h^2-ab)y^2+2(gh-af)\ y+(g^2-ac)$ ஒரு வர்க்க மாக வேண்டும்.

இது ஒரு வர்க்கமாக, $(gh-af)^2=(h^2-ab)\ (g^2-ac)$ என்று தல் வேண்டும்.

(அதாவது) $a(abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2)=0$

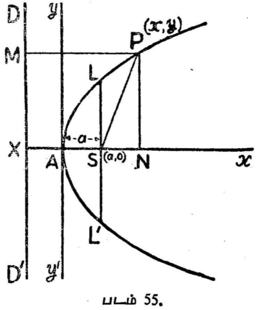
$a\neq 0$ எனின், $abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0$ ஆதல் வேண்டும்.

குறிப்பு 3 : குறிப்பு (1) அல்லது (2)-ல் கண்ட நிபந்தனைகள் நிறைவேறுவிடின், கொடுத்த சமன்பாடு ஒரு பரவளைவு அல்லது நீள் வளையம் அல்லது ஒரு அதிபர வளைவு என்பவற்றில் ஒன்றைக் குறிக்கும்.]

3. பரவளைவு

(i) பரவளைவின் சமன்பாடு

குவியம் S எனவும், இயக்கு வரை DD' எனவும், P என்பது பரவளைவில் யாதேனுமொரு புள்ளி எனவும் கொள்வோம்.



படம் 55.

S-லிருந்து இயக்குவரை DD'-க்கு SX ஐச் செங்குத்தாக வரைக. SX-ன் மையப் புள்ளியை A எனக் குறிக்க. $SX=AX$ ஆதலின்,

$$\frac{SA}{AX} = 1 = e$$

$\therefore$ A என்பது பரவளைவில் இருக்கும்.

P-லிருந்து AS-க்கும், DD'-க்கும் முறையே PN, PM என்ற செங்குத்துக் கோடுகள் வரை.

AS-க்குச் செங்குத்தாக AY வரைக.

$AS = a$ எனக் கொள்க.

AS, AY கோடுகளை x, y ஆயங்களாகக் கொள்ள, S-ன் ஆயத் தொலைகள் $(a, 0)$ ஆகும்.

$P(x, y)$ எனின், $AN = x$, $NP = y$; $PM = XN = XA + AN = x + a$

இனி, P பரவளைவில் இருப்பதால்,

$$\frac{SP}{PM} = e = 1$$

$$\therefore \quad SP = PM$$

$$\sqrt{(x-a)^2 + y^2} = x + a$$

$$\therefore \quad (x-a)^2 + y^2 = (x+a)^2$$

$$\therefore \quad y^2 = (x+a)^2 - (x-a)^2 = 4ax$$

$\therefore$ P-ன் நியமப்பாதை $y^2 = 4ax$ ஆகும்.

இது ஒரு பரவளைவின் நியமவடிவம் (Standard form)

(ii) $y^2 = 4ax$ பரவளை வரைதல்

x-ன் ஒவ்வொரு மதிப்பிற்கும், y இரு மதிப்புகளைப் பெறுகிறது. அவை சமமாகவும் எதிராகவும் உள்ளன. ஆகவே (x, y) புள்ளி வளை வரையில் அமைந்தால், $(x, -y)$-ம் வளை வரையில் இடம் பெறும். அதனல், பரவளைவு ஆயத்தோடு சமச் சீருடையதாகும் (Symmetrical with respect to the axis).

x-ன் மதிப்பு எதிரெண்ணு நமிடத்து, y-ன் மதிப்பு கற்பனையாகும். ஆகவே A-ன் இடப் பக்கத்தில் பரவளைவு இராது. x-ன் மதிப்பு பூச்சியமானல், y-ன் மதிப்பும் பூச்சியம் ஆகும்.

ஆகவே, வளை வரை A வழிச் செல்லும்.

x-ன் மதிப்பு முடிவிலி (infinity)-க்குப் பெருகப் பெருக, y-ன் மதிப்பும் அங்ஙனமேயாகும்.

சமன்பாட்டில் $x=0$ எனக் கொடுப்பின், $y^2=0$ எனவரும்.

(அதாவது) y-க்கு 0, 0 மதிப்புகள் வருவதால், $x=0$ கோடு வளை வரையை ஒரே புள்ளியான $(0, 0)$; $(0, 0)$ புள்ளிகளில் வெட்டும். ஆகையால், $x=0$ கோட்டு பரவளையத்தை $(0, 0)$ இடத்துத் தொடும்.

x-க்குப் பல மதிப்புகளைக் கொடுத்து, அவற்றிற்குரிய y-ன் மதிப்புகளைக் காண்க. இம் மதிப்புளுக்குரிய உருவம் கிடைக்கும்.

[குறிப்பு 1 : **நேரகலம்** (Latus rectum) S வழிச் செல்லும்.

LSL' என்னும் இரட்டைக் குத்தாயத்தை நேரகலம் எனக் கூறப்படும்.

SL ஐ l எனக் கொள்ளின்,

L-ன் ஆயத் தொலைகள் (a, l) ஆகும்.

L பரவளைவில் இருப்பதால், $y^2=4\,ax$-ல் பிரதியிட

$l^2=4\,a \cdot a$ என்றாகும்.

$\therefore\ l^2=4\,a^2$

$\therefore\ l=2\,a$

ஆகவே நேரகலம் $=2\,l=4a$

குறிப்பு 2 : துணை அலகுச் சமன்பாடு (Parametric Representation)

't'-ன் அனைத்து மதிப்புக்கும், $x=at^2$, $y=2at$ என்பன $y^2=4\,ax$ சமன்பாட்டிற்குப் பொருந்தும்.

ஆகவே, பரவளையத்துப் புள்ளியின் ஆயத் தொலைகளை ஒரே மாறு ராசியான (Variable) t ஆல் குறிப்பிடலாம். $(at^2,\ 2at)$ என்னும் புள்ளியை 't' எனக் குறிப்பிடுவது மரபு.]

விளக்க எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 1: $(-1, 1)$ஐக் குவியமாகவும், $x+y+2=0$ஐ இயக்கு வரையாகவும் கொண்ட பரவளையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

பரவளையின் மையத் தொலைத் தகவு $=1$

பரவளையின் புள்ளிகளுள் ஒன்று $P(x, y)$ எனக் கொள்க.

$P\ (x, y)$-லிருந்து $x+y+2=0$ வரையும் செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம் $PM = \dfrac{x+y+2}{\sqrt{2}}$

$S(-1, 1)$-ம், $P(x, y)$-ம் ஆதலால்,

$$SP = \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2}$$

$$\frac{SP}{PM} = 1$$

(அதாவது) $SP = PM$

$$\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2} = \frac{x+y+2}{\sqrt{2}}$$

இரு பக்கங்களையும் வர்க்கம் காண,

$$x^2+2x+1+y^2-2y+1 = \frac{x^2+y^2+4+2xy+4x+4y}{2} \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore\quad 2x^2+2y^2+4x-4y+4 = x^2+y^2+2xy+4x+4y+4$$

$$\therefore\quad x^2+y^2-2+y-8y=0$$

எடுத்துக்காட்டு 2: $y^2-2x-4y-2=0$ பரவளையின் முனை குவியம், இயக்குவரை இவற்றினைக் காண்க.

$y^2-2x-4y-2=0$

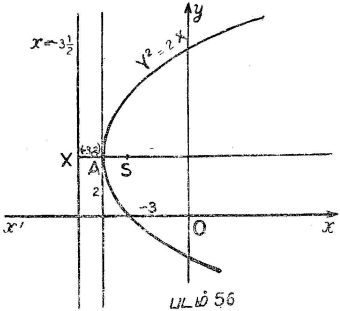
(அதாவது) $y^2-4y+4-2x-6=0$

(அதாவது) $(y-2)^2=2(x+3)$

$(-3, 2)$ புள்ளிக்கு ஆதியை மாற்றின், புதிய ஆயங்களைப் பொறுத்துப் பரவளையின் சமன்பாடு $Y^2=2X$ ஆகும்.

நேரகலம் $=2$ $\therefore$ $AS=\frac{1}{2}$

S-ன் ஆயத் தொலைகள் $(-3+\frac{1}{2}, 2)$



படம் 56

(அதாவது) $(-2\frac{1}{2}, 2)$ ஆகும்.

இயக்கு வரையின் சமன்பாடு $x=-3\frac{1}{2}$

4. நீள் வளையம் (Ellipse)

(i) நீள் வளையத்தின் சமன்பாடு

குவியம் S எனவும், இயக்கு வரை DD' எனவும் கொள்க. S-லிருந்து DD'-க்குச் செங்குத்து வரைக. இது DD'ஐ X-ல் சந்திக்கட்டும்.

SX ஐ $e:1$ தகவுக் கேற்ப அகத்தும், புறத்தும் பிரிக்கும் A, A' என்ற புள்ளிகளைக் காண்க. AA'-ன் நடுப் புள்ளி C எனவும், $AA'=2a$ எனவும் கொள்க.

$$\frac{SA}{AX}=e=\frac{SA'}{A'X}$$

$$\therefore\ SA=e.AX$$

$$SA'=e\cdot A'X$$

$\therefore \quad SA+SA'=e\,(AX+A'X)$

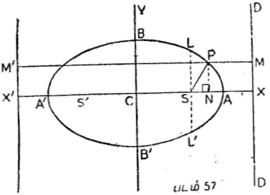
(அதாவது) $AA'=e\,(CX-CA+A'C+CX)$

(அதாவது) $2a=e\cdot 2\,CX \quad \therefore \quad CX=\dfrac{a}{e}$

$SA'-SA=e\,(A'X-AX)$

$(CS+CA')-(CA-CF)=e\cdot AA'$

$2\,CS=e\cdot 2\,a \quad \therefore \quad CS=ae.$



படம் 57

C ஐ ஆதியாகவும், CA ஐ x ஆயமாகவும், C வழி ACA'-க்குச் செங்குத்தான கோட்டினை y ஆயமாகவும் கொள்க. நீள் வளையத்தின் புள்ளிகளுள் ஒன்ருன P ஐ (x, y) ஆகவும் கொள்க. SP ஐச் சேர்க்க P-லிருந்து DD'-க்குச் செங்குத்தாக PM ஐ வரைக.

S-ன் ஆயத் தொலைகள் $(a, e, 0)$

$$PM=NX=CX-CN=\frac{a}{e}-x,$$

வரைபறையின் படி $\dfrac{SP}{PM}=e$

$$\therefore \quad SP=e\cdot pm$$

$$SP^2=e^2\cdot pm^2$$

$$(x-ae)^2+y^2=e^2\left(\frac{a}{e}-x\right)^2$$

$$x^2\,(1-e^2)+y^2=a^2\,(1-e^2)$$

$a^2(1-e^2)$ ஆல் இரு பக்கங்களையும் வகுக்க

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2(1-e^2)}=1$$

$a^2(1-e^2)=b^2$ எனக் கொள்க.

பின்னர், நீள் வளையத்தின் சமன்பாடு $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ என்றாகும்.

(ii) **நீள் வளையம் வரைதல்**

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ என்ற சமன்பாட்டில்,

$y=0$ ஆனால் $x=\pm a$

$\therefore$ நீள் வளையம் $(a, 0)$; $(-a, 0)$ புள்ளிகள், அஃதாவது A, A' வழிச் செல்லும்

A, A' என்பன நீள் வளையத்தின் உச்சிகள் எனப்படும். $x=0$ எனின், $y=\pm b$

$\therefore$ நீள் வளையம் $(0, b)$; $(0, -b)$ என்ற y அச்சில் உள்ள புள்ளிகள் வழிச் செல்லும். (அதாவது) B, B' வழிச் செல்லும்.

நீள் வளையத்தின் சமன்பாட்டை, $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$

என்றும், $x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}$ என்றும் எழுதலாம்.

$x^2>a^2$ (அதாவது) $x>a$ அல்லது $x<-a$ என்றிருப்பின், '-க்குக் கற்பனை மதிப்புகள் வருமாதலின், A-க்கு வலப் பக்கத்தும், A'-க்கு இடப் பக்கத்தும் வளைவரை வராது. இம்மாதிரியே B-க்கு மேலும், B'-க்குக் கீழும் வளைவரை வராது.

சமன்பாட்டில், $-a$-க்கும், a-க்கும் இடைப்பட்ட x-ன் ஒவ்வொரு மதிப்புக்கும் y-க்குக் குறி வேறுபட்ட ஒரே எண் மதிப்பில் இரு மதிப்புகள் வரும். ஆகவே, நீள் வளையம் x ஆயத்தோடு சமச் சீருடையது. இதேபோல் அது y ஆயத்தோடும் சமச் சீருடையதாகும்.

இதனால் (x, y) என்ற புள்ளி நீள் வளையத்தில் இருப்பின், $(x, -y)$; $(-x, y)$; $(-x, -y)$ என்ற புள்ளிகளும் நீள் வளையத்தில் இருக்கும்.

மேலும், (x, y) $(-x, -y)$ புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடு ஆதி வழிச் செல்வதால், C வழிச் செல்லும் நாண்கள் அனைத்தையும் C சமமாகப் பிரிக்கும். C நீள் வளையத்தின் மையம் (centre) எனப் படும்.

A, A'; B, B' என்பவற்றிற்கு உட்பட்டு ஒரு மூடிய (closed figure) உருவமாக நீள் வளையம் அமையும்.

AA'; BB' முறையே நீள் வளையத்தின் நெட்டச்சு (Major axis), குற்றச்சு (minor axis) எனப்படும்.

ஆகவே நெட்டச்சு, குற்றச்சு நீளங்கள் முறையே $2a$, $2b$ ஆகும்.

$b^2 = a^2(1-e^2)$ ஆவதால், எப்பொழுதும் $b<a$. இனி x-க்குப் பல மதிப்புகளைக் கொடுத்து, அவற்றிற்கு ஒத்த y-ன் மதிப்புகளைக் காணின், நீள் வளையத்தின் புள்ளி பலவற்றின் ஆயத் தொலைகள் கிடைக்கும். இவற்றால் அறியும் நீள் வளையத்தினது உருவம் முந்தியப் பிரிவு படத்தில் காண்க.

(iii) இரண்டாவது குவியம், இயக்குவரை

நீள் வளையமானது இரு அச்சுகள் பற்றியும் சமச்சீருடைய தாகையால், S-க்குச் சீராக S' என்ற மற்றொரு குவியமும், DD'-குச்சீராக S'-க்கு ஒத்த (Corresponding) EE' என்ற இயக்கு வரையும் பெறலாம்.

ஆகவே, $CS' = CS = ae$

$$CX' = CX = \frac{a}{e}$$

மேலும், இயங்கும் புள்ளி P ஆனது $\frac{S'P}{PM'} = e$ என்ற நிலையில் இயங்குமாயினும், அதன் இயங்குவரை ஒரே நீள் வளையமான $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ஆகும்.

$S(ae, 0)$ என்ற குவியத்திற்கு ஒத்த இயக்கு வரையின் சமன்பாடு $x - \frac{a}{e} = 0$

$(S' -ae, 0)$ என்ற குவியத்திற்கு ஒத்த இயக்கு வரையின் சமன்பாடு $x + \frac{a}{e} = 0$

(iv) நீள் வளையத்தின் நேரகலம்

குவியத்தின் வழிச் செல்லும் இரட்டைக் குத்தாயம் (ordinate) நேரகலம் (latus rectum) எனப்படும்.

LL' நேரகலம் ஆனால்,

$$SL = e \cdot SX = e\ (CX - CS) = e\left(\frac{a}{e} - ae\right)$$

$$= a - ae^2 = a(1-e^2) = \frac{a^2(1-e^2)}{a} = \frac{b^2}{a}$$

$$\therefore\ SL = \frac{b^2}{a}$$

$$\therefore\ \text{நேரகலம்} = 2\,SL = \frac{2b^2}{a}$$

பிறிதொரு முறை: $SL = l$ எனில், L-ன் கூறுகள் $+ae, l$ ஆகும். L நீள் வளையத்தில் அமைவதால்,

$$\frac{a^2e^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} = 1$$

$$\therefore\ \frac{l^2}{b^2} = 1 - e^2 = \frac{a^2(1-e^2)}{a^2} = \frac{b^2}{a^2}$$

$$\therefore\ l^2 = \frac{b^4}{a^2}$$

$$\therefore\ l = \frac{b^2}{a}$$

(v) $SP + S'P = 2a$

$S\,P = e \cdot PM$

$S'P = e\ PM'$

$$\therefore \quad SP+S'P=e\ (PM+PM')=e\cdot XX'=e\cdot 2CX=e\cdot 2\ \frac{a}{e}=2a$$

(அதாவது) $SP+S'P$-ன் கூடுதல் நெட்டச்சுக்குச் சமம்

இவ் வடிவ கணிதப் பண்பால் நீள் வளையம் வரையறுக்கப் படுவதும் உண்டு.

இரு நிலைப் புள்ளிகளிலிருந்து ஓர் இயங்கும் புள்ளியின் தொலைகளின் கூட்டுத்தொகை மாறுராசி எனின், அப் புள்ளியின் இயங்கு வரை ஒரு நீள் வளையமாகும்.

[குறிப்பு : SP, $S'P$-ன் நீளங்களைத் தனித் தனியே அறியலாம்.

$$SP=e\ PM=e\ (CX-CN)=e\left(\frac{a}{e}-x\right)=a-ex$$

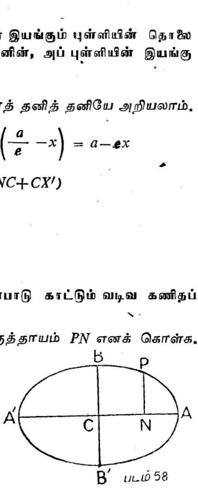
$$S'P=e\ PM'=e\cdot NX'=e\ (NC+CX')$$

$$=e\left(x+\frac{a}{e}\right)=a+ex$$

$$\therefore \quad SP=a-ex;\ S'P=a+ex]$$

(vi) நீள் வளையத்தின் சமன்பாடு காட்டும் வடிவ கணிதப் பண்பு

நீள் வளையத்தின் புள்ளி P-ன் குத்தாயம் PN எனக் கொள்க. P நீள் வளையத்தில் இருப்பதால்,



படம் 58

$$\frac{CN^2}{a^2}+\frac{PN^2}{b^2}=1$$

$$\therefore \quad \frac{PN^2}{b^2}=1-\frac{CN^2}{a^2}$$

$$=\frac{a^2-CN^2}{a^2}=\frac{CA^2-CN^2}{a^2}=$$

$$\frac{(CA+CN)\ (CA-CN)}{a^2}=\frac{A'N\cdot NA}{a^2}$$

$$\therefore \quad \frac{PN^2}{A'N\cdot NA}=\frac{b^2}{a^2}=\frac{CB^2}{CA^2}=\text{நிலையெண்}$$

(vii) வட்டம் ஒரு நீள் வளையத்தின் எல்லை வடிவம்

இரு குவியங்களும் இணைந்தால், $SS' = 2CS = 2ae = 0$

$\therefore \quad e = 0 \; ; \quad b^2 = a^2(1-e^2) = a^2 \quad$ ($e = 0$ ஆவதால்)

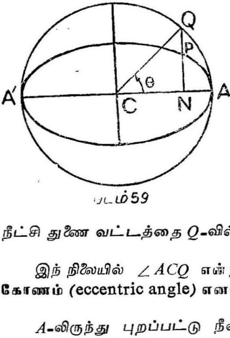
நீள் வளையத்தின் சமன்பாடு $x^2 + y^2 = a^2$ என்றாகிறது. இது C என்ற மையத்தை ஆதியாகக் கொண்ட வட்டத்தைக் குறிக்கிறது.

ஆகவே, வட்டமானது $e = 0$ ஆக உள்ள நீள் வளையம் ஆகும்.

மேலும், $CX = \dfrac{a}{e} \to \infty$, ஆதலால், வட்டத்தின் இயக்கு வரைகள் மையத்திலிருந்து கந்தழி தொலைவில் உள்ளதாகக் கொள்ள வேண்டும்.

(viii) துணை வட்டம் (Auxiliary circle)

ஒரு நீள் வளையத்தின் நெட்டச்சை விட்டமாகக் கொண்டு வரையப்படும் வட்டம் துணை வட்டம் (auxiliary circle) எனப்படும்.



படம் 59

துணை வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2 + y^2 = a^2$ ஆகும்.

(ix) மைய வகற்சிக் கோணம் அல்லது துணை வட்டக் கோணம் (eccentric angle)

நீள் வளையத்தில் P என்னும் புள்ளியின் குத்தாயம் (ordinate) PN ஆகட்டும். இதன் நீட்சி துணை வட்டத்தை Q-வில் வெட்டு மெனக் கொள்வோம்.

இந் நிலையில் $\angle ACQ$ என்னும் P புள்ளியின் துணை வட்டக் கோணம் (eccentric angle) எனப்படும்.

A-லிருந்து புறப்பட்டு நீள் வளையத்தின் மீது இடமாக P சுற்றி மீண்டும் A-க்கு வரின், அதன் துணை வட்டக் கோணம் O-விலிருந்து 2π-க்குக் கூடிக் கொண்டே போகும்.

(x) துணை அலகு சமன்பாடு

P புள்ளி (x, y) எனின், $x = CN = CQ \cos\theta = a \cos\theta$

P நீள் வளையத்தில் அமைவதால், $\frac{a^2 \cos^2\theta}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\therefore \quad y = \pm b \sin\theta$$

இங்கு y-ன் மதிப்பு நேர் மதிப்பாகையால், $y = b \sin\theta$ எனக் கொள்ள வேண்டும்.

ஆகவே, நீள் வளையத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியின் ஆயத் தொலைகள்

$x = a \cos\theta$, $y = b \sin\theta$ என்றாகும்.

மறுதலையாக, $x = a \cos\theta$, $y = b \sin\theta$ என்னும் தொடர்புடன் ஒரு புள்ளி இயங்கினால், அதன் சமன்பாடு

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ என வரும்.

ஆகவே, நீள் வளையத்தை $x = a \cos\theta$, $y = b \sin\theta$ என்னும் ஒரே ராசித் தொடர்பால் வரையறுக்கலாம். இது துணை அலகு சமன்பாடாகும் (parametric equation)

$(a \cos\theta, b \sin\theta)$ என்னும் புள்ளியை θ எனக் குறிப்பது மரபு.

[குறிப்பு: வட்டத்திலுள்ள Q என்னும் புள்ளியின் ஆயத் தொலைகள் CN, NQ

(அதாவது) $a \cos\theta$, $a \sin\theta$

ஆகவே ஒரு வட்டத்தில் உள்ள புள்ளியை ஒரே ராசித் தொடர் பாகிய $x = a \cos\theta$, $y = a \sin\theta$ என வரையறுக்கலாம்.

$a \cos\theta$, $a \sin\theta$ என்ற புள்ளியை θ எனக் குறிப்பது மரபு.]

(xi) நீள் வளையம், அதன் துணை வட்டம் இவற்றிலுள்ள ஒத்த (corresponding) புள்ளிகளின் குத்தாயங்கள் PN, QN எனின்,

$NP = b \sin \theta$; $NQ = a \sin \theta$

$$\therefore \quad \frac{NP}{NQ} = \frac{b}{a}$$

இந்தத் தொடர்பு எல்லா ஒத்த புள்ளிகளுக்கும் பொருந்தும்.

இத் தொடர்பைப் பயன்படுத்தியும், நீள் வளையத்தை வரையறுக்கலாம்.

"ஒரு வட்டத்தின் புள்ளிகளிலிருந்து அதன்விட்டமொன்றுக்கு வரையும்நேர் குத்துக் கோடுகளைக் குறித்த விகிதப்படி அகத்துப் பிரிக்கும் புள்ளிகளின் இயங்கு வரை, இவ் வட்டத்தைத் துணை வட்டமாகக் கொண்ட ஒரு நீள் வளையமாகும்."

(xii) விளக்க எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 1. $4x^2+y^2-8x^2-6y-3=0$ என்னும் நீள்வளையமெனக் காண்பி.

கொடுத்த சமன்பாட்டை $4(x^2-2x)+y^2-6y=3$ என சமன்பாடு எழுதலாம்.

(அதாவது) $(4x^2-2x+1)+(y^2-6y+9)=16$ என எழுதலாம்.

(அதாவது) $4(x-1)^2+(y-3)^2=16$

$$\frac{(x-1)^2}{2^2} + \frac{(y-3)^2}{4^2} = 1$$ என எழுதலாம்.

இங்கு நெட்டச்சு 8 அலகுகள் ஆகும்; குற்றச்சு 4 அலகுகள் ஆகும். நெட்டச்சு y அச்சுக்கு இணையாக இருப்பதைக் கவனிக்கவும்.

எடுத்துக்காட்டு 2. $2x^2+5y^2=20$ என்னும் நீள் வளையத்தின் மையத்தொலைத் தகவு, குவியங்கள், நேரகலம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

$$2x^2+5y^2=20$$

(அதாவது) $$\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{4} = 1$$

இங்கு $a^2=10$; $b^2=4$

$$b^2=a^2(1-e^2)$$

(அதாவது) $4 = 10(1-e^2)$

$$\therefore\ 10e^2 = 10-4=6$$

$$\therefore\ e^2 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\therefore\ e = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

குவியங்களின் ஆயத் தொலைகள் $(\pm ae, 0)$ ஆகும்.

(அதாவது) $(\pm \sqrt{10}\sqrt{\frac{3}{5}}, 0)$ ஆகும்

(அதாவது) $(\pm \sqrt{6}, 0)$ ஆகும்.

நேரகலம் $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2\cdot 4}{\sqrt{10}} = \frac{8}{\sqrt{10}} = \frac{8\sqrt{10}}{10} = \frac{4}{5}\sqrt{10}$

5. அதிபர வளைவு (Hyperbola)

(i) அதிபரவளைவின் சமன்பாடு காணல்

ஒரு கூம்பு வளைவின் மையத் தொலைத் நகவு $e>1$ ஆனால், அதனை அதிபர வளைவு என வரையறுத்தோம்.

அதிபர வளைவின் குவியம் S எனவும், இயக்குவரை DD' எனவும் கொள்வோம்.

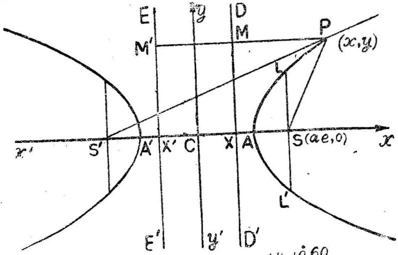
S-லிருந்து DD'க்குச் செங்குத்தாக SXஐ வரைக.

SXஐ $e>1$ விகிதத்திற்கேற்ப அகத்தும், புறத்தும் பிரிக்கும் A, A' என்ற புள்ளிகளைக் குறிக்கவும்.

[குறிப்பு: இங்கு A, A' என்ற புள்ளிகள் இரண்டும் S-க்கு இடப் பக்கத்திலே இருப்பது குறிப்பிடத்தக்கது. நீள் வளையத்தில் A என்பது S-க்கு வலப் பக்கத்திலும், A' என்பது இடப் பக்கத் திலும் இருப்பதைக் கவனிக்கவும்.]

$\frac{SA}{AX} = e, \quad \frac{SA'}{A'X} = e$ ஆக

இருப்பதால், A, A' புள்ளிகள் அதிபர வளைவில் இருப்பனவாகும்.



படம் 60

$AA' = 2a$,

AA'-ன் நடுப் புள்ளி C எனக் கொள்க.

இனி, $SA = e \cdot AX$

$SA' = e \cdot A'X$

இவற்றைக் கூட்ட, $SA + SA' = e\,(AX + A'X)$

(அதாவது) $(SC - AC + SC + CA') = e \cdot AA'$

(அதாவது) $2CS = e \cdot 2a$

$CS = ae$

இவற்றிற்கு வேறுபாடு காண, $SA' - SA = e\,(A'X - AX)$

(அதாவது) $AA' = e\,(A'C + CX - AC - CX)$

(அதாவது) $2a = e \cdot 2CX$

$\therefore \; CX = \frac{a}{e}$

[குறிப்பு :- நீள் வளையத்திலும், $CS = ae$, $CX \; \frac{a}{e}$ என்றே பெற்றோம். ஆனால் அங்கு $e < 1$ ஆதலால், S ஆனது CA-க்கு உள்ளே

யும் இருந்தது. ஆனால் அதிபர வளைவில் $e>1$ ஆதலால், S ஆனது CA-க்கு உள்ளேயும், X ஆனது CA-க்கு வெளியேயும் இருந்தது. ஆனால் அதிபர வளைவில் $e>1$ ஆதலால், S ஆனது CA-க்கு வெளியேயும் இருப்பது கவனிக்க வேண்டிய வேறுபாடாகும்.]

C ஐ ஆதியாகவும், CS ஐ x ஆயமாகவும், C வழி CS-க்குச் செங்குத்தான கோடு Cyஐ y ஆயமாகவும் கொள்க.

அதிபர வளைவில் உள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி P என்க. அதன் ஆயத் தொலைகள் (x, y) ஆகுக. P-யிலிருந்து இயக்கு வரை DD'-க்கு PM ஐச் செங்குத்தாக வரைக.

S-ன் ஆயத் தொலைகள் $(ae, 0)$

X-ன் ஆயத் தொலைகள் $\left(\frac{a}{e}, 0\right)$

M-ன் ஆயத் தொலைகள் $\left(\frac{a}{e}, y\right)$

அதிபர வளைவின் வரையறையினால்,

$$\frac{SP}{PM} = e$$

$$\therefore \quad SP^2 = e^2 \cdot PM^2$$

$$\therefore \quad (x-ae)^2+y^2 = e^2\left(x-\frac{a}{e}\right)^2$$

(அதாவது) $x^2+a^2e^2-2xae+y^2 = e^2x^2-2x\,ae+a^2$

(அதாவது) $x^2(e^2-1)-y^2 = a^2(e^2-1)$ [$e>1$ ஆனதால்]

$a^2(e^2-1)$ ஆல் வகுக்க,

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2(e^2-1)} = 1 \text{ என வரும்.}$$

$a^2(e^2-1) = b^2$ எனக் கொள்ளின்

அதிபர வளைவின் சமன்பாடு $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ எனவரும்.

(ii) அதிபர வளைவு வரைதல்

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்னும் சமன்பாட்டில், $y=0$ எனக் கொள்ளின், $x = \pm a$ ஆகும்.

$\therefore$ அதிபர வளைவு $(a, 0)$; $(-a, 0)$ புள்ளிகள் (அதாவது) A, A' வழிச் செல்லும். A, A' புள்ளிகள் அதிபர வளைவின் உச்சிகள் (Vertices) எனப்படும்.

$x=0$ எனின், $y = \pm i\, b$

$\therefore$ அதிபர வளைவு y ஆயத்தை வெட்டாது.

இச் சமன் பாட்டை, $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^5 - a^2}$ அல்லது

$x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{y^2 + b^2}$ என எழுதலாம்.

$x < a$ அல்லது $x > -a$ என்றிருப்பின், y-க்குக் கற்பனை மதிப்புகள் வருமாதலின், A-க்கு இடமும், A'-க்கு வலமும் வளைவரை வராது.

இதைத் தவிர்த்து, ஏனை x-ன் மதிப்புக்கு y-க்குக் குறிவேறுபட்ட ஒரே எண் மதிப்பில் இருமதிப்புகள் வரும்.

ஆகவே வளை வரை x ஆய்த்தோடு சமச் சீருடையதாகும்.

y-ன் ஒவ்வொரு மதிப்பிற்கும், x-க்கு இரு சமமான குறி வேறுபட்ட மதிப்புகள் கிட்டும். ஆகவே வளைவரை y ஆயத்தோடும் சமச்சீருடையதாகும்.

அதிபர வளைவு x, y அச்சுகளோடு சமச்சீருடையதாகையால், (x, y) புள்ளி அதிபரவளைவில் இருப்பின், $(x, -y)$; $(-x, y)$; $(-x, -y)$ புள்ளிகளும் அதிபர வளையத்தில் இருக்கும்.

மேலும், (x, y), $(-x, -y)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடு ஆதி வழிச் சென்று, ஆதியில் இரு சமக் கூறிடப் படுவதால் C வழிச் செல்லும் நாண்கள் அனைத்தையும் C சமமாகப் பிரிக்கும். ஆகவே, C அதிபர வளைவின் மையம் (centre) எனப்படும்

x-ன் மதிப்பு முடிவிலி நோக்கிக் கூடிச் செல்லச் செல்ல, y-ன் மதிப்பும் முடிவிலி நோக்கிச் செல்லும்.

y-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் x-க்கு இரு மெய் மதிப்புகள் உள்ளதால், வளைவரை முடிவிலியை நோக்கி $x=a$-க்கு வலப் புற மாக ஒரு பிரிவும், $x=-a$-க்கு இடப்புறமாக ஒரு பிரிவுமாகச் செல்லும்.

x-க்குப் பன்மதிப்புகளைக் கொடுத்து அவற்றிற்குரிய y-ன் மதிப்புகளைக் கண்டு வளைவரையை வரையலாம். அதிபர வளைவு தம்முள் வெட்டிக் கொள்ளாத இரு பகுதியைக் கொண்டதாகும்.

y ஆயத்தில் $CB=CB'=b$ என்றிருக்கும்படி, B, B' என்ற புள்ளிகளைக் குறிப்பிடுக.

BB' அதிபர வளைவின் துணை அச்சு (conjugate axis) எனப் படும்.

AA' குறுக்கச்சு அல்லது குறுக்காயம் (transverse axis) எனப் படும்.

(iii) இரண்டாவது குவியமும், இயக்கு வரையும்

அதிபர வளைவு x, y அச்சுகள் பற்றிச் சமச்சீருடையதாகை யால் S-க்குச் சீராக S' என்ற இன்னொரு குவியமும், DD'-க்குச் சீராக S'-க்கு ஒத்த EE^1 என்ற இயக்கு வரையும் பெறலாம்.

ஆகவே, $CS' = CS = a\,y$

$$CX' = CX' = \frac{a}{e}$$

மேலும் இயங்கும் புள்ளி P ஆனது $\frac{S'P}{PM'} = e$ என்ற நிலையில் (அதாவது S' ஐ நிலைப் புள்ளியாகவும் EE' ஐ நிலைக் கோடாகவும் கொண்டு) இயங்கு மாயினும், அதன் இயங்கு வரையும் அதே அதி பர வளைவான $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்றே பெறப்படும். $S(ae, 0)$ குவியத்தின் ஒத்த (corresponding) இயக்கு வரை $x - \frac{a}{e} = 0$ ஆகும்.

$S'(-ae, 0)$ குவியத்தின் ஒத்த இயக்கு வரை $x + \frac{a}{e} = 0$ ஆகும்.

(iv) நேரகலம் (Latus Rectum)

குவியத்தின் வழிச் செல்லும் இரட்டைக் குத்தாயம் நேரகலம் எனப்படும்.

LSL' நேரகலம் எனக் கொள்ளின்

$$LSL' = 2\,SL = 2\,e\,SX$$
$$= 2\,e\,(CS - CX)$$
$$= 2\,e\left(a\,e - \frac{a}{e}\right)$$
$$= 2\,a\,(e^2 - 1) = \frac{2\,a^2\,(e^2-1)}{a}$$
$$= \frac{2\,b^2}{a}$$

(v) அதிபர வளையத்துப் புள்ளியொன்று P எனின்

$$S'P \sim SP = 2\,a$$
$$S'P - SP = e\cdot PM' - e\,PM$$
$$= e\cdot MM' = e\cdot XX^1$$
$$= e\cdot 2\,Cx = e\cdot \frac{2\,a}{e} = 2\,a \text{ ஆகும்.}$$

இவ் வடிவ கணிதப் பண்பால், அதிபர வளைவு வரையறுக்கப் படுவதும் உண்டு.

"இரு நிலைப் புள்ளிகளிலிருந்து ஒரு புள்ளியின் தொலைகளின் வேறுபாடு மாறு ராசி எனின், அப் புள்ளியின் இயங்குவரை ஒரு அதிபர வளைவாகும்."

(vi) அதிபர வளைவின் சமன்பாடு காட்டும் வடிவ கணிதப் பண்பு

P என்பது அதிபர வளைவின்மீதுள்ள யாதேனும் ஒரு புள்ளி யாகுக. PN குத்தாயம் ஆனல், CN ஆனது P-ன் x அச்சுத் தூரம்.

$$\frac{CN^2}{a^2} - \frac{PN^2}{b^2} = 1$$

$$\therefore \quad \frac{PN^2}{b^2} = \frac{CN^2}{a^2} - 1 = \frac{CN^2 - CA^2}{a^2}$$

$$= \frac{(CN+CA)(CN-CA)}{a^2}$$

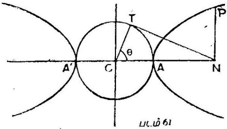
$$= \frac{A'N \cdot AN}{a^2}$$

$$\therefore \quad \frac{PN^2}{A'N \cdot AN} = \frac{b^2}{a^2}$$ ஒரு நிலையெண்.

(vii) துணை வட்டம் (Auxiliay circle)

ஒரு அதிபர வளைவின் குறுக்காயத்தை விட்டமாகக் கொண்டு வரையப்படும் வட்டமே துணை வட்டமாகும்.

துணை வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2+y^2=a^2$ ஆகும்.



படம் 61

(viii) P என்பது அதிபர வளைவில் உள்ள புள்ளியாகட்டும்.

P-லிருந்து X அச்சுக்குச் செங்குத்தாக PN ஐ வரை.

N-லிருந்து துணை வட்டத்திற்கு NT என்னும் தொடு கோட்டை வரைக.

$\angle NCT = \theta$ எனக் கொள்க.

இப்பொழுது $\frac{CN}{CT} = \sec\theta$

$\therefore \quad CN = CT \sec\theta = a \sec\theta$

P அதிபர வளைவில் புள்ளியாதலால்

$$\frac{CN^2}{a^2} - \frac{PN^2}{b^2}$$

$$\frac{a^2 \sec^2\theta}{a^2} - \frac{PN^2}{b^2} = 1$$

$$\therefore \quad \frac{PN^2}{b^2} = \sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta$$

$$\therefore \quad PN = b\tan\theta$$

ஆகவே, P-ன் ஆயத் தொலைகள் $(a\sec\theta, b\tan\theta)$ ஆகும். இங்கு θ என்பது நீள்வளையத்தில் கண்ட துணைவட்டக் கோணம் (eccentric angle) என்பதைப் போன்றது. ஆனால், அதிபர வளைவில் இக் கோணத்திற்குத் தனிப் பெயர் ஒன்றும் இல்லை.

(ix) துணை அலகு சமன்பாடு

அதிபர வளையத்துப் புள்ளி ஒன்றை $a\sec\theta$, $b\tan\theta$ எனக் குறிப்பிடலாம் எனக் கண்டோம். $(a\sec\theta, b\tan\theta)$ புள்ளியை θ எனக் குறிப்பிடுவது மரபு.

இவ்வாறு அதிபர வளைவின் புள்ளி யொன்றை ஒரே மாறு ராசியால் குறிப்பிடுவதைத் 'துணை அலகு சமன்பாடு' எனக் கூறுகிறோம்.

[குறிப்பு : ஒரு அதிபர வளைவின்மீதுள்ள புள்ளியை, $a\cosh\phi$, $b\sinh\phi$ என்றும் குறிப்பிடலாம்.]

(x) விளக்க எடுத்துக்காட்டு

$9x^2 - 16y^2 = 144$ என்னும் அதிபர வளைவின் குவியங்கள், நேரகலத்தைக் காண்க.

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \text{ எனச் சமன்பாட்டை எழுதலாம்.}$$

ஆகவே, $a^2 = 16$; $b^2 = 9$

$\therefore$ $a = 4$; $b = 3$. அச்சுத் தூரங்கள் முறையே 8, 6 அலகுகள் ஆகும்

$b^2 = a^2(e^2 - 1)$; (அதாவது) $9 = 16(e^2 - 1)$

$\therefore$ $e = \frac{5}{4}$; குவியங்கள் $(\pm ae, 0)$ ஆகும்.

(அதாவது) $(\pm 5, 0)$

$$\text{நேரகலம்} = \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 9}{4} = 2\tfrac{1}{4}$$

(xi) தொலை தொடுகோடு (Asymptote)

வரையறை : முழுவதும் கந்தழியில் (infinity) இல்லாமல், ஆனல் அதிபர வளைவைக் கந்தழில் புள்ளியில் (point at infinity) தொடும் கோடு, தொலைத்தொடு கோடு எனப்படும்.

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்னும் அதிபர வளைவின் தொலை தொடுகோடுகளைக் காணல்

$y=mx+c$ என்பது தொலை தொடுகோடாகட்டும்.

இரு சமன்பாடுகளிலிருந்து, yஐ நீக்க,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{(mx+c)^2}{b^2} - 1 = 0 \text{ என வரும்.}$$

(அதாவது) $x^2(b^2-a^2m^2)-2a^2mcx-a^2(c^2+b^2)=0$

$y=mx+c$ தொலைதொடு கோடாதலால், இச் சமன்பாட்டின் வரும் x-ன் இரு மதிப்புகளும் முடிவிலியாக இருத்தல்வேண்டும்.

$\therefore \quad b^2-a^2m^2=0 \ ; \quad 2a^2mc=0$

$\therefore \quad m=\pm \frac{b}{a} \ ; \ c=0$

$\therefore$ தொலைதொடு கோட்டின் சமன்பாடு $y=\pm \frac{b}{a} x$ ஆகும்.

(அதாவது) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0; \ \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$ என்றுகும்.

இவற்றின் கூட்டு வடிவம் $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ ஆகும்.

(xii) அதிபர வளைவின் சமன்பாடு $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ ...(1)

அதன் தொலைதொடு கோடுகளின் சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \qquad ...(2)$$

இவ் விரண்டு சமன்பாடுகளின் போது உறுப்புகளான $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$, ஆதி, ஆயங்கள் இவற்றை மாற்றினும், ஒரே கோவையைத் தரும்.

எனவே, தொலைதொடு கோடுகளின் சமன்பாடு நிலையை எண்ணுறுப்பில் மட்டுமே அதிபர வளைவின் சமன்பாட்டிலிருந்து வேறுபட்டிருக்கும்.

ஆகவே, ஒரு அதிபர வளைவின் சமன்பாடு அதன் பொது வடிவில் $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2\ fy+c=0$ எனக் குறிப்பிடின், அதன் தொலைத் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடு $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+k=0$ எனக் குறிப்பிடப்படும்.

இச் சமன்பாடு இரு கோடுகளைக் குறிப்பிடல் வேண்டும் அல்லது அதிபர வளைவு மைய வழிச்செல்ல வேண்டும். அதற்கேற்ப k-ன் மதிப்பினைக் கொள்ளவேண்டும்.

கிளை : $lx+my+n=0,\quad l_1x+m_1y+n_1=0$ கோடுகளைத் தொலைத் தொடுகோடுகளாகக் கொண்ட அதிபர வளைவின் சமன்பாடு $(lx+my+n)(l_1x+m_1y+n_1)=k$. இங்கு k ஒரு நிலையெண்.

(xiii) துணையிய அதிபர வளைவு (Conjugate Hyperbola)

வரையறை ஓர் அதிபர வளைவின் குறுக்காயத்தைத் துணையாயமாகவும், துணையாயத்தைக் குறுக்காயமாகவும் கொண்ட அதிபர வளைவு துணையிய அதிபர வளைவு எனப்படும்.

எனவே, $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$-ன் ...(1)

துணையிய அதிபர வளைவு $\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{x^2}{a^2}=1$ ஆகும். ...(2)

(xiv) துணையிய அதிபர வளைவின் தொலைத் தொடுகோடுகள்

$\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{x^2}{a^2}=1$ என்பது துணையிய அதிபர வளைவின் சமன்பாடு இதன் தொலைதொடு கோடுகளின் சமன்பாடு

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=0 \text{ ஆகும்}$$

$$(\text{அதாவது})\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0 \text{ என்றாகும்.}$$

ஆகவே அதிபர வளைவிற்கும், அதன் துணையிய அதிபர வளைவிற்கும் தொலைதொடு கோடுகள் பொதுவானவை ஆகும்.

(xv) துணையிய அதிபர வளைவின் சமன்பாடு காணல்

அதிபர வளைவின் சமன்பாடு $ax^2+2hxy+by^2+2fy+c=0$ எனக் கொள்க.

இப்பொழுது அதிபர வளைவின் சமன்பாடு

$$H = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \text{ எனின்,} \qquad \dots (1)$$

அதன் தொலைத் தொடு கோடுகளின் சமன்பாடு

$$A = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \text{ ஆகும்.} \qquad \dots (2)$$

துணையிய அதிபர வளைவின் சமன்பாடு

$$H' = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0 \qquad \dots (3)$$

இம் மூன்று சமன்பாடுகளின் பொதுவுறுப்புகளான $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ ஆதியை மாற்றினாலும், ஆயங்களை மாற்றினும், ஒரே கோவையையே தரும்.

ஆகவே, சமன்பாடுகளின் இடப் பக்கத்தில் உள்ள கோவைகளுக்குள் $H+H' = 2A$ எனும் தொடர்பு எப்பொழுதும் நிலவும்.

$\therefore \; H' = 2A - H$ ஆகும்.

ஆகவே, பொது வடிவில் துணையிய அதிபர வளைவின் சமன்பாடு, $H'=0$ (அதாவது) $2A-H=0$ என்றாகும்.

(xvi) விளக்க எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 1 : ஓர் அதிபர வளைவின் தொலைத்தொடு கோடுகள் $2x-y-3=0$, $3x+y-7=0$ ஆகும். இவ் வளை வரை (1,1) வழிச் செல்லின், இதன் துணையிய அதிபர வளைவின் சமன்பாடு என்ன ?

தொலைத் தொடுகோடுகளின் கூட்டுச் சமன்பாடு $(2x-y-3)(3x+y-7)=0$ ஆகும். ... (i)

∴ அதிபர வளைவின் சமன்பாடு

$(2x-y-3)(3x+y-7)=k$ ஆகும். k ஒரு நிலை எண் ... (ii)

இது (1, 1) புள்ளி வழிச் செல்லுவதால், (ii)-ல் பிரதியிட $(2-1-3)(3+1-7)=k$ எனவரும்.

(அதாவது) $k=6$

∴ அதிபர வளைவின் சமன்பாடு $(2x-y-3)\ (3x+y-7)=6$ ஆகும்.

(அதாவது) $(2x-y-3)(3x+y-7)-6=0$ ஆகும்.

துணையிய அதிபர வளைவின் சமன்பாடு $H'=0$ எனின்,

$$H' = 2A-H$$

$$=2(2x-y-3)(3x+y-7)-\{(2x-y-3)(3x+y-7)-6\}$$

$$=(2x-y-3)(3x+y-7)+6$$

∴ துணையிய அதிபர வளைவின் சமன்பாடு

$(2x-y-3)(3x+y-7)+6=0$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2: $4x^2-y^2+36=0$ என்னும் அதிபர வளையத்தை வரைக. (i) அதன் மையத் தொலைத் தகவு, உச்சிகள், குவியங்களைக் காண்க. (ii) அதன் துணையிய அதிபர வளைவு, தொலைத் தொடுகோடுகள் ஆகியவற்றையும் குறிக்க.

(i) நியம வடிவத்தில் கொடுக்கப் பட்ட அதிபர வளைவு

$\dfrac{y^2}{36}-\dfrac{x^2}{9}=1$ என்றாகும்.

∴ $a=6;\ b=3;$

$e=\dfrac{\sqrt{5}}{2};\ ae=3\sqrt{5}$

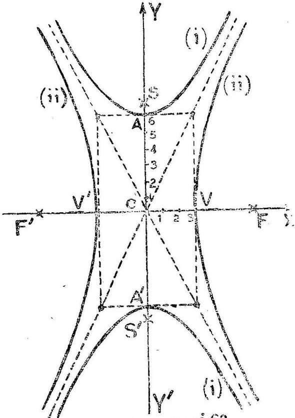
உச்சி $A=(0,6);\ A'=(0,-6)$

$S(0, 3\sqrt{5});\ S'(0,-3\sqrt{5})$ என்றாகும்.

இந்த அதிபர வளைவு படத்தில் (i) என்று குறிப்பிடப்பட்டிருக்கிறது (படம் 62).

தொலைத் தொடுகோடுகள் $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{9} = 0$ ஆகும்.

(அதாவது) $y = \pm 2x$ ஆகும்.



படம் 62

(ii) துணையிய அதிபர வளைவின் சமன்பாடு

$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$ ஆகும்.

இதன் உச்சிகள் V, V' எனவும், குவியங்கள் F, F' எனவும் கொள்க.

பின்னர் இதற்கு $a=3$; $b=6$; $e=\sqrt{5}$; $ae=3\sqrt{5}$

$V(3, 0)$; $V'(-3, 0)$; $F(3\sqrt{5}, 0)$; $F'(-3\sqrt{5}, 0)$ ஆகும்.

தொலைத் தொடுகோடுகள் $y = \pm 2x$ ஆகும்.

(xvii) செவ்வக அதிபர வளைவு (Rectangular hyperbola)

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்னும் அதிபர வளைவின் தொலைத் தொடு கோடுகளின் சமன்பாடு

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0; \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$$

(அதாவது) $y = \frac{b}{a} x; \ y = -\frac{b}{a} x$ எனக் கண்டோம்

இத் தொலைத் தொடுகோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக இருப்பின், அதிபர வளைவு, செவ்வக அதிபர வளைவு எனப்படும்.

இதற்கு $\frac{b}{a} \times \left(-\frac{b}{a}\right) = -1$ ஆக வேண்டும்.

$\therefore \ \frac{b^2}{a^2} = 1$

$\therefore \ b = a$ ஆகும்.

$\therefore$ செவ்வக அதிபர வளைவின் சமன்பாடு $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$

(அதாவது) $\underline{x^2 - y^2 = a^2}$ என்றாகும்.

இதையே சம அச்சு அதிபர வளைவு (Equilateral hyperbola) என்றும் குறிப்பிடலாம்.

(xviii) ஒரு செவ்வக அதிபர வளைவின் மையத் தொலைத் தகவு

ஒரு செவ்வக அதிபர வளைவின் சமன்பாடு $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$ ஆகும்.

$\therefore \ a^2 = a^2 (e^2 - 1)$

$\therefore \ e^2 - 1 = 1 \quad \therefore \ e^2 = 2$

$\therefore \ e = \sqrt{2}$ ஆகும்.

ஒரு செவ்வக அதிபர வளைவின் தொலைத் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடு

$$y = \pm \frac{a}{a} x \text{ ஆகும்.}$$

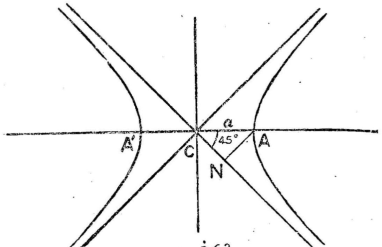
(அதாவது) $y = \pm x$

(அதாவது) $y = x$-ம் $y = -x$-ம் ஆகும்.

செவ்வக அதிபர வளைவில், தொலைத் தொடுகோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக இருப்பதால், இவற்றையே x, y ஆயங்களாகக் கொண்டு அதிபர வளைவின் சமன்பாட்டைக் காணலாம்.

(xix) தொலைத் தொடு கோடுகளை x, y ஆயங்களாகக் கொண்ட செவ்வக அதிபர வளைவின் சமன்பாட்டைக் காணல்

தொலைத் தொடுகோடுகளே, x, y ஆயங்களாகையால், அவற்றின் சமன்பாடு $y=0$, $x=0$ ஆகும்.



படம் 63

$\therefore$ அவற்றின் கூட்டுச் சமன்பாடு $xy=0$ ஆகும்

$\therefore$ அதிபர வளைவின் சமன்பாடு $xy=k$ ஆகும் (k ஒரு நிலையெண்)

அதிபர வளைவின் குறுக்காயத்தின் நீளம் $2a$ எனின், $CA=a$

A-ன் ஆயத் தொலைகள் CN, NA

(அதாவது) $a \cos 45°$, $a \sin 45°$

(அதாவது) $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$, $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$

$xy=k$ என்பது A வழிச் செல்வதால்,

$$\frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} = k$$

$$\therefore\ k = \frac{a^2}{2}$$

$\therefore$ செவ்வக அதிபர வளைவின் சமன்பாடு $xy = \dfrac{a^2}{2}$

இனி, $\dfrac{a^2}{2} = c^2$ எனக் கொள்ளின், $xy=c^2$ என வரும்.

(xx) துணை அலகு சமன்பாடு

$xy=c^2$ சமன் பாட்டில், $x=ct$, $y=\dfrac{c}{t}$ என ஈடாக்கின், பொருந்துவதாகப் பார்க்கிறோம். எனவே t-ன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும், $\left(ct, \dfrac{c}{t}\right)$ புள்ளி செவ்வக அதிபர வளைவின்மேல் இருக்கும். இப் புள்ளியை 't' எனக் குறிப்பிடுவது மரபு.

பயிற்சி 4-1.

பரவளைவு (Parabola)

1. $(2, 3)$ ஐ உச்சியாகவும், $(0, 3)$ ஐக் குவியமாகவும் கொண்ட பர வளைவின் சமன்பாட்டைக் காண்க. அதன் நேரகலம் என்ன? [விடை: $(y-3)^2=-8(x-2)$; 8]

2. கீழ்க்காணும் சமன்பாடுகளை நியம வடிவத்தில் எழுதி அவற்றின் உச்சி, குவியம், இயக்கு வரை, அச்சு ஆகியவற்றைக் காண்க.

   (i) $2x^2-3x+8y+1=0$ [விடை: $V(\frac{3}{4}, \frac{1}{64})$; $F(\frac{3}{4}, -\frac{63}{64})$; $y=\frac{65}{64}$; $x=\frac{3}{4}$]

   (ii) $y^2-4x+4y+7=0$ [விடை: $V(\frac{3}{4}, -2)$; $F(\frac{7}{4}, -2)$; $x=-\frac{1}{4}$; $y=-2$]

   (iii) $x^2-3y+3=0$ [விடை: $V(0, 1)$; $F(0, \frac{7}{4})$; $y=\frac{1}{4}$; $x=0$]

(iv) $y^2-8x-8y+8=0$ [விடை : $V(-1, 4)$; $F(1, 4)$; $x=-3$; $y=4$]

(v) $4x^2+4x+4y+9=0$ [விடை : $V(-\frac{1}{2}, -2)$; $F(-\frac{1}{2}, -\frac{9}{4})$; $y=-\frac{7}{4}$; $x=-\frac{1}{2}$]

3. $3x-4y+7=0$ என்னும் கோட்டிலிருந்தும், $(1, -2)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து எப்பொழுதும் சம தொலைவில் இருக்கும் படி இயங்கும் புள்ளியின் இயங்கு வரையைக் காண்க.
[விடை : $16x^2+24xy+9y^2-92x+156y+76=0$]

பயிற்சி 4-2.
நீள் வளையம் (Ellipse)

1. $9x^2+4y^2=36$ என்னும் நீள் வளையத்தின் குவியங்கள், மையத் தொலைத் தகவு ஆகியவற்றைக் காண்க.
$$\left[\text{விடை : } (0, \pm \frac{1}{18}\sqrt{15}) ; \sqrt{\frac{5}{3}}\right]$$

2. $16x^2+25y^2=400$ என்னும் நீள் வளையத்தின் அச்சுகளின் நீளம், மையத் தொலைத் தகவு, குவியங்கள், இயக்கு வரைகள் ஆகியவற்றைக் காண்க.
[விடை : 10 ; 8 ; $e=\cdot 6$; $(\pm 3, 0)$; $3x\pm 25=0$]

3. ஒரு நீள் வளையத்தின் குவியம் $(-1, 1)$; ஒத்த இயக்கு வரை $x-y+3=0$, மையத் தொலைத் தகவு $\frac{1}{2}$ எனில் அதன் சமன்பாடு என்ன?
[விடை : $7x^2+7y^2+2xy+10x-10y+7=0$]

4. நியம வடிவில் உள்ள ஒரு நீள் வளையத்தின் நேரகலம் 5 அலகுகள். அதன் மையத் தொலைத் தகவு $=\frac{2}{3}$ எனில், அதன் சமன்பாட்டைக் காண்க.
$$\left[\text{விடை : } \frac{4}{81}x^2+\frac{4}{45}y^2=1\right]$$

5. ஒரு நீள் வளையத்தின் குவியங்கள் $(3, 0)$; $(-3, 0)$ ஆகும். அதன் மையத் தொலைத் தகவு $\frac{1}{2}$ எனில், அதன் சமன்பாடு என்ன?
$$\left[\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1\right]$$

6. கீழ்க் காணும் சமன்பாடுகளை நியம வடிவில் எழுதி, அச்சுகளில் நீளம், மையத் தொலைத்தகவு, மையம், உச்சிகள், குவியங்கள், இயக்கு வரைகள் ஆகியவற்றைக் காண்க.

(i) $7x^2+4y^2-14x+40y+79=0.$

[விடை : $a=\sqrt{7}\ b=2$;

$e=\sqrt{21}/7$, $c(1,-5)$;

$A(1, -5+\sqrt{7})$; $A'(1, -5-\sqrt{7})$;

$S(1, -5+\sqrt{3})$; $S(1, -5-\sqrt{3})$;

$y=-5\pm\frac{7}{3}\sqrt{3}$;]

(ii) $9x^2+16y^2+36x-32y-92 = 0$

[விடை : $a=4$, $b=3$; $e=\sqrt{7}/4$;

$c(-2, 1)$; $A(2, 1)$; $A'(-6, 1)$;

$S(-2+\sqrt{7}, 1)$; $S'(-2-\sqrt{7}, 1)$;

$x=-2\pm\frac{16}{7}\sqrt{7}$]

7. ஒரு நீள் வளையத்தின் மையம் (2, 3) ; குவியம் (3, 4) ; மையத் தொலைத் தகவு $\frac{1}{2}$ எனின், அதன் சமன்பாடு என்ன? [விடை : $\frac{(x-y+1)^2}{16}+\frac{(x+y-5)^2}{12}=1$]

8. $(-3, 0)$, $(3, 0)$ என்னும் புள்ளிகளிலிருந்து ஓர் இயங்கும் புள்ளியின் தொலைகளின் கூட்டுத் தொகை அப் புள்ளியின் எல்லா நிலைகளுக்கும் 8-க்குச் சமமானால், அப் புள்ளியின் இயங்கு வரை யாது?

[விடை : $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$]

9. கொடுக்கப்பட்ட நீளமுடை ஓர் இரும்புத் துண்டு தன் முனைகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக உள்ள இரு நேர்கோடுகளின்மேல் நகரும் வண்ணம் இயங்கினால், அதன் மீதுள்ள ஏதேனும் குறிப்பிட்ட புள்ளி ஒரு நீள் வளையத்தை வரையும் என நிறுவுக.

பயிற்சி 4-3.

அதிபர வளைவு (Hyperbola)

1. ஓர் அதிபர வளையத்தின் குவியம் (1, 1) ; ஒத்த இயக்கு வரை $2x+y=1$; மையத் தொலைத் தகவு $\sqrt{3}$ எனின், அதன் சமன்பாடு என்ன? [விடை : $7x^2+12xy-2y^2-2x+4y-7=0$]

2. ஒரு செவ்வக அதிபர வளைவின் குவியம் (1, −2) ; அதன் ஒத்த இயக்கு வரை $x+y=2$ எனின், அதன் சமன்பாடு என்ன? [விடை : $2xy-2x-8y-1=0$]

3. ஓர் அதிபர வளைவின் மையம் (−2, 1). அதன் குறுக்காயம் x அச்சுக்கு இணையாக 6 அலகுகள் நீளம் கொண்டு உள்ளது. அதன் துணை ஆயம் 8 அலகுகள் ஆகும். அதன் சமன்பாட்டைக் காண்க. அதன் மையத் தொலைத் தகவு, குவியங்கள், உச்சிகள், இயக்கு வரைகள், தொலை தொடு கோடுகள் ஆகியவற்றையுங் காண்க.

[விடை : $\dfrac{(x+2)^2}{9}-\dfrac{(y-1)^2}{16}=1$; $e=\dfrac{5}{3}$;

$S(3, 1)$; $S'(-7, 1)$; $A(1, 1)$; $A'(-5, 1)$

இயக்குவரை $x=-\dfrac{1}{5}$ அல்லது $-\dfrac{19}{5}$;

$y-1=y\pm\dfrac{4}{3}\;(x+2)$]

4. $9y^2-16x^2=144$ என்னும் அதிபர வளைவின் மையத் தொலைத் தகவு, நேரகலம், தொலைத் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க. [விடை ; $e=\frac{5}{3}$; $4\frac{1}{2}$; $y=\pm\frac{4}{3}x$]

5. கீழ்க்காணும் அதிபர வளைவுகளின் மையத் தொலைத் தகவு, மையம், உச்சிகள், குவியங்கள், இயக்கு வரைகள், தொலைத் தொடுகோடுகள், துணையிய அதிபர வளைவு ஆகியவற்றைக் காண்க.

(i) $x^2-2y^2+4x+y-\frac{1}{8}=0$

[விடை : $\dfrac{(x+2)^2}{4}-\dfrac{(y-\frac{1}{4})^2}{2}=1$; $a=2$;

$b=\sqrt{2}$; $ae=\sqrt{6}$.

$e = \frac{\sqrt{6}}{2}$; $c(-2, \frac{1}{4})$, $A(0, \frac{1}{4})$; $A'(-4, \frac{1}{4})$; $S(-2+\sqrt{6}, \frac{1}{4})$

$S'(-2-\sqrt{6}, \frac{1}{4})$; இயக்கு வரைகள் $x = -2 \pm \frac{2}{3}\sqrt{6}$

தொலைத் .தொடுகோடுகள் $y - \frac{1}{4} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(x+2)$

நேரகலம் = 2 ; துணையிய அதிபர வளைவின் சமன்பாடு
$$\frac{(y-\frac{1}{4})^2}{2} - \frac{(x+2)^2}{4} = 1 \Big]$$

(ii) $4x^2 - y^2 + 2y + 3 = 0$

$\Big[$ விடை : $\frac{-x^2}{1} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$; $a = 2$; $b = 1$;

$ae = \sqrt{5}$; $e = \sqrt{5/2}$; $C(0,1)$; $A(0,3)$, $A'(0,-1)$,
$S(0, 1+\sqrt{5})$, $S'(0, 1-\sqrt{5})$

இயக்கு வரைகள் $y = 1 \pm \frac{4}{5}\sqrt{5}$; தொலைத் தொடு கோடுகள் $y - 1 = \pm 2x$; நேரகலம் $= 1$;

துணையிய அதிபர வளைவு $\frac{x^2}{1} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1 \Big]$

6. $9x^2 - 16y^2 + 72x - 32y - 16 = 0$ என்ற அதிபர வளைவின் மையம், மையத் தொலைத்தகவு, குவியங்கள், இயக்கு வரைகளைக் காண்க.

$\Big[$ விடை : $\frac{(x+4)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1$. $(-4,-1)$ மைய மாகும். $e = 5/4$ $S(1, -1)$; $S'(-9, -1)$ S-ன் இயக்கு வரை $5x+4=0$; S'-ன் இயக்குவரை $5x+36=0\Big]$

7. மையத் தொலைத் தகவு 2 ஆக உள்ள அதிபர வளைவின் குவியங்கள் $(-2, 3)$; $(2, 5)$ ஆகும். அதிபர வளைவின் சமன்பாடு யாது? உச்சிகளின் ஆயத் தொலைகளையும் காண்க.

$\Big[$ விடை : $a = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $ex = \frac{a}{e} = \frac{\sqrt{5}}{4}$; $A(-1\ \ 3\frac{1}{2})$

$A'(1, 4\frac{1}{2})$ இயக்கு வரைகள் $8x+4y=11$; $8x+4y=21\Big]$

8. $(-3, 0)$; $(3, 0)$ என்னும் புள்ளிகளிலிருந்து ஓர் இயங்கும் புள்ளியின் தொலைகளின் வேறுபாடு அப் புள்ளியின் எல்லா நிலைகளுக்கும் 4—க்குச் சமமானால், அப் புள்ளியின் இயங்குவரை என்ன ? $\left[\text{விடை : } \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1\right]$

9. ஒரு அதிபர வளையத்தின் மையத் தொலைத் தகவு e ஆகும். அதன் துணையிய அதிபர வளைவின் மையத் தொலைத் தகவு e_1 எனின், $\frac{1}{e^2} + \frac{1}{e_1^2} = 1$ என நிறுவுக.

10. $(5, 3)$ புள்ளி வழிச் செல்லும் ஓர் அதிபர வளைவின் மையம் $(1, 2)$ தொலைத் தொடு கோடுகள் $2x+3y=0$, $3x-2y=0$ என்னும் கோடுகளுக்கு ஒரு போகானவை எனின், அதிபர வளைவின் சமன்பாடு என்ன ?
[விடை : $(2x+3y-8)(3x-2y+1)=110$]

11. $2x^2+2xy-3x+y=0$ என்னும் அதிபர வளைவின் தொலைத் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடு என்ன ?
[விடை : $2x^2+2xy-3x+y-2=0$]

12. $3x^2-5xy-2y^2+17x+y+14=0$ என்னும் அதிபர வளைவின் தொலைத் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடு என்ன ?
[விடை : $3x^2-5xy-2y^2+17x+y+10=0$]

13. ஒரு செவ்வக அதிபர வளைவின் குவியம் ஆதியாகும். அதன் ஒத்த இயக்கு வரை $x+y+1=0$ எனின், அதன் தொலைத் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடு காண்க.
[விடை : $xy+x+y+1=0$]

14. ஓர் அதிபர வளைவின் சமன்பாடு $2x^2+5xy+2y^2+4x+5y-1=0$ அதன் துணையிய அதிபர வளைவின் சமன்பாடு என்ன ? [விடை : $2x^2+5xy+2y^2+4x+5y+5=0$]

15. ஓர் அதிபர வளைவின் தொலைத் தொடுகோடுகள் $2x+y+4=0$, $4x+3y+1=0$ ஆகும். இவ் வளைவரை $(-1, 2)$ வழிச் செல்லின், இதன் துணையிய அதிபர வளைவின் சமன்பாடு என்ன ?
[விடை : $(2x+y+4)(4x+3y+1)+12=0$]

5. கூம்பு வளைவுகள் (தொடர்ச்சி) பொதுவான பண்புகளும், பலன்களும்

Conics (Continued) Common Characteristics and Results

1. முந்திய அதிகாரத்தின் கூம்பு வளைவுகளின் வரையறை, பரவளைவு, நீள் வளையம், அதிபர வளைவு, துணையிய அதிபர வளைவு, செவ்வக அதிபர வளைவு ஆகியவற்றின் சமன்பாடுகள், இவற்றின் முக்கிய பண்புகளைப் பற்றிப் படித்தோம்.

இவ்வதிகாரத்தில், கூம்பு வளைவுகளின் பொதுவான பண்புகள், அவற்றிற்குரிய பலன்கள் ஆகியவற்றைப் பெறுவோம்.

பலன்களை நீள் வளையத்தைச் சார்ந்து பெறுவோம்.

நீள் வளையத்தின் சமன்பாட்டின் நியம வடிவம்

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ ஆகும்.}$$

இச் சமன்பாட்டில் b^2-க்குப் பதில் $-b^2$ ஐ ஈடாக்க, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ என அதிபர வளைவின் சமன்பாடு வருவதால், நீள்வளையத்துக்கு நிறுவப் போகும் பல முடிவுகளில் b^2-க்கு பதில் $-b^2$ ஐப் பிரதியிட்டு வரும் முடிவுகள் அதிபர வளைவிற்குப் பொருந்துவதாகும்.

மேலும் b^2-க்குப் பதில் a^2 ஐ ஈடாக்க, $x^2+y^2=a^2$ என ஒரு வட்டத்தின் சமன்பாடு வருவதால், நீள் வளையத்திற்கு நிறுவப் போகும் சமன்பாடுகளில் b^2-க்குப் பதில் a^2 ஐப் பிரதியிட்டுவரும் முடிவுகள் ஒரு வட்டத்திற்குப் பொருந்தும்.

பரவளைவிற்குரிய முடிவுகள், நீள் வளையத்திற்குப் பின்பற்றும் முறையைப் பின்பற்றி நிறுவலாம்.

ஆகவே, நாம் அநேக முடிவுகளை $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ என்னும் நீள் வளையத்திற்குப் பெறுவோம்.

2. $y=mx+c$ என்னும் கோடு $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ஐத் தொடுவதற்குத் தேவையான நிபந்தனை யாது ?

இரண்டு சமன்பாடுகளிலிருந்தும் y ஐ நீக்க,

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(mx+c)^2}{b^2}=1$ எனப் பெறுகிறோம்.

(அதாவது) $x^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right)+\frac{2\,mcx}{b^2}+\left(\frac{c^2}{b^2}-1\right)=0$

(அதாவது) $x^2\;(b^2+a^2m^2)+2m\,ca^2\,x+a^2\,(c^2-b^2)=0$ ஆகும்.

இது x-ல் இரு படிச் சமன்பாடாகும். இதிலிருந்து,

$y=mx+c$ ஆனது $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ஐ வெட்டும் இரு புள்ளிகளின் x ஆயத் தொலைகளை நாம் பெறுகிறோம்.

$y=mx+c$, ஒரு தொடு வரை ஆவதற்கு, இவ்விரு புள்ளிகளும் இணைய வேண்டும். (அதாவது) மேற்கூறிய சமன்பாட்டின் இரு மூலங்களும் சமமாக வேண்டும்.

இதற்குரிய நிபந்தனை,

$4\,m^2\,c^2\,a^4=4\,a^2\,(c^2-b^2)\,(b^2+a^2+m^2)$

(அதாவது) $c^2=a^2m^2+b^2$

ஆகவே, $y=mx \pm \sqrt{a^2m^2+b^2}$ கோடுகள் m–ன் அனைத்து மதிப்புக்கும் $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ நீள் வளையத்தைத் தொடும்.

கிளை 1 : $y=mx=c$ என்னும் கோடு $\frac{x^2}{b^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ என்னும் அதிபர வளைவைத் தொடுவதற்குரிய நிபந்தனை

$c=\pm\sqrt{a^2m_2-b^2}$ என்பதாகும்.

கிளை 2 : $y=mx+c$ என்னும் கோடு $x^2+y^2=a^2$ என்னும் வட்டத்தைத் தொடுவதற்குரிய நிபந்தனை

$c=\pm\sqrt{a^2m^2+a^2} = \pm a\sqrt{1+m^2}$ என்பதாகும்.

கிளை 3 : $y+mx+c$ என்னும் கோடு $y^2=4ax$ என்னும் பரவளைவைத் தொடுவதற்குரிய நிபந்தனை

$$c=\frac{a}{m} \text{ ஆகும்.}$$

$\therefore\ y=mx+\frac{a}{m}$ என்னும் கோடு $y^2=4ax$ என்னும் பரவளைவை m-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் தொடும்.

3. குத்துத் தொடு கோட்டு வட்டம் (Director circle)

தம்முள் செங்குத்தான நீள் வளையத்தின் தொடுகோடுகள் ஒரு வட்டத்தில் வெட்டும்.

$y=mx+\sqrt{a^2m^2+b^2}$ (i) என்னும் கோடு, m–ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ என்னும் நீள் வளையத்தைத் தொடுகிறது.

இதற்குச் செங்குத்துத் தொடுகோடு

$$y=-\frac{1}{m}x+\sqrt{\frac{a^2}{m^2}+b^2} \text{ ஆகும்.}$$

$$y-mx=\sqrt{a^2m^2+b^2} \qquad \dots (i)$$

அது $my+x=\sqrt{a^2+b^2m^2}$ ஆகும். ... (ii)

(i), (ii) ஆகியவற்றை வர்க்கங்கண்டு கூட்டிக் கொள்ள,

$$(1+m^2)x^2 + (1+m^2)y^2 = a^2(1+m^2) + b^2(1+m^2)$$

$$x^2+y^2 = a^2+b^2$$ எனவரும்.

இச்சமன்பாடு (i), (ii) ஆகியவற்றிலிருந்து பெறப்பட்டதால், அவற்றின் வெட்டுப் புள்ளிகள் எல்லாவற்றின் வழியாகச் செல்லும். மேலும் mஐ நீக்கிப் பெறப்பட்டதால், இது எல்லா வெட்டுப் புள்ளிகளுக்கும் பொருந்தும்.

இது ஒரு வட்டமாகும். இது குத்துத் தொடு கோட்டு வட்டம் எனப்படும். இதன் மையம், நீள் வளையத்தின் மையமாகும்.

ஆகவே நீள் வளையத்தின் குத்துத் தொடுகோட்டு வட்டம் (Director circle) $x^2+y^2=a^2+b^2$ என்பதாகும்.

கிளை 1. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்னும் அதிபர வளைவின் குத்துத் தொடுகோட்டு வட்டம் $x^2+y^2=a^2-b^2$ என்பதாகும்.

கிளை 2. $x^2+y^2=a^2$ என்னும் வட்டத்தின் குத்துத் தொடு கோட்டு வட்டம் $x^2+y^2=a^2+a^2=2a^2$ ஆகும்.

கிளை 3. $y^2=4ax$ என்னும் பரவளைவிற்கு வரையும் குத்துத் தொடு கோடுகளின் சந்திப்பு $x+a=0$ என்னும் அதன் இயக்குவரை (Directrix) ஆகும்.

[குறிப்பு : கிளை 3-ன் பலனைத் தனியே செய்து காணவும்.]

4. குவியங்களிலிருந்து, நீள் வளையத் தொடு வரை ஒன்றுக்கு வரையும் Sy $s'y'$ என்னும் குத்துக் கோடுகளின் அடிகள் $y'y'$ என்பன துணை வட்டத்தில் அமையுமென நிறுவுக.

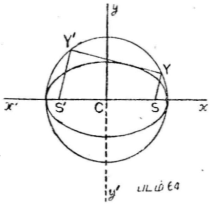
தொடுவரையின் சமன்பாடு

$y=mx+\sqrt{a^2m^2+b^2}$ எனக் கொள்ளலாம். ... (i)

$S\ (ae,\ 0)$ வழி இத் தொடு வரைக்கு வரையும் நேர் குத்துக் கோட்டின் சமன்பாடு

$y = -\frac{1}{m}x + k$ எனக் கொள்ளலாம்,

இது $(ae, 0)$ வழிச் செல்வதால், $k = \frac{ae}{m}$ என ஆகும்.



படம் 64

∴ S வழி தொடு வரைக்கு வரையும் நேர்குத்துக் கோட்டின் சமன்பாடு, $y = -\frac{1}{m}x + \frac{ae}{m}$

(அதாவது) $my + x = ae$ ஆகும். ...(ii)

(i), (ii) சமன்பாடுகளிலிருந்து mஐ அகற்றின், y-ன் இயங்கு வரை வரும்.

(i), (ii) சமன்பாடுகளின் வர்க்கங்களைக் கூட்டின், $(y-mx)^2+(my+x)^2 = a^2m^2+b^2+a^2e^2$ என்றாகும்.

(அதாவது) $x^2(1+m^2)+y^2(1+m^2)=a^2(1+m^2)$ என்றாகும்.

∴ $x^2+y^2=a^2$

இது நீள் வளையத்தின் துணை வட்டமாகும் (Auxiliary circle)

கிளை 1. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்னும் அதிபர வளைவிற்கு S, S' என்னும் குவியங்களிலிருந்து தொடு வரை ஒன்றுக்கு வரையும் நேர்குத்துக் கோடுகள் SY. $S'Y'$ எனின், Y' Y' புள்ளிகள் துணை வட்டத்தில் அமையும்

கிளை 2. நீள் வளையத்திலும், அதிபர வளைவிலும், SY'. $S'Y'=b^2$ ஆகும்.

கிளை 3. $y^2=4ax$ என்னும் பரவளையத்தின் தொடு வரைக்கு, S-லிருந்து நேர்குத்துக் கோடு வரையின் அதன் அடியின் நியமப் பாதை உச்சியிடத்துத் (vertex) தொடு வரையாகும்.

5. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ நீள் வளையத்தின் (x_1, y_1) என்னும் புள்ளியிடத்துத் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு (Tangent at a point on the Ellipse).

ஒரு வளை வரையின் தொடுகோட்டின் சரிவு, அப் புள்ளியிடத்து $\left(\frac{dy}{dx}\right)$-ன் மதிப்பாகும்.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

இதற்கு xஐ ஒட்டிய வகைக்கெழு காண,

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx}=0 \text{ என வரும்.}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y} \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)}=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x_1}{y_1} \text{ ஆகும்.}$$

$\therefore$ (x_1, y_1) என்ற புள்ளியில் தொடு கோட்டின் சமன்பாடு,
$y-y_1=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x-x_1)$ என்றாகும்.

(அதாவது) $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$ [ஏனெனில், (x_1, y_1) நீள் வளையத்தில் இருப்பதால்]

$\therefore$ (x_1, y_1) என்ற புள்ளியிடத்து, தொடுவரையின் சமன்பாடு,

$$\underline{\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1 \text{ ஆகும்.}}$$

[குறிப்பு: நீள் வளையத்தின் சமன்பாடு

$$S=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0 \qquad \ldots (1)$$

எனக் கொள்ளின், தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

$$T=\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}-1=0 \text{ ஆகும்.} \qquad \ldots (2)$$

பொதுவாக, எந்த இரு படி வளைவரையிலும், எல்லா உறுப்புகளையும் இடது பக்கம் கொண்டுவந்து வலது பக்கம் பூச்சியமாகும் வண்ணம் எழுதிக் கொண்டு, இடது பக்கத்தை S எனக் குறிப்பிடுவது வழக்கம்.

S-ல் உள்ள x^2ஐ xx_1 ஆலும், y^2ஐ yy_1 ஆலும், $2xy$ஐ, xy_1+x_1y ஆலும், $2x$ஐ $x+x_1$ ஆலும், $2y$ஐ $y+y_1$ ஆலும் பிரதியிட்டால், T என்ற கோவை வரும். $T=0$ என்பது (x_1, y_1) இடத்துள்ள தொடு வரையின் சமன்பாட்டைக் குறிக்கும்.

இவ்வாறு, $S=ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ ஒரு கூம்பு வளைவின் சமன்பாட்டைக் குறிப்பின்

$$T = axx_1+h(xy_1+x_1y)+byy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c = 0$$

அக் கூம்பு வளைவிற்கு (x_1, y_1) இடத்துள்ள தொடுகோட்டின் சமன்பாடாகும்.

கிளை 1 : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்னும் அதிபர வளைவிற்கு அதன் மீதுள்ள (x_1, y_1) புள்ளியிடத்துள்ள தொடுகோட்டின் சமன்பாடு $\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$ ஆகும்.

கிளை 2 : $x^2+y^2=a^2$ என்னும் வட்டத்திற்கு (x_1, y_1) என்னும் புள்ளியில் தொடுகோடு $xx_1+yy_1=a^2$ ஆகும்.

இதேபோல், $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ என்னும் வட்டத்திற்கு அதன்மீதுள்ள (x_1, y_1) புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு $xx_1+yy_1+g(x+x_1)=f(y+y_1)+c=0$ ஆகும்.

கிளை 3 : $y^2=4ax$ என்னும் பரவளைவிற்கு (x_1,y_1) புள்ளியிடத்துத் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு $yy_1=2a(x+x_1)$ ஆகும்.

6 வரை செங்கோடு (Normal to a Curve)

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்னும் நீள் வளையத்தில் (x_1,y_1) இடத்து வரைச் செங்கோட்டின் சமன்பாடு காணல்

(x_1, y_1) இடத்துத் தொடுவரை $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$ ஆகும்.

இதற்குச் செங்குத்துக் கோடு,

$$\frac{a^2}{x_1}x - \frac{b^2}{y_1}y = K \text{ எனக் கொள்ளலாம்.}$$

இது (x_1, y_1) வழிச் செல்வதால், $K = a^2 - b^2$ ஆகும்.

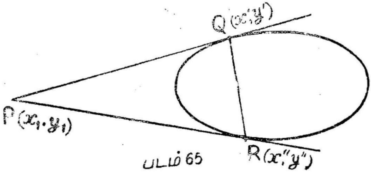
∴ வரைச் செங்கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{a^2x}{x_1} - \frac{b^2y}{y_1} = a^2 - b^2 = \text{ ஆகும்.}$$

இது போன்றே, பிற வளைவரைகளுக்கும். வரைச் செங்கோடு காணலாம்.

7. (x_1, y_1)-லிருந்து $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$-க்கு வரையும் தொடுவரைகளின் தொடு நாணுக்குச் சமன்பாடு காணல்

PQ, PR என்பன P என்ற புள்ளியிலிருந்து நீள் வளையத்திற்கு வரையும் தொடுகோடுகள் ஆகுக.



படம் 65

இத் தொடுகோடுகளின் தொடு புள்ளிகளான Q, R என்பவற்றின் ஆயத் தொலைகள் முறையே (x', y'); (x'', y'') ஆகுக.

இனி, Qயிடத்துத் தொடுவரை $\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2}$ ஆகும்.

R இடத்து தொடுவரை, $\frac{xx''}{a^2} + \frac{yy''}{b^2} = 1$ ஆகும்.

இவ்விரு தொடு வரைகளும் (x_1, y_1) வழிச் செல்லுவதால்,

$$\frac{x_1x'}{a^2} + \frac{y_1y'}{b^2} = 1 \quad \dots (1)$$

$$\frac{x_1x'}{a^2} + \frac{y_1y''}{b^2} = 1 \text{ என்றுகும்.} \quad \dots (2)$$

(1), (2)-லிருந்து $Q(x'y')$, $R(x'', y'')$ என்பன

$\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1$-ல் உளவெனக் காணலாம்.

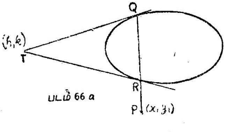
$\therefore$ QR-ன் சமன்பாடு $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$ என்றுகும்.

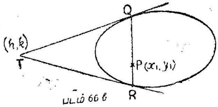
(அதாவது) $T = \frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - 1 = 0$ ஆகும்.

8. புள்ளியின் இசைக்கோடு (Polar of a point)

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள்வளையத்தைச் சார்ந்த (x_1, y_1)-ன் இசைக் கோட்டின் சமன்பாடு காணல்

P வழிச் செல்லும் யாதேனும் ஒரு கோடு நீள் வளையத்தை Q, R-ல் வெட்டட்டும். Q, R இடத்துத் தொடுகோடுகள் $T(h, k)$ என்னும் புள்ளியில் வெட்டுவதாகக் கொள்வோம். T-ன் இயங்குவரையே P-ன் இசைக் கோடாகும்.





இவ் வரையறை யொட்டி, P-ன் இசைக் கோட்டைக் காண்போம்.

$T(h,k)$ $T(x,y)$லிருந்து வரையும் தொடுகோடுகளின் தொடு நாண் $Q\,R$ ஆகும்.

ஆகவே QR-ன் சமன்பாடு $\frac{xh}{a^2} + \frac{yk}{b^2} = 1$ ஆகும்.

இது (x_1, y_1) வழிச் செல்லுவதால். $\frac{x_1h}{a^2} + \frac{y_1k}{b^2} = 1$ என்றாகும்.

இக் கட்டுப்பாடு உண்மையாக, (h,k) என்பது எப்போதும் $\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1$ கோட்டில் அமைய வேண்டும்.

ஆகவே, (x_1, y_1)-ன் துணைகோடு, $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2}$ ஆகும்.

(அதாவது) $T = \frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - 1 = 0$ ஆகும்.

குறிப்பு 1 : கொடுத்த வளைவரையின் சமன்பாடு $S = 0$ ஆனால், (x_1, y_1) இடத்துத் தொடுவரை (x_1, y_1)-லிருந்து வரையும் தொடு கோடுகளின் தொடு நாண், (x_1, y_1)-ன் இசைக்கோடு ஆகியவற்றின் சமன்பாடு ஒன்றுபோல் இருப்பதைக் காணலாம். எல்லாவற்றின் வடிவமும் $T = 0$ ஆகும். ஆனால், வடிவம் ஒன்றானாலும், இவை வேறுபட்ட கோடுகள் ஆகும். ஏனெனில் (x_1, y_1) நீள் வளையத்து இருக்கும்போது ஒரு மதிப்பும், வெளியே அல்லது உள்ளே இருக்கும்போது வேறு மதிப்பையும் பெறும்.

மேலும், (x_1, y_1) நீள் வளையத்தின் வெளியே இருப்பின் அதன் இசைக்கோடு தொடு நாண் என்பதும், (x_1, y_1) நீள் வளையத்தின் உள் இருப்பின் அதன் இசைக்கோடு (x_1, y_1) இடத்துத் தொடுகோடு என்பதும் கருத்திற் கொள்க.

[குறிப்பு 2: குறிப்பு 1-ல் கூறியவை எல்லாம் மற்ற கூம்பு வளைவுகளுக்கும் பொருத்தமானதேயாகும்.]

கிளைத் தேற்றம் : குவியத்தின் இசைக்கோடு இயக்குவரையாகும்.

(i) நீள்வளையம் S என்ற குவியத்தின் ஆயத் தொலைகள் $(ae, 0)$ ஆகும்.

$\therefore$ $(ae, 0)$-ன் இசைக்கோடு, $\frac{x \cdot ae}{a^2} + \frac{y \cdot 0}{b^2} = 1$

(அதாவது) $x = \frac{a}{e}$

இது S-ன் ஒத்த இயக்குவரை யாகும்.

(ii) பர வளைவு :

குவியத்தின் ஆயத்தொலைகள் $(a, 0)$ ஆகும்.

$\therefore$ $(a, 0)$-ன் இசைக்கோடு $y \cdot 0 = 2a(x+a)$ ஆகும்.

$\therefore$ $x+a=0$

இச் சமன்பாடு பர வளைவின் இயக்குவரையின் சமன்பாடாகும்.

பயிற்சி 5-1.

பர வளைவு

1. $y^2-12x-2y-23=0$ என்னும் பரவளைவிற்கு $(1, 7)$ என்னும் புள்ளியில் வரையும் (i) தொடுகோடு, (ii) வரை செங்கோடு ஆகியவற்றின் சமன்பாட்டைக் காண்க. [விடை : $x-y+6=0$; $x+y-8=0$]

2. ஒரு பர வளைவில், t_1, t_2 என்னும் புள்ளிகளை இணைக்கும் நாணின் சமன்பாடு காண்க.

   [விடை : $y(t_1, t_2) = 2(x=a\, t_1\, t_2)$]

3. குவிய நாண் நுனிகளிடத்துத் தொடு வரைகள் இயக்கு வரையில் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக வெட்டிக் கொள்ளும் என நிறுவுக.

4. ஒரு பர வளைவிற்கு வரையும் தொடுகோடு அச்சுடனும், தொடு புள்ளி வழி வரையும் தொடுகோடு குவிய நாணு டனும் சமகோணங்கள் உண்டாக்குகிறது என நிறுவுக. [இது தான் பரவளைவின் பிரதிபலிக்கும் பண்பு (Reflective property) எனப்படும். இதிலிருந்துதான் focus என்ற பெயர் வந்தது.]

5 நேரகலத்தின் நுனிகளில் வரையும் தொடுகோடுகள், இயக்குவரை, அச்சு ஆகியவை ஒரு புள்ளி வழிக் கோடு கள் என நிறுவுக.

6. P-யின் இசைக் கோடு Q வழிச் செல்லின், Q-ன் இசைக் கோடு P வழிச் செல்லும் என நிறுவுக.

   [விடை : P-யும், Q-யும் துணையிய புள்ளிகள் எனப்படும்.]

7. $y^2=4ax$ ஐச் சார்ந்து, $Ax+By+C=0$ என்னும் கோட்டின் இசைப் புள்ளியைக் காண்க.

   $\left[\text{விடை : } \frac{C}{A}, -\frac{2aB}{A}\right]$

8. $y^2=4ax$ ஐச் சார்ந்து $Ax+By+C=0$ வின் இசைப் புள்ளி $A'x+B'y+C'=0$ என்னும் கோட்டில் அமைந்தால், $A'x+B'y+C'=0$ என்னும் கோட்டின் இசைப் புள்ளி $Ax+By+C=0$ வின் மேல் அமையுமென நிறுவுக.
[விடை : இப்பொழுது $Ax=By+C=0$-வும், $A'x+B'y+C'=0$-வும் துணையியக் கோடுகள் எனப்படும். துணையியக் கோடுகள் ஆவதற்கு நிபந்தனை $AC'+A'C=2\,AaBB'$ ஆகும்]

பயிற்சி 5-2.

நீள் வளையம்

1. $16x^2+y^2-16=0$ என்னும் நீள் வளையத்திற்கு, $(\frac{1}{2}, -2\sqrt{3})$ என்னும் புள்ளியிடத்து (i) தொடு கோட்டையும், வரை செங்கோட்டையும் காண்க. [விடை : $4x-\sqrt{3}y-8=0$:

$$y+2\sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{4}(x-\tfrac{1}{2})]$$

2. $13x^2+3y^2-2\ 6x+24\ y+22=0$ என்னும் நீள் வளையத்திற்கு சரிவு (slope) 2 ஐக் கொண்ட தொடு கோடுகளை எழுது. [விடை : $y+4=2(x-1)\pm 5$]

3. ஒரு நீள் வளையத்தின்மீது ஏதேனும் ஒரு புள்ளியில் வரையும் தொடுகோடு, தொடு புள்ளியைக் குவியங்களுடன் சேர்க்கும் குவிய ஆரங்களுடன் சமகோணங்களை ஏற்படுத்துகிறது என நிறுவுக.

4. ஒரு நீள் வளையத்தில் P என்னும் புள்ளியிடத்து வரையும் தொடுகோட்டின்மீது S என்ற குவியத்திலிருந்து வரையப்படும் செங்குத்துக் கோடு மையத்தையும் P-யும் இணைக்கும் கோட்டை S-க்கு ஒத்த இயக்கு வரையில் சந்திக்குமென நிறுவுக. [அதாவது, CP, SY இயக்கு வரை ஆகியவை, ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகள் ஆகும்.]

5. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ என்ற நீள் வளையத்தில் P இடத்துத் தொடுவரை, நெட்டச்சு நுனிகள் A, A' இடத்துத் தொடு வரைகளை முறையே L, M புள்ளிகளில் வெட்டின் $AL\cdot A'M=b^2$ என நிறுவுக.

6. பரவளையப் பகுதியில் கொடுத்துள்ள 6, 7, 8 எண்ணுள்ள கணக்குகளை நீள் வளையத்தைப் பொருத்திச் செய்யவும்,

7. $y = mx$ என்னும் விட்டத்திற்கு ஒரு போகான நாண்களின் நடுப்புள்ளிகள் இயங்கும் வரை $y = -\frac{b^2}{a^2 m} x$ என நிறுவுக.

8. $y = mx$, $y = m'x$, நீள் வளையத்திற்கு துணையிய விட்டங் களாக அமைவதற்கு $mm' = -\frac{b^2}{a^2}$ ஆக வேண்டும் என நிறுவுக.

[இரு விட்டங்களுள் ஒன்று மற்றதற்கு ஒரு போகான நாண்களைச் சமமாகப் பிரிப்பின், இவை துணையிய விட்டங்கள் (conjugate diameters) எனப்படும். இத் தகைய விட்டங்கள் $y = mx$, $y = m'x$ எனின் $mm' = -\frac{b^2}{a^2}$ ஆகும்.]

பயிற்சி 5-3.

அதிபர வளைவு

1. $16x^2 - 9y^2 - 128x - 54y + 31 = 0$ என்ற அதிபர வளை விற்கு $(\frac{1}{4}, 0)$ என்னும் புள்ளியிடத்து (i) தொடு கோட் டையும் (ii) வரை செங்கோட்டையும் காண்க.
[விடை : $20x + 9y - 5 = 0$, $y = \frac{9}{20}(x - \frac{1}{4})$]

2. $2x^2 - y^2 = 1$ என்னும் அதிபர வளைவிற்குச் சரிவு 2 உள்ள தொடு கோடுகளைக் காண்க. [விடை : $y = 2x \pm 1$]

3. ஓர் அதிபர வளைவின் தொடுகோடு, தொடு புள்ளியைக் குவியங்களுக்கு இணைக்கும் குவிய ஆரங்களுடன் சம கோணங்கள் ஏற்படுத்துகிறது என நிறுவுக.

4. $(1,2)$; $(-2,-1)$; $(-1,-\frac{2}{3})$ ஆசிய புள்ளிகள் $2x^2 - 3y^2 = 2$ என்னும் அதிபர வளைவைச் சார்ந்து தம்முள் துணையியப் புள்ளிகள் (self conjugate points) என நிறுவுக.
[(அதாவது) ஒவ்வொரு பக்கமும் அதன் எதிர் உச்சிக்கு, அதிபர வளைவைச் சார்ந்து, இசைக் கோடாகும் என நிறுவ வேண்டும்.]

5. அதிபர வளையத்துப் புள்ளி ஒன்றிலிருந்து, தொலைதொடு கோடுகளுக்கு வரையும் நேர்குத்துக் கோடுகளின் பெருக்குத் தொகை மாறு ராசியாகுமென நிறுவுக.

6. S-லிருந்து தொலைத் தொடுகோடு ஒன்றுக்கு வரையும் நேர்குத்துக் கோட்டின் அடி, ஒத்த இயக்குவரை, துணை வட்டம் ஆகியவை ஒரே புள்ளியில் வெட்டிக் கொள்ளு மென நிறுவுக.

7. அதிபர வளையத்து நாண் ஒன்று அதிபர வளையத்தை L, L' புள்ளிகளிலும், தொலைத் தொடுகோடுகளை K, K' களிலும் வெட்டின், $LK = L'K'$ என நிறுவுக.

8. ஓர் அதிபர வளைவின் தொலைத் தொடுகோடுகளுக்கு இடைப்பட்டிருக்கும் ஏதேனும் ஒரு தொடுகோட்டின் பகுதி தொடு புள்ளியில் இரு சமமாகப் பிரிக்கப்படு கிறது என்றும், அப்பகுதி தொலைத் தொடுகோடுகளுடன் உண்டாக்கும் முக்கோணத்தின் பரப்பு ஒரு மாறிலியாகு மென்றும் நிறுவுக.

9. ஒரு செவ்வக அதிபர வளைவில் t_1, t_2 என்னும் புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டின் சமன்பாடு $x + y\, t_1 t_2 = c\, (t_1 + t_2)$ எனக் காட்டுக.

10. பரவளையப் பகுதியில் கொடுத்துள்ள 6, 7, 8 எண்ணுள்ள கணக்குகளை ஓர் அதிபர வளைவைப் பொருத்திச் செய் யவும்.

11. $y = mx$ விட்டத்திற்கு ஒருபோகான நாண்களின் நடுப் புள்ளிகள் இயங்கும் வரை $y = +\dfrac{b^2}{a^2 m} x$ என நிறுவுக.

12. $y = mx$, $y = m'x$ ஆகிய விட்டங்கள் அதிபர வளைவிற்குத் துணையிய விட்டங்களாக அமைவதற்கு $mm' = +\dfrac{b^2}{a^2}$ ஆக வேண்டும் எனக் காட்டுக.

6. வரைபடங்கள்
(Graphs)

1. ஒரு சார்பின் (function) தலையாய தன்மைகளை ஆராய்வதற்கு வாய்க்கும் ஒரு முறையானது வரைபட முறை (graphical method) எனப்படும்.

அச் சார்பை $y=f(x)$ எனக் கருதுவோம். x-க்குப் பல மதிப்புகளைக் கொடுத்தால், அவற்றிற்கொத்த y-ன் மதிப்புகளைப் பெறுவோம். அவ்வாறு பெற்ற x, y-களுடைய ஒத்த மதிப்புகளுக்கு ஏற்பப் புள்ளிகளைக் குறியிட்டு, அவற்றையொரு வளைவு கோட்டால் சேர்க்க, அச் சார்புக்குரிய வரைபடம் அமையும்.

தொடர்ச்சி நிலை (continuous) உள்ள சார்பாயின், மாறிகளுக்கு ஒத்துவரும் மதிப்புகளுக்கு முடிவில்லையாகும். ஆகவே, குறிக்கக்கூடிய புள்ளிகள் அளவிலவாகும். ஆனால், எந்த வரைபடத்திலும் இம்மாதிரியான புள்ளிகளுள், சார்பின் தன்மையை வெளிப்படுத்தும், ஒருசிலவே குறித்துக் காட்டப்படும்.

(i) x-ன் யாதொரு மதிப்புக்கும் ஒத்ததாகிய y-ன் மதிப்பை அறிந்து கொள்ள இத்தகைய வரைபடத்தைப் பயன்படுத்தலாம்.

(ii) வரைபடம் x அச்சை வெட்டுமிடங்களில், அப் புள்ளிகளின் x அச்சுத் தூரங்கள் $f(x) = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலங்களுக்குரிய மதிப்புகளாகும்.

(iii) கொடுத்த சமன்பாட்டில் சமன்பாட்டை மாற்றாமல் $+y$-க்குப் பிரதியாக $-y$ ஐ இட்டெழுத அமையுமானால், அவ்

வரை படம் x அச்சின் இருமருங்கிலும் வடிவொத்துக் காணப் படும். y-ன் அடுக்கு இரட்டைப் படை எண்ணுனல், இந் நிலைமை வாய்ப்பதாகும்.

(iv) இவ்வாறே x-ன் அடுக்கும் இரட்டைப் படையாக இருந் தால், முன் சொன்ன நிகழ்ச்சி y அச்சையொட்டிக் காணப்படும்.

(v) x-க்கு $-x$-ம், y-க்கு $-y$-ம் பிரதியீடு செய்ய, கொடுத்த சமன்பாடு மாற்றம் அடையாதிருந்தால், அவ் வரைபடம் ஆதியைப்பற்றி வடிவொத்து நிற்கும். இவ்வகையில், வரைபட மானது 1ஆவது 3ஆவது கால் வட்டங்களில் அல்லது 2ஆவது 4 ஆவது கால் வட்டங்களில் விளங்கும். $y = \tan x$, $y = \frac{1}{x}$, $y = x^3$ என்பவற்றின் வரைபடம் ஆதியைப்பற்றி வடிவொத்து நிற்கும்.

ஒரு வளைவரை இரண்டு அச்சுகளைப் பற்றியும் வடிவொத்து நின்றல், அது தன்னியல்பாகவே, ஆதியைப்பற்றி வடிவொத்து நிற்கும்.

எடுத்துக்காட்டாக $x^2+y^2=25$ என்றதன் வரைபடமாகிய வட்டம் இத்தகு தன்மையுடையது.

சமன்பாட்டைச் சோதித்து, பின்வரும் வினுக்களை எழுப்ப, வளைவகையின் வடிவமைப்பையும், எல்லை மதிப்புகளையும் பற்றிய தகவல்கள் பேரளவுக்குக் கிடைக்கப் பெறும்.

(i) வரைபடம் யாதேனுமோர் அச்சைப்பற்றி வடிவொத்து விளங்குகிறதா?

(ii) வரைபடம் ஆதியைப்பற்றி வடிவொத்து நிற்கின்றதா ?

(iii) அது அச்சுகளை எங்கெங்கு வெட்டுகிறது ?

(iv) y-ன் மதிப்பைக் கற்பனையாக்குதற்குத் தக்கவாறு x-ன் மதிப்பு யாதேனும் உண்டா? இவ்வாறே x-ன் மதிப்பைக் கற்பனையாக்குதற்குத் தக்கவாறு y-ன் மதிப்பு யாதேனும் உண்டா?

(v) x அல்லது y-ன் மதிப்பில் ஏதேனும் ஓர் இடைவெளி மதிப்புப் பெற முடியா வண்ணம் அமைகிறதா?

(vi) x-ன் மதிப்புகளுள் எவையேனும் y-ன் மதிப்பை அநந்த நிலை அல்லது முடிவிலி நிலைக்குக் கொண்டுபோகின்றனவா? அல்லது y-ன் மதிப்புகளுள் எவையேனும் x-ன் மதிப்பை அநந்த நிலைக்குக் கொண்டுபோகின்றனவா?

(vii) x-ன் மதிப்பு மிகவும் பெரிதாகும்பொழுது, y-ன் மதிப்பில் யாது நிகழும்?

இனிக் கீழ்க்காணும் சார்புகளுக்கு வரைபடங்கள் அமைத்து அவற்றின் தன்மையை அறிய முற்படுவோம்.

2. (a) e^x-ன் வரைபடம் $y=e^x$ எனக் கொள்வோம்.

(i) சார்பானது சமச்சீர் தன்மை யற்றது.

(ii) x-ன் எல்லா மெய் மதிப்புகளுக்கும், y-ம் மெய் மதிப்பு எய்தும்.

(iii) $x\to\infty$ ஆகும்போது, $y\to\infty$

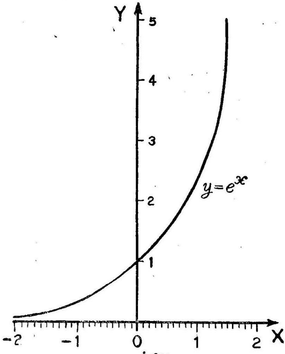
$x\to-\infty$ ஆகும்போது, $y\to 0$

ஆகவே x அச்சு $-\infty$ திசையில் வரைபடத்திற்குத் தொலை தொடுகோடாக அமைகிறது.

(iv) $x=0$ ஆகும்போது, $y=1$ ஆகும்.

x-க்கு ஒத்த மதிப்புகளை அட்டவணைகளிலிருந்து (Tables) எடுத்து இரு தசமத்தான த் திருத்தமாகக் குறித்துக் கொள்க. x, y மதிப்புகளுக்குரிய புள்ளிகளைக் குறித்து அப் புள்ளிகளை வளைவரையினால் சேர்க்கவும்.

x	$-\infty$...	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y=e^x$	0	·05	·14	·37	1	2·72	7·4	20·09



படம் 67

(b) e^{-x}-ன் வரைபடம் $y=e^{-x}$ எனக் கொள்க.

(i) சார்பானது சமச்சீர் தன்மை இல்லாதது.

(ii) x-ன் எல்லா மெய் மதிப்புகளுக்கும், y-ம் மெய் மதிப்பு எய்தும்.

(iii) $x \to \infty$ ஆகும்போது, $y \to 0$

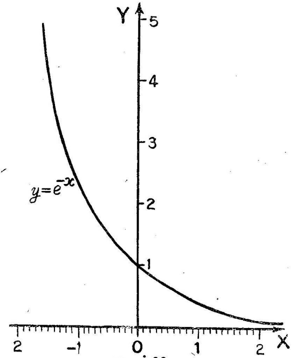
$x \to -\infty$ ஆகும்போது, $y \to +\infty$

ஆகவே x அச்சு, $+\infty$ திசையில் வரைபடத்திற்குத் தொலை தொடு கோடாக அமைகிறது.

(iv) $x=0$ ஆகும்போது, $y=1$

x, y-க்குரிய மதிப்புகளை அட்டவணையிலிருந்து குறித்துக் கொள்.

x	$-\infty\ldots$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y=e^{-x}$	$+\infty\ldots$	20·09	7·4	2 72	1	·37	·14	·05



படம் 68

(c) $\log_e$

$y=\log_e x$ எனக் கொள்க.

(i) சார்பு சமச்சீர் தன்மை உடையது அல்ல.

(ii) $x>0$ ஆனால்தான், y மெய் மதிப்பு பெறுகிறது.

(iii) $x\to 0$ ஆகும்போது, $y\to -\infty$

(iv) $x=1$ ஆகும்போது, $y=0$.

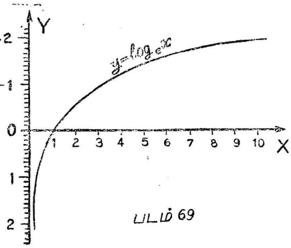
(v) $0<x<1$ ஆகும்போது, y எதிர் ராசியாகிறது.

$x>1$ ஆகும்போது, y நேர் ராசியாகிறது.

(vi) $x\to +\infty$ ஆகும்போது, $y\to +\infty$

ஆகவே, வளைவரை y அச்சுக்கு வலப்புறமாகவே y அச்சின் இரு திசைகளிலும் ∞ நோக்கிச் செல்கிறது. மேலும்,

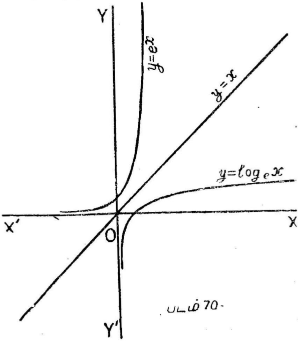
$-\infty$ திசையில், y அச்சு வளைவரைக்குத் தொலை தொடுகோடாக அமைகிறது.



படம் 69

குறிப்பு ! மடக்கைச் சார்பு (logarithmic function) அடுக்குக் குறிச் சார்பின் (exponential function) நேர் மாறானதாகும் (inverse).

$y = \log_e x$ ஆனால், $x = e^y$



படம் 70

ஆகவே, $y=\log x$ அல்லது $x=e^y$-ன் வரைபடமானது, அச்சுகளை ஒன்றிற்கு ஒன்றாக இடமாற்றஞ் செய்யுங்கால் $y=e^x$ என்னும் வரைபடமே யாகும்.

$y=x$ என்னும் கோட்டில் $y=e^x$ என்னும் வரைபடத்தின் பிரதிபலிப்பே $y=\log_e x$-ன் வரைபடமாகும்.

(d) e^{-x^2}-ன் வரைபடம்

$y=e^{-x^2}$ எனக் கொள்க.

(i) xஐ $-x$ ஆக மாற்ற, சமன்பாடு மாறுவதில்லை. ஆகவே, y அச்சுபற்றி வளைவரை சமச்சீர் உடையதாக அமைகிறது.

(ii) x-ன் எல்லா மெய் மதிப்புகளுக்கும், y-ம் மெய் மதிப்புகள் பெறுகிறது.

(iii) $x\to\pm\infty$ ஆகும்போது, $y\to 0$

ஆகவே x அச்சு, வளைவரைக்கு $-\infty$ திசையிலும், $+\infty$ திசையிலும் தொலைத் தொடுகோடாக அமைகிறது.

(iv) $x=0$ ஆகும்போது, $y=1$. ஆகவே, வளைவரை y அச்சை $(0, 1)$ இடத்தில் வெட்டுகிறது.

(v) y எதிர்ராசி $(-)$ மதிப்பு ஏற்றால், x கற்பனையாகிறது. ஆகவே, வளைவரை முழுவதும் x அச்சுக்கு மேற்புறத்திலேயே அமையும்.

(vi) $y=e^{-x^2} \quad \therefore \quad \frac{dy}{dx} = -2xe^{-x^2}$

$x=0$ ஆனால், $\frac{dy}{dx}=0$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{-x^2}(4x^2-2) = 2e^{-x^2}(2x^2-1)$$

$x=0$ என்னுமிடத்து, $\frac{d^2y}{dx^2}$ எதிர் ராசியாகிறது. ஆகவே, வளைவரை $(0, 1)$ என்னும் புள்ளியில் மீப்பெரு மதிப்பை அடைகிறது.

படத்தை வரைவதற்கு x-க்குரிய y மதிப்புகளைப் பின்வருமாறு பெறலாம்:

$x=2\cdot1$ ஆனால், அட்டவணையிலிருந்து $x^2=4\cdot41=4\cdot4$ முதல் தசமத்தானத் திருத்தமாக.

இப்பொழுது $y=e^{-x^2}=e^{-2\cdot1^2}=e^{-4\cdot4}=\cdot0123$ (அட்டவணையிலிருந்து)

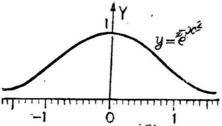
$= \cdot01$

ஆகவே, $x=2\cdot1$, $y=\cdot01$ என்பது ஒத்த மதிப்புகளாகும். இவ்வாறே பிற மதிப்புகளையும் கண்டு வரைபடத்தை வரையலாம்.

y அச்சைப்பற்றி வளைவரை சமச்சீருடையதால், $x=-2\cdot1$, $y=\cdot01$ என்பதும் ஒரு ஜோடி ஒத்த மதிப்புகளாகும்.

இந்த வளைவரை மணி போன்ற வடிவுடைய (bell shaped) தாகும். இது புள்ளியியலில் மிக முக்கியத்துவம் வாய்ந்ததாகும். இது நிகழ்வெண் வரை (frequency curve) அல்லது நிகழ் தகவு வரை (probability curve) எனவும் வழங்கப்படும்.

x	$-\infty$	....	$-1\cdot5$	$-\cdot8$	$-\cdot5$	0	$\cdot5$	$\cdot8$	$1\cdot5$	....	∞
$y=e^{-x^2}$	0		$\cdot1$	$\cdot5$	$\cdot8$	1	$\cdot8$	$\cdot5$	$\cdot1$		0



படம் 71

மேற்கோள் நூற்பட்டியல்

1. 'Differential and Integral Calculus', James R. F. Kent.

2. 'Elementary Analytical Conics', Shackleton and Bailey.

3. 'Analytical Geometry with Calculus', Robert C. Yates.

4. 'Mathematics for Economists,' T. Yamane.

5. 'Mathematics for Economists,' R. G. D. Allen.

6. 'Tutorial Algebra-Vol. II,' Briggs and Bryan-Revised by George Walker.

7. 'Elementary Trigonometry,' Hall and Knight.

8. 'Elementary Mathematics for Economists,' Caroline Dinundy.

கலைச்சொற்கள்

இயற்கணிதம்
(Algebra)

Binomial	— ஈருறுப்பு
,, coefficient	— ஈருறுப்புக் கெழு
,, expansion	— ஈருறுப்புத் தேற்ற விரிவு
,, expression	— ஈருறுப்புக் கோவை
,, theorem	— ஈருறுப்புத் தேற்றம்
Combinations	— சேர்வுகள்
Equations	— சமன்பாடுகள்
Quadratic equations	— இருபடிச் சமன்பாடுகள்
Exponent	— அடுக்குக் குறி
Exponential curve	— அடுக்குக் குறி வளையி
,, function	— அடுக்குக்குறிச் சார்பு
,, series	— அடுக்குக் குறித் தொடர்
,, theorem	— அடுக்குக் குறித் தேற்றம்
Functions	— சார்புகள்
Exponential function	— அடுக்குக் குறிச் சார்பு
Homogeneous Function	— ஓரினச் சார்பு ; சமபடிச் சார்பு
Polynomial function	— பல்லுறுப்புச் சார்பு
Rational integral function	— விகிதமுறு முழுச் சார்பு, முழு எண் அடுக்குச் சார்பு
Symmetric function	— சமச்சீர் சார்பு
Homogeneous symmetric function	— ஓரினச் சமச்சீர் சார்பு, சமபடிச் சமச்சீர் சார்பு
Cyclic symmetric function	— வட்டச் சமச்சீர் சார்பு

Index	—	அடுக்குக்குறி
Laws of Indices	—	அடுக்குக்குறி விதிகள்
Integer	—	முழு எண்
Positive integer	—	நேர் முழு எண்
Negative integer	—	எதிர் முழு எண்
Logarithms	—	மடக்கைகள், இலாகரிதங்கள்
Anti logarithm	—	எதிர் மடக்கை, எதிர் இலாகரிதம்
Common logarithm	—	பொது மடக்கை, நடைமுறை இலாகரிதம்
Characteristic of a logarithm	—	மடக்கையின் முழு எண் பாகம், மடக்கையின் நேர்க்கூறு
Mantissa ,,	—	மடக்கையின் தசமபாகம்
Logarithmic function	—	மடக்கைச் சார்பு
,, graph	—	மடக்கை வரைபடம், மடக்கை வளைகோடு
,, series	—	மடக்கைத் தொடர்
Number	—	எண்
Complex number	—	கலப்பெண், சிக்கலெண்
Imaginary number	—	கற்பனை எண்
Irrational number	—	விகிதமுரு எண்
Natural number	—	இயற்கை எண்
Negative number	—	எதிரெண்; குறையெண்
Positive number	—	நேரெண்; கூட்டெண்
Rational number	—	விகிதமுறு எண்
Real number	—	மெய்யெண்
Whole number	—	முழுஎண்
Permutation	—	வரிசை மாற்றம்
Powers	—	அடுக்குகள்
Progression	—	தொடர்
Arithmetical progression	—	கூட்டுத் தொடர்
Geometric progression	—	பெருக்குத் தொடர்
Harmonic progression	—	இசைத் தொடர்
Proportion	—	விகிதசமம்
Rationalising	—	விகித முறு எண்ணுக்கல்
Root	—	மூலம்
Series	—	தொடர்
Infinite series	—	முடிவிலித் தொடர்; கந்தழித் தொடர்

Theorem	—	தேற்றம்
Binomial theorem	—	ஈருறுப்புத் தேற்றம்
,, for a rational index	—	விகிதமுறு அடுக்குக்கு ஈருறுப்புத் தேற்றம்
Exponential theorem	—	அடுக்குக் குறித் தேற்றம்
Remainder theorem	—	மீதித் தேற்றம்

திரிகோண கணிதம் அல்லது கோண கணிதம்
(Trigonometry)

Anti clockwise	—	இடஞ்சுழியாக
Angle of elevation	—	ஏற்றக்கோணம்
,, depression	—	இறக்கக் கோணம்
Centesimal measure	—	நூற்றின் பகுப்பு முறை, நூற்று முறை அமைப்பு
Circular measure	—	வட்டமுறையளவு
Minute (angle)	—	கலை (கோணம்)
Multiple angles	—	மடங்குக் கோணங்கள்
Quadrant	—	கால் வட்டப் பகுதி
Radian	—	ஆரையன், ரேடியன்
Second (angle)	—	விகலை (கோணம்)
Sexagesimal measure	—	அறுபலன் பகுப்பு முறை, அறுபான் முறையளவு
Trigonometric ratios	—	திரிகோணத் தகவுகள், கோணத் தகவுகள், கோண விகிதங்கள்

நுண்கணிதம்
(Calculus)

Differential Calculus	—	வகைநுண் கணிதம்
Integral Calculus	—	தொகைநுண் கணிதம்
Cost	—	செலவு, அடக்க விலை
Marginal cost	—	இறுதிநிலைச் செலவு
Derivative	—	வகைக் கெழுவாகப் பெற்றது
Differential coefficient	—	வகையீட்டுக் கெழு, வகைக் கெழு

Differentiate — வகைக்கெழு காண்க, வகையீடு செய்க

Differentiation — வகையிடல்

Successive Differentiation — அடுத்தடுத்து வகைக்கெழு காணல்

Elasticity — நெகிழ்ச்சி

Demand Elasticity — தேவை நெகிழ்ச்சி

Integral — தொகை

Definite Integral — வரையறுத்த தொகை

Integrate — தொகை காண்க

Integration — தொகையிடல், தொகை காணல்

Integration by parts — பகுதிப்படுத்தித் தொகை காணல்

Maximum — மீப்பெரு, உச்ச

Maximum value — மீப்பெரு மதிப்பு, உச்ச மதிப்பு

Minimum value — மீச்சிறு மதிப்பு

Marginal revenue — இறுதிநிலை வருவாய்

Monopoly — விற்பனை முற்றுரிமை

Profit — இலாபம்

Variable — மாறி

Dependent variable — சார்ந்த மாறி

Independent variable — சாராமாறி

பகுமுறை வரைகணிதம் — பகுமுறை வடிவகணிதம்
(Analytical Geometry)

ஆய வடிவகணிதம் — ஆயத் தொலை வடிவகணிதம்
(Co-ordinate Geometry)

இயல்முறை வடிவகணிதம்
(Algebraic Geometry)

Abscissa — கிடை அச்சுத் தூரம்

Axis — அச்சு

Centre	—	மையம்
Circle	—	வட்டம்
Conic	—	கூம்பு வளைவு, இருபடி வரை
Co-ordinates	—	ஆயத் தொலைகள், கூறுகள், அச்சுத் தூரங்கள், ஆய எண்கள்
Ellipse	—	நீள் வளையம், நீள் வட்டம்
Gradient	—	சாய்வு வீதம், சரிவு
Hyperbola	—	அதிபர வளைவு
Rectangular hyperbola	—	செவ்வக அதிபர வளைவு
Inclination	—	சாய்வு
Ordinate	—	நிலைத்தூரம்
Parabola	—	பர வளைவு
Parallel	—	இணையான, ஒருபோகு
Perpendicular	—	செங்குத்தான
Radius	—	ஆரம்
Slope	—	சரிவு அல்லது சாய்வு வீதம்
Straight line	—	நேர்கோடு

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

சென்னை 600031

★

தமிழில் பயில்பவர்க்குக் கல்லூரிப் பாடநூல்கள்
(Tamil Medium Books for Colleges)

1975 ஏப்ரல் வரை 650 நூல்கள் வெளியிடப்பட்டுள்ளன

★

மேலும் விரைவில் வெளிவருபவை

பொறியியல்	—	39 நூல்கள்
சட்டம்	—	17 ,,
மருத்துவம்	—	18 ,,
இயற்பியல்	—	23 ,,
வேதியியல்	—	20 ,,
தாவரவியல்	—	13 ,,
விலங்கியல்	—	14 ,,
கணிதம்	—	17 ,,
வணிகவியல்	—	37 ,,
பொருளாதாரம்	—	21 ,,
புவியியல்	—	11 ,,
வரலாறு	—	29 ,,
மனையியல்	—	1 ,,
தத்துவம்	—	4 ,,
உளவியல்	—	8 ,,
புள்ளியியல்	—	8 ,,
கல்வி	—	14 ,,
நிலப்பொதியியல்	—	6 ,,
அரசியல்	—	19 ,,

கிடைக்குமிடம் :

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனக் கிடங்கு
(கல்லூரிக் கல்வி இயக்குநர் அலுவலகச் சுற்றுக்குள்)
கல்லூரிச் சாலை, நுங்கம்பாக்கம்,
சென்னை—600006

கல்லூரிப் பாடநூல்களுக்கு 20% கழிவு வழங்கப்படும்