அலைகள்.

- பாலகிருஷ்ணன் (டி ஆர்)

அலைகள்

(Theory of Waves)

தெ. ரா. பாலகிருஷ்ணன்

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

த. பா. நி. (க.வெ.) வரிசை எண்—396

அலைகள்

ஆசிரியர்

டி. ஆர். பாலகிருஷ்ணன், எம்.எஸ்ஸி.,
துணைப் பேராசிரியர்,
கணிதத்துறை,
அரசினர் கலைக் கல்லூரி,
கோயம்புத்தூர்.

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

First Edition — December, 1972

T.N.T.B.S. (C.P.) No. 396

© Tamil Nadu Text Book Society

WAVES

T. R. BALAKRISHNAN

Price Rs. 7-25

'Published by the Tamil Nadu Text Book Society under the Centrally Sponsored Scheme of Production of books and literature in regional languages at the University level, of the Government of India in the Ministry of Education and Social Welfare (Department of Culture), New Delhi.'

Printed by
V. P. S. Printers,
Madras-5.

அணிந்துரை

திரு. இரா. நெடுஞ்செழியன்

(தமிழகக் கல்வி - உள்ளாட்சித்துறை அமைச்சர்)

தமிழைக் கல்லூரிக் கல்வி மொழியாக ஆக்கிப் பன்னிரண்டாண்டுகள் ஆகிவிட்டன. குறிப்பிட்ட சில கல்லூரிகளில் பி.ஏ. வகுப்பு மாணவர்கள் தங்கள் பாடங்கள் அனைத்தையும் தமிழிலேயே கற்றுவந்தனர். 1968ஆம் ஆண்டின் தொடக்கத்தில் புகுமுக வகுப்பிலும் (P.U.C.), 1969ஆம் ஆண்டிலிருந்து பட்டப் படிப்பு வகுப்புகளிலும் அறிவியல் பாடங்களையும் தமிழிலேயே கற்பிக்க ஏற்பாடு செய்துள்ளோம். தமிழிலேயே கற்பிப்போம் என முன்வந்துள்ள கல்லூரி ஆசிரியர்களின் ஊக்கம், பிற பல துறைகளிலும் தொண்டு செய்வோர் இதற்கெனத் தந்த உழைப்பு, தங்கள் சிறப்புத் துறைகளில் நூல்கள் எழுதித் தர முன்வந்த நூலாசிரியர்கள் தொண்டுணர்ச்சி இவற்றின் காரணமாக இத் திட்டம் நம்மிடையே மகிழ்ச்சியும் மன நிறைவும் தரத்தக்க வகையில் நடைபெற்றுவருகிறது. இவ்வகையில், கல்லூரிப் பேராசிரியர்கள் கலை, அறிவியல் பாடங்களை மாணவர்க்குத் தமிழிலேயே பயிற்றுவிப்பதற்குத் தேவையான பயிற்சியைப் பெறுவதற்கு மதுரைப் பல்கலைக்கழகம் ஆண்டுதோறும் எடுத்துவரும் பெரு முயற்சியைக் குறிப்பிட்டுச் சொல்லவேண்டும்.

பல துறைகளில் பணிபுரியும் பேராசிரியர்கள் எத்தனையோ நெருக்கடிகளுக்கிடையே குறுகிய காலத்தில் அரிய முறையில் நூல்கள் எழுதித் தந்துள்ளனர்.

வரலாறு, அரசியல், உளவியல், பொருளாதாரம், தத்துவம், புவியியல், புவியமைப்பியல், மனையியல், கணிதம், இயற்பியல், வேதியியல், உயிரியல், வானியல், புள்ளியியல், விலங்கியல், தாவரவியல், பொறியியல் ஆகிய எல்லாத் துறைகளிலும் தனி நூல்கள், மொழிபெயர்ப்பு நூல்கள் என்ற இரு வகையிலும் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம் வெளியிட்டு வருகிறது.

இவற்றுள் ஒன்றான 'அலைகள்' என்ற இந்நூல் தமிழ் நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனத்தின் *396*ஆவது வெளியீடாகும். இதுவரை *431* நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன. இந் நூல் மைய அரசு கல்வி, சமூக நல அமைச்சகத்தின் மாநில மொழியில் பல்கலைக்கழக நூல்கள் வெளியிடும் திட்டத்தின்கீழ் வெளியிடப் படுகிறது.

உழைப்பின் வாரா உறுதிகள் இல்லை; ஆதலின், உழைத்து வெற்றி காண்போம். தமிழைப் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாணவர்களிடையே சிறந்த இடம் பெறவேண்டும். அதுவே தமிழன்னையின் குறிக்கோளுமாகும். தமிழ்நாட்டுப் பல்கலைக் கழகங்களின் பல்வகை உதவிகளுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் நம் மனம் கலந்த நன்றி உரியதாகுக.

இரா. நெடுஞ்செழியன்

முன்னுரை

விஞ்ஞான வளர்ச்சி, வரையறைக்குட்பட்ட எல்லைகளுக்கு அப்பாற்பட்டது. மனிதன் இன்று விண்ணுலகைக் கடந்து சந்திரமண்டலத்தில் உலாவும் ஆற்றலைப் பெற்றுள்ளான் எனின் இதன் முக்கிய காரணம் பன்னாட்டுப் பேரறிஞர்கள் செய்துவரும் சுயநலமற்ற விஞ்ஞானத் தொண்டுதான். ஒரு மாணவனை வருங்கால விஞ்ஞானியாக உருவாக்க வேண்டுமானால் அதற்குண்டான சூழ்நிலையை இளமையிலேயே அவனுக்கு ஏற்படுத்த வேண்டும். முக்கியமாக இளமைக் கல்வியை விஞ்ஞான வளர்ச்சிக்கு உகந்தவாறு அமைக்க வேண்டும். கல்வியும் மொழியும் இரட்டையர்கள். தாய் மொழியில் கல்வியைப் புகட்டுவது அறிவாற்றலைத் தூண்டுவதுடன் விஞ்ஞான நியதிகளை எளிதாகப் புரிந்துகொள்ளுவதற்கும் பயன்படும். தற்பொழுது, பள்ளிப் படிப்பிற்குண்டான பொதுவிஞ்ஞானப் பாடப் புத்தகங்கள் தமிழில் பல இருப்பினும் கல்லூரிப் படிப்பிற்குண்டான தனிப்பட்ட விஞ்ஞானப் பகுதிகளைத் தெளிவூட்டும் புத்தகங்கள் பெருமிதமாக இல்லை.

'பிறநாட்டு நல்லறிஞர் சாத்திரங்கள்
தமிழ்மொழியிற் பெயர்த்தல் வேண்டும்;
இறவாத புகழுடைய புதுநூல்கள்
தமிழ்மொழியில் இயற்றல் வேண்டும்'

என்று பாரதியார் பாடினாற்போல, நமது அரசாங்கத்தாரே முன்வந்து தமிழில் கல்லூரிப் படிப்பிற்கான விஞ்ஞானப் பாடப் புத்தகங்களை அச்சிட்டு வெளியிடும் இச் சீரிய பணியில் இறங்கியிருப்பது மிகவும் போற்றுதற்குரியதாகும். இத் திட்டத்தின்கீழ் உருவானதுதான் இப் பதிப்பு.

கணிதவியலை ஒரு பெருங்கடலுடன் ஒப்பிடலாம். கடலில் வாழும் உயிரினங்கள் பல இருப்பினும் அவைகளுக்கு ஆதாரமாக விளங்கும் கடல்நீரைப் போல, மரத்திலிருந்து தரையை நோக்கி விழும் பழத்தின் தன்மையிலிருந்து விண்வெளியில் இயங்கும் மண்டலங்களின் அசைவுகள் வரை பல தத்துவங்

களுக்குக் கணிதம் ஆதாரமாக இருக்கின்றது. விஞ்ஞான சாத்திரங்களை நிலைபெறச் செய்வது கணிதமேயாகும். தற்பொழுது கணிதத்துடன் தொடர்பற்ற விஞ்ஞான வளர்ச்சி ஒன்றுமேயில்லை என்று சொல்லிவிடலாம். இப் புத்தகம் அலைகளின் தத்துவத்தைக் கணிதத்தின் வாயிலாகத் தெளிவு படுத்துகின்றது. இசைக் கருவிகளின் கம்பிகளில் ஏற்படுத்தப் படும் இயக்கமானது ஒலியலைகளாக உருவாகி இசையாக வெளிப்படுகின்றது ; நீர்நிலையில் விழும் ஒரு சிறு கல் சிற்றலை களை உண்டுபண்ணுகின்றது. இதுபோல, ஒவ்வோர் ஊடகத் தின் அதிர்வியக்கத்தின்பொழுது, அதன் உருவம், அடர்த்தி, இழுவிசை, அழுத்தம் போன்ற பல பண்புகளையொட்டி அலைகள் உண்டாகின்றன. இவ்வாறு உருவாகும் அலைகள், ஊடகத்தில் நிரந்தரமான இடமாற்றத்தை ஏற்படுத்தாமல் ஆற்றலைத் தொலைவிடங்களுக்கு எடுத்துச் செல்கின்றன. இத்தகைய பண்புகளைக் கணித அடிப்படையில் இப் புத்தகம் எடுத்துக் கூறுகின்றது.

இப்புத்தகத்தில் பலதரப்பட்ட ஊடகங்களில் நிகழும் அலைகளையும், அவற்றின் அடிப்படைக் கொள்கைகளையும் ஒன்பது அத்தியாயங்களில் விரிவாக விளக்கப்பட்டிருக் கின்றன. எல்லாவித ஊடகங்களிலும் நிகழும் அலைகள்

$\triangle^2\phi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}$ என்ற திட்டவடிவ அலையோட்டச் சமன்பாட்டை

யொட்டி நிகழ்கின்றன. நிற்கும் அலைகளுக்கும், முன்னேறும் அலைகளுக்குமான இச்சமன்பாட்டின் இருவகைப்பட்ட தீர்வுகள் அறிமுகப் பகுதியில் தெளிவாக்கப்பட்டிருக்கின்றன. கம்பி, சவ்வு போன்ற ஊடகங்களில் நிகழும் குறுக்கு அலைகள், கோல் அல்லது சுருள்வில்லில் எழும் நீளப்பாங்கு அலைகள் போன்ற வகைகள் அடுத்துள்ள மூன்று அத்தியாயங்களில் விவரிக்கப்பட்டிருக்கின்றன. அத்தியாயம் ஐந்து கடலோர அலைகளையும், அத்தியாயம் ஆறு மேற்பரப்பு அலைகள் மற்றும் இரு திரவங்களில் நிகழும் அலைகளையும் முறையே விளக்கு கின்றன. அடுத்த இரு அத்தியாயங்களில் ஒலியலைகளும் மின்காந்த அலைகளும் முறையே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

ஆர்வமுள்ள மாணவர்களுக்கு மேலும் அலைகளின் கொள்கைகளைப் பற்றித் தெரிந்துகொள்ளுவதற்கு உதவியாக இருக்குமாறு, முக்கியமான நூல்களின் பட்டியல் இறுதியில் தொகுத்துக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

முதுகலைப் படிப்புக் கல்வி என்பது, வகுப்பறையில் ஆசிரியரிடமிருந்து கற்றுக்கொள்வதைப் போலப் பன்மடங்கு அதிகமாகப் பல நூல்களைப் படித்து அறிந்துகொள்ள வேண்டிய கட்டம். இவ் வகுப்பிற்கென்று ஒரு தனிப்பட்ட நூலை எழுதுவது என்பது மிகக் கடினம். இக் குறை இந் நூலிலும் உண்டென்பதை ஆசிரியர் உணர்ந்திருக்கிறார். இருப்பினும்,

'எனைத்தானும் நல்லவை கேட்க அனைத்தானும்
ஆன்ற பெருமை தரும்'

எனும் வள்ளுவப் பெருந்தகையின் வாக்கின்படி, தமிழில் விஞ்ஞானக் கல்வியறிவை வளர்க்க உதவியாக இருக்கும் என்ற நன்னம்பிக்கையில் இப் புத்தகம் எழுதப்பட்டிருக்கிறது. இதில் அடங்கிய பொருள் அறிவாற்றலை வளர்க்க உதவுமே யானால் அது விஞ்ஞான வளர்ச்சிக்கு அடிகோலியுள்ள பல விஞ்ஞானிகளையும், இதிலுள்ள குறைபாடுகள் என்னையும் சாரும்.

T. R. பாலகிருஷ்ணன்

பொருளடக்கம்

		பக்கம்
1.	அலை ஓட்டத்தின் சமன்பாடு	1
2.	கம்பியில் அலைகள்	42
3.	சவ்வில் அலைகள்	103
4.	நீளப்பாங்கு அலைகள்	120
5.	திரவங்களில் அலைகள்—1	137
6.	திரவங்களில் அலைகள்—2	162
7.	ஒலி அலைகள்	221
8.	மின்காந்த அலைகள்	252
9.	பொதுக் குணங்கள்	301
	பார்வைக்குரிய புத்தகங்கள்	325
	கலைச்சொற்கள்	329

1. அலை ஓட்டத்தின் சமன்பாடு

(Equation of Wave Motion)

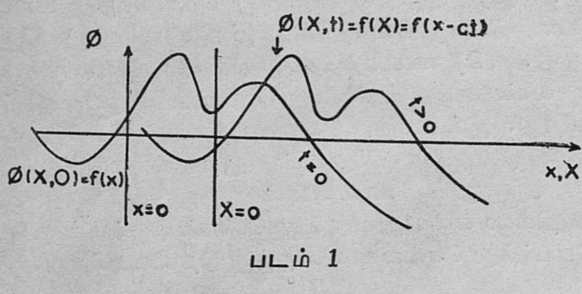
§ 1.1. *அறிமுகம்:* அலை ஓட்டம் என்பது இயற்கையில் நிகழும் மிக அடிப்படையான நிகழ்ச்சிகளில் ஒன்றாகும். அலைகள் யாவை என்று நாம் பொதுவாக அறிவோம். உதாரணமாக, கல் எறிவதால் குளத்தின் நீர்ப் பரப்பில் வட்ட நீர் அலைகள் உண்டாகின்றன ; வீணை அல்லது வயலின் இசைக்கப்படும் பொழுது கம்பிகள் அதிர்ந்து இனிய ஓசை பரவுகிறது ; கம்பி இல்லா செய்தி நிலையத்திலிருந்து செய்திகள் ஒலி பரப்பப்படும் போது மின் அலைகள் ஈதர் (Ether) வழியே செல்லுகின்றன ; அலை ஓட்டம் நிகழ்வதை இவைகள் தெளிவாக விளக்கு கின்றன. இவைகள் அனைத்திற்கும் பொதுவாக இரு பண்புகள் உள்ளன. (1) ஆற்றல் (Energy) தொலைவு இடங்களுக்கு, அளவுள்ள திசை வேகத்தில் (Finite velocity) செலுத்தப் படுகின்றது. (2) ஊடகத்தில் (Medium) நிலையான மாறுதல் ஏற்படா வண்ணம், கிளர்ச்சி (Disturbance) ஊடகத்தின் வழி செல்லுகிறது. இவ்வாறு, வெளிப்புறமாக விரிந்து செல்லும் சிற்றலைகள் (Ripples) தம்முடன் ஆற்றலை எடுத்துச் செல்லு கின்றன ; ஆனாலும் ஊடகமான தண்ணீர் அலைகளுடன் செல்லுவதில்லை என்பது மிதந்து கொண்டிருக்கும் ஒரு தக்கை இடம் பெயர்ந்து செல்லாததிலிருந்து தெளிவாகிறது.

இவ்விரு பொதுவான பண்புகளால் காற்று, இழுக்கப் பட்ட கம்பி, திரவம், மின் கம்பி, ஈதர் அல்லது வேறு எந்த ஊடகத்தின் வழியும் செல்லும் அலைகள் அனைத்தும்

$$\Delta^2 \varphi \equiv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \qquad (1)$$

என்ற அலை ஓட்டத்தின் சமன்பாட்டினுல் வகைபடுத்தப்படுகின்றன என்பதை பின்னர் விரிவாகக் காணலாம். இச் சமன்பாட்டைத் தக்க எல்லைக் கட்டுப்பாடுகளின் (Boundary Condition) உதவியுடன் தீர்வு (Solution) கண்டு அந்த தீர்வுகளின் சரியான உட்பொருளை வெளிப்படுத்த வேண்டும். இங்கு ϕ என்பது கிளர்ச்சி; t என்பது நேரம்; x, y, z என்பன தெக்காட்டின் ஆயக்கூறுகள் (Cartesian Coordinates); c என்பது திசைவேகத்தின் பரிமாணம் (Dimension) கொண்ட மாறிலி (Constant) இவற்றைக் குறிக்கின்றன.

§ 1.2. *முன்னேறும் அலைகள்* (Progressive Waves): φ என்ற கிளர்ச்சி, c வேகத்தில் x அச்சின் நேர்த்திசையில் (Positive direction) செலுத்தப்படுகிறது என்போம். இக் கிளர்ச்சி φ எதைக் குறிக்கின்றது என்று வெளிப்படையாக இங்கு கூறத் தெவையில்லை. அது நீர் அலைகளின் உயரத்தையோ அல்லது மாறுபடும் மின்களத்தின் (Electric field) பரும அளவையோ (Magnitude) குறிக்கலாம். கிளர்ச்சி நகர்ந்து செல்லுவதால் φ ஆனது. x, t இவைகளின் சார்பாக இருக்க வேண்டும். எனவே $t = o$ என்ற நேரத்தில் φ ஆனது x-ன் சார்பாகும். இதை $f(x)$ என்போம். $f(x)$ என்பது அலைமுகப்பு (Wave profile) எனப்படும். $t = o$ என்ற நேரத்தில், x-க்கு எதிராகக் கிளர்ச்சி φ யை படம் பிடிக்க, $\varphi = f(x)$ என்ற வளைவரை (Curve) கிடைக்கும். அலைகள் வடிவம் (Shape) மாருமல் செலுத்தப்படுகின்றன என்று கொள்வோம்.



படம் 1

இவ்வாறுயின் t என்ற நேரத்தில் படம் பிடித்தால் கிடைக்கும் அலைமுகப்பின் படம் $t = o$ என்ற நேரத்தில் இருந்ததைப் போன்றே இருக்கும். ஆனுல் அலை முகப்பு x அச்சின் நேர்த் திசையில் ct தொலைவு சென்று இருக்கும். $x = ct$ என்ற புள்ளியில் ஆதியை (Origin) எடுத்துக் கொண்டு இந்த ஆதியிலிருந்து தொலைவுகளை Xஆல் குறித்தால் $x = X + ct$.

எனவே, இந்தப் புதிய ஆதியைப் பொருத்து t நேரத்தில் அலை முகப்பின் சமன்பாடு $\varphi = f(\times)$ எனப்படும். இதிலிருந்து நிலையான மூல ஆதியை (Original fixed in Origin) பொருத்து.

$$\varphi = f(x-ct) \qquad (1)$$

இதுவே அலை வடிவம் மாறுமல் x அச்சின் நேர்த்திசையில் மாறு வேகம் c-யுடன் செலுத்தப்படும் அலையின் மிகப் பொதுவான சமன்பாடு. இதே போன்று மாறு அலை வடிவத்தோடு x அச்சின் எதிர்த் திசையில் மாறு வேகம் c-யுடன் செலுத்தப்படும் அலையின் மிகப் பொதுவான சமன்பாடு, c-யின் குறியை 1-ல் மாற்றக் கிடைக்கிறது. அதாவது

$$\varphi = f(x+ct) \qquad (2)$$

§ **1.3.** *தள அலைகள்* (Plane Waves): $\varphi = f\ (x - ct)$ என்பது ஒரு பரிமாணத்தில் உள்ள அலைகளின் சமன்பாடு ஆகும். இதனை மூன்று பரிமாணத்தில் உள்ள தள அலைகளுக்கும் பொருந்துமாறு பொதுப்படுத்தலாம். செலுத்தப்படும் திசைக்குச் செங்குத்தான ஒரு தளத்தினது எல்லாப் புள்ளிகளின் கிளர்ச்சியும் ஒரு மாறிலியெனில் கிடைப்பது ***தள அலையாகும்.*** இத்தகைய தளம் அலை தளம் (Wave front) எனப்படும். அலை தளம் அதற்குச் செங்குத்து திசையில் திசை வேகம் c-யுடன் செல்கின்றது. செல்லும் திசை $x : y : z : = l : m : n$ என்றால் அலைதளத்தின் திசைக் கொசைன்கள் (Direction Cosines), (l, m, n) ஆகும். ஆகவே அலைதளத்தின் சமன்பாடு

$$lx+my+nz = \text{மாறிலி} \qquad (3)$$

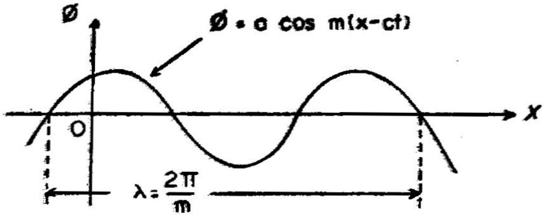
இனி எந்த நேரம் tயிலும் (3)ஐ சமன் செய்யும் x, y, z-ன் மதிப்புகளுக்கு φ ஒரு மாறிலி. எனவே,

$$\varphi = f(lx+my+nz-ct) \qquad (4)$$

என்ற சமன்பாடு C-திசை வேகத்துடன், மாறு வடிவத்தோடு (l, m, n) திசையில் செல்லும் தள அலையினை (4) குறிக்கும்.

§ **1.4.** *இசை அலைகள்* (Harmonic Waves): இசை அலை ஒரு பரிமாணத்து அலையின் ஒரு எளிய உதாரணமாகும். இங்கு அலை முகப்பு ஒரு Sine அல்லது Cosine வளை வரையாகும். $t = o$ என்ற நேரத்தில், அலை முகப்பின் வளை வரை (Curve) $\varphi_{t=o} = a \cos mx$ என்றால், t என்ற நேரத்தில்

$$\varphi = a \cos m\,(x - ct) \qquad (5)$$



படம் 2

கிளர்ச்சி φ யின் மீப் பெருமதிப்பு (Maximum) a, *வீச்சு* (Amplitude) எனப்படும். அலை முகப்பு $\frac{2\pi}{m}$ என்ற தொலைவிற்கு ஒரு முறை வரும் வடிவொழுங்குடையது. இந்த தூரம் $\frac{2\pi}{m}$, *அலை நீளம்* (Wave length) λ எனப்படும்.

$$\text{எனவே } \lambda = \frac{2\pi}{m} \qquad (6)$$

(5)-லிருந்து,

$$\therefore \varphi = a \cos \frac{2\pi}{\lambda}(x - ct) \qquad (7)$$

ஒரு முழு அலை ஒரு புள்ளியைக் கடந்து செல்ல எடுத்துக் கொள்ளும் நேரம் *காலக் கூறு* (Period) τ எனப்படும். ஆகவே, t யின் மதிப்பை C வினால் கூட்ட, $\frac{2\pi}{\lambda}(x - ct)$ என்பது முழு சுழற்சியான மதிப்புகளைப் கொளல் வேண்டும்.

$$\frac{2\pi c\, \tau}{\lambda} = 2\pi$$

அல்லது

$$\tau = \frac{\lambda}{c} \qquad (8)$$

ஒரு அலையின் *நிகழ் வெண்* n (Frequency) என்பது ஒரும காலத்தில் (Unit time) நிலையான புள்ளி வழியே செல்லும் அலை களின் எண்ணிக்கையாகும்.

$$\therefore n=\frac{1}{\tau} = \frac{c}{\lambda} \quad (9)$$

எனவே

$$c = n \lambda \quad (10)$$

ஒரும தூரத்தில் (Unit distance) உள்ள அலைகளின் எண்ணிக்கை *அலையெண்* k (Wave number) எனப்படும்.

$$\therefore k = \frac{1}{\lambda} \quad (11)$$

$\therefore$ (7), (10) மற்றும் 11-லிருந்து

$$\varphi = a \cos 2\pi \, (kx - nt) \quad (12)$$

இனி, $\varphi_1 = a \cos 2\pi \, (kx - nt)$

$$\varphi_2 = a \cos \, [2\pi \, (kx - nt) + t]$$

என்ற இரு வடிவொத்த (Similar) அலைகளை ஒப்பிடுவோம். φ_2, φ_1 லிருந்து $\frac{t}{2\pi k}$ தொலைவு தள்ளியிருத்தலைத் தவிர மற்றவிதத்தில் இவ்விரண்டும் ஒரே வடிவுடையது. t, φ_1 ஐப் பொருத்த φ_2 வின் மாறுபாட்டுபடி (Phase) எனப்படும் $t = 2\pi, 4\pi$...... என்ருல் இடப் பெயர்ச்சி (Displacement) ஒன்று, இரண்டு......... அலை நீளங்களாகும் ; இவ்வாராயின் அலைகள் *உள் மாறுபாட்டில்* (In phase) உள்ளன என்போம். $t = \pi, 3\pi$ .... என்ருல் இரு அலைகளும் *வெளிமாறுபாட்டில்* (Out of phase) உள்ளன என்போம். இசை அலைகளைப் பொறுத்து வீச்சு, அலை நீளம், காலக் கூறு, நிகழ்வெண், அலையெண் - வரை இலக்கணம் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. ஆனால் ஒழுங்கான முறையில் அலை முகப்பு மாருமல் திரும்பித் திரும்பிச் செல்லும் எவ்வித அலைகளுக்கும் மேற் கூறிய இலக்கணங்கள் பொருந்தும்.

§ 1. 5 *அலை ஓட்டத்தின் சமன்பாடு :*

$$\Delta^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (1)$$

என்று முன்பு கூறினோம். மாருத்திசை வேகம் கொண்ட அலைகள் அனைத்தும் இச்சமன்பாட்டினுல் எடுத்துரைக்கப் படுகின்றன. எனவே, இது கணிதத்தில் மிக முக்கியமான சமன்பாடுகளில் ஒன்ருகும். வெவ்வேறு விதமான அலைகளைப் பற்றி நாம் பின்னர் விரிவாக ஆராயும்பொழுது இச் சமன்பாடு

ஒவ்வொன்றிலும் வருவதைக் காணலாம். ஆகவே, இப்பகுதியில் இச்சமன்பாட்டின் தீர்வுகளைக் கண்டு, தேவையான இடங்களில் பின்னர் இத்தீர்வுகளைப் பயன்படுத்திக் கொள்வோம். முதலில் இவ்வடிப்படைச் சமன் பாட்டின் ஒரு முக்கியமான பண்பைக் காண்போம்.

§ *1. 6* **ஒருங்கிணைக்கும் கோட்பாடு** (Principle of Super position): அலை ஓட்டத்தின் சமன்பாடு ஒருபடித்தானது (Linear). அதாவது ϕம் அதன் வகைக்கெழுக்களும் (Differential Coefficients) ஒருபடி (First degree) யில்தான் அமைகின்றன. அதன் விளைவாக ϕ_1, மற்றும் ϕ_2 என்பன Iன் இரு தீர்வுகள் என்றால்,

$$\Delta^2\varphi_1 = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2}$$

$$\Delta^2\varphi_2 = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial t^2}$$

ஆகவே, a_1, a_2 இரு விதிக்கட்டில்லா (Arbitrary) மாறிலி எனில்

$$a_1\,\Delta^2\varphi_1 + a_2\,\Delta^2\varphi_2 = \frac{a_1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2} + \frac{a_2}{c^2}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial t^2}$$

$$\Delta^2(a_1\varphi_1) + \Delta^2(a_2\varphi_2) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2(a_1\varphi_1)}{\partial t^2} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2(a_2\varphi_2)}{\partial t^2}$$

$$\therefore\ \Delta^2(a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2)$$

எனவே $a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2$ என்பதும் Iன் தீர்வாகும். இதன் மூலம் ஒருபடித்தான சமன்பாட்டின் தனித் தீர்வுகளின் ஒரு படிச் சேர்க்கையும் (Linear Combination) அதன் தீர்வாகும் என்று அறிகிறோம். இத்தத்துவமே ஒருங்கிணைக்கும் கோட்பாடு எனப்படும்.

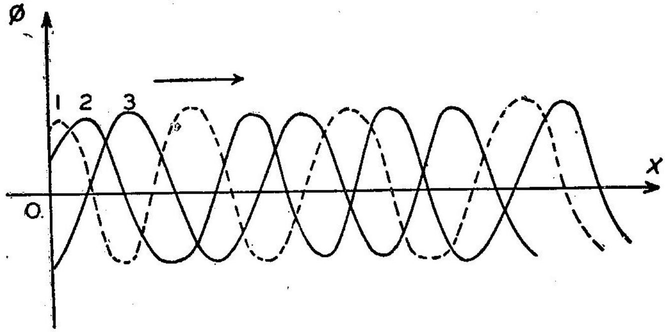
இவ்வொருங்கிணைக்கும் கோட்பாட்டின் பின்வரும் எடுத்துக் காட்டு மிக்கப் பயனுள்ளதாகும். ஒரே வீச்சைக் கொண்டு ஒரே திசை வேகத்துடன் நேர் எதிரான திசையில் செல்லும் இரு இசை அலைகளின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்போம்.

$\varphi_1 = a\cos 2\pi\,(kx - nt)$, (இது நேர்த் திசையில் செல்லும் அலை) (13)

$\varphi_2 = a\cos 2\pi\,(kx + nt)$ (இது எதிர் திசையில் செல்லும் அலை) (14)

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$$
$$= a \cos 2\pi\,(kx - nt) + a \cos 2\pi\,(kx + nt)$$
$$= 2a \cos 2\pi\, kx \cos 2\pi\, nt \qquad (15)$$

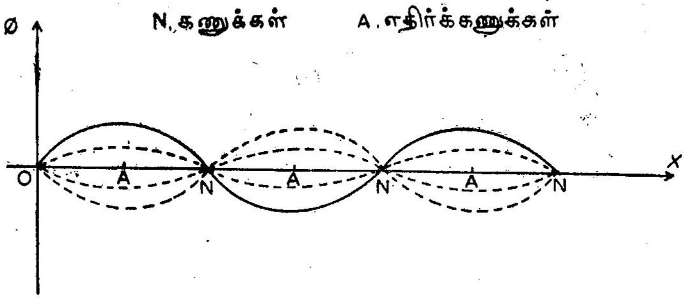
(13), (14) என்பன முன்னேறும் அலைகள் எனப்படும்.



படம் 3

முன்னேறும் அலைகள்

இதற்கு மாறாக (15) நிற்கும் அலை (Stationary wave) எனப்படும். இப் பெயரே, இவ்வித அலைகளின் அலை முகப்பு முன்னே நகர்ந்து செல்லுவதில்லை என்பதைத் தெளிவாக்குகிறது. $\cos 2\pi\, k\, x = o$ என்று இருக்கும் புள்ளிகளில், அதாவது $x = \pm \frac{1}{4k}$, $\pm \frac{3}{4k}$, $\pm \frac{5}{4k}$ என்ற புள்ளிகளில் φ மறைகிறது. இப்புள்ளிகளுக்கு கணுக்கள் (Nodes) அல்லது *அதிர்வில் புள்ளிகள்* என்று பெயர்.



படம் 4

நிற்கும் அலைகள்

A—கணுக்கள் ; N—எதிர் கணுக்கள்

φ யின் மீப்பெரும் மதிப்பு, $\cos 2\pi kx$ மீப்பெரும் மதிப்பு பெறும் புள்ளிகளில் அமையும். அதாவது இரு அடுத்தடுத்த கணுக்களின் நடுப் புள்ளிகளில் φ மீப்பெரும் மதிப்பை அடைகிறது. இப்புள்ளிகள் எதிர்க்கணுக்கள் (anti-nodes) எனப்படும். இரு அடுத்தடுத்த கணுக்களுக்கோ அல்லது எதிர் கணுக்களுக்கோ இடையே உள்ள தொலைவு $\frac{1}{2k} = \frac{\lambda}{2}$; அதாவது பாதி அலை நீளமாகும்.

(4)-கினைப் போன்ற வடிவொத்த இசை அலைகளிலிருந்து மூன்று பரிமாணத்தில் நிற்கும் அலைகளைக் காணலாம்.

$$\varphi = a \cos \frac{2\pi}{\lambda}(lx+my+nz-ct) + a \cos \frac{2\pi}{\lambda}(lx+my+nz+ct)$$

$$= 2a \cos \frac{2\pi}{\lambda}(lx+my+nz) \cos \frac{2\pi}{\lambda} ct$$

இங்கு φ ஆனது $lx + my + nz = \pm \frac{\lambda}{4}, \pm \frac{3\lambda}{4}$ என்ற தளங்களில் எப்போதும் மறைகிறது. இத் தளங்களுக்கு கணு தளங்கள் (Nodal planes) எனப் பெயர்.

§ 1.7. *தீர்வுகள்* (Solutions): அலை ஓட்டச் சமன்பாட்டின் சிறப்புத் தீர்வுகளை இங்கு காண்போம். பின்வரும் அத்தியாயங்களில் குறிப்பிட்ட வினாவிற்குத் தகுந்த தீர்வை எடுத்தாள இவைகள் பயன்படும். தீர்வுகளை முக்கியமான இரு வகைகளாகப் பிரிக்கலாம். (1) முன்னேறும் அலைகளுக்கானவை. (2) நிற்கும் அலைகளுக்கானவை.

§ 1.8. முன்னேறும் அலைகளுக்கான தீர்வுகளை ஒன்று, இரண்டு, மூன்று பரிமாணங்களுக்கு டி'ஆலம்பர்டின் (D'Alembertin) முறையில் காண்போம்.

ஒரு பரிமாணத்தில் அலை ஓட்டச் சமன்பாடு

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \qquad (16)$$

$u = x - ct$; $v = x + ct$ என்ற புது மாறிகளைக் கொண்டு, (16)ஐ மாற்றம் (Transformation) செய்வோம்.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot 1 + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot 1 \qquad \left\{ \because \frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 1 \right\}$$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial u} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial v} \right]$$

$$= \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v \partial u} \frac{\partial v}{\partial x} \right]$$

$$+ \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial x} \right] \qquad (17)$$

$$= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} \left[\because \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v \partial u} \right]$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial u} (-c) + \frac{\partial \varphi}{\partial v} (c)$$

$$= -c \frac{\partial \varphi}{\partial u} + c \frac{\partial \varphi}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left[-c \frac{\partial \varphi}{\partial u} + c \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right]$$

$$-c \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v \partial u} \frac{\partial v}{\partial t} \right]$$

$$+c^2 \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} \right]$$

$$= c^2 \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} - c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v \partial u} \right] + \left[-c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} + c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} \right]$$

$$= c^2 \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} \right] \quad (18)$$

(16). (17), (18)களிலிருந்து

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} = O$$

அதாவது $\frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial v} \right] = O$

தொகை காண, $\frac{\partial \varphi}{\partial v} = g_1 (v)$

மீண்டும் தொகை காண. $\varphi = g(v) + C$, இங்கு C, vயின் சார் பற்றதாக மட்டிலும் இருக்க வேண்டும். எனவே,

$$C = f(u) \text{ எனலாம்}$$

$$\varphi = f(u) + g(v)$$

$$= f(x - ct) + g(x + ct) \quad (19)$$

f, g அலைகள் எதிர் எதிர் திசைகளில், C திசை வேகத்துடன் செல்கின்றன.

இரு பரிமாணத்தில் அலை ஓட்டச் சமன்பாடு :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

இங்கு, $u = lx + my - ct$

$$v = lx + my + ct, \; l^2 + m^2 = 1$$

எனும்படி மாறிகளை மாற்றி 'டி' ஆலம்பர்டின் முறைப்படி முன் போல் தீர்வுகாண,

$$\varphi = f(lx + my - ct) + g(lx + my + ct), \; l^2 + m^9 = 1 \quad (20)$$

எனக் கிடைக்கும்.

மூன்று பரிமாணத்தில் அலை ஓட்டச் சமன்பாடு

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2 t} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

$$u = lx+my+nz-ct$$
$$v = lx+my+nz+ct,\ l^2+m^2+n^2=1 \qquad (1)$$

எனும் படி மாறிகளை மாற்றி டி'ஆலம்பர்டின் முறைப்படி தீர்வு காண

$$\varphi + f(lx+my+nz-ct)+g(lx+my+nz+ct)$$
$$l^2+m^2+n^2=1 \qquad (21)$$

எனக் கிடைக்கும்.

பயிற்சி : இரண்டு, மூன்று பரிமாணத்திற்குரிய முன்னேறும் அலை வகைத் தீர்வுகளை டி'ஆலம்பர்டின் முறைப்படி வகையுடன் செய்து காண்க.

§ **1.9** *நிற்கும் அலைகளுக்கான தீர்வுகள் :* ஒன்று, இரண்டு, மூன்று பரிமாணங்களுக்கு மாறிகளைப் பிரித்தல் (Separation of variables) முறைப்படிக் காணலாம்.

ஒரு பரிமாணத்து அலை ஓட்டச் சமன்பாடு

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} \qquad (16)$$

$\varphi = X(x)\ T(t)$ என்ற தீர்வை முயற்சி செய்வோம். X x-ன் சார்பு, T t-யின் சார்பு. இவ்விரு சார்புகளின் வடிவத்தை நாம் காண வேண்டும். φயின் இம்மதிப்பை வகைக்கெழுச் சமன்பாடு (16)-ல் பிரதியீடு செய்ய,

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}\,T = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}\,X$$

இருபுறமும் $X\ T$ ஆல் வகுக்க

$$\frac{1}{X}X'' = \frac{1}{c^2}\frac{T''}{T} \text{ என வரும்.} \qquad (22)$$

இதில் இடப்புறம் x-ன் சார்பு, வலப்புறம் tயின் சார்பு. ஆனால் xம், tயும் ஒன்றுக்கொன்று சார்பற்றவை. எனவே, இருபுறமும் சமமாயிருத்தலின் இருபுறமும் ஒரு மாறிலிக்குச் சமமாயிருத்தல் வேண்டும். இம் மாறிலியை $-p^2$ என்போம்.

$$\therefore \frac{X''}{X} = -p^2 ; \quad \frac{T''}{T} = -c^2 p^2$$

$$\therefore X'' + p^2 X = O$$

$$\therefore X = A \cos px + B \sin px = \frac{\cos}{\sin} px \qquad (23)$$

இதே போன்று $T \equiv \frac{\cos}{\sin} pct$ (24)

$\varphi = \frac{\cos}{\sin} px \frac{\cos}{\sin} pct$ என்பது தீர்வாகும். (25)

அதாவது $\varphi = (A \cos px + B \sin px)(C \cos pct + D \sin pct)$ என்பதை இது குறிக்கின்றது. pயின் வெவ்வேறு பல மதிப்புகளுக்கு பல்வேறு தீர்வுகள் கிடைக்கின்றன. ஒருங்கிணைக்கும் கோட்பாட்டின்படி இத்தீர்வுகளின் ஒருபடிச் சேர்க்கையும் ஒரு தீர்வாகும்.

$-p^2$ என்ற மாறிலி, பிரித்தல் மாறிலி (Seperation Constant) என்ப்படும். x, t என்ற மாறிலிகள் சமன்பாடு (22)ன் இருபுறத்திலுமாக முற்றிலும் பிரிக்கப்பட்டிருந்ததால் இம்மாறிலியைப் புகுத்தினோம். தீர்வில் வரும் சார்புகள் இசைச் சார்புகளாக அமைய வேண்டி இப் பிரித்தல் மாறிலியின் குறியை கழிவுக் குறி (negative sign) ஆக எடுத்துக் கொண்டோம். இதற்கு மாறாக, பிரித்தல் மாறிலியை $+p^2$ என்று கொண்டால், (22) லிருந்து

$$\frac{X''}{X} = +p^2, \qquad \frac{1}{c^2}\frac{T''}{T} = p^2$$

$$X'' - p^2 X = 0$$

அதாவது $(D^2 - p^2) X = 0$

$$\therefore X = Ae^{px} + Be^{-px}$$

$$= e^{\pm px} \qquad (26)$$

இதேபோன்று $T = e^{\pm pct}$ (27)

$$\varphi = e^{\pm px} e^{\pm pct} \tag{28}$$

இது அடுக்குக் குறிச் சார்பாகும் (Exponential function). இனி முழுத்தீர்வானது (25) (28) தீர்வுகளின் உறுப்புகளைக் கொண்டிருக்கும் :

மாறிகளைப் பிரித்தல் முறை கொண்டு இரு பரிமாண அலை ஓட்டச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகளையும் காணலாம் ;

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\varphi y^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} \tag{29}$$

$$\partial = X(x)\, Y(y)\, T(t) \text{ என்க}$$

(29)-ல் பிரதியீடு செய்து, இருபுறமும் $X.Y.T$ ஆல் வகுக்க

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = \frac{1}{c^2}\frac{T''}{T} \tag{30}$$

இங்கு இடப்புறம் x, y களின் சார்பு, வலப்புறம் tயின் சார்பு. ஆனால் $x\,y$ மற்றும் t ஒன்றுக்கொன்று சார்பற்றவை. இருபுறமும் சமமாயிருத்தலின் இருபுறமும் ஒரு மாறிலிக்குச் சமமாயிருத்தல் வேண்டும் இப்பிரித்தல் மாறிலியை $-r^2$ என்போம்.

$$\therefore \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = \frac{1}{c^2}\frac{T''}{T} = -\, r^2$$

$$\therefore T'' = -\, c^2 r^2 T$$

அல்லது $T = \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\, rct$

இனி $\dfrac{X''}{X} + r^2 = -\dfrac{Y''}{Y}$

இங்கு இடப்புறம் x-ன் சார்பு, வலப்புறம் yயின் சார்பு ஆனால் x-ம், y-ம் ஒன்றுக்கொன்று சார்பற்றவை. இருபுறமும் சமமாயிருத்தலின் இருபுறமும் ஒரு மாறிலிக்குச் சமமாயிருத்தல் வேண்டும். இப் பிரித்தல் மாறிலியை $+q^2$ என்போம்.

$$\therefore \frac{X''}{X} + r^2 = \frac{-Y''}{Y} = +\, q^2$$

$$\therefore \frac{Y''}{Y} = -q^2$$

$$Y = \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\, q\,y$$

$$\frac{X''}{X} = -r^2 + q^2 = -p^2 \text{ என்க}$$

$$X = \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\, px$$

$$\varphi = \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\, px \quad \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\, qy \quad \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\, rct$$

இங்கு $p^2+q^2=r^2$ (31)

பிரித்தல் மாறிலியின் குறியை மாற்றினால் தீர்வும் மாறுபடும். உதாரணமாக, (30)-ல் பிரித்தல் மாறிலியை $+r^2$ என்று கொண்டால்

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = \frac{1}{c^2}\,\frac{T''}{T} = r^2$$

$$T = e^{\pm rct}$$

$$\frac{X''}{X} - r^2 = \frac{Y''}{Y}$$

முன் போலவே, இங்கு இரு புறமும் ஒரு மாறிலிருக்குச் சம மானவை எனக் காட்டலாம். இதை $+q^2$ என்று கொண்டால்,

$$\frac{X''}{X} - r^2 = \frac{-Y''}{Y} = +\,q^2$$

$$Y = \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\, qy$$

$$\frac{X''}{X} = r^2 + q^2 = +p^2 \quad (\text{என்க})$$

$$X = e^{\pm p x}$$

$$\therefore \varphi = e^{\pm px} \frac{\cos}{\sin} q y \, e^{\pm rct} \tag{32}$$

$$p^2 - q^2 = r^2$$

இதே போன்று, (29)-ன் தீர்வுகள் கீழ்க் கண்டவாறும் இருக்கலாம்.

$$\varphi = \frac{\cos}{\sin} px \, e^{\pm qy} \frac{\cos}{\sin} rct$$

$$p^2 - q^2 = r^2 \tag{33}$$

அல்லது $\varphi = \frac{\cos}{\sin} px \; e^{\pm qy} \; e^{\pm rct}, \; -p^2 + q^2 = r^2$ (34)

அல்லது $\varphi = e^{\pm px} \; e^{\pm qy} \; e^{\pm rct}, \quad p^2 + q^2 = r^2$ (35)

அல்லது $\varphi = e^{\pm px} \frac{\cos}{\sin} qy \frac{\cos}{\sin} rct, \; -p^2 + q^2 = r^2$ (36)

[பயிற்சி : இத் தீர்வுகளைக் காண்க.]

மூன்று பரிமாணத்தில் அலை ஓட்டச் சமன்பாடு :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \tag{37}$$

முன்போலவே மாறிகளைப் பிரித்தல் முறையினைக் கொண்டு இதன் தீர்வுகள்

$$\varphi = \frac{\cos}{\sin} px \frac{\cos}{\sin} qy \frac{\cos}{\sin} rz \frac{\cos}{\sin} sct, \; p^2 + q^2 + r^2 = s^2 \tag{38}$$

$$\varphi = \frac{\cosh}{\sinh} px \, e^{\pm qy} \frac{\cos}{\sin} rz \frac{\cos}{\sin} sct, \; -p^2 - q^2 + r^2 = s^2 \tag{39}$$

எனக் காணலாம். வெவ்வேறு பிரித்தல் குறியையுடைய பிரித்தல் மாறலியினை எடுத்துக் கொண்டு (37)-ன் எல்லாவிதத்

தீர்வுகளையும் காண்பது மாணவர்க்குப் பயிற்சியாக விடப் பட்டுள்ளது.

மாதிரி 1 : $x=o$, $x=a$, $y=o$, $y=b$ என்ற கோடுகளில் φ மறைகிறது என்றால், $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi^2}{\partial t^2}$-ன் தீர்வுகளைக் காண்க. (31)-லிருந்து இந்த அலை ஓட்டச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகள்

$$\varphi=\frac{\cos}{\sin}px\frac{\cos}{\sin}qy\frac{\cos}{\sin}rct,\ p^2+q^2=r^2$$

$x=0$ என்றால் $\varphi=0$; எனவே φயில் $\cos px$ உறுப்பு இருக்க முடியாது. $y=0$ என்றால் $\varphi=0$; எனவே φயில் $\cos qy$ உறுப்பு இருக்க முடியாது.

$$\therefore\ \varphi=\sin px\sin qy\frac{\cos}{\sin}rct$$

[$\sin px$, $\sin qy$ களின் கெழுக்கள் (coefficients) $\frac{\cos}{\sin}rct$-ல் உள்ள மாறிலிகளுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளதைக் காண்க.]

$x=a$ என்றால் $\varphi=0$

$\therefore\ \sin pa=0$

$pa=m\pi,\qquad m=1,2,\ldots\ldots$

$\therefore\ p=\frac{m\pi}{a}$

$y=b$ என்றால் $\varphi=0$

$\sin qb=0$

$qb=n\pi\qquad n=1,2,\ldots\ldots$

$\therefore\ q=\frac{n\pi}{b}$

$$\therefore\ \varphi=\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\frac{\cos}{\sin}rct$$

$$= \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \left[A_{m,n} \cos rct + B_{m,n} \sin rct \right]$$

$$r^2 = p^2 + q^2$$

$$= \pi^2 \left[\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right] \tag{40}$$

$$m = 1, 2\ldots\ldots$$

$$n = 1, 2\ldots\ldots$$

ஒருங்கிணைக்கும் கோட்பாட்டின்படி (40)-இல் கொடுக்கப்படும் எல்லாத் தீர்வுகளின் சேர்க்கையே பொதுத் தீர்வாகும். அதாவது,

$$\varphi = \Sigma \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \left[A_{mn} \cos rct + B_{mn} \sin rct \right] \tag{41}$$

என்பதுதான் மிகப் பொதுவான தீர்வாகும்.

(40), (41) இவைகளை முறையே பின்வருமாறு குறிக்கலாம்.

$$\varphi = C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \cos \left[rct + E_{mn} \right] \tag{40'}$$

$$\varphi = \sum_{m,n} C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \cos \left[rct + E_{mn} \right] \tag{41'}$$

தொடக்கக் கட்டுப்பாடுகள் (Initial conditions) தெரிந்தால் $A_{m,n}$, $B_{m,n}$ (அல்லது C_{mn}, E_{mn}) மதிப்புகளைக் காணலாம். $E_{mn} = o$ என்றால்,

$$\left[\varphi \right]_{t=o} = \Sigma\, A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$\left[\dot{\varphi} \right]_{t=o} = \Sigma\, B_{mn}\, rc \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$\left[\varphi \right]_{t=o}$, $\left[\dot{\varphi} \right]_{t=o}$ இவைகளின் மதிப்புகள் தெரிந்தால்

A_{mn}, B_{mn} மதிப்புகளை ஃபோரியரின் தொடர் (Fourier's Series) வாயிலாகக் கண்டறியலாம். இது எவ்வாறு என்பதைப் பின்னர் விரிவாக விளக்குவோம்.

மாதிரி 2: $t=\infty$ அல்லது $x=\infty$ என்றால் $\varphi=o$ எனின்

$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$ ன் தீர்வைக் காண்போம்.

$\varphi=e^{\pm px}\,e^{\pm pct}$ என்ற தீர்வை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$=\varphi\ \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\ px\ \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\ pct$ என்கிற தீர்வை எடுத்துக் கொள்ள இயலாது. ஏனென்றால் $t=\infty$ அல்லது $x=\infty$ ஆகும் பொழுது φ நிர்ணயிக்க முடியாது.

$x=\infty$ என்றால் $\varphi=o$, $\therefore$ ϕ யில் e^{+px} உறுப்பு இருக்க முடியாது.

$t=\infty$ என்றால் $\varphi=0$ $\therefore$ φயில் e^{+pct} உறுப்பு இருக்க முடியாது,

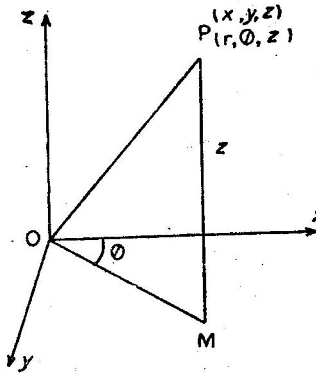
$$\therefore\ \varphi=Ae^{-px}\,.\,e^{-pct}$$

§ 1.10. அலை ஓட்டச் சமன்பாட்டை உருளை - போலார் ஆயக் கூறுகளில் (Cylinderical Polar Co-ordinates) மாற்றி அமைத்து அதன் தீர்வுகளைக் காண்போம்.

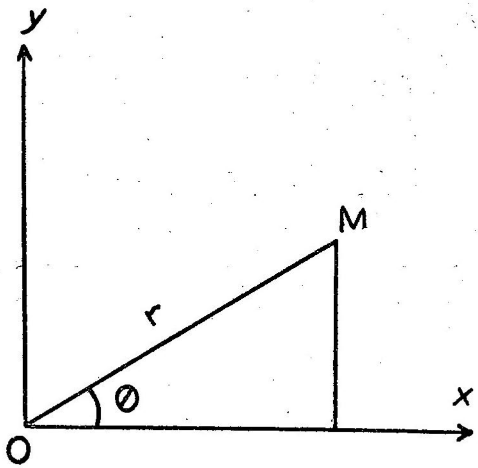
$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$$

(x, y, z) என்ற தெக்காட்டின் ஆயக்கூறுகளை, (புதிய r, θ, z) என்ற உருளை - போலார் ஆயக்கூறுகளில் மாற்றி அமைக்க,

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \\ z &= z \end{aligned}\right\} \quad \text{என்க} \qquad (42)$$



படம் 5



படம் 6

$$\therefore\ r^2 = x^2 + y^2 \qquad (43)$$

r-ஐப் பொருத்த பகுப்பு வகைக் கெழு காண,

$$2\,r\,\frac{\partial r}{\partial x} = 2\,x$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$$

$$= \frac{r\cos\theta}{r} = \cos\theta \tag{44}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} \tag{45}$$

x-ஐப் பொருத்த பகுப்பு வகைக்கெழுக் காண.

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot -\frac{y}{x^2}$$

$$\frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{-r\sin\theta}{r^2} = \frac{-\sin\theta}{r}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial x}$$

$$= \cos\theta\frac{\partial\varphi}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}$$

$$= \left[\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right]\varphi$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right] = \left[\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right]\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

$$= \left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\cos\theta\frac{\partial\varphi}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)$$

$$= \cos\theta\left[\cos\theta\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\,\partial\theta} + \frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right]$$

$$-\frac{\sin\theta}{r}\left[-\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \cos\theta\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\,\partial\theta} - \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right.$$

$$\left.-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}\right]$$

$$= \cos^2\theta\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} - 2\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\,\partial\theta} +$$

$$2\frac{\cos\theta\sin\theta}{r^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}+\frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} \qquad (47)$$

(47)-ல், θ-விற்குப் பதிலாக $\frac{\pi}{2}-\theta$ என பிரதியீடு செய்ய $\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}$ யின் மாற்றம் கிடைக்கும் என்பது (42)லிருந்து தெளிவாகின்றது.

$$\therefore \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=\sin^2\theta\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{2\cos\theta\sin\theta}{r}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\,\partial\theta}-\frac{2\cos\theta\sin\theta}{r^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}$$

$$+\frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} \qquad (48)$$

$$\therefore \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} \qquad (49)$$

மேலும் $\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$ இல் மாற்றம் கிடையாது.

$$\therefore \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial\varphi^2}{\partial\theta^2}$$

$\therefore$ மாற்றப்பட்ட அலை ஓட்டச் சமன்பாடு,

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} \qquad (49)$$

இதன் தீர்வு $\varphi=R(r)\,(H)\,(\theta)\,Z(z)\,T(t)$ என்க (50)
(49)-ல் பிரதியீடு செய்ய,

$$R''(H)ZT+\frac{1}{r}R'(H)ZT+\frac{1}{r^2}R(H)''ZT+$$

$$R(H)Z''T=\frac{1}{c^2}R(H)ZT''$$

$R(H)ZT$ ஆல் இருபுறமும் வகுக்க,

$$\frac{R''}{R}+\frac{1}{r}\frac{R'}{R}+\frac{1}{r^2}\frac{(H)''}{(H)}+\frac{Z''}{Z}=\frac{1}{C^2}\frac{T''}{T} \qquad (51)$$

(50)-இன் இடப்புறம் r, θ, z களின் சார்பு; வலப்புறம் t-யின் சார்பு;

ஆனல் r, θ, z மற்றும் t ஒன்றுக்கொன்று சார்பற்றவை. எனவே இருபுறமும் சமமாயிருத்தலின் இருபுறமும் ஒரு மாறலி

யாக இருத்தல் வேண்டும். இப் பிரித்தல் மாறிலியை $-p^2$ என்க.

$$\therefore \frac{T''}{T} = -p^2c^2 \quad \therefore T = \frac{\text{Cos}}{\text{Sin}}\, p\, ct$$

$$\text{இனி, } \frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2}\frac{(H)''}{(H)} + p^2 = \frac{Z''}{Z}$$

இங்கு இடப்புறம் r, θ-களின் சார்பு; வலப்புறம் z-ன் சார்பு; r, θ மற்றும் z ஒன்றுக்கொன்று சார்பற்றவை. இருபுறமும் சமமாயிருத்தலின் இருபுறமும் ஒரு மாறலியாக இருக்க வேண்டும். இப்பிரித்தல் மாறிலியை q^2 என்க.

$$\therefore \frac{Z''}{Z} = -q^2 \qquad \therefore Z = \frac{\text{Cos}}{\text{Sin}}\, q\, z$$

$$\text{இனி, } r^2\left[\frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R} + p^2 - q^2\right] = -\frac{(H)''}{(H)}$$

இடப்புறம் r-ன் சார்பு; வலப்புறம் θ-ன் சார்பு. ஆனல் r, θ ஒன்றுக்கொன்று சார்பற்றவை. எனவே, இருபுறமும் சமமா யிருத்தலின் இருபுறமும் ஒரு மாறலிக்குச் சமமாயிருத்தல் வேண்டும். இப்பிரித்தல் மாறிலியை m^2 என்க.

$$\therefore \frac{Z''}{Z} = -m^2$$

$$\therefore Z = \frac{\text{Cos}}{\text{Sin}}\, m\,\theta$$

இனி $r^2 R'' + r R' + (n^2 r^2 - m^2) R = O$, $p^2 - q^2 = n^2$ (52)

$nr = u$ என்க

$$\therefore \frac{\partial R}{\partial r} = \frac{\partial R}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial R}{\partial u} n$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 R}{\partial u^2} \cdot n^2$$

$\therefore$ (52) லிருந்து

$$n^2 r^2 \frac{\partial^2 R}{\partial u^2} + n r \frac{\partial R}{\partial u} + (n^2 r^2 - m^2) R = 0$$

அதாவது $u^2 \dfrac{\partial^2 R}{\partial u^2} + u \dfrac{\partial R}{\partial u} + (u^2 - m^2) R = 0$ (53)

வரிசை m (Order-m) உள்ள பேஸல் (Bessel)-இன் சமன்பாடு.

$$x^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x \frac{\partial y}{\partial x} + (x^2 - m^2) y = o \text{ என்பது} \qquad (54)$$

இதன் தீர்வுகள் $y = A\ J_m(x) + B\ Y_m(x)$ என்பன. இதன்படி (53)ன் தீர்வுகள்.

$$R = \frac{J_m}{Y_m}(u)$$

$$= \frac{J_m}{Y_m}(n\ r)$$

∴ (49)ன் தீர்வு

$$\varphi = \frac{J_m}{Y_m}(n\ r) \frac{Cos}{Sin}\ m\ \theta \frac{Cos}{Sin}\ q\ z\ \frac{Cos}{Sin}\ p\ ct$$

$$n^2 = p^2 - q^2 \qquad (55)$$

$r = o$ எனில் J_m-ன் மதிப்பு அளவிற்குட்பட்டது (Finite), Y_m-ன் மதிப்பு கந்தழியாகும் (Infinite). எனவே J_m-ன் தீர்வுகளே நமக்குத் தேவையானவை.

φ ஒரு மதிப்புடைச் சார்பாக (Single value function) இருக்க m ஒரு முழு எண் (Integer) ஆக இருக்க வேண்டும். $n^2 = p^2 - q^2$ என்பதற்குட்பட்டு, n, p, q-களின் மதிப்புகள் விதிக்கட்டில்லாமல் (Arbitrary) இருக்கலாம்.

பிரித்தல் மாறிலிகளின் குறிகளை வேறுவிதமாகக் கொண்டு (49)-ன் தீர்வில் அதிபரவளைச் சார்புகளும் (Hyperbolic Functions) வருமாறு செய்தல் இயலும்.

குறிப்பு : பேஸல் சார்புகள் :

பேஸலின் சமன்பாடு (54)-ன் ஒரு பொதுத் தீர்வு $J_m(x)$. மற்ற தீர்வு $Y_m(x)$, $x = o$-வில் கந்தழியை அடைவதால் இங்கு நமக்கு பயனுடையதல்ல. $J_m(x)$ கீழ்க் கண்ட பண்புகளைப் பெற்றுள்ளது :—

(1) $$x^2 \frac{\partial^2 J_m}{\partial x^2} + x \frac{\partial J_m}{\partial x} + (x^2 - m^2) J_m = o$$

(2) $$J_m(x) = \frac{1}{m!}\left(\frac{x}{2}\right)^m - \frac{1}{(m+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2} + \frac{1}{2!\,(m+2)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+4} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

(3) $J_m(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \dfrac{2m+1}{4}\pi\right)$

(4) $J_m(x) = \dfrac{1}{2\pi i^m} \int_0^{2\pi} e^{i x \cos\omega} \cos(m\omega)\, \partial\omega$

(5) $J_{m-1}(x) + J_{m+1}(x) = \dfrac{2m}{x} J_m(x)$

(6) $\dfrac{dJ_m}{dx}(x) = \frac{1}{2}\left[J_{m-1}(x) - J_{m+1}(x)\right]$

(7) $\dfrac{d}{dx}\left[x^m J_m(x)\right] = x^m J_{m-1}(x)$

(8) $\dfrac{d}{dx}\left[x^{-m} J_m(x)\right] = -x^{-m} J_{m+1}(x)$

(9) $\int J_1(x)\, dx = -J_0(x)$

(10) $\int x J_0(x)\, dx = x J_1(x)$

(11) $\int J_0^2(x)\, x dx = \dfrac{x^2}{2}\left[J_0^2(x) + J_1^2(x)\right]$

(12) $\int J^2_m(x)\, x\, dx = \dfrac{x^2}{2}\left[J^2_m(x) - J_{m-1}(x) J_{m+1}(x)\right]$

(13) $\int J_m(\alpha x) J_m(\beta x)\, x\, dx = \dfrac{x}{\alpha^2 - \beta^2}$

$\left[\beta J_m(\alpha x) J_{m-1}(x) - \alpha J_m(\beta x) J_{m+1}(x)\right]$

இப் பண்புகள் யாவும் பேஸல் சார்புகளைப் பற்றிய புத்தகங்களில் நிறுவப்பட்டிருப்பதைக் காணலாம். x-ன் சில மதிப்புகளுக்கு J_0, J_1 என்ற சார்புகளின் மதிப்புகள் பின்வரும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. J_0, J_1 என்ற சார்புகள் $J_0' = J_1$ என்ற தொடர்புடையவை.

J_0 J_1 என்ற சார்புகளின் தொடர்பு $J_0' = -J_1$ zன் சில மதிப்புகளுக்கு கீழ்க்கண்ட அட்டவணை J_0 J_1 மதிப்புக்களை கொடுக்கிறது.

z	$J_0(z)$	$J_1(z)$	z	$J_0(z)$	$J_1(z)$	(z)	$J_0(z)$	$J_1(z)$
0.0	1.0000	0.0000	4.5	.3205	.2311	9.0	.0903	.2453
0.1	.9975	.0499	4.6	.2961	.2566	9.1	.1142	.2324
0.2	.9900	.0995	4.7	.2693	.2791	9.2	.1367	.2174
0.3	.9776	.1485	4.8	.2404	.2985	9.3	.1577	.2004
0.4	.9604	.1960	4.9	.2097	.3147	9.4	.1768	.1816
0.5	.9385	.2423	5.0	.1776	.3276	9.5	.1939	.1613
0.6	.9120	.2867	5.1	.1443	.3371	9.6	.2090	.1395
0.7	.8812	.3290	5.2	.1103	.3432	9.7	.2218	.1166
0.8	.8463	.3688	5.3	.0758	.3460	9.8	.2323	.0928
0.9	.8075	.4060	5.4	.0412	.3453	9.9	.2403	.0684
1.0	.7652	.4401	5.5	—.0068	.3414	10.0	.2459	.0435
1.1	.7196	.4709	5.6	+.0270	.3343	10.1	.2490	+.0184
1.2	.6711	.4983	5.7	.0599	.3241	10.2	.2496	—.0066
1.3	.6201	.5220	5.8	.0917	.3110	10.3	.2477	.0313

1.4	.5669	.5419	5.9	.1220	.2951	10.4	.2434	.0555
1.5	.5118	.5579	6.0	.1506	.2767	10.5	.2366	.0789
1.6	.4554	.5699	6.1	.1773	.2559	10.6	.2276	.1012
1.7	.3980	.5778	6.2	.2017	.2329	10.7	.2164	.1224
1.8	.3400	.5815	6.3	.2238	.2081	10.8	.2032	.1422
1.9	.2818	.5812	6.4	.2433	.1816	10.9	.1881	.1604
2.0	.2239	.5767	6.5	.2601	.1538	11.0	.1712	.1768
2.1	.1666	.5683	6.6	.2740	.1250	11.1	.1528	.1913
2.2	.1104	.5560	6.7	.2851	.0953	11.2	.1330	.2039
2.3	.0555	.5399	6.8	.2931	.0652	11.3	.1121	.2143
2.4	+.0025	.5202	6.9	.2981	.0349	11.4	.0902	.2225
2.5	—.0484	.4971	7.0	.3001	—.0047	11.5	.0677	.2284
2.6	.0968	.4708	7.1	.2991	+.0252	11.6	.0446	.2320
2.7	.1424	.4416	7.2	.2951	.0543	11.7	—.0213	.2333
2.8	.1850	.4097	7.3	.2882	.0826	11.8	+.0020	.2323
2.9	.2243	.3754	7.4	.2786	.1096	11.9	.0250	.2290
3.0	.2601	.3391	7.5	.2663	.1352	12.0	.0477	.2234

3.1	.2921	.3009	7.6	.2516	.1592	12.1	.0697	.2157
3.2	.3202	.2613	7.7	.2346	.1813	12.2	.0908	.2060
3.3	.3443	.2207	7.8	.2154	.2014	12.3	.1108	.1943
3.4	.3643	.1792	7.9	.1944	.2192	12.4	.1296	.1807
3.5	.3801	.1374	8.0	.1717	.2346	12.5	.1469	.1655
3.6	.3918	.0955	8.1	.1475	.2476			
3.7	.3992	.0538	8.2	.1222	.2580			
3.8	.4026	+.0128	8.3	.0960	.2657			
3.9	.4018	—.0272	8.4	.0692	.2708			
4.0	.3972	.0660	8.5	.0419	.2731			
4.1	.3887	.1033	8.6	+.0146	.2728			
4.2	.3766	.1386	8.7	—.0125	.2697			
4.3	.3601	.1719	8.8	.0392	.2641			
4.4	.3423	.2028	8.9	.0653	.2559			

§ 1.11. 49ஆவது சமன்பாட்டினை எளிதில் கண்டறிய மற்றொரு வழி :—

(x, y, z) என்ற தெக்காட்டின் ஆயக்கூறுகளிலிருந்து (q_1, q_2, q_3) என்ற மற்றொரு செங்குத்தான (Orthogonal) ஆயக்கூறுகளுக்கு,

$$x = x\,(q_1, q_2, q_3)$$
$$y = y\,(q_1, q_2, q_3)$$
$$z = z\,(q_1, q_2, q_3)$$

என்ற சமன்பாடுகள் வாயிலாக மாறும்பொழுது q_1, q_2, q_3 திக்குகளில் உள்ள நீளத் தனிமங்கள் (Elements of length) முறையே $L_1\,dq_1$, $L_2\,dq_2$, $L_3\,dq_3$ என்றால்

$$\left.\begin{aligned} L_1^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2 \\ L_2^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_2}\right)^2 \\ L_3^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_3}\right)^2 \end{aligned}\right\} \quad \text{.........(56)}$$

பின் வெக்டார் கணிதத்திலிருந்து புது ஆயக்கூறுகளில்,

$$\Delta^2\phi = \frac{1}{L_1L_2L_3}\left\{\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{L_2L_3}{L_1}\frac{\partial\phi}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{L^3L_1}{L_2}\frac{\partial\phi}{\partial q_2}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{L_1L_2}{L_3}\frac{\partial\phi}{\partial q_3}\right)\right\} \quad \text{.... ....(57)}$$

தெக்காட்டின் ஆயக்கூறுகள் (x, y, z) களிலிருந்து உருளை போலார் ஆயக்கூறுகளுக்கு,

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$
$$z = z$$

என்ற சமன்பாடுகள் வாயிலாக மாற்றுகின்றோம். இங்கு q_1, q_2, q_3, முறையே r, θ, z, ஆகும்.

ஆகவே இங்கு

$$L_1^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2$$

$$= \cos^2\theta + \sin^2\theta + 0$$

$$= 1$$

$$L_2^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$

$$= r^2 \sin^2\theta + r^2 \cos^2\theta + 0$$

$$= r^2$$

$$L_3^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)$$

$$= 0 + 0 + 1$$

$$= 1$$

$$\therefore L_1 = 1, \quad L_2 = r, \quad L_3 = 1$$

∴ (57) லிருந்து,

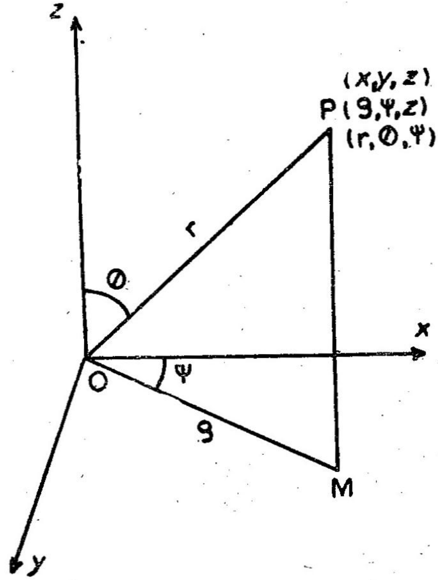
$$\Delta^2\varphi = \frac{1}{1.\,r.\,1}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r.1}{1}\ \frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1.1}{r}\ \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) + \right.$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1.r}{1}\ \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\right]$$

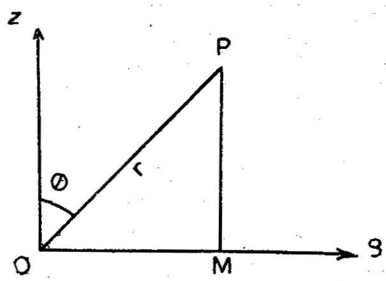
$$= \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\ \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \quad \text{— (49)}$$

§ 1.12 அலை ஓட்டச் சமன்பாட்டை கோள - போலார் ஆயக் கூறுகளில் (Spherical Polar Co-ordinates) மாற்றி அமைத்து அதன் தீர்வுகளைக் காண்போம்.

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$$



படம் 7



படம் 8

அலையோட்டச் சமன்பாட்டை (x, y, z) என்ற தெக்காட்டின் ஆயக் கூறுகளிலிருந்து புதிய (r, θ, ϕ) என்ற கோளப் போலார் ஆயக் கூறுகளில் மாற்றியமைக்க, (ρ, ϕ, z) என்ற உருளை-போலார் ஆயக் கூறுகளில் இச் சமன்பாட்டை முதலில் மாற்றி யமைப்போம். (49′)-ன் படி (x, y, z)-லிருந்து $(\rho, \phi\ z)$-க்கு மாற்றியமைக்க,

$$\Delta^2\varphi \equiv \frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

என்றாகும். $(x, y) \rightarrow (r, \theta)$ என்றால், (49′)-லிருந்து

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}$$

இங்கு, $(\rho, z) \rightarrow (r, \theta)$. எனவே,

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}$$

மற்றும், $\rho = r\sin\theta$, $z = r\cos\theta$ என்பதால்

$$\frac{\partial r}{\partial\rho} = \sin\theta$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial\rho} = \frac{\cos\theta}{r}$$

$$\therefore \Delta^2\varphi \equiv \left\{\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right\} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2}$$

$$= \left\{\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right\} + \frac{1}{r\sin\theta}\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial\rho} + \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial\rho}\right\}$$

$$+ \frac{1}{r^2\sin^2\phi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2}$$

$$= \left\{\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}\right\} +$$

$$\frac{1}{r\sin\theta}\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\frac{\cos\theta}{r}\right\} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2}$$

$$= \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)$$

$$+ \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2} \qquad (58)$$

§ 1.13. சமன்பாடு (57)-ஐப் பயன் செய்து, சமன்பாடு (58)-ஐக் காணலாம்.

இங்கு செக்காட்டின் ஆயக்கூறுகள் (x, y, z)-லிருந்து கோள போலார் ஆயக்கூறுகளுக்கு மாற்றத் தேவையான சமன்பாடுகள்.

$$x = r \sin\theta \cos\phi$$
$$y = r \sin\theta \sin\phi$$
$$z = r \cos\theta$$

$$\therefore \quad L_1^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2$$

$$= \sin^2\theta \cos^2\phi + \sin^2\theta \sin^2\phi + \cos^2\theta$$
$$= \sin^2\theta + \cos^2\theta$$
$$= 1$$

$$L_2^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$

$$= r^2 \cos^2\theta \cos^2\phi + r^2 \cos^2\theta \sin^2\phi + r^2 \sin^2\theta$$
$$= r^2 \cos^2\theta + r^2 \sin^2\theta$$
$$= r^2$$

$$L_3^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \phi}\right)^2$$

$$= r^2 \sin^2\theta \sin^2\phi + r^2 \sin^2\theta \cos^2\phi + 0$$
$$= r^2 \sin^2\theta$$

$$\therefore \quad L_1 = 1\ ; \quad L_2 = r\ ; \quad L_3 = r \sin\theta$$

(57)-லிருந்து

$$\Delta^2\varphi = \frac{1}{1.r.r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r.r\sin\theta}{1}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{r\sin\theta . 1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{1.r}{r\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\phi}\right)\right] \qquad (86)$$

$$\simeq \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)$$

$$+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2} \qquad (58)$$

§ ***1.14*** இனி அலை ஓட்டச் சமன்பாடு (59)-ன் தீர்வுகளைக் காண்போம்.

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2}$$

$$= \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} \qquad (59)$$

$\varphi = R(r)\,(\Theta)\,(\theta)\,\Psi\, T(t)$ — என்க. (60)

(59)-ல் பிரதியீடுசெய்ய,

$$R''(\Theta)\Psi T + \frac{2}{r}R'(\Theta)\Psi T + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, R(\Theta)'\Psi T)$$

$$+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}R(\Theta)\Psi'' T = \frac{1}{c^2}R(\Theta)\Psi T''$$

$R(\Theta)\Psi T$ ஆல் வகுக்க

$$\frac{R''}{R} + \frac{2}{r}\frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{1}{(\Theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\,(\Theta)') + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\Psi''}{\Psi}$$

$$= \frac{1}{c^2}\frac{T''}{T}$$

வலப் புறம் r, θ, ϕ களின் சார்பு ; இடப்புறம் t-யின் சார்பு ஆனால் r, θ, ϕ மற்றும் t ஒன்றுக்கொன்று சார்பற்றவை. எனவே இருபுறமும் சமமாயிருத்தலின் இருபுறமும் மாறிலியாக இருக்க வேண்டும். இப் பிரித்தல் மாறிலியை $-p^2$ என்க.

$$\therefore \frac{T''}{T} = -p^2c^2 \qquad \therefore T = \frac{\cos}{\sin}\, pct$$

இனி,

$$r^2 \sin^2\theta \left[\frac{R'}{R} + \frac{2}{r}\frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{1}{(\Theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\,(\Theta)' + p^2 \right]$$

$$= -\frac{\Psi''}{\Psi}$$

வலப்புறம் r, θ வின் சார்பு ; இடப்புறம் ϕ யின் சார்பு ஆனால் r, θ மற்றும் ϕ ஒன்றுக்கொன்று சார்பற்றவை. எனவே இரு புறமும் சமமாயிருத்தலால் இருபுறமும் ஒரு மாறிலிக்குச் சமமா யிருத்தல் வேண்டும். இப் பிரித்தல் மாறிலியை m^2 என்க.

$$\therefore \frac{\Psi''}{\psi} = -m^2 \qquad \therefore \psi = {\cos \atop \sin} m\,\phi$$

இனி,

$$r^2\frac{R''}{R} + 2r\frac{R'}{R} + p^2 r^2 = \frac{m^2}{\sin^2\theta} - \frac{1}{\sin\theta}\frac{1}{(\Theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\,(\Theta)')$$

வலப்புறம் r-ன் சார்பு ; இடப்புறம் θ-வின் சார்பு; ஆனால் r-உம் θ-வும் ஒன்றுக்கொன்று சார்பற்றவை. எனவே இருபுறமும் சமமாயிருத்தலால் இருபுறமும் ஒரு மாறிலிக்குச் சமமாயிருத் தல் வேண்டும். இப் பிரித்தல் மாறிலியை $n\,(n+1)$ என்க.

$$\therefore \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\,(\Theta)') + \left[n\,(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta} \right](\Theta) = 0 \qquad (61)$$

$$r^2\frac{R''}{R} + 2r\frac{R'}{R} + p^2 r^2 = n\,(n+1) \qquad (62)$$

இது பொதுப்படுத்தப்பட்ட லஜெண்டரின் சமன்பாடு (Generalised Legender's Equation) இதன் தீர்வுகள்,

$$(\Theta)(\theta) = P_n^m(\cos\theta)$$

(H)-இன் மதிப்பு எல்லா இடத்திலும் அளவிற்குட்பட்டிருக்க n ஒரு கூட்டு முழு எண்ணாக இருக்க வேண்டும். $m=0$ என்ப திலிருந்து n ஒரு முழு எண் என்றால், $P_n^m(\cos\theta)$ ஆனது, $\cos\theta$-வில் n-படி பல்லுறுப்புக் கோவையாகும் (Polynomial of degree 'n'). m-ன் மற்ற முழுவெண் மதிப்புகளுக்கு,

$$P_n^m(\cos\theta) = \sin^m\theta \frac{\partial^m}{\partial(\cos\theta)^m}\left[P_n(\cos\theta)\right]$$

$m>n$ என்றால் $P_n^m(\cos\theta)$வின் மதிப்பு முற்றொருமையாக (Identically) மறைகிறது. $P_n^m(\cos\theta)$வின் சில மதிப்புகள் கீழே தரப்பட்டிருக்கின்றன.

$$P_0(\cos\theta) = 1$$

$$P_1(\cos\theta) = \cos\theta$$

$$P_2(\cos\theta) = \tfrac{1}{2}(3\cos^2\theta-1) = \tfrac{1}{4}(\cos 2\theta+1)$$

$$P_3(\cos\theta) = \tfrac{1}{2}(5\cos^3\theta-3\cos\theta) = \tfrac{1}{8}(5\cos 3\theta+3\cos\theta)$$

$$P_4(\cos\theta) = \tfrac{1}{8}(35\cos^4\theta-30\cos^2\theta+3) = \tfrac{1}{64}(35\cos 4\theta+20\cos 2\theta+9)$$

$$P'_1(\cos\theta) = \sin\theta$$

$$P'_2(\cos\theta) = 3\sin\theta\cos\theta$$

$$P'_3(\cos\theta) = \tfrac{3}{2}\sin\theta(5\cos 2\theta-1)$$

$$P_2^2(\cos\theta) = 3\sin^2\theta$$

இனி (62)-ன் தீர்வுகளைக் காண்போம்

$R(r) = r^{-\frac{1}{2}}S(r)$ என்க

$$\therefore R' = \frac{\partial R}{\partial r} = r^{-\frac{1}{2}}S' - \frac{1}{2}r^{-\frac{3}{2}}S$$

$$R'' = \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} = r^{-\frac{1}{2}}S'' - r^{-\frac{3}{2}}S + \frac{3}{4}r^{-\frac{5}{2}}S$$

இவைகளைப் பிரதியீடு செய்ய (62)வது சமன்பாடு கீழ்க் கண்டவாறு மாற்றப்படுகின்றது.

$$r^2S''+rS'+[p^2r^2-(n+\tfrac{1}{2})^2]S=0$$

இது $(n+\frac{1}{2})$ வரிசை கொண்ட பேஸலின் சமன்பாடு.

எனவே,

$$S = \begin{matrix} J_{n+\frac{1}{2}} \\ Y_{n+\frac{1}{2}} \end{matrix}(pr)$$

$$R = r^{-\frac{1}{2}} \begin{matrix} J_{n+\frac{1}{2}} \\ Y_{n+\frac{1}{2}} \end{matrix}(pr)$$

$\therefore$ (59)ன் தீர்வு

$$\varphi = r^{-\frac{1}{2}} \begin{matrix} J_{n+\frac{1}{2}} \\ Y_{n+\frac{1}{2}} \end{matrix} (pr)\ P_n^m (\cos\theta) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\ m\phi \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\ pct \quad (63)$$

§ **1.15**, φ, அச்சைச் சார்ந்த செவ்வொழுங்குடன் (Axial symmetry) அமைந்தால், $m=o$ என்று உள்ளத் தீர்வைத்தான் எடுத்துக் கொள்ளவேண்டும். φ, கோளச் செவ்வொழுங் குடன் (Spherical Symmetry) அமைந்தால் $m=n=o$. இங்கு

$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}} \sin x$; $Y_{\frac{1}{2}}(x) = -\sqrt{\dfrac{2}{\pi x}} \cos x$; ஆகவே இந்த வகையில் தீர்வு.

$$\varphi = r^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2}{\pi pr}} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\ pr \quad \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\ pct$$

$$= r^{-1} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\ pr \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\ pct \quad (64)$$

§ **1.16** மற்ருெரு வழி :

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) +$$

$$\frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} \quad (59)$$

φ கோளச் செவ்வொழுங்குடையது எனின் θ, ϕ சார்பற்ற தாக இருக்கவேண்டும். ஆகவே இந்த சமன்பாடு,

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} \quad (65)$$

என்ருகிறது.

இதை $\dfrac{\partial^2 (r\varphi)}{\partial r^2} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 (r\varphi)}{\partial t^2}$ என்று எழுதலாம். (66)

முன்னேறும் அலைகளுக்குரிய தீர்வு

$$r\varphi = f(r-ct) + g(r+ct)$$

அல்லது $\varphi = r^{-1}\,[f(r-ct) + g(r+ct)]$ (67)

நிற்கும் அலைகளுக்குரிய தீர்வு

$$r\varphi = \frac{\cos}{\sin} pr \quad \frac{\cos}{\sin} pct$$

அல்லது $\varphi = r^{-1} \frac{\cos}{\sin} pr \quad \frac{\cos}{\sin} pct$ (64)

(M. Sc. Madras University 1962)

மாதிரி 3: தெக்காட்டின் ஆயக் கூறுகள் (x, y, z) லிருந்து Spheroidal ஆயக் கூறுகள் (ξ, η, ζ)-விற்கு

$$x = a \sinh \xi \sin \eta \cos \zeta$$

$$y = a \sinh \xi \sin \eta \sin \zeta$$

$z = a \cos h\, \xi \cos \eta$ என்ற சமன்பாடுகள் வாயிலாக மாறினல்,

$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$ என்ற அலை ஓட்டச் சமன்பாடு மாறிகளைப் பிரித்தல் முறைப்படி தீர்வுகாண சரியான வடிவமைப்புடையது எனக்காட்டுக. மேலும் இச் சமன்பாடு இவ்வாறு பிரிந்து போகும் துணைச் சமன்பாடுகளையும் காண்க.

சமன்பாடு (56) லிருந்து

$$L_1^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2$$

$$= a^2 \sin^2\eta + a^2 \sinh^2\xi$$

$$L_2^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)^2$$

$$= a^2 \sinh^2\xi + a^2 \sin^2\eta$$

$$L_3^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \zeta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \zeta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta}\right)^2$$

$$= a^2 \sin h^2\, \xi \sin^2\eta$$

சமன்பாடு (57)லிருந்து Spheroidal ஆயக் கூறுகளில் அலை ஓட்டச் சமன்பாட்டின் மாற்றம்,

$$\Delta^2\varphi = \frac{1}{a^2 (\sinh^2\xi+\sin^2\eta)\, a \sin h\xi \sin \eta} \left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(a \sinh \xi \sin \eta \frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(a \sinh\xi \sin \eta \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right) + \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{a^2 \sin h^2\xi + a^2 \sin^2 \eta}{a \sin h \xi \sin \eta}\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$$

அதாவது

$$\frac{1}{a^2(\sinh^2\xi+\sin^2\eta)} \frac{1}{\sin h\xi} \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\sinh\xi \frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)$$

$$+ \frac{1}{a^2 (\sinh^2\xi+\sin^2\eta)} \frac{1}{\sin\eta} \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\sin \eta \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)$$

$$+ \frac{1}{a^2 \sinh^2\xi \sin^2 \eta} \frac{\partial^2\varphi}{\partial L^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} \qquad \text{(i)}$$

$\varphi = X(\xi)\, Y(y)\, Z(\zeta)\, T(t)$ என்க

இதை (i)-ல் பிரதியீடு செய்து $X\,Y\,Z\,T$ ஆல் இருபுறமும் வகுக்க

$$\frac{1}{a^2 (\sinh^2\xi + \sin^2\eta)} \left[\frac{1}{\sinh\xi} \frac{1}{X} \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\sinh\xi \frac{\partial X}{\partial\xi}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sin \eta} \frac{1}{Y} \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\sin\eta\frac{\partial Y}{\partial\eta}\right)\right]$$

$$+ \frac{1}{a^2 \sinh^2\xi \sin^2\eta} \frac{1}{Z} \frac{\partial Z^2}{\partial\zeta^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{1}{T} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \qquad \text{(ii)}$$

இதில் வலப்புரம் ξ, η, ζ வின் சார்பு ; இடப்புறம் t-இன் சார்பு. ஆனால் ξ, η, ζ மற்றும் t ஒன்றுக் கொன்று சார்பற்றவை. எனவே இருபுறமும் சமமாயிருத்தலால் இருபுறமும் ஒரு மாறிலிக்குச் சமமாயிருத்தல் வேண்டும். இப் பிரித்தல் மாறிலியை $\frac{-p^2}{a^2}$ என்க.

$$\therefore \quad T'' = -\frac{p^2c^2}{a^2} T \qquad \text{(iii)}$$

இனி (ii)லிருந்து

$$\frac{\sinh^2\xi \sin^2\eta}{\sinh^2\xi+\sin^2\eta}\left[\frac{1}{\sinh\xi}\,\frac{1}{X}\,\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\sinh\xi\,\frac{\partial X}{\partial\xi}\right)+\right.$$

$$\left.\frac{1}{\sin\eta}\,\frac{1}{Y}\,\frac{\partial}{\partial\eta}\left((\sin\eta\,\frac{\partial Y}{\partial\eta}\right)+p^2(\sinh^2\xi+\sin^2\eta)\right]=-\frac{1}{Z}\,\frac{\partial^2 Z}{\partial^2\zeta}\,\text{(iv)}$$

இதில் வலப்புறம் ξ,-η-வின் சார்பு; இடப்புறம் ζ-இன் சார்பு; ஆனால் ξ, η மற்றும் ζ ஒன்றுக்கொன்று சார்பற்றவை. எனவே இருபுறமும் சமமாயிருத்தலால், இருபுறமும் ஒரு மாறிலிக்குச் சமமாயிருத்தல் வேண்டும். இப்பிரித்தல் மாறிலியை $+m^2$ என்க.

$$\therefore\; Z''=-m^2Z \qquad \text{(v)}$$

இனி (iv) லிருந்து

$$\frac{1}{\sin h\,\xi}\,\frac{1}{X}\,\frac{\partial}{\partial\xi}\left((\sin h\,\xi\,\frac{\partial X}{\partial\xi}\right)-\frac{m^2}{\sin h^2\xi}+p^2\sinh^2\xi$$

$$=-\frac{1}{\sin\eta}\,\frac{1}{Y}\,\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\sin\eta\,\frac{\partial Y}{\partial\eta}\right)+\frac{m^2}{\sin^2\eta}\,p^2\sin^2\eta \quad \text{(vi)}$$

வலப்புறம் ξ-யின் சார்பு; இடப்புறம் η-வின் சார்பு. இருபுறமும் சமமாயிருத்தலால் இருபுறமும் ஒரு மாறலிக்குச் சமமாயிருத்தல் வேண்டும். இப்பிரித்தல் மாறலியை $+q^2$ என்க.

$\therefore$ (vi) லிருந்து

$$\frac{1}{\sinh\,\xi}\,\frac{\partial}{\partial\xi}\left((\sinh\xi\,\frac{\partial X}{\partial\xi}\right)-\frac{m^2X}{\sinh^2\xi}+p^2\sinh^2\xi\,X=q^2X \qquad \text{(vii)}$$

$$\frac{1}{\sin\eta}\,\frac{\partial}{\partial\eta}\left((\sin\eta\,\frac{\partial Y}{\partial\eta}\right)-\frac{m^2}{\sin^2\eta}y+p^2\sin^2\eta\,y=-q^2y \qquad \text{(viii)}$$

ஆதலால் (ξ, η, ζ) ஆயக் கூறுகளில் மாற்றியமைக்கப்பட்ட அலை ஓட்டச் சமன்பாடு மாறிகளைப் பிரித்தல் முறைப்படி தீர்வுகாண சரியான வடிவமைப்புடையது; மேலும் துணைச் சமன்பாடுகள் (iii), (vi), (vii), (viii) ஆக அலை ஓட்டச் சமன்பாடு பிரிந்து நிற்கும்.

பயிற்சி I

(1) $\varphi=f(x\cos\theta+y\sin\theta-ct)$ என்பது x அச்சிலிருந்து θ கோணம் உண்டாக்கும் திசையில் செலுத்தப்படும் இரு பரிமாணத்து அலையென நிறுவுக.

(2) $\varphi=a\cos(lx+my-ct)$ என்பது இரு பரிமாணத்து அலையென நிறுவுக. மேலும் இதன் அலை நீளத்தைக் காண்க.

(3) ஒவ்வொரு ஜோடிக்கும் இடையே மாறுபாட்டுப்படி 120° உள்ள மூன்று ஒத்த வடிவுடைய இசை அலைகளின் கூட்டுத்தொகை பூஜ்ஜியம் ஆகும் என நிறுவுக.

(4) $x=0$ அல்லது $t=\infty$ என்றால் $\varphi=0$ எனில்

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0$$ விற்கு ஒரு தீர்வைக் காண்க.

(5) $x=+\infty$, அல்லது $t=+\infty$ என்றால் $\varphi=0$ எனில்

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$$ இன் ஒரு தீர்வைக் காண்க.

(6) x-ன் அல்லது t-ன் மெய் மதிப்புகளுக்கு φ ஒரு பொழுதும் கந்தழிவில்லை; மற்றும் $x=0$ அல்லது $t=\infty$ என்றால் $\varphi=0$ என்றால்

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$$ இன் தீர்வைக் காண்க.

(7) $t=\infty$ மற்றும் $x=0$, $x=l$ என்றால் $V=0$ எனில்

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=\frac{\partial V}{\partial t}$$ இன் தீர்வைக் காண்க.

(8) முன்னேறும் அலைகள், நிற்கும் அலைகளைப் பற்றி விவரித்து, ஒருங்கிணைக்கும் கோட்பாட்டின் மூலம் எவ்வாறு ஒன்றிலிருந்து மற்றதை அடைய முடியும் என்பதை விளக்குக.

(9) $$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\left\{\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+k\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\}$$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வைக் காண்க. இத் தீர்வு திட்டவடிவ அலையோட்ட சமன்பாட்டின் தீர்விலிருந்து எவ்வாறு வேறுபடுகிறது ?

(10) $\Delta^2\phi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$ என்ற சமன்பாட்டைக் கோள - போலார் ஆயக் கூறுகளில் மாற்றியமைத்து, இம் மாற்றப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வை $\phi = S(\theta, \phi)\, R(r, t)$,

$$R(r, t) = r^{l}\left(\frac{\partial}{r\partial r}\right)^{l} \frac{f(r-ct)+g(r+ct)}{r}$$

என்ற வடிவமைப்பில் கொடுத்தல் இயலும் என நிறுவுக.

(M.Sc., M.U. 1963)

(11) $t=0$ என்ற நேரத்தில் $\phi = y(x)$, $\frac{\partial\varphi}{\partial t} = r(x)$ என்றால் ஒரு பரிமாணத்து அலையோட்டச் சமன்பாட்டின் தீர்வைக் காண்க.

12. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial t}$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வைக் கீழ் கண்ட நிபந்தனைகளுக்குட்பட்டு காண்க:

(i) $t \to c$ என்றால் $u \neq c$

(ii) t-ன் எந்த மதிப்பிற்கும்,
$x=0$, அல்லது π என்றால் $u=0$

(iii) $t=0$ல், $(0, \pi)$ என்ற இடைவெளியில்
$u = \pi x - x^2$

2. கம்பியில் அலைகள்.

(Waves in Strings)

§ 2. 1 அதிர்வுறும் ஊடகங்களில், இழுக்கப்பட்ட கம்பியே முதன்மையான இடத்தை வகிக்கின்றது. முற்காலத்திருந்தே இசைக்கு அது பயன்படுத்தப்பட்டு வருகின்றது. இன்றும் பியானோ, வயலின் போன்ற முக்கியமான இசைக்கருவிகளுக்கு இது இன்றியமையாததாக விளங்குகின்றது.

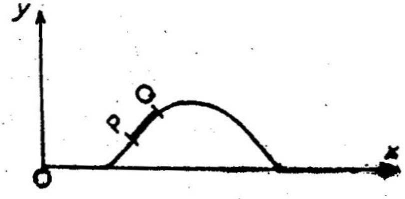
ஒரு கம்பியில், குறிப்பிட்ட எல்லைக்குட்பட்ட வீச்சுகளை யுடைய அதிர்வுகளை, ஒன்றையொன்று சாராத்தன்மையுடைய இருவகைகளாகப் பிரிக்கலாம். இதில் முதல்வகை குறுக்கு அதிர்வுகள் (Transverse vibrations) ஆகும். இங்கு குறுக்கு அதிர்வு என்பது ஒவ்வொரு புள்ளியின் இடப்பெயர்ச்சியும் Displacement) கம்பிக்குச் செங்குத்துத் திசையில் உள்ளதைக் குறிப்பிடுகின்றது. இரண்டாவதாக, கம்பியினது திசையிலேயே இடப்பெயர்ச்சி உள்ள அதிர்வுகளுக்கு நீளப்பாங்கு (Longitudinal) அதிர்வுகள் என்று பெயர். இத்தகைய அதிர்வு களைப்பற்றிப் பின்னர் பார்ப்போம். இப்பகுதியில் ஒரும நீளத்தில் பொருண்மை (Mass) ρ உடைய கனமான ஒரு கம்பி யின் குறுக்கு அதிர்வுகளைப் பற்றி ஆராய்வோம்.

இவ்வகையில் இடப் பெயர்ச்சியின் நிலை ஆற்றல் பொது இழுவிசையைச் சார்ந்திருக்கும். இடப்பெயர்ச்சியால் கம்பி மேலும் நீள்வதன் விளைவாக இழுவிசையில் ஏற்படும் சிறு மாற்றங்களை விட்டுவிடலாம். நீட்சியின் மாறுபாட்டால் இழுவிசையில் உண்டாகும் வேறுபாடுகள் இடப் பெயர்ச்சியின் நிலையாற்றலை நிர்ணயிக்கின்றன.

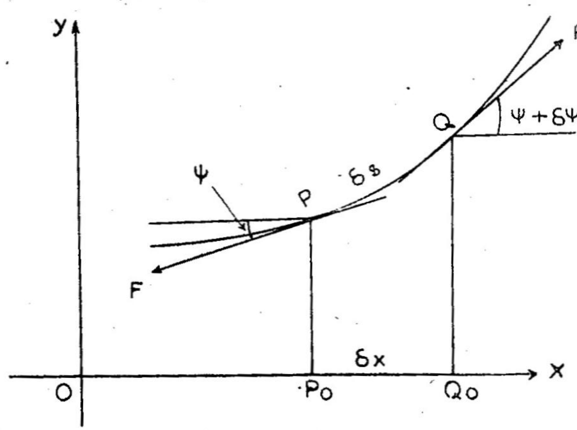
§ 2. 2 *கற்பிதங்கள்* (Assumptions): கம்பியினது எல்லாப் புள்ளிகளின் இடப்பெயர்ச்சிகளும் ஒரே தளத்தில் உள்ளன என்போம். புவிஈர்ப்பின் (Gravity) விளைவைப் புறக்கணிக்கத்

தக்க அளவு இழுவிசை (Tension) யின் மதிப்பு மிக அதிகமானது என்போம்; இதையே நடைமுறையில், தோராயமாக, இடப் பெயர்ச்சிகள் வழவழப்பான கிடைத்தளத்தில் (Horizontal plane) நிகழ்கின்றன என்றும் கொள்ளலாம். மேலும், நீளப்பாங்கு இடப்பெயர்ச்சி நடைபெறவில்லை என்போம். கடைசியாக, அலையின் கிளர்ச்சி மிகச் சிறியது என்போம். இந்தக் கற்பிதத்தினுல் கம்பியின் இழுவிசை Fஐ நடப்பில் ஒரு மாறிலியாகக் கொள்ளுதல் சரியென்று பின்னர் நிறுவுவோம்.

§ 2.3 கம்பியின் சமநிலையை (Equilibrium) x அச்சாகவும், x அச்சிற்குச் செங்குத்தாக y அச்சையும், 0வை ஆதியாகவும். இடப்பெயர்ச்சி நிகழும் தளத்தில் எடுத்துக் கொள்வோம். படத்தில் கம்பியின் PQ என்ற சிறு தனிமத்தின் (Element) இயக்கத்தை (Motion) ஆராய்வோம். PQவின் சமநிலை x அச்சில் $P_0 Q_0$ என்போம். நீளப்பாங்கு இடப்பெயர்ச்சி இல்லாமையால் PP_0, QQ_0, x அச்சிற்குச் செங்குத்தாகும். PQ, $P_0 Q_0$ களின் நீளங்கள் முறையே δs, δx என்போம். PQ-வின் குறுக்கு இடப்பெயர்ச்சி x அச்சிலிருந்து y என்போம். கம்பிக்கு Pயிலும் Qவிலும் வரையப்படும் தொடுகோடுகள் x அச்சுடன் முறையே ψ, $\psi + \delta\psi$ என்ற கோணங்களை உண்டாக்குகின்றன.



படம் 9



படம் 10

கம்பியில் தனிமம் PQ-ன் இயக்கம்

தனிமம் PQவின் பொருண்மை $\rho\delta x$. இயக்கம் நடைபெறும் பொழுது தனிமம் PQவின் இரு முனைகளிலும் கம்பியின் இழு விசை F செயல் புரிகிறது. y அச்சுத்திசையில் இவ்விரு இழு விசைகளின் விளைவு விசை (Resultant force) $F \sin(\phi+\delta\phi) - F\sin\phi$ ஆகும்.

இனி, $\sin(\phi+\delta\phi) - \sin\phi = \sin\phi\cos\phi + \cos\partial\phi\sin\delta\phi - \sin\phi$

$$= \cos\phi\,\delta\phi + 0\,(\delta\phi)^2$$

[$\delta\phi$ மிகச் சிறிது என்பதால் $\cos\phi = 1 + 0\,(\delta\phi)^2$;

$\sin\phi = \delta\,\phi\,1 + 0\,(\delta\phi)^2$]

y அச்சுத் திசையில் PQவின் இயக்கத்தின் சமன்பாடு

$$\rho\delta x\,\frac{\delta^2 y}{\delta t^2} = F\sin(\phi+\delta\phi) - F\sin\phi$$

$$= F\cos\phi\,\delta\phi + 0\,(\delta\phi)^2$$

$$\therefore\ \rho\,\frac{\delta^2 y}{\delta t^2} = F\cos\phi\,\frac{\partial\phi}{\partial x} + 0\left(\delta\phi\,\frac{\delta\phi}{\delta x}\right)$$

தனிமம் PoQo வின் நீளம் பூஜ்ஜியத்தை அணுகும்போது (Tends to) $\delta x \to 0$; மேலும் $\frac{\delta\phi}{\delta x} \to \frac{\partial\phi}{\partial x}$. எல்லா நேரத்திலும் கம்பியின் எல்லாப் புள்ளிகளும் $\left|\frac{\partial\phi}{\partial x}\right|$ ஒரு நிலை எண் (Fixed number) M (என்க)-ஐ விடக் குறைந்தது, எனும் மற்ருெரு கற்பிதத்தையும் கொள்வோம்.

$$\therefore\ \rho\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F\cos\phi\,\frac{\partial\phi}{\partial x}$$

$$\text{இனி, } \tan\phi = \frac{\partial y}{\partial x}$$

இதை x ஐப் பொருத்து பகுப்பு வகைக்கெழுக்காண

$$\sec^2\phi\,\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad \text{(i)}$$

$$\cos^2\phi = \frac{1}{1+\tan^2\phi} = \left[1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]^{-1} \qquad \text{(ii)}$$

$$\therefore \quad \cos\phi\frac{\partial\phi}{\partial x} = \cos^3\phi\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad \text{[(i) லிருந்து]}$$

$$= \left[1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad \text{[(ii) லிருந்து]}$$

∴ ஒருமத்துடன் ஒப்பிட $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$ ஐ புறக்கணிக்கத்தக்க அளவு, இடப் பெயர்ச்சிகள் மிகச் சிறியதாயின்,

$$\cos\phi\,\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$\rho\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$c^2 = \frac{F}{\rho} \text{ என்று இட}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad (1)$$

இவ்வாறு, இழுக்கப்பட்ட கம்பியின் குறுக்கு இடப் பெயர்ச்சி ஒரு பரிமாணத்து அலையோட்டச் சமன்பாட்டைத் திருப்திப் படுத்துகின்றது. இதிலிருந்து எந்த வடிவமைப்புள்ள அலையும், வடிவம் மாருது $\sqrt{\frac{F}{\rho}}$ திசை வேகத்துடன் இருபுறத்திலும் செல்ல வல்லது என்று அறிகிருேம்.

§ 2.4. மேற்கொள்ளப்பட்ட கற்பிதங்களுக்கும், தோராயங்களுக்கும் உட்பட்டு, இழுவிசை F நடப்பில் ஒரு மாறிலி தான் என்று இனிக் காட்டவேண்டும். இழுக்கப்பட்ட கம்பியின் இழுவிசையின் மாற்றம், நீள மாற்றத்தின் அளவொத்ததாகும். (Proportional).

∴ இழுவிசையின் மாற்றம் $\propto$ நீளமாற்றம் $= \partial s - \partial x$

$$=\left\{\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}-1\right\}\partial x$$

$$=\left\{1+\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\ldots\ldots\ldots-1\right\}\partial x$$

$$=\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\partial x$$

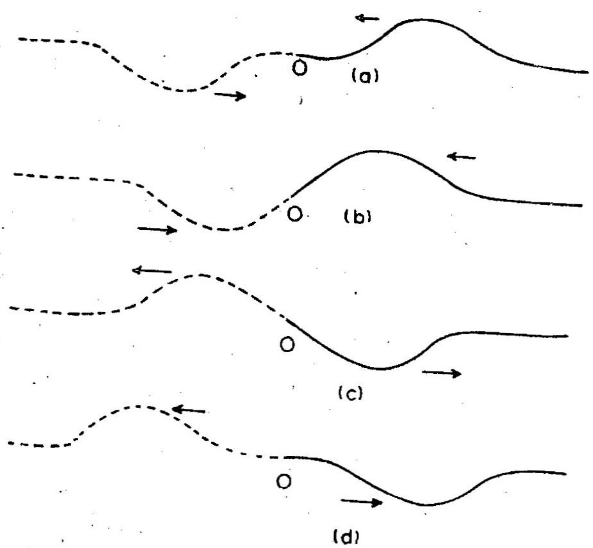
இடப் பெயர்ச்சிகள் மிகச் சிறியனவாதலால், $\frac{\partial y}{\partial x}$ முதல் வரிசைச் சிறிய மதிப்புடையது (First order of infinitesimals). எனவே இழுவிசையின் மாற்றம் இரண்டாவது வரிசைச் சிறிய மதிப்புடையதாகையால் இதனை நாம் தவிர்த்து விடலாம். எனவே இழுவிசையை நாம் மாறிலியாகக் கொள்ளலாம்.

§ 2.5 *எல்லைக் கட்டுப்பாடுகள்* (Boundary Conditions): கம்பியின் ஒரு புள்ளி ஓரிடத்தில் கட்டப் பட்டுள்ளது என்போம். இது கம்பியின் இயக்கத்தைப் பாதிக்கின்றது. இவ்வாறு கட்டப் பட்டிருப்பது எல்லைக் கட்டுப்பாட்டுக்கு ஒரு உதாரணமாகும். இது, கம்பியின் ஒரு புள்ளியில் எல்லா நேரத்திலும், உண்மையாக இருக்கவேண்டிய கட்டுப்பாடாகும். தொடக்கக் கட்டுப்பாடுகள் (Initial conditions) என்பன நேரம் $t=o$ வில் y, $\dot{y}$ களை x-ன் சார்பாகக் கொடுக்கப் படுவதாகும். கம்பியின் பொது இயக்கம், நிகழ்வெண், முதலியனவற்றைத் தீர்மானிக்கத் தொடக்கக் கட்டுப்பாடுகளை விட எல்லைக் கட்டுப்பாடுகளே மிகப் பயனுடையதாகும்.

கட்டப்பட்டிருக்கும் ஆதாரம் உறுதியானதாக (Rigid support) இருந்து கம்பியின் போக்கில் தொலைவுகள் இப் புள்ளியிலிருந்து அளக்கப் படுமாயின் $x=o$வில் எல்லா நேரத்திலும் $y=a$ என்பதுதான் இங்குள்ள எல்லைக் கட்டுப்பாடாகும். வேறுவிதமான எல்லைக் கட்டுப்பாடுகளும் இருக்கவியலும்.

§ 2.6 *எல்லையில் எதிரொளிப்பு* (Reflection at a Boundary): $x=0$ வில் உறுதியான ஆதாரத்தையுடைய எளிய வகை எல்லையை எடுத்துக் கொள்வோம். ஆகவே $x=0$ வில் $y=0$. இதனால் கம்பியின் இயக்கத்தில் நிகழும் விளைவுகளை ஆராய்வோம். $y=f(x-ct)$ அல்லது $y=g(x+ct)$ என்ற தீர்வுகளில் $x=0$ வில் $y=0$ ஆக இருக்கவியலாதாகையால் இவ்விரு தீர்வுகளும் பொருந்தாது.

$y = -f(x-ct)+f(-x-ct)$ என்ற தீர்வு எல்லைக் கட்டுப்பாட்டைச் சமன் செய்வதைக் காணலாம். $x=0$ வில் எல்லா t-யின் மதிப்புகளுக்கும், $y = -f(-ct) + f(-ct) = 0$



படம் 11

(கம்பியின் முனை ஆதாரத்தில் நிகழும் அலையின் எதிரொளிப்பைப் படம் காட்டுகிறது. அடுத்தடுத்த நேரங்களில் கம்பியின் வடிவத்தைத் தொடர்க்கோடும், கம்பியின் முனைக்கப்பால் அலைவடிவத்தின் கற்பனை நீட்டிப்பை புள்ளிக்கோடும் காட்டுகின்றன.)

t என்ற நேரத்தில், $f(-x-ct)$ என்பது கம்பியின் இடதுபுறமாகச் செல்லும் அலைவடிவத்தைக் குறிக்கின்றது. இது தொடர்க் கோட்டால் படம் 11(a)-ல் கொடுக்கப்படுகின்றது. உறுதியான அதாரத்திற்கு இடதுபுறம் கம்பியில்லை. ஆனால் $f(x-ct)$ என்பது ஆதாரத்திற்கு இடது புறமுள்ள கற்பனைக் கம்பியில் வலதுபுறபுமாகச் செல்லும் அலையைக் குறிக்கின்றது. இக்கற்பனை அலைவடிவம் புள்ளிக் கோடால் படம் 11 (a)-ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. t-ன் மதிப்பு அதிகரிக்க, உண்மைக் கம்பியிலுள்ள அலை இடதுபுறமாகவும், கற்பனைக் கம்பியிலுள்ள அலை வலதுபுறமாகவும் நகர்கின்றன.

இவ்வலைகள் $x = 0$ வில் ஒன்ருக இணைகின்றன. ஆகவே $x=0$ வில் இணையும்பொழுது இரு அலைகளின் விளைவுகளும் ஒன்றுக்கொன்று ஈடு செய்வதால் அங்கு இடப்பெயர்ச்சி பூஜ்ஜியமாகும். சிறிது நேரத்தில் இவ்விரு அலைகளும் ஒன்றையொன்று கடந்து சென்று விடுகின்றன; கற்பனைக் கம்பிலிருந்த அலை உண்மைக் கம்பியிலும், உண்மைக் கம்பியிலிருந்த அலை கற்பனைக் கம்பியிலும் நிகழ்கின்றன. இத்தொடர் நிகழ்ச்சிகளையே படம் 11 காட்டுகிறது. நிகழ்வுற்றது, யாதெனில் கம்பியில் இடதுபுறமாகச் சென்று கொண்டிருந்த அலை $x=0$ என்ற ஆதாரத்தில் எதிரொளிப்புற்று வலது புறமாக அதே வடிவமைப்புடன் ஆனல் எதிர்க்குறியுடன் திரும்புகிறது. $x=0$ என்ற ஆதாரத்திலுள்ள எல்லைக் கட்டுப்பாடே இவ்வெதிரொளிப்பின் காரணமாகும். நாம் எடுத்துக் கொண்ட இம்மிக எளிய எல்லைக் கட்டுப்பாடினுல்தான் வடிவமைப்புடன் எதிரொளிப்பு நிகழ்கின்றது. வேறு விதமான எல்லைக் கட்டுப்பாடுகளை எடுத்துக் கொண்டால் மூல அலை வடிவத்திற்கும் எதிரொளிப்பு அலை வடிவத்திற்கும் பொதுவாக வேறுபாடுகள் இருக்கும். உறுதியான ஆதாரத்தை அலை தாக்கும்பொழுது, y பூஜ்ஜியமாகும் வண்ணம் மேற்புறம் அல்லது கீழ்ப்புறமாக கம்பியை ஆதாரம் இழுக்க வேண்டும். இவ்வாறு செய்வது தான் எதிரொளிப்பு அலையை உண்டாக்குகிறது.

§ 2.7 அளவிற்குட்பட்ட நீளமுடைய கம்பியில் நிற்கும் வகை அலைகளையும், கந்தழி நீளமுள்ள கம்பியில் முன்னேறும் அலைகளையும் ஆராய்வோம்.

§ 2.8 *முடிவுள்ள கம்பி* (Finite String): இப்பகுதியில் $x = 0, l$ புள்ளிகளில் இணைக்கப்பட்டிருக்கும் l நீளமுள்ள கம்பியில் நிகழும் அலைகளைப்பற்றி ஆராய்வோம். இரண்டாவது எல்லைக் கட்டுப்பாட்டின் முக்கிய விளைவு கம்பியின் இயக்கம் கால வட்ட ஒழுங்குடையது (Periodic) என்பதாகும். $x=0$ விலிருந்து கிளம்பும் அதிர்வு $x = l$ என்ற ஆதாரத்தை அடைந்து, பின், எதிரொளிக்கப்பெற்று $x=0$ விற்குத் திரும்புகின்றது. பிறகு $x=0$ வில் மறுமுறையும் எதிரொளிக்கப்படுகின்றது. ஆதாரங்கள் உறுதியானவையாகுல் எதிரொளிப்புகளுக்குப் பின்னர் அதிர்வின் வடிவம் மாறுபாடடைவதில்லை இங்கு இயக்கம் கால வட்ட ஒழுங்குடையது.

எல்லா நேரங்கள் t-க்கும் $x=0, l$ என்ற புள்ளிகளில் $y=0$ என்ற இரு எல்லைக் கட்டுபாடுகளுக்கு உட்பட்டு

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad (1)$$

என்ற அலையோட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வைக் காணவேண்டும்.

(1)-ன் தீர்வு,

$$y = \begin{matrix}\cos\\ \\ \sin\end{matrix} px \begin{matrix}\cos\\ \\ \sin\end{matrix} pct$$

இதில் எல்லா t-க்கும் $x = 0$ என்றால் $y = o$ என்ற எல்லைக் கட்டுப்பாட்டிலிருந்து y-ல் $\cos px$ உறுப்பு இருக்க வியலாது.

$$\therefore y = \sin px\,(a \cos pct + b \sin pct)$$

a, b, p என்ற மாறிலிகள் விதிக்,கட்டில்லா மாறிலிகள். எல்லா t-க்கும் $x = l$-ல் $y = 0$ என்ற கட்டுப்பாட்டிலிருந்து $\sin pl = 0$ அல்லது $a = b = 0$; இரண்டாவது வகையில் $0 \leq x \leq l$ உள்ள எல்லா x களுக்கும் $y = 0$. இச்சாரமற்ற (Trivial) வகையை விடுப்போம்.

$$\therefore \sin p\,l = 0$$

அதாவது $\quad p\,l = r\pi, \quad r = 1, 2, 3 \ldots\ldots\ldots$

$$p = \frac{r\pi}{l},\ r = 1, 2, 3 \quad \ldots\ldots\ldots$$

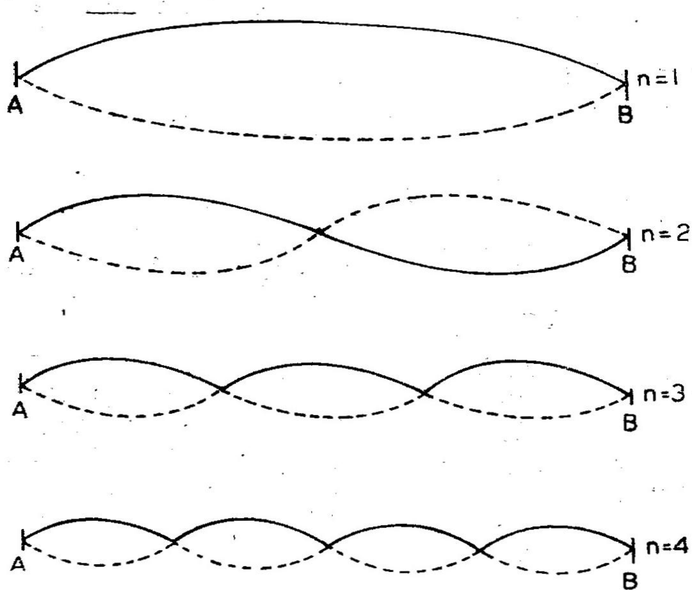
$$\therefore y = \sin \frac{r\pi x}{l}\left[a \cos \frac{r\pi ct}{l} + b \sin \frac{r\pi ct}{l}\right] \qquad (2)$$

r-ன் கூட்டு முழு எண் ஒவ்வொன்றுக்கும், (2) ஒரு தீர்வாகும். (2) ஒரு இயல்நிலை வகை (Normal mode) எனப்படும். (2)-ஐப் போன்ற வடிவுடைய எல்லாத் தீர்வுகளின் கூட்டுத் தொகை மிகப் பொதுவான தீர்வாகும். இது

$$y = \sum_{r=1}^{\infty} \sin \frac{r\pi x}{l} \left\{ a_r \cos \frac{r\pi ct}{l} + b_r \sin \frac{r\pi ct}{l} \right\} \qquad (3)$$

இதில் $\quad y_r = \sin \frac{r\pi x}{l} \left\{ a_r \cos \frac{r\pi ct}{l} + b_r \sin \frac{r\pi ct}{l} \right\} \qquad (4)$

என்பது r-ஆவது இயல்நிலை வகை (r^{th} Normal mode) எனப் படும். $r=1$ என்றால் (4) அடிப்படை இயல்நிலை வகை எனப் படும் (Fundamental normal mode).



படம் 12

இரு நிலையான புள்ளிகளுக்கிடையே கட்டப்பட்டுள்ள கம்பியில் நிகழும் நிற்கும்அலைகளுக்கு முதல் நான்கு ஒத்திசைகள்

§ 2.9. (4)லிருந்து, rவது இயல்நிலை வகையின் நிகழ் வெண் (Freqyency) $\frac{rc}{2l}$ மிகக்குறைந்த நிகழ்வெண்ணான $\frac{c}{2l}$க்கு அடிப்படைச்சுரம் (Fundamental) என்று பெயர். இசைக் கலையில் இவ்வடிப்படை நிகழ்வெண் இசையின் Pitch எனப் படும் மற்ற நிகழ்வெண்கள் $\frac{rc}{2l}$களுக்கு மேல்சுரங்கள் (Over Tones) என்று பெயர். ஆகவே இங்கு மேல்சுரங்கள் அடிப் படைச்சுரத்தை முழு எண்ணினால் பெருக்கக் கிடைப்பதாகும். அடிப்படைச்சுரத்துடன் இத்தகைய எளிய உறவு கொண்ட மேல்சுரங்கள் ஒத்திசைகள் (Harmonics) எனப்படும். அடிப் படை நிகழ்வெண் முதல் ஒத்திசை எனப்படும். முதல்

மேல்சுரம் (அடிப்படை சுரத்தின் இரு மடங்கு) இரண்டாவது ஒத்திசை எனப்படும். மேலும் இவ்வாறுகும் மிகச் சில அதிர்வுறும் அமைப்பு முறை (Vibrating system) களிலேதான் ஒத்திசை மேல்சுரங்கள் இருக்கின்றன. இவைகள்தான் எல்லா இசைக் கருவிகளின் அடிப்படையாக அமைகின்றன. அதாவது மேல் சுரங்கள் ஒத்திசையாக அமையும் பொழுது எழும் ஒலிதான் சிறப்பாக உள்ளது; ஒலி கேட்பதற்கு இனிமையாக அமைகின்றது. அடிப்படை இயல்நிலை வகையின் நிகழ் வெண் $= \dfrac{c}{2l}$

$$= \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{F}{P}} \qquad \left(\because\ c^2 = \frac{F}{P}\right)$$

இச் சமன்பாட்டை மேர்ஸனி (Mersenne) 1636ஆம் ஆண்டு சோதனைகள் மூலமாய் கண்டறிந்தார். இதன் மூலம் நாம் அறிவது அடிப்படை இயல்நிலை வகையின் நிகழ்வெண் நேராக (Directly) இழு விசையின் வர்க்கமூலத்தைப் போன்றும், நேர் மாருக (Inversely) நீளம், மற்றும், அடர்த்தியின் வர்க்கமூலம் போன்றும் மாறுபடுகின்றது. இது மேர்ஸனின் விதி (Mersenne's law) எனப்படும். மேர்ஸனின் விதி எல்லாவித கம்பி இசைக் கருவிகளாலும் நன்கு விளக்கப்படுவதைக் காணலாம். உதாரணமாக வயலினை இசைக்கும்பொழுது, ஒரே கம்பியிலிருந்து, அதன் நீளத்தை மாற்றியமைத்தலாலோ அல்லது அதன் இழு விசையை வேறுபடுத்தலாலோ வெவ்வேறு தனி ஒலியிசைகளைப் பெறலாம் என்பது யாவரும் அறிந்ததே. கம்பியினது சடப்பொருள், நீளம், பொருண்மை, முதலியன கொடுக்கப்பட்டால், ஒரு செவிடன்கூட கம்பி இசைக் கருவியை இசைத்து, வேண்டிய ஒலியினை எழுப்ப இயலும்; தேவையானது ஒரு அட்டவணைதான்!

அலை அதிர்வின் தொனி (Tone) அல்லது பண்பு ஒவ்வொரு மேல் சுரத்திலும் உள்ள அளவொத்த ஆற்றலினுல் (Energy) கட்டுப்படுத்தப்படுகின்றது. இதுதான் ஒவ்வொரு இசைக் கருவியின் சிறப்புப் பண்பாகும். சுருதி (Pitch) என்பது தொனி (Tone) என்பதனின்று வேறுபட்டுள்ளது; சுருதி அடிப்படை சுரத்தின் நிகழ்வெண்ணே.

§ 2.10 தொடக்கக் கட்டுப்பாடுகளிலிருந்து (Initial conditions) (4)-லிலுள்ள a_r, b_r ($r=1, 2\ldots\ldots\ldots$) மதிப்புகளைக் கண்டறியலாம்.

தொடக்கத்திலுள்ள—அதாவது $t=0$-ல் கம்பியின் வடிவம் $y_{t=o}=\varphi(x)$ என்றும் திசை வேகம் $\dot{y}_{t=o}\ \psi(x)$ என்றும் கொள்க.

∴ (3)லிருந்து

$$\varphi(x)=y_{t=o}=\sum_r a_r \sin\frac{r\pi x}{l} \tag{5}$$

$$\psi(x)=\dot{y}_{t=o}=\sum_r b_r \frac{r\pi c}{l} \sin\frac{r\pi x}{l} \tag{6}$$

∴ போயரின் பகுப்பாய்வு போன்று (Fourier Analysis) (5)-ன் இருபுறத்தையும் $\sin\frac{r\pi x}{l}$ ஆல் பெருக்கி 0-விலிருந்து l வரையுள்ள இடைவெளியில் (Interval) தொகை காண

$$\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{r\pi x}{l}\,\partial x = \int_0^l a_r \sin^2\frac{r\pi x}{l}\,\partial x +$$

$$\sum_{\substack{s\\ s\neq r}} \int_0^l a_r \sin\frac{s\pi x}{l}\sin\frac{r\pi x}{l}\,xd$$

$$= a_r\left[\frac{l}{2}\right]+0$$

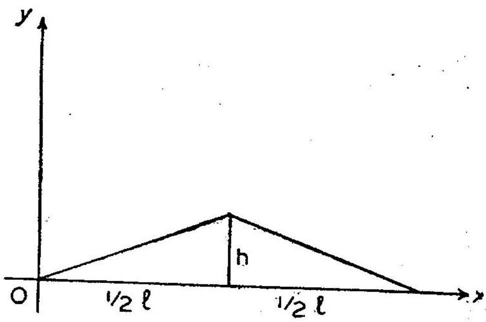
$$\therefore\ a_r=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{r\pi x}{l}\,dx \tag{7}$$

இதே போன்று, $$b_r=\frac{2}{r\pi c}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{r\pi x}{l}\,dx \tag{8}$$

குறிப்பாக, $t=o$வில் கம்பி ஓய்வு நிலையிலிருந்து (Rest) விடுவிக்கப் பட்டால் $\psi(x)=0$. ∴ $b_r=0$, $r=1, 2\ldots\ldots$

மாதிரி 1. $x=o$, $x=l$ புள்ளிகளில் இணைக்கப்பட்டுள்ள l நீளமுடைய கம்பியின் நடுப்புள்ளி சமநிலையிலிருந்து விடுவிக்கப்பட்டால், பின் நேரங்களில் உண்டாகும் இடப்பெயர்ச்சிகளைக் காண்க.

$$(8)\text{லிருந்து}\quad y=\sum_r \sin\frac{r\pi x}{l}\left(a_r\cos\frac{r\pi ct}{l}+b_r\sin\frac{r\pi ct}{l}\right)$$



படம் 13

தொடக்கக் கட்டுப்பாடுகள்,

$$\phi(x)=y_{t=o}=\frac{2hx}{l},\qquad 0\leq x\leq\frac{l}{2}$$

$$=\frac{2h(l-x)}{l},\qquad \frac{l}{2}\leq x\leq l$$

$$\psi(x)=\dot{y}_{t=o}=0,\qquad 0\leq x\leq l$$

$$(7)\text{ லிருந்து,}\quad a_r=\frac{2}{l}\int_o^l\phi(x)\sin\frac{r\pi x}{l}\,dx$$

$$=\frac{2}{l}\int_o^{l/2}\frac{2hx}{l}\sin\frac{r\pi x}{l}\,dx+\frac{2}{l}\int_{l/2}^{l}\frac{2h(l-x)}{l}\sin\frac{r\pi x}{l}\,dx$$

பகுதிப் படுத்தித் தொகைக் காண (Integrating by parts).

$$a_r = \frac{4h}{l^2}\left(\frac{-l}{r\pi}\right)\left\{ x \cos \frac{r\pi x}{l} \Big/_{0}^{l/2} - \int_{0}^{l/2} \cos \frac{r\pi x}{l}\, dx \right.$$

$$\left. + (l-x) \cos \frac{r\pi x}{l} \Big/_{l/2}^{l} + \int_{l/2}^{l} \cos \frac{r\pi x}{l}\, dx \right.$$

$$= \frac{8h}{r^2\pi^2} \sin \frac{r\pi}{2}$$

$$\therefore a_r = \begin{cases} \dfrac{8h}{r^2\pi^2}, & r = 1,\ 5,\ 9,\ 13 \ldots\ldots \text{என்றால்} \\ \dfrac{-8h}{r^2\pi^2}, & r = 3,\ 7,\ 11,\ 15 \ldots\ldots \text{என்றால்} \\ 0, & r = \text{இரட்டை எண் (Even number) என்றால்} \end{cases}$$

$$\therefore a_{2n+1} = \frac{8h}{(2n+1)^2\pi^2} \sin \frac{(2n+1)\pi}{2},\ a_{2n} = 0;\ n = 1,\ 2 \ldots$$

(8) லிருந்து, $b_r = 0 \quad r = 1,\ 2,\ 3 \ldots\ldots$

a_r , b_r மதிப்புகளைப் பிரதியீடு செய்ய,

$$\therefore \quad y = \sum_r \frac{8h}{r^2\pi^2} \sin \frac{r\pi}{2} \sin \frac{r\pi x}{l} \cos \frac{r\pi ct}{l}$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8h}{\pi^2} \frac{1}{(2n+1)^2} \sin (2n+1)\frac{\pi}{2} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{l}$$

$$\cos \frac{(2n+1)\pi ct}{l} \qquad (9)$$

இவ்வாறு, உரிய வீச்சுகளுடன் உள்ள இயல் நிலை வகைகளை ஒருங்கிணைக்க y-யின் மதிப்பு வருகிறது. இந்த வீச்சுகளுக்கு பகுப்பு வீச்சுகள் (Partial amplitudes) என்று பெயர். r-வது இயல்நிலை வகையின் பகுப்பு வீச்சுக்கெழு a_r ஆகும். இம் மாதிரி கணக்கில் r இரட்டையெண் என்றால் a_r மறைகிறது. மேலும் a_r, $\frac{1}{r^2}$-ன் அளவொத்ததாகும். ஆகவே, உயர் எண்ணிக்கை உடைய இயல் நிலை வகைகளுக்கு, வீச்சின் மதிப்பு மிகச் சிறியதாகும்.

மாதிரி 2 : இடப்பெயர்ச்சி செய்யப்படாமல் சமநிலையில் உள்ள கம்பிக்கு $t=0$ என்ற நேரத்தில் ஒரு தாக்களவை (Impulse) மூலம் $\phi(x) = \frac{4V}{l^2}\left(lx-x^2\right)$ என்ற பரவளையத் (Parabolic) திசைவேகப் பரவல் (Distribution) கொடுக்கப் படுகிறது. இங்கு V என்பது நடுப் புள்ளி $x=\frac{l}{2}$-ன் திசை வேகமாகும். பின் வெவ்வேறு நேரங்களில் உண்டாகும் இடப்பெயர்ச்சிகளைக் காண்க.

இங்கு $\phi(x) = 0$, $\phi(x) = \frac{4V}{l^2}(lx-x^2)$

(7)லிருந்து, $a_r = 0$

$$(8)\text{லிருந்து, } b_r = \frac{2}{r\pi c}\int_0^l \frac{4V}{l^2}(lx-x^2)\sin\frac{r\pi x}{l}\,dx$$

$$= \frac{16V}{r^8\pi^8 c}\left[1-(-1)^r\right]$$

$$= \frac{32lV}{r^4\pi^4 c}, \quad (r = \text{ஒற்றைப்படை எண் எனின்})$$

$$= 0, \quad (r = \text{இரட்டைப்படை எண் எனின்})$$

$$\therefore\ y = \frac{32lV}{\pi^4 c}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}\sin(2n+1)\frac{\pi x}{l}$$

$$\cos(2n+1)\frac{\pi ct}{l}$$

§ 2. 11 ஆற்றல் (Energy) :—

இயக்க ஆற்றல் (Kinetic Energy) :— கம்பியின் dx நீளத்தின் பொருண்மை ρdx, திசைவேகம் $\frac{\partial y}{\partial t}$. ஆகவே இந்தத் தனிமத்தின் இயக்க ஆற்றல் $\frac{1}{2}\rho dx\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$. 0-விலிருந்து l வரை தொகை காண முழுக்கம்பியின் இயக்க ஆற்றல் T கிடைக்கிறது

$$\therefore T = \frac{1}{2}\rho\int_0^l\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 dx \tag{10}$$

நிலை ஆற்றல் (Potential Energy) :—நேர்க்கோட்டுச் சமநிலையிலிருந்து கம்பியின் இடப்பெயர்ச்சி நிகழும்பொழுது கம்பியின் நீளம் சிறிது அதிகரிப்பதால் இழுவிசை F-இற்கு எதிராக வேலை (Work) செயல்படுத்தப்படுகிறது. இவ்வேலை நீட்சியின் F-மடங்காகும். இவ்வேலை கம்பியில் நிலைஆற்றலாகச் சேமித்து வைக்கப்பட்டுள்ளது. கம்பி மறுபடியும் நேர்க்கோட்டுச் சமநிலைக்கு வரும்பொழுது இதைத் திரும்பப் பெறுகிறது.

dx இயல் (Original) நீளமுடைய கம்பியின் ஒரு தனிமத்தின் நிலைஆற்றல் $F(ds-dx)$. ஆகவே முழுக்கம்பியின் நிலைஆற்றல் V, 0-விருந்து l வரை தொகை காணக் கிடைக்கிறது.

$$V = \int_{x=0}^{x=l} F(ds-dx)$$

$$= \int_0^l F\left\{\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}-1\right\}dx$$

$$= F\int_0^l\left\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\ldots\ldots\ldots-1\right\}dx$$

$$= \int_0^l F\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx \quad \text{(தோராயமாக)} \tag{11}$$

r-வது இயல்நிலை வகையில் கம்பி அதிர்ந்து கொண்டிருக்கும் பொழுது, இயக்க, நிலை ஆற்றல்களைக் காண்போம்.

$$y_r = \sin\frac{r\pi x}{l}\left[a_r\cos\frac{r\pi ct}{l} + b_r\sin\frac{r\pi ct}{l}\right] \qquad (4)$$

$$= A_r\sin\frac{r\pi x}{l}\cos\left(\frac{r\pi ct}{l} + E_r\right) \qquad (12)$$

இங்கு A_r என்பது வீச்சு, E_r என்பது மாறுபாட்டுப்படி.

(10)-லிருந்து,

$$(\text{இயக்க ஆற்றல்})_r = T_r = \tfrac{1}{2}\rho\int_0^l\left(\frac{\partial y_r}{\partial t}\right)^2 dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\rho\left(\frac{r\pi c}{l}A_r\right)^2\sin^2\left(\frac{r\pi ct}{l} + E_r\right)\int_0^l\sin^2\frac{r\pi x}{l}\,dx$$

இனி, $\int_0^l\sin^2\frac{r\pi x}{l}\,dx = \tfrac{1}{2}\int_0^l\left(1-\cos\frac{2r\pi x}{l}\right)dx$

$$= \tfrac{1}{2}\left[x - \frac{l}{2\pi r}\sin\frac{2r\pi x}{l}\right]_0^l$$

$$= \frac{l}{2} \qquad (13)$$

$$\therefore T_r = \frac{\rho c^2\pi^2}{4l}r^2A_r^2\sin^2\left(\frac{r\pi ct}{l} + E_r\right) \qquad (14)$$

(11)லிருந்து,

$$(\text{நிலை ஆற்றல்})_r = V_r = \frac{F}{2}\int_0^l\left(\frac{\partial y_r}{\partial x}\right)^2 dx$$

$$= \frac{F}{2}\left(\frac{r\pi}{l}A_r\right)^2 \cos^2\left(\frac{r\pi ct}{l} + E_r\right)\int_0^l \cos^2\frac{r\pi x}{l}dx$$

$$\int_0^l \cos^2\frac{r\pi x}{l}dx = \int_0^l\left(1-\sin^2\frac{r\pi x}{l}\right)dx = l - \frac{l}{2} = \frac{l}{2} \quad (15)$$

$$\therefore\ V_r = \frac{F\pi^2}{4l} r^2 A_r^2 \cos^2\left(\frac{r\pi ct}{l} + E_r\right)$$

$$= \frac{\rho c^2 \pi^2}{4l} r^2 A_r^2 \cos^2\left(\frac{r\pi ct}{l} + E_r\right) \quad (16)$$

$$(\because\ F = \rho c^2)$$

(14), (16)-லிருந்து. r-ஆவது இயல்நிலை வகை அதிர்வின் முழு ஆற்றல் $= \epsilon_r =$ (இயக்க ஆற்றல்)$_r$ + (நிலை ஆற்றல்)$_r$

$$= T_r + V_r$$

$$= \frac{\rho c^2 \pi^2}{4\,l} r^2 A_r^2 \quad (17)$$

= ஒரு மாறிலி

நிகழ்வெண் $= \dfrac{rc}{2l}$

ஆகவே (17)-லிருந்து, முழு ஆற்றல் நிகழ்வெண்ணின் இருபடி போன்றும், வீச்சின் இருபடி போன்றும் மாறுபடுகிறது.

அடுத்ததாகப் பொதுவகையில் ஆற்றல்களைக் காண்போம்

பொதுத் தீர்வு,

$$y = \sum_{r=1}^{\infty} \sin\frac{r\pi x}{l}\left[a_r \cos\frac{r\pi ct}{l} + b_r \sin\frac{r\pi ct}{l}\right] \quad (8)$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty} A_r \sin\frac{r\pi x}{l}\cos\left(\frac{r\pi ct}{l} + E_r\right)$$ என்போம். (18)

(10)லிருந்து,

$$T = \frac{\rho\pi^2c^2}{2l^2} \int_0^l \left\{ \sum_{r=1}^{\infty} r A_r \sin\frac{r\pi x}{l} \sin\left(\frac{r\pi ct}{l} + E_r\right) \right\}^2 dx \tag{19}$$

இச் சமன்பாட்டின் இடது பக்கத்திலுள்ள கந்தழித்தொடரின் வர்க்கம் காண, வர்க்க உறுப்புகள் (Square terms) குறுக்குப் பெருக்கல் உறுப்புகள் (Cross product terms) என்ற இரு வகையான உறுப்புகள் (Terms) கிடைக்கின்றன. இவைகளின் x-ஐப் பொருத்தத் தொகையை 0-விலிருந்து l வரை காண வேண்டும்.

(19)-ல் இருபடி உறுப்புகளின் ஒரு எடுத்துக் காட்டு,

$$r^2 A_r^2 \sin^2\frac{r\pi x}{l} \sin^2\left(\frac{r\pi ct}{l} + E_r\right)$$

(18)ஐப் பயன் படுத்தி,

$$\int_0^l r^2 A_r^2 \sin^2\frac{r\pi x}{l} \sin^2\left(\frac{r\pi ct}{l} + E_r\right) dx$$

$$= \frac{r^2 A_r^2}{2} l \sin^2\left(\frac{r\pi ct}{l} + E_r\right) \tag{20}$$

(19)-ல் பெருக்கல் உறுப்புகளின் ஒரு எடுத்துக் காட்டு,

$$rs A_r A_s \sin\frac{r\pi x}{l} \sin\frac{s\pi x}{l} \sin\left(\frac{r\pi ct}{l} + E_r\right) \sin\left(\frac{s\pi ct}{l} + E_s\right)$$

[$r \neq s$

ஆனல்,

$$\int_0^l \sin\frac{r\pi x}{l} \sin\frac{s\pi x}{l} dx = \tfrac{1}{2} \int_0^l \left[\cos\frac{(r-s)}{l}\pi x - \cos\frac{(r+s)}{l}\pi x\right] dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{l}{(r-s)\pi}\sin\frac{(r-s)}{l}\pi x - \frac{l}{(r+s)\pi}\sin\frac{(r+s)}{l}\pi x\right]\Big/_{0}^{l}$$

$$= 0 \qquad (21)$$

ஆகவே பெருக்கல் உறுப்புகளுக்கு இயங்கு ஆற்றலில் பங்கேதுமில்லை. (19)-ல் r-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் வர்க்க உறுப்புகளை, (20)ஐப் பயன்படுத்திக் கூட்ட

$$T = \frac{\rho c^2\pi^2}{2l^2}\sum_{r=1}^{\infty} r^2 A_r^2 \sin^2\left(\frac{r\pi ct}{l} + E_r\right)\left[\frac{l}{2}\right]$$

$$= \frac{\rho c^2\pi^2}{4l}\sum_{r=1}^{\infty} r^2 A_r^2 \sin^2\left(\frac{r\pi ct}{l} + E_r\right) \qquad (22)$$

(11)-லிருந்து, பொதுவகையில் நிலை ஆற்றல்,

$$= V = \frac{F\pi^2}{2l^2}\int_0^l \left\{\sum_{r=1}^{\infty} r\, A_r \cos\frac{r\pi x}{l}\right.$$

$$\left.\cos\left(\frac{r\pi ct}{l} + E_r\right)\right\}^2 dx \qquad (23)$$

இடது பக்கத்தின் வர்க்க உறுப்புகளின் ஒரு எடுத்துக்காட்டின் தொகை காண,

$$\int_0^l r^2 A_r^2 \cos^2\frac{r\pi x}{l}\cos^2\left(\frac{r\pi ct}{l} + Er\right) dx =$$

$$\frac{r^2 A_r^2\, l}{2}\cos^2\left(\frac{r\pi ct}{l} + E_r\right) \qquad (24)$$

இடது பக்கக் குறுக்குப் பெருக்கல் உறுப்புகளின் ஒரு எடுத்துக் காட்டு, $r\, s\, A_r\, A_s \cos\frac{r\pi x}{l}\cos\frac{s\pi x}{l}\cos\left(\frac{r\pi ct}{l}+E_r\right)$

$$\cos\left(\frac{s\pi ct}{l}+E_s\right);\ (r\neq s)$$

ஆனால்,

$$\int_0^l \cos\frac{r\pi x}{l}\cos\frac{s\pi x}{l}\,dx = \tfrac{1}{2}\int_0^l\left[\cos\frac{(r+s)\pi x}{l}+\cos\frac{(r-s)\pi x}{l}\right]dx$$

$$=\tfrac{1}{2}\left[\frac{l}{(r+s)\pi}\sin\frac{(r+s)\pi x}{l}+\frac{l}{(r-s)\pi}\sin\frac{(r-s)\pi x}{l}\right]_0^l$$

$$=0$$

ஆகவே, குறுக்குப் பெருக்கல் உறுப்புகளுக்கு நிலைஆற்றலில் பங்கேதுமில்லை. (23)இல், r-ன் எல்லா மதிப்புக்ளுக்கும் வர்க்க உறுப்புகளை (24) ஐப் பயன்படுத்திக் கூட்ட,

$$V=\frac{F\pi^2}{2l^2}\sum_{r=1}^{\infty} r^2 A_r^2\cos^2\left(\frac{r\pi ct}{l}+E_r\right)\left[\frac{l}{2}\right]$$

$$=\frac{\rho c^2\pi^2}{4l}\sum_{r=1}^{\infty} r^2 A_r^2\cos^2\left(\frac{r\pi ct}{l}+E_r\right) \qquad (25)$$

$$[\because\ F=\rho c^2]$$

$\therefore$ பொது வகையில் முழு ஆற்றல் $\epsilon = T+V$

$$=\frac{\rho c^2\pi^2}{4l}\Sigma r^2 A_r^2 \qquad (26)$$

= ஒரு மாறிலி.

(14), (16), (17), (22), (25), (26) என்ற சமன்பாடுகளி லிருந்து கீழ்க்கண்ட மிக முக்கியமான முடிவை வகுத்துரைக்க லாம் (State). ஒரு கம்பியின் குறுக்கே அதிர்வின் இயக்க, நிலை, முழு ஆற்றல் முறையே இவ்வதிர்வு பிரிக்கப்படும் ஒவ்வொரு இயல்நிலை வகைகளின் இயக்க, நிலை, முழு ஆற்றல்களின் கூட்டுத் தொகைக்குச் சமமாகும்.

மாதிரிகள் 1, 2 இவைகளுக்கு இயக்க, நிலை, முழு ஆற்றல் களைக் காண்போம் :

மாதிரி 1லிருந்து, $y = \frac{8h}{\pi^2} \Sigma \frac{1}{r^2} \sin \frac{r\pi}{2} \sin \frac{r\pi ct}{l} \cos \frac{r\pi ct}{l}$

(18)ஆம் சமன்பாட்டுடன் இதை ஒத்து நோக்க,

$$A_r = \frac{h8}{\pi^2} \frac{1}{r^2} \sin \frac{r\pi}{2}$$

$$E_r = 0$$

$$\therefore A_{2n} = 0$$

$$A_{2n+1} = \frac{8h}{\pi^2} \frac{1}{(2n+1)^2} \sin \frac{(2n+1)\pi}{2}$$

இதன் விளைவாக, இரட்டைப்படை இயல்நிலை வகைகள் ஒவ் வொன்றின் முழு ஆற்றலும் பூஜ்ஜியம்; $(2n+1)$ஆவது இயல்நிலை வகையின் முழு ஆற்றல் $\frac{16c^2h^2\rho}{(2n+1)^2\pi^2 l}$. rஆவது இயல்நிலை வகை யின் ஆற்றல் r^{-2}-ன் அளவொத்ததாகையால், நிகழ்வெண் ணின் மதிப்பு அதிகரிக்க ஆற்றலின் மதிப்பு குறைகிறது. ஆகவே, ஆற்றலின் பெரும் பகுதி கீழ் இயல்நிலை வகைகளைச் சார்ந்ததென அறிகிறோம். மேலும், சில ''தேவையற்ற'' இயல் நிலை வகைகளைத் தகுந்த தொடக்கக்கட்டுப்பாடுகள் மூலம் புறக்கணிக்க இயலும். உதாரணமாக, பியானோ (Piano)வில் 7-வது மேல் சுரம் இனிமையற்றதாகையால், இம் மேல்சுரத் தைப் புறக்கணிக்க, பொதுவாக, கம்பியின் $\frac{1}{7}$-வது புள்ளி செம்மட்டியால் (Hammer) அடிக்கப்படுமாறு பியானோ அமைக் கப்படுகின்றது.

இனி, (22)லிருந்து,

$$\text{இயக்க ஆற்றல்} = T = \frac{\rho c^2 \pi^2}{4l} \sum_{r=1}^{\infty} r^2 A_r^2 \sin^2 \frac{(r\pi ct)}{l}$$

$$= \frac{16\rho c^2 h^2}{l\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \sin^2 \frac{r\pi ct}{l} \qquad (27)$$

(25)லிருந்து,

$$\text{நிலை ஆற்றல்} = V = \frac{\rho c^2 \pi^2}{4l} \sum_{r=1}^{\infty} r^2 A_r^2 \cos^2 \frac{(r\pi ct)}{l}$$

$$= \frac{16\rho c^2 h^2}{l\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos^2 \frac{r\pi ct}{l} \qquad (28)$$

∴ (27), (28)லிருந்து,

$$\text{முழு ஆற்றல்} = \epsilon = \frac{16\rho c^2 h^2}{l\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \qquad (29)$$

ஆனால்,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$$

$$= \frac{\pi^2}{8}$$

$$\therefore \text{முழு ஆற்றல்} = \epsilon = \frac{2\rho c^2 h^2}{l} = \frac{2Fh^2}{l} \qquad [\because F = \rho c^2]$$

இம் முடிவைத் தொடக்கக் கட்டுப்பாடுகள் மூலமாகச் சரிபார்த்துக் கொள்ளவியலும். தொடக்கத்தில் கம்பியானது இழுக்கப்பட்டு ஓய்வு நிலையிலிருந்து விடுவிக்கப்பட்டதால் திசை வேகம் பூஜ்ஜியம்; ஆகவே முழு ஆற்றல் தொடக்கத்தில் நிலை ஆற்றலாக மட்டுமே இருந்தது. இழு விசை F-ன் நீளநீட்சி நிலை ஆற்றலாகும்.

தொடக்கத்தில் நிலை ஆற்றல் $= F\left[2\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2+h^2}-l\right]$

$$= Fl\left[\left(1+\frac{4h^2}{l^2}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right]$$

$$= Fl\left[1+\frac{1}{2}\frac{4h^2}{l^2}+\dots\dots\dots-1\right]$$

$$= \frac{2Fh^2}{l}\left[1+0\left(\frac{2h}{l}\right)^2\right]$$

$$= \frac{2Fh^2}{l}$$

[ஒருமத்துடன் ஒப்பிட $o\left(\frac{2h}{l}\right)^2$ ஐப் புறக்கணித்து விடலாம்] இது நாம் (30)ஆம் சமன்பாட்டில் கண்ட முழு ஆற்றலின் மதிப்பேயாகும்.

மொத்த முழுஆற்றலில் அடிப்படை இயல்நிலை வகையிலுள்ள முழுஆற்றலின் பங்கு (29) வது சமன் பாட்டின் முதல் உறுப்புக்கும், தொடரின் கூட்டுத்தொகைக்கும் உள்ள விகிதம் (தகவு) (Ratio) போன்றது; இது $1 : \frac{\pi^2}{8}$ ஆகும். அதாவது மொத்த முழுஆற்றலில் $\frac{8}{\pi^2}$ பங்கு அடிப்படை இயல்நிலை வகையில் உள்ளது. $\pi^2 \simeq 9.87$. ∴ மொத்த முழுஆற்றலில் 80% க்கும் அதிகமான பங்கு முதல் இயல்நிலை வகையிலே உள்ளது.

இக் குறிப்பிட்ட மாதிரிக் கணக்கு வயலின் கம்பியை நடுப் புள்ளியில் மீட்டுவதை ஒத்திருக்கிறது. இதில் அடிப்படைச் சுரம் தவிர ஏனைய மேற்சுரங்களும் ஒலிக்கின்றன; இம்மேற் சுரங்கள் அடிப்படைச் சுரத்துடன் முழுஎண் அளவில் தொடர் புடையன. ஆகவே ஒரு கலப்பற்ற தனி ஒலியிசை (Note) யாக இருக்க வியலாது எனினும், மேற்சுரங்கள் குறைந்த அளவில் உள்ளதால் பெரும்பாலான இசைக் கருவிகளை விட, முக்கிய மாகப் பியானோவை விட, இது முரணொலிக் கலப்பற்றதாகும்.

கம்பியானது, நடுப்புள்ளி அல்லாத வேறு புள்ளியில் மீட்டப் பட்டால், பகுப்பு வீச்சுக்கள் மாறுபடும் ; இதனால் ஆற்றலின் மதிப்பு மாறுபடும் ; ஆகவே தொனியும் (Tone) வேறுபடும். கம்பியில் சரியான புள்ளியைத் தேர்ந்தெடுப்பதன் மூலம் தேவையான சுரத்திற்கு அழுத்தம் கொடுக்கவோ அல்லது குறைக்கவோ இயலும். இதனை இசை வல்லுனர்கள் நன்கு அறிவர் !

மாதிரி 2 லிருந்து, $y=\frac{32lV}{\pi^4 c}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}$

$$\sin(2n+1)\frac{\pi x}{l}\cos(2n+1)\frac{\pi ct}{l}$$

சமன்பாடு (18)டுடன் இதை ஒத்து நோக்க,

$A_r=\frac{32lV}{r^4\pi^4 c}$, r-ஒற்றைப் படை எண் எனின்

$=0$, r இரட்டைப் படை எண் எனின்

$$E_r=-\frac{\pi}{2}$$

$\therefore$ (22) லிருந்து,

இயக்க ஆற்றல் $=T=\frac{\rho c^2\pi^2}{4l}\sum_{r=1}^{\infty}r^2A_r^2\sin^2\left(\frac{r\pi ct}{l}+E_r\right)$

$$=\frac{256\,\rho lV^2}{\pi^6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^6}\cos^2\frac{(2n+1)\pi ct}{l} \quad (31)$$

(25) லிருந்து,

நிலை ஆற்றல் $=V=\frac{\rho c^2\pi^2}{4l}\sum_{r=1}^{\infty}r^2A_r^2\cos^2\left(\frac{2r\pi ct}{l}+E_r\right)$

$$=\frac{256\,\rho lV^2}{\pi^6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^6}\sin^2\frac{(2n+1)\pi ct}{l} \quad -(32)$$

$$\therefore \ (31), (32) \text{ முழு ஆற்றல்} = \epsilon = \frac{256 \rho l V^2}{\pi^6} \sum_{n=o}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^6} \qquad (33)$$

$$\text{ஆனல்} \sum_{n=o}^{\infty} \frac{1}{2n+1^6} = \frac{1}{1^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \ldots\ldots$$

$$= \frac{\pi^6}{960}$$

$$\therefore \quad \epsilon = \frac{4}{15} \rho l V^2 \qquad (34$$

இக் கணக்கில், தொடக்கத்தில் இடப்பெயர்ச்சி பூஜ்ஜியம், திசை வேகம் $= \frac{4V}{l^2} (lx - x^2)$. இங்கு முழு ஆற்றலும் தொடக்கத்தில் இயக்க ஆற்றலாக மட்டுமே இருந்தது. ஆகவே,

$$\text{தொடக்கத்தில் இயக்க ஆற்றல்} = \tfrac{1}{2}\rho \int_{o}^{l} \left[\frac{4V}{l^2}(lx - x^2) \right]^2 dx$$

$$= \frac{4}{15} \rho V^2 l$$

இது நாம் (34)வது சமன்பாட்டில் கண்ட முழு ஆற்றலின் மதிப்பேயாகும்.

மொத்த முழு ஆற்றலின், அடிப்படை இயல்நிலை வகையிலுள்ள முழு ஆற்றலின் பங்கு, (33)வது சமன்பாட்டின் முதல் உறுப்புக்கும் தொடரின் கூட்டுத் தொகைக்கும் உள்ள விகிதம் போன்றது ; இது $1 : \frac{\pi^6}{960}$ அல்லது 99.86%. ஆகவே மொத்த முழு ஆற்றலில் 99.86% முதல் இயல் நிலை வகையிலேயே உள்ளது.

§ 2.12 இயல் நிலை ஆயக்கூறுகள் : (Normal co-ordinates)

சமன்பாடு (4) லிருந்து $x=o$, $x=l$ இணைக்கப்பட்ட l நீளமுள்ள கம்பியில் அதிர்வின் r-வது இயல் நிலை வகை

$$Y_r=\sin\frac{r\pi x}{l}\left[a_r\cos\frac{r\pi ct}{l}+b_r\sin\frac{r\pi ct}{l}\right] \tag{4}$$

இதை,

$$Y_r=A_r\sin\frac{r\pi x}{l}\cos\left(\frac{r\pi ct}{l}+E_r\right)$$

என எழுதவியலும்.

சமன்பாடு (12)ல் $A_r\cos\left(\frac{r\pi ct}{l}+E_r\right)$

என்பதற்குப் பதிலாக ϕ_r எனப் பிரதியீடு செய்ய,

$$y_r=\phi_r\sin\frac{r\pi x}{l} \tag{4a}$$

இதே போன்று (1)-ன் மிகப் பொதுவான தீர்வை எடுத்துக் கொண்டால்

$$y=\sum_{r=1}^{\infty}\sin\frac{r\pi x}{l}\left(a_r\cos\frac{r\pi ct}{l}+b_r\sin\frac{r\pi ct}{l}\right) \tag{3}$$

$$=\sum_{r=1}^{\infty}A_r\sin\frac{r\pi x}{l}\cos\left(\frac{r\pi ct}{l}+E_r\right)$$

$$=\sum_{r=1}^{\infty}\phi_r\sin\frac{r\pi x}{l} \tag{3a}$$

இங்கும் $\phi_r=A_r\cos\left(\frac{r\pi ct}{l}+E_r\right)$, $r=1, 2, 3$

ϕ_r, ($r=1, 2, 3, \ldots\ldots$), என்பன கம்பியின் இயல்நிலை ஆயக்கூறுகள் (Normal co-ordinates) எனப்படும். அதிரும் கம்பியின் கட்டின்மை எண்ணிக்கை (Degrees of freedom)

கந்தழியாகையால் இத்தகைய இயல்நிலை ஆயக்கூறுகள் கந்தழியுள்ளன. இந்த இயல்நிலை ஆயக்கூறுகளின் பயன் களைச் சமன்பாடுகள் (22), (25) களிலிருந்து காணலாம். சமன்பாடு (22)லிருந்து,

$$\text{இயக்க ஆற்றல்} = T = \frac{\rho c^2 \pi^2}{4l} \sum_r r^2 A_r^2 \sin^2\left(\frac{r\pi ct}{l} + E_r\right)$$

$$= \tfrac{1}{4}\rho l \sum_r \phi_r^2 \qquad (22a)$$

$$\text{நிலையாற்றல்} = V = \frac{\rho c^2 \pi^2}{4l} \Sigma\, r^2 A_r^2 \cos^2\left(\frac{r\pi ct}{l} + E_r\right)$$

$$= \frac{\rho c^2 \pi^2}{4l} \Sigma\, r^2 \phi_r^2 \qquad (25a)$$

இயக்கவியலிலிருந்து (Mechanics) q_1, q_2, $q_2 \ldots\ldots q_w$ என்ற ஆயக்கூறுகள் இயல் நிலை ஆயக்கூறுகளெனின், இவ்வாயக் கூறுகள் மூலம், இயக்க ஆற்றலையும், நிலையாற்றலையும் கீழ்க் கண்டவாறு கொடுத்தல் இயலும்.

$$T = a_1 \dot{q}_1^2 + a_2 \dot{q}_2^2 + a_3 \dot{q}_3^2 + \ldots\ldots$$

$$V = b_1 q_1^2 + b_2 q_2^2 + b_3 q_3^2 + \ldots\ldots$$

சமன்பாடுகள் (22a), (25a) இவற்றில் இயக்க ஆற்றல் மற்றும் நிலையாற்றல்களின் கோவைகள் φ_1, φ_2, φ_3,......களில் மேற் கண்டவண்ணம் அமைந்துள்ளதைக் காணலாம். இக்காரணம் பற்றியே φ_1, φ_2, φ_3.......என்பன (q_1, q_2, q_3, ...போன்று) இயல் நிலை வகை ஆயக் கூறுகள் எனப்படுகின்றன.

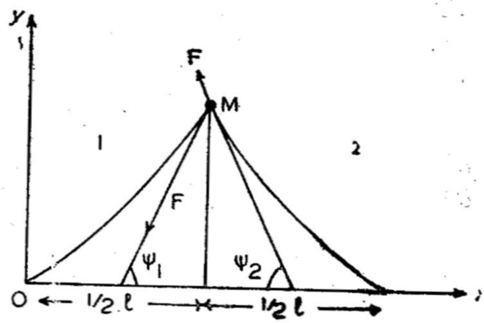
இயக்கவியலில், q_r என்ற இயல்நிலை ஆயக்கூறு, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right) + \frac{\partial V}{\partial q_r} = 0$ என்னும் லெக்ரான்ஜின் சமன் பாட்டைச் (Lagrange's Equation) சமன் செய்வதை அறிவோம். இதே போன்று, மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள இயக்க, நிலை ஆற்றல்களின் கோவைகளிலிருந்து,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_r}\right) + \frac{\partial V}{\partial \phi_r} = 0,$$

$$r = 1, 2, 3, \ldots\ldots$$

எனவே, ϕ_r, ($r = 1, 2, 3, \ldots\ldots$) என்பனவும் லெக்ரான்ஜின் சமன்பாட்டைச் சமன் செய்கின்றன என அறிகிறோம்.

§ 2.13 நடுப்புள்ளியில் M பொருண்மை கட்டப்பட்டுள்ள l நீளமுள்ள ஒரு கம்பியின் இயல்நிலை வகைகளை ஆராய்வோம்



படம் 14

பளு ஏற்றப்படாத கம்பியில், அதிர்வுகள்

$$y = \sin \frac{r\pi x}{l} \left[\; a_r \cos \frac{r\pi ct}{l} + b_r \sin \frac{r\pi ct}{l} \right] \qquad (4)$$

என்ற சமன்பாட்டால் பெறப்படுகின்றன. இங்கு $x = 0$, $\frac{l}{r}$, $\frac{2l}{r}$ ……… $\frac{(r-1)\,l}{r}$, l என்ற புள்ளிகள் கணுக்கள். ஆகவே இரட்டைப் படை இயல் நிலை வகைகளில் (r-இரட்டைப் படை எண், நடுப்புள்ளி ஒரு கணுவாகும்; அதாவது இரட்டைப் படை இயல் நிலை வகைகளில் நடுப் புள்ளியில் அதிர்வு கிடையாது. இதன் மூலம் நடுப் புள்ளியில் பொருண்மை கட்டப்படுவதால் இரட்டைப்படை இயல் நிலை வகைகள் பாதிக்கப்படுவதில்லை என்பது தெளிவாகிறது. எனவே, இங்கு ஒற்றைப் படை இயல் நிலை வகைகளையே ஆராய்வோம்.

நடுப் புள்ளியில் தொடர்ச்சி முறிவு (Discontinuity) உள்ளது. $0 \leq x \leq l/_2$, $l/_2 \leq x \leq l$ என்ற பகுதிகளிலுள்ள அதிர்வுகளை முறையே y_1, y_2 என்று கொள்வோம். நடுப்புள்ளியைப் பொருத்து இருபுறமும் y செவ்வொழுங்குடன் (Symmetrical) இருக்குமாறு இவ்விரு கோவைகளும் இருத்தல் வேண்டுமென்பது தெளிவு. $x = 0$வில் y_1-உம், $x = l$லில் y_2-உம் மறைய வேண்டும்.

மேலும், $x = \frac{l}{2}$-ல் $y_1 = y_2$

இந்த எல்லைக் கட்டுப் பாடுகளை

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= a \sin px \cos (pct+E) \\ y_2 &= a \sin p(l-x) \cos (pct+E) \end{aligned}\right\} \quad (25)$$

என்ற தீர்வுகள் சமன் செய்கின்றன என்பதை எளிதில் கண்டறியலாம். பொருண்மை M-ன் இயக்கத்திலிருந்து மற்றொரு எல்லைக் கட்டுப்பாடும் உள்ளது :

$$M\left[\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right]_{x=\frac{l}{2}} = F\left[\sin \phi_2 - \sin \phi_1\right]_{x=\frac{l}{2}}$$

$$= F\left[\tan \phi_2 - \tan \phi_1\right]_{x=\frac{l}{2}}$$

(ϕ_1, ϕ_2 என்பன மிகக் குறைந்த மதிப்புடையதால், தோராயமாக)

$$= F\left[\frac{\partial y_2}{\partial x} - \frac{\partial y_1}{\partial x}\right]_{x=\frac{l}{2}} \quad (36)$$

y_1, y_2 மதிப்புகளை (35)லிருந்து (36)-ல் பிரதியீடு செய்ய

$$\frac{pl}{2} \tan \frac{pl}{2} = \frac{Fl}{Mc^2}$$

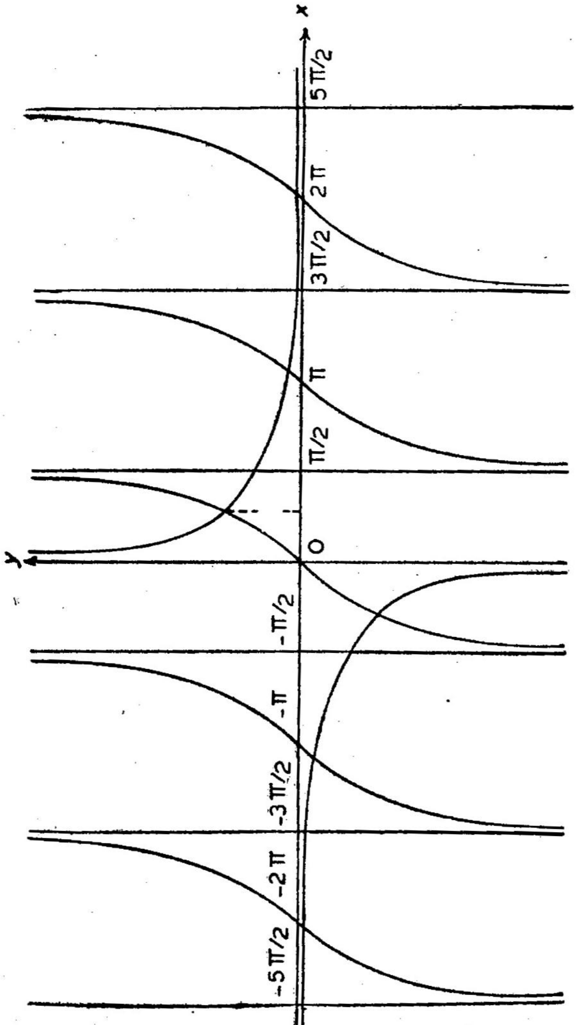
$$= \frac{\rho l}{M} \quad (\because \quad F = \rho c^2) \quad (37)$$

= ஒரு மாறிலி

$\frac{pl}{2} = x$ என்க

$\therefore$ $\frac{pl}{2}$-ன் மதிப்பு, $x \tan x = \frac{pl}{M}$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளில் எதுவாகிலும் ஒன்ருக இருக்கலாம். இது கந்தழி எண்ணிக்கையுடைய தீர்வுகளைக் கொண்ட கடந்தச் சமன் பாடாகும் (*Transcendental Equation*). இதன் தீர்வுகளை வரைபடத்தின் வாயிலாகக் காணலாம். $Y = \tan x$, $Y = \frac{\rho l}{Mx}$ என்ற வளைவரைகள் வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளிகளின் x-ஆயக்

கூறுகள்தான் இச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகளாகும். படத்திலிருந்து x-ன் மதிப்புகள் $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, $\left(2\pi, \frac{5\pi}{2}\right)$, $\left(3\pi, \frac{7\pi}{2}\right)$..........என்ற இடைவெளிகளில் அமைந்துள்ளதைக் காணலாம்.



படம் 15

இத் தீர்வுகளை முறையே x_0, x_1, x_2, x_3, x_4......என்போம்,

$$\therefore \quad r\pi < x_r < (r+\tfrac{1}{2})\pi \tag{38}$$

$r=0,\ 1,\ 2,\ 3$..........

மேலும் $p=\dfrac{2x_r}{l}, \qquad r=0,\ 1,\ 2$

சமன்பாடுகள் (35)-லிருந்து,

$$\text{நிகழ்வெண் } n=\frac{cp}{2\pi}$$

$$=\frac{c\,x_r}{\pi l}$$

$\therefore$ (38)-லிருந்து, நிகழ்வெண் $\dfrac{cr}{l}$ க்கும், $\dfrac{c\,(r+\frac{1}{2})}{l}$ க்கும் இடையே அமைந்துள்ளது.

ஆனால், பொருண்மை M கட்டப்படவில்லையாயின், அதாவது $M=0$ என்றால், (37)-லிருந்து,

$$\frac{pl}{2}\tan\frac{pl}{2}=\infty$$

$$\therefore \quad \cos\frac{pl}{2}=0 \quad \text{அல்லது} \quad \frac{pl}{2}=(r+\tfrac{1}{2})\pi$$

$$\text{இந்த வகையில், நிகழ்வெண் } = \frac{c}{l}\,(r+\tfrac{1}{2})$$

$\therefore$ பொருண்மை M கட்டப்பட்டிருப்பதன் விளைவால் ஒற்றைப்படை இயல்நிலை வகைகளின் நிகழ்வெண்கள் குறைவான மதிப்புகளைப் பெறுகின்றன.

$$\text{இனி, } x\tan x=\frac{\rho l}{M} \quad \left(\text{இங்கு, } x=\frac{\rho l}{2}=\frac{\pi l r}{c}\right) \tag{39}$$

சமன்பாடு (39)லிருந்து இயல்நிலை வகைகளின் நிகழ்வெண்களின் மதிப்புகளையும் இதனால் காலக்கூறுகளின் மதிப்புகளையும் அறியலாம். ஆதலால் (39)-காலக் கூறுச் சமன்பாடு (Period Equation) எனப்படும். சமன்பாடு (39)-ன் தீர்வுகளில்

அடுத்தடுத்த மதிப்புகள் அதிகரித்துச் செல்லுவதை (38)-லிருந்து அறிகிறோம். ஆனால் $x \tan x =$ ஒரு அளவிற்குட்பட்ட மாறிலி. $\therefore x \to \infty$ என்றாலும் $x \tan x =$ ஒரு அளவிற்குட்பட்ட மாறிலி. $x \to \infty$ எனின் $\tan x = 0$ என்றால்தான் இவ்வாறு இருக்க இயலும். $\therefore x = r\pi$. இதுதான் முதல் தோராயம் (First approximation).

இனி, $x = r\pi + h$ என்போம்; h மிகச் சிறியது.

$$\therefore \ (r\pi+h) \ \tan \ (r\pi+h) = \frac{\rho l}{M}$$

அதாவது, $(r\pi+h) \tan h = \dfrac{\rho l}{M}$

அதாவது, $(r\pi+h)\, h = \dfrac{\rho l}{M}$, h மிகச்சிறியது என்பதால்,

அதாவது, $r\pi\, h = \dfrac{\rho l}{M}$, h மிகச்சிறியது என்பதால்,

$$h = \frac{\rho l}{M r\pi}$$

$$\therefore \ x = r\pi + \frac{\rho l}{M r\pi}$$

இது இரண்டாவது தோராயம் (Second approximation).

§ 2.14 *காற்றின் தடை* (Resistance of air) :— உராய்வு (Friction) அல்லது வேறு ஏதேனும் அழிவு செய்யும் (Dissipative) விசையின் விளைவால் அதிர்வு தளர்வுறுமாயின் (Damps) அலை ஓட்டத்தின் சமன்பாட்டில் மிக முக்கியமானதொரு திருத்தம் செய்தல் அவசியம். உதாரணமாகக் காற்று இயக்கத்திற்குத் தடையாக இருக்கலாம். இத்தடை ஏறத்தாழ அதிர்வின் திசைவேகத்தை ஒத்திருக்கும். மெய்யியல்பில் இத்தடை மிகவும் சிக்கலானது. திசைவேகத்தின் அளவைப் போல் அவ்வளவு எளிதானதல்ல. உண்மையில், காற்றின் தடை மிகச் சிக்கலான முறையில் திசை வேகத்தின் வளர்ச்சியைவிட அதி விரைவாக அதிகரிக்கும் இயல்புடையது. மேலும் உள் உராய்வு (Internal friction), கம்பி முனைகளில் ஏற்படும் தளர்ச்சி, போன்ற அழிவுசெய்யும் விசைகளும் அதிர்வுறும் கம்பியைத் தாக்கு

கின்றன. எனினும், நடைமுறையில் எல்லாத் தளர்ச்சிவிசைகளால் ஏற்படும் முக்கிய விளைவுகளையும் தளர்ச்சிவிசை திசைவேகத்தின் அளவொத்தது என்று கொள்வதால் பெறலாம். எனவே, முனைகளில் கட்டப்பட்டுள்ள l நீளமுள்ள கம்பியில், திசைவேகத்தின் அளவொத்தத் தடைக்குட்பட்ட அதிர்வுகளைப் பற்றியே இங்கு ஆராய்வோம். இங்கு அலையோட்டத்தின் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டைக் காண கம்பியில் PQ என்ற சிறு தனிமத்தை எடுத்துக் கொள்வோம். (படம் 10) ஒரும நீளக் கம்பியில் காற்றின் தடை, $k\rho \frac{\partial y}{\partial t}$ உம் அதிர்விற்கு எதிர்த் திசையில் நிகழ்கிறது. எனவே PQவில் அதன் இருமுனைகளிலுள்ள இழுவிசைகளும், $-k\rho\, \partial x \frac{\partial y}{\partial t}$ உம் செயல் புரிகின்றன.

$\therefore$ y- திசையில் PQவின் இயக்கத்தின் சமன்பாடு

$\rho\, \partial x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F \sin(\phi + \partial\phi) - F\sin\phi - k\rho\, \partial x\, \frac{\partial y}{\partial t}$. முன்போல ஒன்றைப் பொருத்து$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$- ஐ விட்டுவிட

$$\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - k\rho \frac{\partial y}{\partial t}$$

அல்லது $$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\left[\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + k\frac{\partial y}{\partial t}\right];\ \left(c^2 = \frac{F}{\rho}\right) \qquad (40)$$

இதுவே திருத்தியமைக்கப்பட்ட அலையோட்டத்தின் சமன்பாடு. இது தந்தி அலையின் சமன்பாடு (Equation of Telegraphy) எனப்படும்.

$y = u(x, t).\ e^{-\frac{kt}{2}}$ என்க.

$$\therefore \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}.\ e^{-\frac{kt}{2}};\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ e^{-\frac{kt}{2}}$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{k}{2}u\right).\ e^{-\frac{kt}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - k\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{k^2}{4}u\right) e^{-\frac{kt}{2}}$$

∴ சமன்பாடு (40)-லிருந்து,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{k^2}{4}u\right) \qquad (41)$$

பொதுவாக k மிகச் சிறியது. ஆகையால் k^2-ஐ புறக்கணித்து விடலாம்.

$$\therefore \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

இது அலையோட்டச் சமன்பாட்டின் திட்ட வடிவமாதலால் (Standard form) முன் கண்ட தீர்வுகளுக்கும் இது பொருந்தும். ∴ (40)-ன் தீர்வை அறியலாம். இதில் அழிவு செய்யும் உறுப்பு (Dissipative term) $e^{-\frac{kt}{2}}$ என்ற தேய்வுக் காரணி (Decay factor) யால் தெளிவுபடுத்தப்படுகிறது. இதை $e^{-\frac{kt}{t_0}}$ என்று எழுதினால் $t_0 = \frac{2}{k}$; t_0 தேய்வுக்குணகம் (Modulus of decay) எனப்படும்.

இனி k^2-ஐப் புறக்கணிக்கக் கூடாதெனின், மாறிகளைப் பிரித்தல் முறைப்படி (41)-ன் தீர்வுகளைக் காண்போம்.

$u = X(x)\,T(t)$ என்க.

∴ (41)-லிருந்து,

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{c^2}\left[\frac{T''}{T} - \frac{k^2}{4}\right]$$

இதில் வலதுபுறம் x-ன் சார்பு; இடதுபுறம் t-யின் சார்பு; ஆனால் x-உம் t-யும் ஒன்றுக்கொன்று சார்பற்றவை. ஆகவே இருபுறமும் சமமாயிருத்தலால் இருபுறமும் ஒரு மாறிலிக்குச் சமமாயிருத்தல் வேண்டும். இப் பிரித்தல் மாறிலியை $-p^2$ என்போம்.

$$\therefore \ X'' = -p^2 X \qquad \text{அல்லது} \quad X = \frac{\cos}{\sin} px$$

மேலும், $\frac{T''}{T} = -p^2 c^2 + \frac{k^2}{4} = -q^2$ என்க.

$$\therefore \ T = \frac{\cos}{\sin} qt, \qquad q^2 = p^2 c^2 - \frac{k^2}{4}$$

$$\therefore \ Y = e^{-\frac{kt}{2}} \frac{\cos}{\sin} px \frac{\cos}{\sin} qt, \quad q^2 = p^2 c^2 - \frac{k^2}{4}$$

$x=o$-வெனில் எல்லா t-க்கும் $y=o$ என்ற எல்லைக் கட்டுப்பாட்டிலிருந்து, y-ல் $\cos px$ உறுப்பு இருத்தல் இயலாது. மேலும், $x=l$-எனில், எல்லா t-க்கும் $y=o$ என்ற எல்லைக் கட்டுப்பாட்டிலிருந்து, $\sin pl = o$ அல்லது $p = \frac{r\pi}{l}$ $\qquad r = 1, 2. \ldots\ldots\ldots$

$$\therefore \ Y = A_r \, e^{-\frac{kt}{2}} \sin \frac{r\pi x}{l} \cos (qt + E_r), \ q^2 = \frac{r^2 \pi^2 c^2}{l^2} - \frac{k^2}{4} \quad (42)$$

இது r-வது இயல்நிலை வகை. இங்கு அலை எண் $\frac{q}{2\pi}$ உராய்வுத் தடை இல்லாதபோதுள்ள அலைவு எண்ணின் மதிப்பைவிட இது சிறிது குறைவாகும் என்பது தெளிவு. r-ஆவது இயல்நிலை வகைக்கு,

$$\text{இயக்க ஆற்றல்} = T_r = \int_o^l \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial y_r}{\partial t} \right)^2 dx,$$

$$= \frac{\rho l}{4} A_r^2 \, e^{kt} \Big[q^2 \sin^2 (qt + E_r) + kq \cos qt + E_r) \sin (qt + E_r)$$

$$+ \frac{k^2}{4} \cos^2 (qt + E_r) \Big] \qquad (43)$$

$$\text{நிலை ஆற்றல்} = V_r = \int_o^l \frac{F}{2} \left(\frac{\partial y_r}{\partial x} \right)^2 dx$$

$$= \frac{\rho l \, A_r^2 \, e^{-kt}}{4} \cos^2 (qt + E_r) \left(q^2 + \frac{k^2}{4} \right) \qquad (44)$$

முழு ஆற்றல் $= \epsilon_r = T_r + V_r$

$$= \tfrac{1}{4}\ \rho l\ A_r^2\ e^{-kt}\Big[q^2 + kq \cos(qt+E_r) \sin(qt+E_r) + \tfrac{1}{2} k^2 \cos^2(qt+E_r)\Big]$$

$\therefore$ rஆவது இயல்நிலை வகைக்கு ஆற்றல் அழிவு வீதம் (Rate of dissipation of Energy) $= \dfrac{\partial E_r}{\partial t}$

$$= \tfrac{1}{8}\ \rho l\ A_r^2\ e^{-kt}\Big[q^2 + kq \cos(qt+E_r) \sin(qt+E_r) + \tfrac{1}{2} k^2 \cos^2(qt+E_r)\Big] \qquad (45)$$

பயிற்சி : முடிவுகள் (43), (44), (45)-களைக் காண்பது மாணவர்க்குப் பயிற்சியாக விடப்பட்டுள்ளது.

மாதிரி : எல்லைப் புள்ளிகள் $x=a$, $2a$,-க்களில் உள்ள ஒரு இழுக்கப்பட்ட கம்பியின் அடர்த்தி $\dfrac{m}{x^2}$, இழுவிசை F ஆகும். இயல் நிலை அதிர்வுகள்

$$y = A \sin\left[\ \theta \log_e\left(\frac{x}{a}\right)\right]\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\ pt,$$

$$\theta^2 = \frac{mp^2}{F} - \frac{1}{4}$$

என்ற சமன்பாட்டால் கொடுக்கப்படுகின்றன, என்றும் இங்குக் காலக்கூறுச் சமன்பாடு $\theta \log_e 2 = n\pi$, $n = 1\ 2, \ldots\ldots\ldots$ என்றும் நிறுவுக.

இங்கு, $\rho = \dfrac{m}{x^2}$, $\therefore\ c^2 = \dfrac{F}{\rho} = \dfrac{Fx^2}{m}$

அலை ஓட்டச் சமன்பாடு, $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \dfrac{m}{Fx^2}\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

$$y = X(x)\, T(t) \text{ என்க.}$$

$$\therefore \quad X'' T = \frac{m}{Fx^2} \times T''$$

அல்லது $$\frac{Fx^2}{m}\frac{X''}{X} = \frac{T''}{T}$$

முன் பகுதிகளில் விளக்கியது போன்று இருபுறமும் ஒரு மாறிலியாக ($-p^2$ என்க) இருத்தல் வேண்டும்.

$$\therefore \frac{T''}{T} = -p^2 \quad \text{அல்லது} \quad T = \begin{matrix}\text{Cos}\\ \text{Sin}\end{matrix}\, p\, ct$$

மேலும், $$\frac{Fx^2}{m}\,\frac{X''}{X} = -p^2$$

$$\therefore \quad x^2 \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{p^2 m}{F} X = 0$$

இது சமபடித்தான மாறிகளைக் கெழுவாக உடைய ஒருபடி வகைக்கெழுச் சமன்பாடு (Homogeneous linear differential equation with variable Coeffecients). இதன் தீர்வைக் காண,

$$z = \log_e x, \qquad D \equiv x\,\frac{\partial}{\partial x} \equiv \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{என்க.}$$

$$\therefore \left[\; D\,(D-1) + \frac{p^2 m}{F} \right] X = 0$$

அதாவது, $$\left[\, D^2 - D + \frac{p^2 m}{F} \right] X = 0$$

இதன் துணைச் சமன்பாடு (Auxiliary Equation)

$$\lambda^2 - \lambda + \frac{p^2 m}{F} = 0$$

$$\therefore \quad \lambda = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{p^2 m}{F}}$$

$$= \frac{1}{2} \pm i\,\theta, \quad \theta = \frac{mp^2}{F} - \frac{1}{4}$$

∴ துணைத் தீர்வு (Complementary Function)

$$= e^{\frac{1}{2}z}\left[A_1 \cos \theta z + B_1 \sin \theta z \right]$$

$$= A\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\left[\theta \log_e x + E\right] (\because z = \log x)$$

இங்கு சிறப்புத் தீர்வு (Particular Integral) கிடையாது.

$$\therefore \; X(x) = A\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\left[\theta \log_e x + E\right]$$

$$\therefore \; y = A\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\left[\theta \log_e x + E\right] \begin{matrix} Cos \\ \text{Sin} \end{matrix}\, pt$$

எல்லைக் கட்டுப்பாடு : எல்லா t-க்கும் $\left.\begin{matrix} x = a \\ x = 2a \end{matrix}\right\}$ க்களில் $y = 0$

முதல் எல்லைக் கட்டுப்பாட்டிலிருந்து,

$$0 = \sin\left[\theta \log_e a + E\right]$$

$$\therefore \; E = -\theta \log_e a$$

$$\therefore \; Y = A\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\left\{\theta \log_e\left(\frac{x}{a}\right)\right\} \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix}\, pt, \quad \theta^2 = \frac{mp^2}{F} - \frac{1}{4}$$

இரண்டாவது எல்லைக் கட்டுப்பாட்டிலிருந்து,

$$0 = \sin\left\{\theta \log_e 2\right\}$$

$$\therefore \; \theta \log_e 2 = n\pi, \qquad n = 1, 2, 3\ldots\ldots$$

இது காலக் கூறுச் சமன்பாடு. அலைவு எண் $\frac{p}{2\pi}$, p-யின் மதிப்பு $\theta^2 = \frac{mp^2}{F^2} - \frac{1}{4}$, $\log_e 2 = n\pi$. $n = 1, 2\ldots\ldots$ என்பனவற்ருல் பெறப்படுகிறது,

பயிற்சி II

1. $x = 0, x = l$-ல் உள்ள இரு இணையான கம்பிகளில் கம்பிக் கொன்றுகத் தங்கு தடையின்றி வழுக்கிச் செல்லத்தக்க இரு மெல்லிய வளையங்களுடன் இழுக்கப்பட்டச் சீரான கம்பி யொன்று இணைக்கப்பட்டுள்ளது. அதிர்வின் இயல்நிலை வகைகளைக் காண்க.

$$\left[\text{விடை } y = A_r \cos \frac{r\pi x}{l} \cos\left(\frac{r\pi ct}{l} + E_r\right) \right]$$

2. முனைகளில் கட்டப்பட்டுள்ள $3l$ நீளமுள்ள ஒரு சீரான கம்பியின் முச்சமக்கூறிட்டுப் புள்ளிகளில் ஒன்று a தொலைவு இழுக்கப்பட்டு ஒய்வு நிலையிலிருந்து விடுவிக்கப் படுகிறது. தனித்தனி இயல்நிலைவகைகளின் ஆற்றல்களைக் கண்டு, இவற்றின் கூட்டுத் தொகையானது முதலில் கம்பியை இழுப்பதற்குச் செலவிடப்பட்ட வேலைக்குச் சமம்தான் எனக் காட்டுக.

[விடை : r-ஆவது இயல்நிலை வகையில்
ஆற்றல் $= \dfrac{27c^2a^2}{4l\pi^2r^2} \sin^2\dfrac{r\pi}{3}$
ஆற்றலின் கூட்டுத் தொகை $= \dfrac{3Fa^2}{4l}$]

3. $\rho_1\ \rho_2$ அடர்த்திகளைக் கொண்ட சம நீளமுள்ள சீரான இருகம்பிகள் இணைக்கப் பெற்று $2l$ தொலைவில் கட்டப் படுகின்றன. இழுவிசை F என்றால் அதிர்வுகளின் காலக் கூறுகளைக் காண்க.

$$\left[\text{விடை : } \frac{2\pi}{p},\ c_1 \tan\frac{pl}{c_1} = -c_2 \tan\frac{pl}{c_2} \right]$$

4. ஒரு முனையிலிருந்து தொங்கும் l நீளமுடைய கனமான தொரு கம்பியில் நிகழும் சிறு பக்கவாட்டு அதிர்வுகள்.

$$y = A J_0\left(2p\sqrt{\frac{x}{q}}\right)\cos(pt + E)$$ என்ற சமன்பாட் பாட்டினால் கொடுக்கப்படுகின்றன என நிறுவுக. இதிலிருந்து காலக்கூறுச் சமன்பாடு $J_0\left(2p\sqrt{\dfrac{x}{q}}\right) = 0$ என உய்த்தறிக.

5. $x = \pm a$ என்ற புள்ளிகளில் கட்டப்பட்டுள்ள $2a$ நீள முள்ள கம்பிக்கு $a^2 - x^2$ என்ற குறுக்குத் திசை வேகம் கொடுக் கப்பட்டால் கம்பியில் பின் நிகழும் அதிர்வுகளைக் காண்க. (அலை ஓட்டத்தின் திசைவேகம் c என்று கொள்க).

தனித் தனி இயல்நிலை வகைகளில் உள்ள ஆற்றல்களைக் கண்டு, இவற்றின் கூட்டுத் தொகை முதல் இயங்குஆற்றலுக் குச் சமம் எனக் காட்டுக.

$$\left\{ \text{விடை :} \quad y = \sum b_r \cos \frac{(r+\frac{1}{2})\,\pi x}{a} \sin \frac{(r+\frac{1}{2})\,\pi c t}{a}, \quad b_r = (-1)\, r\, 4a^3 \Big/ (r+\tfrac{1}{2})^4 \pi^4 c\,; \; 8\,\rho\, a^5 \Big/ 15 \right\}$$

6. இழுக்கப்பட்ட ஒரு கம்பியின் நடுப்புள்ளி பிடித்துக் கொள்ளப்பட்டு ஓய்வு நிலையிலிருந்து விடுவிக்கப்படுகிறது. பின் நிகழும் r-வது இயல்நிலைவகையின் ஆற்றல் $r^{-2} \sin^2\left(\frac{r\pi}{4}\right) \sin^4\left(\frac{r\pi}{8}\right)$—ன் அளவொத்ததாகும் என நிறுவுக,

7. ρ, ρ' அடர்த்தியுடைய l, l' என்ற கம்பிகள் இணைக்கப் பெற்று F இழுவிசையுடன் இருபுள்ளிகளுக்கிடையே கட்டப் பட்டுள்ளது. கம்பிகள் இணைக்கப்பட்ட புள்ளியில் பொருண்மை M கட்டப்பட்டுள்ளது. $F = c^2\rho = c'^2\rho^1$ என்ருல், குறுக்கு அதிர்வு களின் காலக் கூறுகள் $\frac{2\pi}{\rho}$ எனின் $MP = Cp \cot \frac{pl}{c} + c'\rho' \cot \frac{pl'}{c'}$ எனக் காட்டுக,

8. எல்லைப் புள்ளிகளின் $x = l_1\, l_2$ களில் உள்ள ஒரு இழுக் கப்பட்ட கம்பியின் அடர்த்தி $\frac{m}{x^2}$, இழு விசை F ஆகும். இங்கு குறுக்கு அதிர்வுகளின் காலக் கூறுச் சமன்பாடு

$$\frac{4p^2}{c^2} = 1 + \left[2n\pi \Big/ \log \frac{l_2}{l_1} \Big/ \right]^2$$ என நிறுவுக.

9. ρ அடர்த்தியுள்ள $2l$ நீளக்கம்பி இரு நிலைப் புள்ளிகளுக் கிடையே F இழுவிசையுடன் இழுத்துக் கட்டப்பட்டுள்ளது. கம்பியின் நடுப்புள்ளி கம்பிக்குச் செங்குத்துச் திசையில் சிறு தொலைவு உயரம் இழுக்கப்பட்டு, ஓய்வு நிலையிலிருந்து விடுவிக்கப் படுகிறது. கம்பியின் நடுப்புள்ளி வழியே, கம்பியின் போக்கையும் கம்பிக்குச் செங்குத்தையும் ஆயங்களாகக் கொண்டு பின் நிகழும் கம்பியின் இயக்கங்கள்,

$$y = \frac{8h}{\pi^2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(2r+1)^3} \cos\frac{(2r+1)\,\pi x}{2l} \cos\frac{(2r+1)\pi ct}{2l}$$

$$(F = mc^2)$$

என்ற சமன்பாட்டினால் கொடுக்கப்படுகின்றன என நிறுவுக.

10. முறையே ρ, ρ′ நீளமுள்ள இரு கம்பிகள் இணைக் கப் பெற்று இரு நிலைப் புள்ளிகளுக்கிடையே F இழுவிசை யுடன் இழுத்துக் கட்டப்பட்டுள்ளது. காலக் கூறு t,

$$\frac{\tan\left(\frac{2\pi l}{t}\sqrt{\frac{\rho}{F}}\right)}{\tan\left(\frac{2\pi l'}{t}\sqrt{\frac{\rho'}{F}}\right)} + \sqrt{\frac{\rho}{\rho'}} = 0$$

என்ற சமன்பாட்டினால் கொடுக்கப்படுகின்றன என நிறுவுக.

11. இரு நிலைப் புள்ளிகளுக்கிடையே இழுத்துக் கட்டப் பட்டுள்ள l நீளமுள்ள கம்பியின் ஒரு முனையிலிருந்து $\frac{1}{5}l$ தொலைவிலுள்ள புள்ளி h தூரம் இழுக்கப்பட்டு ஓய்வு நிலையி லிருந்து விடுவிக்கப் பட்டால், பின் நிகழும் இடப்பெயர்ச்சிகள்,

$$y = \frac{25h}{2\pi^2} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2} \sin\frac{r\pi}{5} \sin\frac{r\pi x}{l} \cos\frac{r\pi ct}{l}$$

என்ற சமன்பாட்டினால் கொடுக்கப் படுகின்றன என நிறுவுக.

12. எல்லைப் புள்ளிகள் $x=o$, $x=l$ களில் உள்ள ஒரு இழுக்கப்பட்ட கம்பியின் அடர்த்தி $\frac{\rho_0}{(1+kx)^2}$, இழுவிசை F_0

ஆகும். இங்கு குறுக்குஅதிர்வுகளின் காலக் கூறு $\frac{2\pi}{p}$ எனின் $\sqrt{p^2-k^2c^2}\log(1+kl)=2\pi mck$ (m ஒரு கூட்டு முழுவெண். $c^2=\frac{F_0}{\rho_0}$) என நிறுவுக. $m=o$ என்ற வகையை விவரிக்கவும்.

13. $t=o$ வில் தொடக்கக் கட்டுப்பாடுகள் $y=E\sin\frac{2\pi x}{l'}$, $\frac{\partial y}{\partial t}=\eta\sin\frac{rx}{l}$ என்றால் பின்னர் நிகழும் இடப் பெயர்ச்சிகளைக் காண்க. சில நேரங்களில் எல்லா x-க்கும், $\frac{\partial y}{\partial t}$ பூஜ்ஜியமாக இயலும் என்றும், ஆனால் y பூஜ்ஜியமாகவியலாதென்றும் நிறுவுக,

$$\left[\text{விடை: } y=\frac{\eta l}{\pi c}\sin\frac{\pi x}{l}\sin\frac{\pi ct}{l}+E\sin\frac{2\pi x}{l}\cos\frac{2\pi ct}{l}\right]$$

14. $t=0$-வில் தொடக்கக் கட்டுப்பாடுகள் $y=E_1\sin\frac{\pi x}{l}+E_3\sin\frac{3\pi x}{l}$, $\frac{\partial y}{\partial t}=0$ என்றால் பின்னர் நிகழும் இடப் பெயர்ச்சிகளைக் காண்க. சில நேரங்களில், எல்லா x-க்கும், y அல்லது $\frac{\partial y}{\partial t}$ பூஜ்ஜியமாகவியலும் என நிறுவுக.

15. $x=\frac{l}{4}$ லிருந்து $x=\frac{3l}{4}$ வரையுள்ள கம்பியின் பகுதி மாறிலி h தொலைவு இடப்பெயர்ச்சி செய்யப்பட்டு $t=0$-வில் ஓய்வு நிலையிலிருந்து விடுவிக்கப்பட்டால் பின் நிகழும் இடப் பெயர்ச்சிகளைக் காண்க.

$$\left[\text{விடை: } Y=\frac{16h}{\sqrt{2}\pi^2}\left\{\sin\frac{\pi x}{l}\cos\frac{\pi ct}{l}+\frac{1}{3^2}\sin\frac{3\pi x}{l}\cos\frac{3\pi ct}{l}-\frac{1}{5^2}\sin\frac{5\pi x}{l}\cos\frac{5\pi ct}{l}-\frac{1}{7^2}\sin\frac{7\pi x}{l}\cos\frac{7\pi ct}{l}+\dots\right\}\right]$$

(*a*) இயக்க, நிலை மற்றும் முழு ஆற்றல்களைக் காண்க. முழு ஆற்றலின் மதிப்பைத் தொடக்கக் கட்டுப்பாடுகளிலிருந்து சரி பார்க்கவும். அடிப்படை இயல்நிலை வகையில் முழு ஆற்றலின் பங்கு என்ன?

$$\left[\text{விடை:}\quad T=\frac{32\rho c^2h^2}{l\pi^2}\left\{\sin\frac{2\pi ct}{l}+\frac{1}{3^2}\sin^2\frac{3\pi ct}{l}+\frac{1}{5^2}\sin^2\frac{5\pi ct}{l}+\ldots\right\}\right.$$

$$V=\frac{32Fh^2}{l\pi^2}\left\{\cos^2\frac{\pi ct}{l}+\frac{1}{3^2}\cos^2\frac{3\pi ct}{l}+\frac{1}{5^2}\cos^2\frac{5\pi ct}{l}+\ldots\right\}$$

$$\left.\epsilon=T^2+V=\frac{4FT^2}{l}\cdot\frac{8}{\pi^2}\ \text{அல்லது}\ 81\%\right]$$

(*b*) காற்றின் தடையும் உள்ளதாகக் கொண்டு தீர்வைக் காண்க.

16. $x=\frac{l}{3}$லிருந்து $x=\frac{2l}{3}$ வரையுள்ள கம்பியின் பகுதி மாறிலி h தொலைவு இடப்பெயர்ச்சி செய்யப்பட்டு $t=0$ வில் ஓய்வு நிலையிலிருந்து விடுவிக்கப்பட்டால் பின் நிகழும் இடப்பெயர்ச்சிகளைக் காண்க.

$$\left[\text{விடை:}\quad y=\frac{6\sqrt{3}h}{\pi^2}\left\{\sin\frac{\pi x}{l}\cos\frac{\pi ct}{l}-\frac{1}{5^2}\sin\frac{5\pi x}{l}\cos\frac{5\pi ct}{l}+\frac{1}{7^2}\sin\frac{7\pi x}{l}\cos\frac{7\pi ct}{l}-\frac{1}{11^2}\sin\frac{11\pi x}{l}\cos\frac{11\pi ct}{l}+\ldots\right\}\right.$$

18. தொடக்கத்திலுள்ள இடப் பெயர்ச்சியும் திசை வேகமும் கீழ்க் கண்டவற்றால் கொடுக்கப்படுகின்றன.

$$\varphi(x)=\alpha\,(lx-x^2)\,l^2$$

$$\phi(x)=\begin{cases}\dfrac{\beta x}{l}, & o\le x\le\dfrac{l}{2}\\[2mm] \dfrac{\beta(l-x)}{l}, & \dfrac{l}{2}\le x\le l\end{cases}$$

α, β என்பன மாறிலிகள்.

பின் நிகழும் இடப்பெயர்ச்சிகளைக் காண்க.

[விடை: $$Y = \frac{8\alpha}{\pi^3}\left\{\sin\frac{\pi x}{l}\cos\frac{\pi ct}{l} + \frac{1}{3^3}\sin\frac{3\pi x}{l}\cos\frac{3\pi ct}{l} + \frac{1}{5^3}\sin\frac{5\pi x}{l}\cos\frac{5\pi ct}{l} + \cdots\right\}$$

$$+ \frac{4l\beta}{\pi^3 c}\left\{\sin\frac{\pi x}{l}\sin\frac{\pi ct}{l} - \frac{1}{3^3}\sin\frac{3\pi x}{l}\sin\frac{3\pi ct}{l} + \frac{1}{5^3}\sin\frac{5\pi x}{l}\sin\frac{5\pi ct}{l} - \cdots\right\}$$]

(a) $\beta = \frac{2c\alpha}{l}$ என்ருல், இயங்கு, நிலை, முழு ஆற்றல்களைக் காண்க. முழு ஆற்றலின் மதிப்பைத் தொடக்கக் கட்டுப் பாடுகளிலிருந்து சரிப்பார்க்கவும். அடிப்படை இயல்நிலை வகையில் முழு ஆற்றலின் பங்கு என்ன?

[விடை: $$T = \frac{32\rho c^2\alpha^2}{l\pi^4}\left\{\sin^2\left(\frac{\pi ct}{l} - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{3^4}\sin^2\left(\frac{3\pi ct}{l} + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{5^4}\sin^2\left(\frac{5\pi ct}{l} - \frac{\pi}{4}\right) + \cdots\right\}$$

$$V = \frac{32F\alpha^2}{l\pi^4}\left\{\cos^2\left(\frac{\pi ct}{l} - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{3^4}\cos\left(\frac{3\pi ct}{l} + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{5^4}\cos^2\left(\frac{5\pi ct}{l} - \frac{\pi}{4}\right) + \cdots\right\}$$

$$\epsilon = T + V = \frac{F\alpha^2}{3l}, \quad \frac{96}{\pi^4} \text{ அல்லது } 98.5\%$$]

(b) காற்றின் தடையும் உள்ளதாகக் கொண்டு தீர்வைக் காண்க.

19. இடப் பெயர்ச்சி செய்யப்படாமல் சம நிலையில் உள்ள கம்பிக்கு $t = 0$ என்ற நேரத்தில் ஒரு தாக்களவை மூலம்,

$$\psi(x) = \begin{cases} \dfrac{4\mu x}{l}, & 0 < x < \dfrac{l}{4} \\ \left(\dfrac{4\mu}{l}\right)\left(\dfrac{l}{2} - x\right), & \dfrac{l}{4} < x < \dfrac{l}{2} \\ 0, & \dfrac{l}{2} < x < l \end{cases}$$

என்ற திசைவேகப் பரவல் கொடுக்கப்படுகிறது. பின் வெவ்வேறு நேரங்களில் உண்டாகும் இடப்பெயர்ச்சிகளைக் காண்க.

$$\left[\text{விடை } Y = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{8\mu l}{\pi^3 r^3 c}\left[2 \sin\frac{r\pi}{4} - \sin\frac{r\pi}{2}\right] \sin\frac{r\pi x}{l} \sin\frac{r\pi ct}{l}\right]$$

20. μ வீறு (*Strength*) கொண்டச் சுருள்வில்கள் கட்டுப்படுத்தும் இரு பொருண்மைகள் M உடன் இழுக்கப்பட்ட l நீளமுள்ள கம்பியொன்று கட்டப்பட்டுள்ளது. கம்பியின் நடுப் புள்ளி இழுக்கப்பெற்று விடப்பட்டால் நிகழும் குறுக்கதிர்வுகளின் நிகழ்வெண் n,

$$\rho a \frac{n\pi l}{a} = \frac{\mu}{2n\pi} - 2n\pi M \text{ என்ற சமன்பாட்டினுல்}$$

கொடுக்கப்படுகிறது என நிறுவுக. இங்கு ρ என்பது அடர்த்தி ρa^2 என்பது கம்பியின் இழுவிசை.

21. கிடைத் தளத்திலிருந்து இரு புள்ளிகளுக்கிடையே $3a$ நீளமுள்ள கம்பியொன்று T இழுவிசையுடன் இழுக்கப்பட்டுள்ளது கம்பியின் முச்சமக் கூறிட்டுப் புள்ளிகள் எதிர்புறம் சிறிது தூரம் E வரை இழுக்கப்பட்டு பின் ஓய்வு நிலையிலிருந்து விடுவிக்கப் படுகிறது. பின் நிகழும் இடப் பெயர்ச்சிகளைக் கண்டு, கம்பியின் நடுப்புள்ளி எப்பொழுதும் அதிர்வுறுவதில்லை எனக் காட்டுக.

22. அறையின் வெப்ப மாற்றத்தினுல், வயலின், வீணை போன்ற கம்பி - இசைக் கருவிகளின் *pitch* வேறுபடுவதின் காரணம் என்ன ?

23. இழுக்கப்பட்டுள்ள அதிரும் கம்பியின் அடிப்படைச் சுரம் 240 *cps* என்ருல் மூன்ருவது, நான்காவது மேல் சுரங்களைக் கணக்கிடுக.

24. 6.4 *kgm. wt.* இழுவிசையினால் இழுத்துக் கட்டப் பட்டிருக்கும் 38 *cm.* நீள வயலின் கம்பியின் ஒரு *cm* நீளத்தின் பொருண்மை 0.013 *gm* எனின் அடிப்படைச் சுரத்தின் நிகழ் வெண் என்ன? விடை: [289 *per sec.*]

25. குறிப்பிட்ட தொடக்க இழு விசையால், 0.1 மீட்டர் நீளமுள்ள கம்பியின் அடிப்படை சுரம் 256; கம்பியின் இழு விசை ஒரு கிலோகிராம் எடை (Kilogram weight) இழு விசையினால் அதிகரிக்கும்பொழுது அடிப்படைச் சுரம் 320, எனின் தொடக்க இழுவிசையையும் கம்பியின் பொருண்மையை யும் காண்க.

[விடை: $F=1\frac{7}{9}$ kgm wt. ; $M=0.665$ *gm.*]

26. கம்பியின் அடிப்படைச் சுரத்திற்கு 660 அதிர்வுகள் இருக்க வேண்டுமாயின் எந்த இழுவிசையுடன் இழுத்துக் கட்டப்பட்டிருக்கவேண்டும்? [விடை: 9.59 kgm wt]

27. 80 அடி நீளமுள்ள கம்பியின் பொருண்மை 0.05 lbs. குறுக்கு அலையொன்று கம்பியின் நீளத்தை 0.1 secs-ல் கடந்து செல்ல வேண்டுமாயின் கம்பி எவ்விழு விசையுடன் இழுத்துக் கட்டப்பட்டிருக்கவேண்டும்? [விடை: 12.5 lbs. wt.]

28. ஒரு இழுக்கப்பட்ட கம்பியின் நீளம் *l*, ஆரம் *r*, இழு விசை *F*, அடர்த்தி *g* எனின் கம்பியின் குறுக்கு அதிர்வின் நிகழ் வெண் $n = \frac{A}{lr}\sqrt{\frac{F}{\rho}}$ என நிறுவுக. இங்கு *A* ஒரு மாறிலி.

29. ஒரே விதமான சடப்பொருள்களாலான (Material) சம நீளமுள்ள நான்கு கம்பிகளின் விட்டங்கள் 4 : 3 : 2 : 1 என்ற விகிதத்தில் உள்ளன. ஒவ்வொரு கம்பியின் தனி ஒலி யிசை (Note)-யின் நிகழ்வெண்ணும் முந்திய கம்பியினதைப் போன்று $\frac{3}{2}$ மடங்காகும் வண்ணம் இழுக்கப்பட்டுள்ளன. முதல் கம்பியின் இழுவிசை 2.048 கிலோகிராம் எடையெனின் மற்றக் கம்பிகளின் இழுவிசைகளைக் காண்க.

[விடை: $F_2=2.592$ kgm wt. ; $F_3=2.592$ kgm wt.

$F_4=1.458$ kgm. wt.]

30. அதிரும் கம்பியொன்றிற்கு இயல்நிலை ஆயக்கூறு களைப் பயன் செய்து ஹாமில்டோனியன் (Hamiltonian)-ஐ எழுதவும். ஹாமில்டன் சமன்பாட்டை எழுதி, நாம் முன்னர் கண்டுள்ள தீர்வு இச் சமன்பாட்டைத் திருப்திப் படுத்துகிறது என நிறுவுக.

§ 2.15 *கந்தழி நீளமுள்ள கம்பியில் முன்னேறும் அலைகள் :* இதுவரை, அளவிற்கடங்கிய கம்பியில் நிகழும் அலைகளைப் பற்றி, அறிந்தோம். இனி, கந்தழி நீளமுள்ள கம்பியில், முன்னேறும் அலைகளைப் பற்றி ஆராய்வோம்.

அலை ஓட்டச் சமன்பாடு $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ டி' ஆலம்பர்ட்டின் முறைப்படித் தீர்வுகாண,

$$y = f(x-ct) + g(x+ct) \tag{19}$$

இங்கு, $f(x-ct)$ அலை வடிவம் மாருமல், x அச்சின் நேர்த் திசையில் மாருவேகம் c-யுடன் செலுத்தப்படும் அலையின் மிகப் பொதுவான சமன்பாடு; மற்றும், $g(x+ct)$, அலை வடிவம் மாருமல், x அச்சின் எதிர்த்திசையில் மாருவேகம் c-யுடன் செலுத்தப்படும் அலையின் மிகப் பொதுவான சமன்பாடு. சார்புகள் f-உம், g-யும் விதிக்கட்டில்லாதவை. ஆனுல் தொடக் கக் கட்டுப்பாடுகள் கொடுக்கப்பட்டால் f, g-க்களின் வடிவங் களை அறியலாம். எல்லா x-க்கும் $t=0$-வில், இடப் பெயர்ச்சி $\varphi(x)$ என்றும், திசைவேகம் $\phi(x)$ என்றும் கொள்க.

$$\therefore \; y_{t=o} = \varphi(x) \tag{46}$$

$$\dot{y}_{t=o} = \phi(x) \tag{47}$$

$\therefore$ (19), (46)-லிருந்து,

$$f(x) + g(x) = \varphi(x) \tag{48}$$

(19), (47)-லிருந்து, $-cf'(x) + c\,g'(x) = \phi(x)$ (49)

(49)-லிருந்து x-ஐப் பொருத்த தொகை காண

$$-f(x)+g(x)=\frac{1}{c}\int_a^x \psi(\xi)\,d\xi \qquad (50)$$

[a-தொகையின் மாறிலி (Constant of Integration)]

∴ (48), (50)-லிருந்து,

$$f(x)=\frac{1}{2}\left\{\varphi(x)-\frac{1}{c}\int_a^x \psi(\xi)\,d\xi\right\} \qquad (51)$$

$$g(x)=\frac{1}{2}\left\{\varphi(x)+\frac{1}{c}\int_a^x \psi(\xi)\,\partial\xi\right\} \qquad (52)$$

$$\therefore\ y=f(x-ct)+g(x+ct)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\varphi(x-ct)-\frac{1}{c}\int_a^{x-ct}\psi(\xi)\,\partial\xi+\varphi(x+ct)+\frac{1}{c}\int_a^{x+ct}\psi(\xi)\,\partial\xi\right\}$$

$$=-\frac{1}{2}\left\{\varphi(x-ct)+\varphi(x+ct)+\frac{1}{c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(\xi)\,\partial\xi\right\} \qquad (53)$$

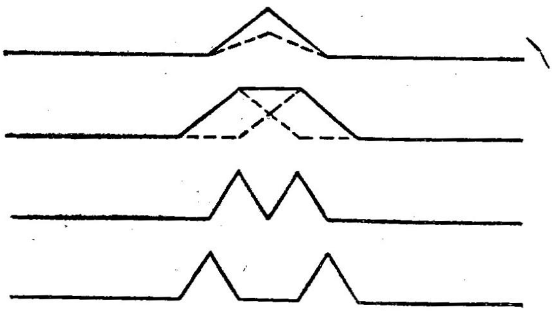
எல்லா x-உம், y-யும் பின்நேரம் t-யில் நிகழும் இடப் பெயர்ச்சிகளைச் சமன்பாடு (52) கொடுக்கிறது

சிறப்பு வகைகள்

வகை 1 : தொடக்கத்தில் குறுக்குத் திசைவேகம் எல்லா x க்கும் பூஜ்ஜியம் எனில் $\psi(x) = 0$.

$\therefore$ (52)லிருந்து, $y = \frac{1}{2} [\, \varphi\,(x-ct) + \varphi\,(x+ct)\,]$ (54)

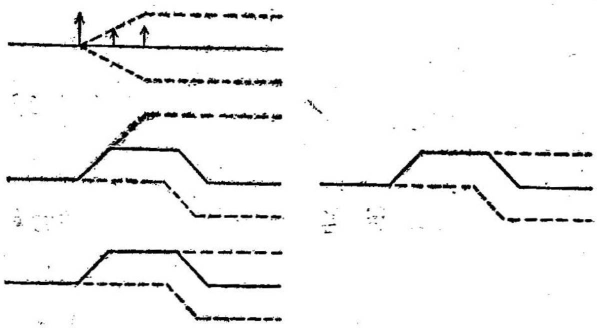
தொடக்கத்திலுள்ள இடப் பெயர்ச்சியின் மூல வடிவத்தைப் போன்ற வடிவத்துடன், ஆனால் அதன் பாதி வீச்சுடன் x அச்சின் இரு திசைகளிலும் c திசை வேகத்துடன் செல்லும் இரு அலைகளை (54) குறிக்கின்றது.



படம் 16

வகை 2: எல்லா x-க்கும் தொடக்க இடப்பெயர்ச்சி பூஜ்ஜியம் என்க. இந்த வகையில் $\varphi\,(x) = 0$ $\therefore$ (52)-லிருந்து

$$y = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi\,(\xi)\; \partial\,\xi$$



படம் 17

வகை 3: அலை ஒரேயொரு திசையிலேயே (உதாரணமாக x-ன் நேர்த்திசை என்க) செல்லுமாறு தொடக்கக் கட்டுப்

பாடுகள் அமைந்துள்ளன என்போம், $y = f(x-ct) + g(x+ct)$ என்பதாலும், x-ன் எதிர்த்திசையில் அலையில்லை என்பதாலும் $g(x+ct)$ ஒரு மாறிலியாக இருக்கவேண்டும். இம்மாறிலியை A என்று கொண்டால், சமன்பாடு 52-லிருந்து,

$$A = \tfrac{1}{2}\,\varphi(x) + \tfrac{1}{2}c \int_a^x \psi(\xi)\, d\xi.$$

x-ஐப் பொருத்த வகைக் கெழு காண,

$$0 = \tfrac{1}{2}\,\frac{d\,\phi(x)}{dx} + \tfrac{1}{2}c\,\psi(x)$$

$$\therefore \quad \psi(x) = -c\,\frac{d\,[\varphi(x)]}{dx} \qquad (55)$$

ஆகவே, $g(x+ct)$ ஒரு மாறிலியென்றால், $\phi(x)$-உம் $\psi(x)$-உம் 55-வது சமன்பாட்டைத் திருப்திப்படுத்த வேண்டும்.

இனி 55-வது சமன்பாடு திருப்தி செய்யப்பட்டால் பொதுத் தீர்வாகிய சமன்பாடு (19), x-ன் நேர்த்திசையில் செல்லும் ஒரு அலையையே குறிக்கும் எனக் காட்டலாம். 55-லிருந்து $\psi(x)$-ன் மதிப்பை (53)-ல் பிரதியீடு செய்ய

$$y = \tfrac{1}{2}\left[\varphi(x-ct) + \varphi(x+ct) - \int_{x-ct}^{x+ct} \frac{d\varphi(\xi)}{\xi}\, d\xi\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[\varphi(x-ct) + \varphi(x+ct) - \int_{x-ct}^{x+ct} d\varphi(\xi)\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[\varphi(x-ct) + \varphi(x+ct) - \varphi(\xi)\Big/_{x-ct}^{x+ct}\right]$$

$$= \varphi(x-ct)$$

இது x-ன் நேர்த் திசையில் செல்லும் ஓர் அலையாகும்.

இவ்வாறு, பின் நிகழும் அலையோட்டம் x-ன் நேர்த் திசையில் மட்டுமே அமைவதற்கு, வேண்டிய மற்றும் போதுமான நிபந்தனை (Necessary and sufficient condition) யாவது தொடக்கக் கட்டுப்பாடுகள் $\varphi(x)$-உம், $\psi(x)$-உம்,

$\psi(x) = -c\,\dfrac{d[\varphi(x)]}{dx}$ என்ற சமன்பாட்டைத் திருப்தி செய்ய வேண்டும் என்பதாகும். இதைப் போன்றே பின் நிகழும் அலையோட்டம் x-ன் எதிர்த் திசையில் மட்டுமே அமைவதற்கு வேண்டிய மற்றும் போதுமான நிபந்தனையாவது, தொடக்கக் கட்டுப்பாடுகள் $\varphi(x)$-உம், $\psi(x)$-உம், $\psi(x) = +c\,\dfrac{[d\,\phi(x)]}{dx}$ என்ற சமன்பாட்டைத் திருப்தி செய்யவேண்டும் என்பதாகும்.

பயிற்சி : இதை நிறுவுக.

§ 2.16 முன்னேறும் அலைகளுக்கு இயக்க ஆற்றல் மற்றும் நிலை ஆற்றல்.

முன் பகுதி § 2.11-ல் கம்பியின்,

இயக்க ஆற்லல் $= \mathrm{T} = \int \frac{1}{2}\rho\left(\dfrac{\partial y}{\partial t}\right)^2 dx$

நிலை ஆற்றல் $= \mathrm{V} = \int \frac{1}{2} F\left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx$ என்று கண்டோம்—

முன்னேறும் அலையின். இடப் பெயர்ச்சி $y = f(x - ct)$ என்ற சமன்பாட்டால் தரப்பட்டால்,

$$\mathrm{T} = \int \tfrac{1}{2}\rho c^2 (f')^2 dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\mathrm{F}\int (f')^2 dx \quad [\because\ \mathrm{F} = \rho c^2]$$

$$\mathrm{V} = \tfrac{1}{2}\mathrm{F}\int (f')^2\, dx$$

இங்கு இயக்க ஆற்றல் = நிலை ஆற்றல்.

முழு ஆற்றல் $= \epsilon = \mathrm{T} + \mathrm{V} = \mathrm{F}\int (f')^2 dx$

$y=f(x-ct)=a\cos[\alpha(x-ct)+E]$ என்றால், ஒரு அலை நீளம்

$$\lambda\text{-வில் } T=V=\frac{\pi^2\rho^2c^2}{\lambda^2}a^2$$

$$\epsilon=\frac{2\pi^2\rho^2c^2}{\lambda^2}a^2$$

முன்னேறும் அலையின் இடப்பெயர்ச்சி $y=g(x+ct)$ என்ற சமன்பாட்டால் கொடுக்கப்பட்டால், $T=\frac{1}{2}F\int(g')^2dx$

$$V=\frac{1}{2}F\int(g')^2\,dx$$

இங்கும், இயக்க ஆற்றல் = நிலை ஆற்றல்.

$$\text{முழு ஆற்றல் } \epsilon=T+V=F\int(g')^2\,dx$$

இடப் பெயர்ச்சி $y=f(x-ct)+g(x+ct)$ என்ற சமன்பாட்டால் தரப்பட்டால்

$$T=\frac{1}{2}\rho c^2\int\left\{\left[f'(x-ct)\right]^2-2f'(x-ct)\right.$$

$$\left.g'(x+ct)+[g'(x+ct)]^2\right\}dx$$

$$V=\frac{1}{2}F\int\left\{[f'(x-ct)^2+2f'(x-ct)\,g'(x+ct)\right.$$

$$\left.+[g'(x+ct)]^2\right\}dx$$

∴ இயக்க ஆற்றல், நிலை ஆற்றலுக்குச் சமமாகாது.

$$\text{முழு ஆற்றல் } \epsilon=T+V=\frac{1}{2}F\int\left\{\left[f'(x-ct)\right]^2+\right.$$

$$\left.\left[g'(x+ct)\right]^2\right\}dx$$

மேற்காணும் கணித்தலினின்றும் பின்வரும் முடிவுகளைப் பெறுகிறோம்.

(a) ஒரு அலை மட்டிலும் நிகழும்பொழுது இயக்க ஆற்றலும் நிலை ஆற்றலும் சமமாகும்; இரு அலைகள் நிகழும்பொழுது இது உண்மையில்லை.

(b) இரு அலைகள் நிகழும்பொழுது இயக்க (நிலை) ஆற்றலின் மதிப்புத் தனித் தனியாக இவ்விரு அலைகள் நிகழுவதால் உள்ள இயக்க (நிலை) ஆற்றல்களின் கூட்டுத் தொகைக்குச் சமமில்லை.

(c) இரு அலைகள் நிகழும்பொழுது முழு ஆற்றலின் மதிப்பு தனித்தனியாக இவ்விரு அலைகள் நிகழுவதால் உள்ள முழு ஆற்றல்களின் கூட்டுத் தொகைக்குச் சமமாகும்.

§ 2.17 *இசை அலைகளின் சிக்கல் உருவமைப்பு:* (Complex representation of Harmonic Waves):

நாம் ஆராயும் பெரும்பாலான அலைகள் இசை அலைகளாக இருத்தலைக் காணலாம். அலையோட்டச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் இசைச் சார்புகளாக இயற்கையிலேயே அமைந்திருப்பது இதற்கொரு காரணமாகும். மேலும், ஃபோரியரின் பகுப்பாய்வின்படி எச்சார்பையும் இசைச் சார்பு உறுப்புகளாகக் காட்ட வியலுமாதலால், ஒருங்கிணைக்கும் கோட்பாட்டின்படி, எவ்வலையையும் இசை அலைத் தொகுப்புகளின் விளைவாகக் (Resultant) காட்டலாம்.

ஒரு பரிமாணத்தில், நேர்த்திசையில் முன்னேறும் இசை அலையின் சமன்பாட்டைக் கீழ்க்கண்டவாறு குறிக்கலாம்.

$$y = a \cos \{ 2\pi (kx - nt) + E \} \qquad (56)$$

இங்கு E மாறுபாட்டுப்படி. $e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i \sin\theta$

என்பதனுல், $a \cos \{ 2\pi (kx - nt) + E \}$ என்பதை,

$e^{\pm i [2\pi (kx - nt) + E]}$ என்ற சிக்கல் கணியத்தின்

மெய்ப்பகுதியாகக் (Real part) கொள்ளலாம். இனி வரும் பகுதிகளில் இடப் பெயர்ச்சியின் சமன்பாடு ஒரு சிக்கல் கணிய

மானல் இடப் பெயர்ச்சி அதன் மெய்ப்பகுதியாகும் எனும் மரபைக் கொள்வோம். இம் மரபையொட்டி (56)ஆவது சமன் பாட்டைக் கீழ்க்கண்ட சிக்கல் உருவமைப்பில் கொடுக்கலாம்.

$$\left.\begin{aligned} y &= Ae^{2\pi i\,(nt-kx)} \\ \text{இங்கு, } A &= a\,e^{-i\,E} \end{aligned}\right\} \quad (57)$$

$E=0$ அல்லது, $n\pi$ என்றால் A ஒரு மெய்யெண். E-ன் மற்ற மதிப்புகளுக்கு A ஒரு சிக்கல் எண். சமன்பாடு (57)லிருந்து உண்மையான வீச்சு $= |A|$; மற்றும் உண்மையான மாறு பாட்டுப்படி $=-$A-ன் கோண வீச்சம். இங்கு,

திசை வேகம் $= \dfrac{n}{k}$

இதே போன்று, ஒரு பரிமாணத்தில் எதிர்த் திசையில் முன் னேறும் இசை அலையின் சமன்பாட்டைக் கீழ்க்கண்ட சிக்கல் உருவமைப்பில் கொடுக்கலாம்

$$y=\mathrm{A}\,e^{2\pi i\,(nt+kx)} \quad (58)$$

y-ன் சிக்கல் உருவமைப்பைக் கொண்டு நிகழ்த்தப்படும் செய்கையின் (Operation) விளைவால் உருவாகும் மெய்ப் பகுதி y-ன் மெய் உருவமைப்பைக் கொண்டு நிகழ்த்தப்படும் செய்கை யின் விளைவிற்குச் சமமெனின், y-ன் சிக்கல் உருவமைப்பினையே நாம் எடுத்துக் கொள்ளலாம். கூட்டல், கழித்தல், மெய்க் கணியத்தால் பெருக்கல் அல்லது வகுத்தல், மெய் மாறியைப் பொருத்து வகை அல்லது தொகை காணல் என்பன, இத் தகைய செய்கைகளாகும். ஆனல் இரு சிக்கல் கணியங்களை ஒரு சேரப் பெருக்கு (அல்லது ஒரு சிக்கல் வடிமைப்பின் இரு படியைக் கண்டு) பின் இப் பெருக்குத் தொகையின் மெய்ப் பகுதியைச் சிக்கல் கணியங்களது மெய்ப்பகுதிகளின் பெருக்குத் தொகையாகக் கொள்வது [ஒவ்வாது $(a+i\,b)$ $(c+i\,d)$-யின் பெருக்குத் தொகை $a\,c-bd$: ஆனல் இவ்விரு சிக்கல் எண் களின் மெய்ப்பகுதியின் பெருக்குத் தொகை ac-யேயாகும். குறிப்பாக கம்பியின் ஒரு தனிமத்தின் ஆற்றலைக் காண வாய்ப் பாட்டில் $\dfrac{\partial y}{\partial t}$, $\dfrac{\partial y}{\partial x}$ களின் மதிப்புகளைச் சமன்பாடு 57-ஐப் பயன்படுத்திக் காணக்கூடாதென்பது தெளிவு.

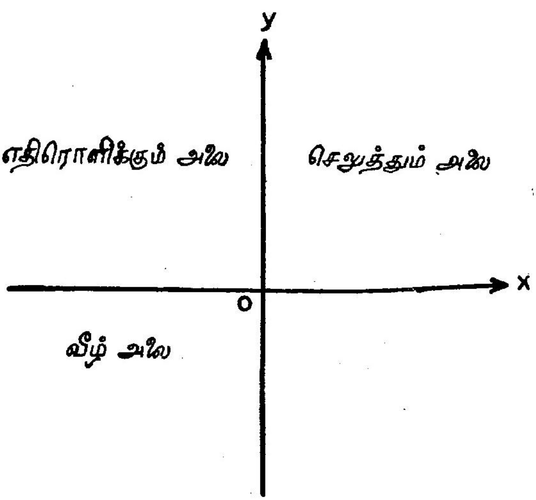
§ 2.18. *கம்பியின் அடர்த்தியின் தொடர்ச்சி முறிவில்* (Discontinuity) *ஏற்படும் அலைகளின் எதிரொளிம்பு* (Reflection):

இதுகாறும் கம்பியின் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் அடர்த்தி சீராக ஒரே மாதிரி இருப்பதாக எடுத்துக்கொண்டோம். இனி இப் பகுதியில் கம்பியின் ஒரு புள்ளியில் அடர்த்தி தொடர்ச்சி முறிவு உள்ளதாகக் கொள்வோம். இப் புள்ளியை ஆதியாகக் கொள்வோம். இரு வகைகள் எழுகின்றன :

(i) வெவ்வேறு அடர்த்தியுடைய இரு கம்பிகள் (ஆதியில்) இணைக்கப் பட்டுள்ளன.

(ii) கம்பியின் ஒரு புள்ளியில் (ஆதியில்) பொருண்மை யொன்று கட்டப்பட்டுள்ளது.

இவ்விரு வகைகளிலும் ஒரு வீழ் அலை (Incident wave) யானது, ஒரு எதிரொளிக்கும் (Reflected) அலையையும், செலுத்தும் (Transmitted) அலையும் உருவாக்கும் என்பதைக் காண்போம்.



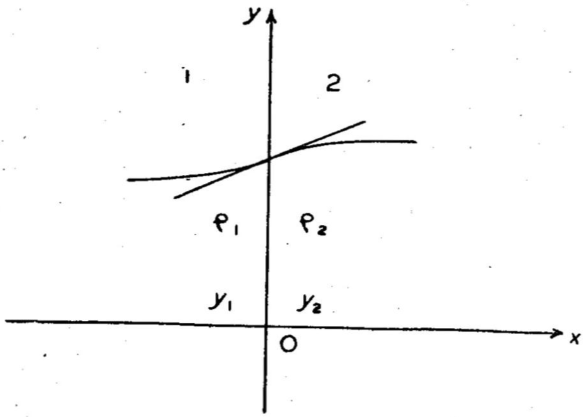
படம் 18

வகை (i) : முதலில், கந்தழி நீளமுள்ள வெவ்வேறு அடர்த்தியுடைய இரு கம்பிகள் ஆதியில் இணைக்கப் பட்டிருக்

கின்றன. என்போம். இவற்றின் அடர்த்திகளை ρ_1, ρ_2 என்றும் இடப் பெயர்ச்சிகளை y_1, y_2 என்றும் கொள்வோம். இசை அலைத் தொடர்ச்சி x-அச்சின் எதிர்த்திசையிலிருந்து விழுகின்றது என்போம். கம்பியின் மாற்றத்தை அடையும்பொழுது இவ்வலைகளின் சில பகுதிகள் எதிரொளிக்கின்றன. சில பகுதிகள் செலுத்தப்படுகின்றன. சென்ற பிரிவுக் கூறு (Article) § 2.17-ன் படி அலைகளுக்குச் சிக்கல் உருவமைப்பு வடிவத்தை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$\left.\begin{aligned} Y_1 &= Y_i + Y_r \\ Y_2 &= Y_t \end{aligned}\right\} \tag{58}$$

$$\left.\begin{aligned} \text{இங்கு } Y_i &= Y_{\text{விழுவது}} = A_1\, e^{2\pi i\,(nt-k_1 x)} \\ Y_r &= Y_{\text{எதிரொளிப்பது}} = B_1\, e^{2\pi i\,(nt+k_1 x)} \\ Y_t &= Y_{\text{செலுத்தப் படுவது}} = A_2\, e^{2\pi i\,(nt-k_2 x)} \end{aligned}\right\} \tag{59}$$



படம் 19

A_1 மெய் எண்: ஆனால் B_1 A_2 சிக்கல் எண்களாக இருக்கலாம். பிரிவுக் கூறு § 2.17-ன் படி B_1, A_2 களின் கோண வீச்சங்கள் வீழ் அலையைப் பொறுத்து மாறுபாட்டுப் படிகளைக் கொடுக்கும். (59)-லிருக்கும் மூன்று அலைகளும் ஒரே அதிர்வெண் n உடையன. ஆனால் இரு கம்பிகளிலுமுள்ள திசை

வேகங்களும் வேறுபட்டன வாதலால் அலை நீளங்களும் வேறு படும். இவற்றை $\frac{1}{k_1}$, $\frac{1}{k_2}$ என்போம். எதிரொளிப்பு அலையின் அலை நீளம், வீழ் அலையின் அலை நீளம் போன்றதே. முதல் கம்பியில் திசை வேகம் $\frac{n}{k_1}$ அல்லது $\sqrt{\frac{F}{\rho_1}}$, இரண்டாவது கம்பியில் திசை வேகம் $\frac{n}{k_2}$ அல்லது $\sqrt{\frac{F}{\rho_2}}$, இவைகளிலிருந்து

$$n, F\text{-ஐ நீக்க, } \frac{k_1^2}{k_2^2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \tag{60}$$

எல்லைக் கட்டுப்பாடுகள் மூலமாக B_1, A_2 களின் மதிப்புகளைக் காணலாம். $x=0$ எல்லைப் புள்ளி, கம்பியின் தொடர்ச்சியால், $x=0$-வில் எல்லா t-க்கும், $y_1=y_2$; மேலும் ஆதியில் இரு சாய்வு வீதங்களும் (Slopes) சமமாயிருத்தல் வேண்டுமாதலால் $x=0$-வில் $\frac{\partial y_1}{\partial x}=\frac{\partial y_2}{\partial x}$, எல்லா t-க்கும் இவ்விரு எல்லைக் கட்டுப்பாடுகளிலிருந்து, $A_1+B_1=A_2$

$$2\pi i\,(-k_1 A_1 + k_1 B_1) = 2\pi i\,(-k_2 A_2)$$

$$\therefore \left.\begin{aligned} \frac{B_1}{A_1} &= \frac{k_1-k_2}{k_1+k_2} \\ \frac{A_2}{A_1} &= \frac{2k_1}{k_1+k_2} \end{aligned}\right\} \tag{61}$$

k_1, k_2, A_1 முதலியன மெய்யானதால் B_1 மற்றும் A_2-உம் மெய்களாகும். k_1 k_2 களின் எல்லா மதிப்புகளுக்கும், A_2 கூட்டு மதிப்புடையது (Positive). ஆனால் $k_1 > k_2$ என்றால் B_1 கூட்டு மதிப்புடையது. $k_1 < k_2$ என்றால் B_1 கழிவு மதிப்புடையது (Negative). இவ்வாறு செலுத்தப்படும் அலை எப்பொழுதும் வீழ் அலையுடன் உள் மாறுபாட்டில் உள்ளது. ஆனால், வீழ் அலை அடர்த்தி அதிகமுள்ள ஊடக்கத்தில் நிகழும்போது மட்டுமே எதிரொளிக்கப்படும் அலை, வீழ் அலையுடன் உள் மாறுபாட்டில் உள்ளது; இல்லையெனின் இது சரியாக வெளி மாறுபாட்டில் இருக்கும்.

எதிரொளிப்புக் கெழு R (Reflection Coefficient) என்பது $\left[\frac{B_1}{A_1}\right]^2$ என்ற விகிதமாக வரையறை செய்யப்படுகின்றது. முன்னேறும் அலையின் முழு ஆற்றலும் அதன் வீச்சின் இருபடியின் அளவொத்ததால், எதிரொளிப்புக் கெழு என்பது ஒருமை நீளத்தில், எதிரொளிக்கும் ஆற்றலுக்கும், விழுகின்ற ஆற்றலுக்குமிடையேயுள்ள விகிதமாகும்.

$$\therefore R = \left[\frac{B_1}{A_1}\right]^2 = \left[\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right]^2 = \left(\frac{\sqrt{\rho_1} - \sqrt{\rho_2}}{\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2}}\right)$$

(61) லிருந்து, (62)

செலுத்துகைக் கெழு T (Coefficent of Transmission) என்பது $1 - R$ என வரையறை செய்யப்படுகின்றது. ஆற்றல் வீணாவதில்லை. எனவே நிலையான புள்ளி வழியே ஒருமை நேரத்தில், செலுத்தப்படும் அலையும், வீழ் அலையும், எடுத்துச் செல்லும் ஆற்றலின் விகிதத்திற்கு T சமமாகும். மற்றும் வீழ் அலைகளின் திசை வேகம் வேறானதால் இவ்விகிதம் ஒருமை நீளத்தில் உள்ள முழு ஆற்றல்களின் விகிதத்திற்குச் சமமாகாது.

$$T = 1 - R = \frac{4\sqrt{\rho_1 \rho_2}}{[\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2}} \qquad (63)$$

இப்பகுதியில் இயக்க ஆற்றல் அல்லது நிலை ஆற்றல் என்று ஆற்றலைப் பகுக்காமல் முழு ஆற்றல் பற்றியே கூறினோம். ஏனெனில், அலையின் முழு ஆற்றல் மட்டுமே கம்பியின் அதே பகுதியில் எதிர்த் திசையில் வரும் வேறொரு அலையிருத்தலால், மாறுபாடு அடையாமல் இருக்கின்றது.

வகை (ii): கந்தழி நீளமுள்ள சீரான கம்பியின் ஆதியில் M பொருண்மை கட்டப்பட்டுள்ளது, என்க. ஆதியின் இருபுறமும் உள்ள இடப்பெயர்ச்சியை y_1, y_2 என்க. ஆதியில் கம்பி தொடர்ந்து உள்ளதால் எல்லா t க்கும், $x = 0$ வில் y தொடர்ச்சியாக இருக்க வேண்டும். அதாவது $x = 0$-வில்

$$y_1 = y_2 \qquad (64)$$

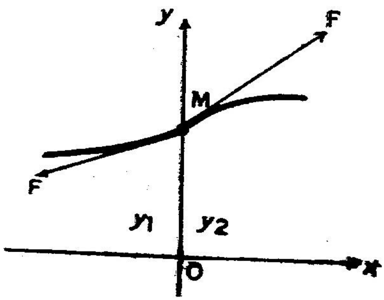
M-ன் இயக்கச் சமன்பாடு.

$$M \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} = F\left[\sin \phi_2 - \sin \phi_1 \right]$$

$$= F\left[\tan \phi_2 - \tan \phi_1 \right]$$

(ϕ சிறியது என்றால் $\sin \phi \simeq \tan \phi$)

$$= F\left(\frac{\partial y_2}{\partial x} - \frac{\partial y_1}{\partial x}\right)_{x=0} \quad (65)$$



படம் 20

$$\left.\begin{array}{l} Y_1 = Y_i + Y_r \\ Y_2 = Y_t \end{array}\right\} \quad (66)$$

இங்கு
$$\left.\begin{array}{l} Y_i = A_1 e^{2\pi i (nt-kx)} \\ Y_r = B_1 e^{2\pi i (nt+kx)} \\ Y_t = A_2 e^{2\pi i (nt-kx)} \end{array}\right\} \quad (67)$$

(64), (65), (66) மற்றும் (67)சமன்பாடுகளிலிருந்து,

$$A_1 + B_1 = A_2$$

$$2\pi i k F [A_2 - A_1 + B_1] = 4\pi^2 n^2 M A_2$$

$\pi n^2 M/k F = p$ என்க (68)

$$\therefore \frac{B_1}{A_1} = \frac{-ip}{1+ip} = \frac{-p^2-ip}{1+p^2} \tag{69}$$

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{1}{1+ip} = \frac{1-ip}{1+p^2} \tag{70}$$

வகை (i) போலன்றி இங்கு B_1உம், A_2உம் சிக்கல் கணியங்களாகும். இவற்றின் கோண வீச்சங்கள் (கழிவுக் குறியுடன்) வீழ் அலையைப் பொறுத்து மாறுபாட்டுப் படிகளை உருவாக்குகின்றன. ஆகவே, இவைகள் முறையே $\tan^{-1}\left(\frac{-1}{p}\right)$, $\tan^{-1}(p)$ ஆகும். $p=\tan\theta$, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ என்றால் இம் மாறுபாட்டுப் படிகள் முறையே $\frac{\pi}{2}+\theta$, θ ஆகும்,

எதிரொளிப்புக் கெழு $R = \left|\frac{B_1}{A_1}\right|^2 = \frac{p^2}{1+p^2} = \sin^2\theta$

செலுத்துகைக் கெழு $T = 1-R = \frac{1}{1+p^2} = \cos^2\theta$

பயிற்சி III

1\. 5 gm/cm அடர்த்தியுள்ள கம்பி 50,000 dynes. இழுவிசையுடன் இழுக்கப்பட்டிருந்தால் நிகழும் அலைகளின் திசை வேகம் என்ன?

(விடை: 100 cm/sec.)

2\. இரு கம்பிகளின் அடர்த்திகள் 36 gm/cm, 16 gm/cm என்றால் எதிரொளிப்புக் கெழுவைக் காண்க.

$\left(\text{விடை:} \quad \frac{1}{25}\right)$

3\. கந்தழி நீளமுள்ள கம்பியொன்று x-ஆயத்தில் அமைந்துள்ளது. $t=0$ என்ற நேரத்தில் இக்கம்பியின் $x = \pm a$க்கு இடைப்பட்ட பகுதிக்கு a^2-x^2 என்ற குறுக்குத் திசைவேகம் கொடுக்கப்படுகின்றது. அலையோட்டத்தின் திசை வேகம் c எனின் கம்பியில் நிகழும் இயக்கத்தை விவரிக்கவும்.

4. கந்தழி நீளமுள்ள கம்பியொன்று, $y = a \cos kt$ என்ற வடிவத்திற்கு இழுக்கப்பட்டு $t=0$ என்ற நேரத்தில் விடுவிக்கப் படுகிறது. கம்பியின் இழுவிசை F, அடர்த்தி ρ எனின், பின்னர் நேரம் t–ல் கம்பியின் வடிவம் $y = a \cos kx \cos kct$, $(c^2=F/\rho)$, என நிறுவுக. மேலும், கம்பியின் ஒரும நீளத்திற்கு இடை இயக்க மற்றும் நிலை ஆற்றல்களைக் காண்க.

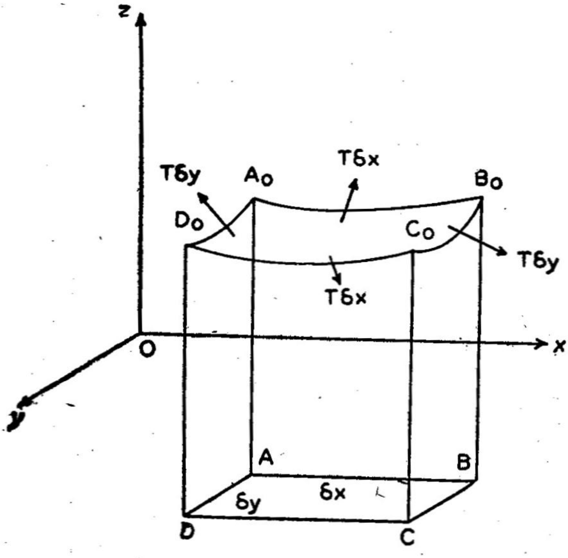
[விடை : $T=\frac{1}{4} Fa^2k^2 \sin^2 kct$; $V=\frac{1}{4} Fa^2k^2 \cos^2 kct$.]

3. சவ்வில் அலைகள்
(Waves in Membranes)

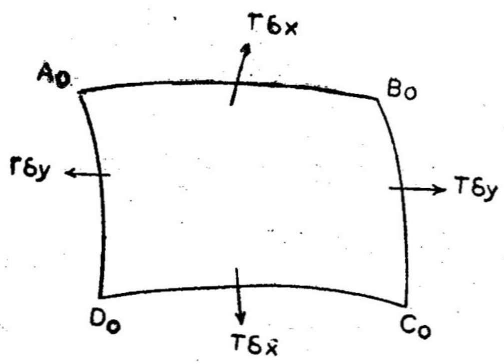
§ 3.1 இக் கொள்கையில் எடுத்துக் கொள்ளப்படும், முற்றிலும் துவண்டு நெகிழ்ந்து வளையத்தக்க மெல்லிய சவ்வு, சீரான மூலப் பொருளையும், சீரான பருமனையும் உடையது. நிகழும் அதிர்வுகள் மற்றும் இடப் பெயர்ச்சிகளினால் மாருத அளவு அதிகமுள்ள இழுவிசையினால் சவ்வு எல்லாப் பக்கங்களிலும் இழுத்துக் கட்டப்பட்டுள்ளது. சவ்வின் அதிர்வுகளைக் கணித முறையில் எளிதாக ஆராய்வதற்காகக் கொள்ளப்படும் கற்பிதங்கள் நடைமுறையில் மிக எளிதில் செயலுருவாக்கிக் கொள்ளத் தக்கவையல்ல. கொள்கையிலுள்ள சீர்மையான சவ்வின் பரப்பில் வரையப்படும் ஒரு கோட்டுத் தனிமத்தின் குறுக்கேயுள்ள தகைவு (Stress) தொடுதளத்திலேயே உள்ளது என்போம். அதிர்வுறு நிலையில் சவ்வின் பரப்பு ஒரு தளத்தில் அமையும் வகையினை மட்டிலுமே ஆராய்வோம். மேலும், சவ்வு சீரான ஒருபடித்தான தகைவில் உள்ளது என்போம்; அதாவது இரு சமமான இணைகோடுகளின் குறுக்கேயுள்ள தகைவுகள் ஒரே திசையில் ஒரே பருமனைக் கொண்டன என் போம். எளிமைக்காக, ஒரு கோட்டுத் தனிமத்தின் குறுக்கே யுள்ள தகைவு, அதற்குச் செங்குத்துத் திசையில் உள்ளது என்போம்.

இனி சீரான இழுவிசை T-யுடன் நிலையான, மூடிய, தள எல்லைகளுக்குள் இழுத்துக் கட்டப்பட்டுள்ள சவ்வின் குறுக்கு அதிர்வுகளை ஆராய்வோம். சவ்வின் பரப்பில் வரையப்பட்டுள்ள ஒருமை நீளக்கோட்டின் ஒரு பக்கத்திலுள்ள பகுதி மறு பக்கத்திலுள்ள பகுதியின்மேல் T தகைவைக் கோட்டுக்குச் செங்குத்துத் திசையில் செயல்படுத்தினல், இழுவிசை T-எனப் படும். சவ்வின் கனத்தையும் புவி ஈர்ப்பின், (Gravity) விளைவையும் புறக்கணிப்பதாகக் கொள்வோம். சவ்வின் சமநிலைத் தளத்தில் x, y, அச்சுகளை எடுத்துக் கொள்வோம். அதிர்வு

கள் z அச்சிற்கு இணையாக நிகழ்கின்றன என்போம். x, y தளத்தில் ∂x, ∂y பக்கங்களைக் கொண்ட ஒரு சிறிய செவ்வகத் தனிமம் A B C D-யை எடுத்துக் கொள்வோம். $A_0 B_0 C_0 D_0$ அதிர்வில் ஒருநிலை என்க.



படம் 21



படம் 22

அதிரும் பொழுது $A_0 B_0 C_0 D_0$ மேல் செயல் புரியும் விசைகளாவன :—

(i) $A_0 B_0$-க்கும் $C_0 D_0$-க்கும் செங்குத்தாக இரு விசைகள் $T \partial x$;

(ii) $A_0 D_0$-க்கும் $B_0 C_0$ க்கும் செங்குத்தாக இரு விசைகள் $T \partial y$;

இந்த நான்கு விசைகளும் தனிமத்தின் முனைகளிலுள்ள நான்கு தொடுதளங்களில் (Tangent plane) செயல் புரிகின்றன. சென்ற அத்தியாயத்திலே போன்று z திசையில் (i)-ல் உள்ள இரு விசைகளின் விளைவு விசை

$$= T \partial x \cdot \left[\left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_{y+\partial y} - \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_{y} \right] = T \partial x \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \cdot \partial y.$$

இதே போன்று, z-திசையில் (ii)-ல் உள்ள இரு விசைகளின் விளைவிசை $= T \partial y \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \partial x.$

சவ்வின் பரப்பு-அடர்த்தி, அதாவது, ஓருமப் பரப்பின் பொருண்மை ρ என்போம். $A_0 B_0 C_0 D_0$-வின் இயக்க சமன்பாடு

$$T \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \partial x \cdot \partial y + T \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \partial x \cdot \partial y = \rho \, \partial x \cdot \partial y \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

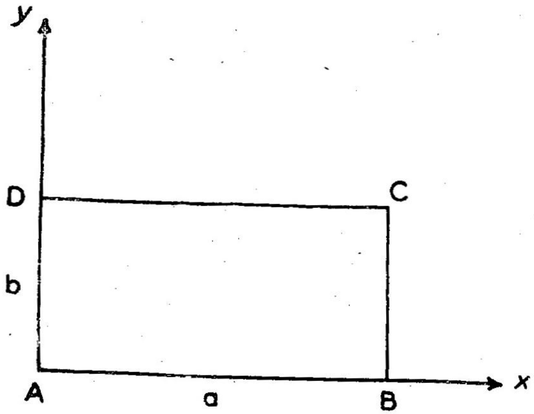
அதாவது $T \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right] = \rho \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$

இதைத் திட்ட வடிவத்தில்

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}, \quad C^2 = T/\rho \qquad (1)$$

என்று குறிக்கலாம். இவ்வாறு சவ்வில் நிகழும் அலைகள் இரு பரிமாணத்து அலையோட்டச் சமன்பாட்டைத் திருப்தி செய்கின்றன. அலைகளின் திசைவேகம் $C = \sqrt{T/\rho}$.

§§ 3.2 தெக்காட்டின் ஆயங்களில் (Cartesion Co-ordinate Axes), $x=a, y=b$ என்ற கோடுகளை எல்லைகளாகக் கொண்ட செவ்வகச் சவ்வின் குறுக்கதிர்வுகளை ஆராய்வோம்.



படம் 23

எல்லைக்கோடுகள் உறுதியாக இணைக்கப்பட்ட நிலைக்கோடுகளாதலால் அக்கோட்டிலுள்ள புள்ளிகள் அதிர்வுறுவதில்லை. எனவே $x=o$, a; $y=o$, b–களில் எல்லா நேரங்களிலும், $z=o$ என்பன எல்லைக் கட்டுப்பாடுகள். முதல் அத்தியாயத்திலிருந்து, சமன்பாடு (1)-ன் தீர்வுகள்

$$z=\frac{\cos}{\sin} px \frac{\cos}{\sin} qy \frac{\cos}{\sin} rct, \qquad p^2+q^2=r^2$$

மேலே குறிப்பிடப்பட்டுள்ள எல்லை நிபந்தனைகளுக்கு உட்பட்டு, z-ல் $\cos px$, $\cos qy$ உறுப்புகள் இருக்கவியலாது;

மேலும் $\sin pa=o$, $\sin qb=o$

$$\therefore\ p=\frac{m\pi}{a},\ q=\frac{n\pi}{b},$$ mஉம், nஉம் நேர் முழு எண்கள்.

$$\therefore\quad z=A_{m,n}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\cos(rct+E_{m,n}) \qquad (2)$$

$$r^2=\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right),$$ mஉம், nஉம் முழு எண்கள்.

தீர்வு (2) (m, n) இயல் நிலைவகை எனப்படும். இதன் நிகழ்வெண்

$$= \frac{rc}{2\pi} = \sqrt{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)\frac{T}{4\rho}} \qquad (3)$$

சமன்பாடு (1)-ன் முழுத்தீர்வு, m, n-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் (2)-ஐப் போன்ற எல்லாத் தீர்வுகளின் கூட்டுத் தொகையாகும்.

∴ முழுத் தீர்வு

$$z = \sum_{m,n} A_{m,n} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \cos (rct + E_{mn}) \qquad ...(4)$$

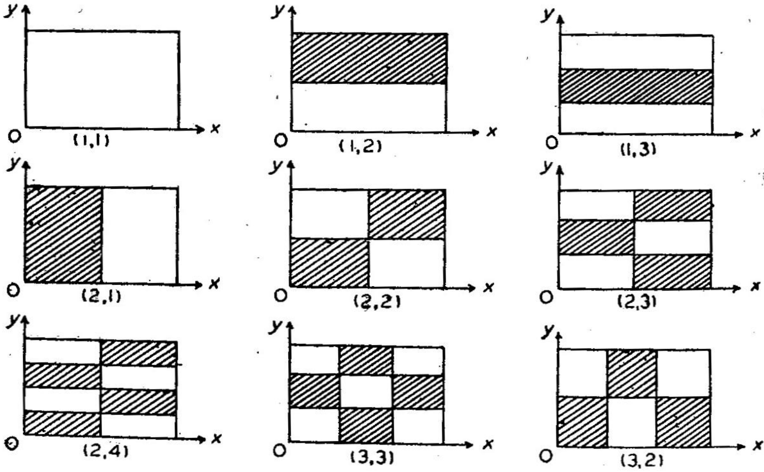
தொடக்கக் கட்டுப்பாடுகளிலிருந்து (4)-ல் உள்ள மாறிகளின் மதிப்புகளை ஃபோரியரின் (Fourier) பகுப்பாய்வைப் பயன் படுத்திக் காணலாம்.

(1, 1) இயல்நிலைவகை அடிப்படை வகையெனப்படும்; இதன் நிகழ்வெண் $= \sqrt{\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)\frac{T}{4\rho}}$. மேல் சுரங்கள் (3)-க்கும் இதற்கும் எண் அளவில் எளிதான தொடர்பில்லை. மேலும் பல இயல்நிலை வகைகள் ஒன்றாகத் தூண்டப் படுகின்றன. இதற்கு மாறாக, கம்பியில் நிகழும் அலைகளில், மேல் சுரங்கள் அடிப்படைச் சுரத்துடன் எண்ணளவில் எளிய தொடர்பு கொண்டுள்ளன. இக்காரணம் பற்றியே, அதிரும் சவ்வின் ஒலியைவிட, அதிரும் கம்பியின் ஒலி கேட்பதற்கு இனிமை யாக உள்ளது.

§§ 3.3 (m, n) இயல்நிலை வகையில், கணுக்கோடுகள் (Nodal lines). $x = o, \frac{a}{m}, \frac{2a}{m}, \ldots\ldots, a$;

$y = o, \frac{b}{n}, \frac{2b}{n}, \ldots\ldots, b$; முதலியனவாகும்.

இக் கோடுகளிலுள்ள புள்ளிகள் அதிர்வதில்லை. கணுக் கோடுகளின் இருபுறமும் உள்ள இடப்பெயர்ச்சிகள் எதிரெதிராக அமைகின்றன. படம் 4. சில இயல்நிலை வகைகளின் அதிர்வுகள் அமையும் முறையைக் கொடுக்கிறது. கணுக் கோடுகளுக்கு இருபுறமுள்ள பகுதிகள் எதிரெதிராக இடம் பெயருகின்றன. படத்தில் கோடிட்ட பகுதிகள் கோடிடாத பகுதிகளுக்கு எதிராக இடம் பெயருகின்றன. (m, n) இயல் நிலை வகையில் y–அச்சிற்கு இணையாக $(m-1)$ கணுக்கோடு களும், x-அச்சிற்கு இணையாக $(n-1)$ கணுக் கோடுகளும் உள்ளன.



படம் 24

§§ 3.4 இனச்சிதைவு வகைகள் [Degenerate Cases]

சமன்பாடு (3)–நிகழ்வெண்களைக் கொடுக்கிறது எனவே நிகழ்வெண்கள் m, n என்ற இரு மாறிகளைச் சார்ந்து நிற் கின்றன. (3)-லிருந்து, $\frac{a^2}{b^2}$ என்ற விகிதம் இரு முழு எண்களின் விகிதத்திற்குச் சமமில்லையெனின், எல்லா நிகழ்வெண்களும் வேறானவை. இந்த வகைகளில் கணுக்கோடுகள் முனைகளுக்கு இணையான நேர்க்கோடுகளாகும். ஆனால் $a^2 : b^2$ பொதுவள வுள்ளதாக (Commensurable) இருப்பின் சில நிகழ்வெண்கள் ஒன்றுபடலாம். இங்கு வெவ்வேறான பல இயல்நிலைவகை

கள், அதாவது (m, n) களின் வேறுன மதிப்புகள் ஒரே நிகழ் வெண்ணைக் கொடுக்கின்றன. உதாரணமாக, சதுர வடிவுள்ள சவ்வில் நிகழும் அலைகளில் கீழ்க்கண்ட இயல்நிலை வகைகள் ஒரே நிகழ்வெண்ணைக் கொடுப்பதை அறியலாம் :

(i) (25, 10), (10, 25), (23, 14), (14, 23).

(ii) (14, 5), (5, 14), (10, 11), (11, 10)

(iii) (11, 2), (2, 11), (5, 10), (10, 5).

(iv) (4, 7), (7, 4), (1, 8), (8, 1).

(3)-ல் $a = 2b$ என்றிருந்தால், (2, 2), (4, 1) என்ற இரு இயல்நிலை வகைகள் ஒரே நிகழ்வெண்ணைக் கொடுக்கின்றன.

இவ்வாறு இரண்டு அல்லது அதற்கும் மேற்பட்ட இயல் நிலை வகைகள் ஒரே நிகழ்வெண்ணைக் கொடுத்தால் இதை இனச் சிதைவு வகை என்போம்.

ஒரே நிகழ்வெண்ணைக் கொடுக்கும் வெவ்வேறு இயல்நிலை வகைகளின் ஒருபடிச் சேர்க்கையினுல் (Linear Combination) வரும் இயல்நிலையும் அதே நிகழ்வெண்ணைக் கொடுக்கும். இவ்வகையில் கணுக்கோடுகள் பல்வேறு வடிவங்களை எடுத்துக் கொள்ளலாம். உதாரணமாக, சதுரத் தோலில் $(a=b)$, (2, 1), (1, 2) என்ற இரு இயல்நிலைவகைகளின் ஒரு படிச் சேர்க்கையினுல்

$$z \propto \left[\sin\frac{2\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{a} + \lambda \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{2\pi y}{a} \right]$$

$$\propto \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{a} \left[\cos\frac{\pi x}{a} + \lambda \cos\frac{\pi y}{a} \right]$$

λ எந்த மதிப்பையும் எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

உதாரணமாக :—

$\lambda = +1$ என்ருல்,

$$z \propto \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{a} \cos\frac{\pi (x+y)}{2a} \cos\frac{\pi (x-y)}{2a}$$

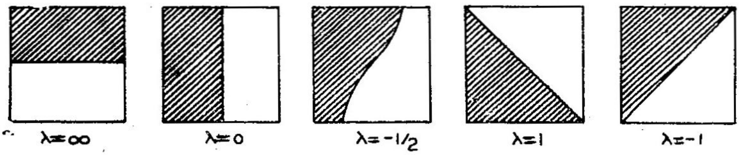
$\therefore$ $x+y=a$ என்ற மூலைவிட்டம் ஒரு கணுக்கோடு.

$\lambda = -1$ என்ருல்,

$$z \propto \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{a} \sin\frac{\pi (x+y)}{2a} \sin\frac{\pi (x-y)}{2a}$$

∴ $x-y=0$ என்ற மூலைவிட்டம் ஒரு கணுக்கோடு.

$\lambda=0$, $\lambda=-\frac{1}{2}$, $\lambda=+1$, $\lambda=-1$, என்ற வகைகளுக்குக் கணுக்கோடுகள் கீழே படத்தில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.



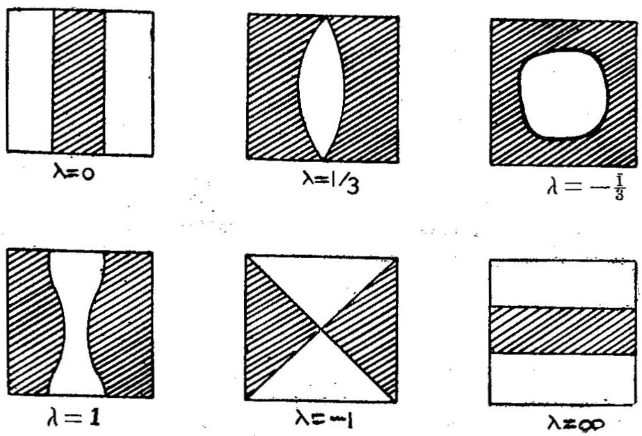
படம் 25

மேலும் சதுரச் சவ்வில் (3, 1), (1, 3) என்ற இயல்நிலை வகைகளின் ஒருபடிச் சேர்க்கையினால்,

$$z \propto \sin\frac{3\pi x}{a}\ \sin\frac{\pi y}{a}+\lambda\ \sin\frac{\pi x}{a}\ \sin\frac{3\pi y}{a}$$

$$\propto \sin\frac{\pi x}{a}.\ \sin\frac{\pi y}{a}\left\{3-4\ \sin^2\frac{\pi x}{a}+\lambda\left(3-4\ \sin^2\frac{\pi y}{a}\right)\right\}$$

$\lambda=0$, $\lambda=\pm\frac{1}{3}$, $\lambda=\pm1$ என்ற வகைகளுக்குக் கணுக்கோடுகள் கீழே படத்தில் கொடுக்கப் பட்டுள்ளன.



படம் 26

§§ 3.5 சமன்பாடு (4)லிருந்து அலையோட்டச் சமன்பாடு (1)-ன் முழுத் தீர்வு

$$z = \sum_{m, n} A_{m, n} \text{S n} \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \cos (rct + E_{mn})$$

$$= \sum_{m, n} \varphi_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \tag{5}$$

φ_{mn} என்பன இயல்நிலை ஆயக்கூறுகள் (Normal Co-ordinates) எனப்படும்.

இயக்க ஆற்றல், $$T = \int_0^b \int_0^a \tfrac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 dx \, . \, dy \tag{6}$$

$$= \int_0^b \int_0^a \tfrac{1}{2} \rho \left[\sum_{m,n} \dot{\phi}_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}\right]^2 dx \, . \, dy$$

தொகை காண, குறுக்காகப் பெருக்கியுள்ள உறுப்புகள் மறைகின்றன; வர்க்க உறுப்புகள் மட்டிலுமே இயக்க ஆற்றலுக்கு உதவுகின்றன.

$$\therefore \; T = \tfrac{1}{2} \rho \sum_{m \, n} \dot{\phi}^2_{mn} \int_0^b \int_0^a \sin^2 \frac{m\pi x}{a} \sin^2 \frac{n\pi y}{b} \, dx \, . \, dy$$

$$= \tfrac{1}{2} \rho \sum_{m, n} \dot{\phi}^2_{mn} \left[\frac{a}{2}\right] \left[\frac{b}{2}\right]$$

$$= \tfrac{1}{8} \rho \, a \, b \sum \dot{\phi}^2_{mn} \tag{7}$$

இனி சவ்வினை இழுப்பதற்குத் தேவையான வேலையிலிருந்து நிலை ஆற்றலைக் கணிக்கலாம். இது இழுவிசை T-ஐ அதிகரிக்கப்பட்ட பரப்பினுடன் பெருக்கக் கிடைக்கும். அதிரும் நிலையில் தனிமம் $\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}\,dx$, $\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dy$ பக்கங்களைக் கொண்ட ஒரு செவ்வகத்தைப் போன்று ஏறத்தாழ இருக்கும் எனக் கொண்டு, இதன் பரப்பு, இரண்டாவது வரிசை சிறு மதிப்புகளை நீக்கி,

$$= \left\{1+\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right\} dx\, dy$$

∴ நிலை ஆற்றல்,

$$V = \tfrac{1}{2}\, T \int_0^b \int_0^a \left\{ \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 dx.\, dy \right. \tag{8}$$

$$= \tfrac{1}{8}\,\rho\, a\, b\, c^2 \sum r^2 \phi^2_{mn} \tag{9}$$

இயக்கவியலில் (Mechanics), T, V-களின் வடிவம் இயல்நிலை ஆயக்கூறுகளில் சமன்பாடுகள் (7), (9) போன்று அமைவதைக் காண்க.

வட்டச் சவ்வில் அலைகள்

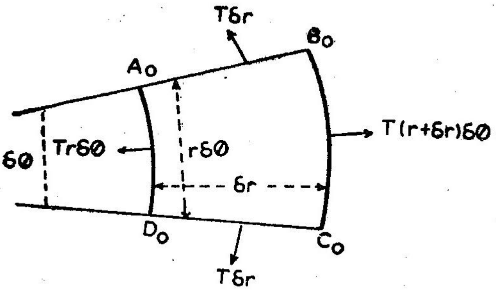
§§ 3.6 இனி, மத்தளம் அல்லது மிருதங்கத்திலுள்ளது போன்ற a ஆரமுடைய வட்ட வடிவச் சவ்வில் ஏற்படும் அதிர்வுகளை ஆராய்வோம். தெக்காட்டின் ஆயக் கூறுகளுக்குப் பதிலாகத் தளபோலார் ஆயக் கூறுகள் (Plane Polar Co-ordinates) r, θ-களைப்பயன் செய்வோம். இங்குஅலை ஓட்டச் சமன்பாட்டின் வடிவம் மாறுபட்டு அமையும் படம் (27)–லிருந்து, ஆரத்திற்குச் செங்குத்துத் திசையிலுள்ள இரு இழுவிசைகள் $T\,\delta r$-களின் விளைவு விசை (z திசையில்)

$$= T\delta r.\left[\left(\frac{\partial z}{r\,\partial \theta}\right)_{\theta+\delta\theta} - \left(\frac{\partial z}{r\,\partial \theta}\right)_{\theta}\right] = \frac{T}{r^2}\,\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}\, r\,\delta r.\,\delta\theta,$$

ஆரத்திற்கு இணையான திசையிலுள்ள இரு இழுவிசைகள் $T(r+\delta r)\delta\theta$, $T\, r\delta\theta$ க்களின் விளைவு விசை (z திசையில்)

$$= T\,\partial\theta.\left[\left(r\frac{\partial z}{\partial r}\right)_{r+\delta r}-\left(r\frac{\partial z}{\partial r}\right)_{r}\right]$$

$$=\frac{T}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial z}{\partial r}\right)r.\delta r.\delta\theta.$$



படம் 27

$\therefore$ z திசையில் நிகழும் இயக்கத்தின் சமன்பாடு

$$\rho\,\delta r.\delta\theta.\ \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial z}{\partial r}\right)\right]T.r.\delta r.\delta\theta.$$

$\therefore$ தளபோலார் ஆயக்கூறுகளில் அலையோட்டச் சமன்பாடு

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \qquad (10)$$

$$C^2 = T/\rho$$

இதன் தீர்வு, $z=\frac{J_m}{Y_m}(n\,r)\frac{\cos}{\sin}m\theta\frac{\cos}{\sin}n\,ct$, $n^2 = p^2 - q^2$. $r = 0$-ல்

$Y_m(nr)$ கந்தழியாகையால் இந்த உறுப்பு முழு வட்டத் தோலி லுள்ள அலைகளுக்குப் பொருந்தாது; எனவே இவ்வுறுப்பை விட்டுவிடுவோம். (ஆனல் ஒரே மையத்தையுடைய இரு வட்டப் பிரதிகளை எல்லைகளாகக் கொண்ட வளைவடிவமான (Annular) சவ்வில் பேஸலின் (Bessel's) இரண்டாம் வகைச் சார்பு $Y_m(nr)$–ஐ விட்டுவிட முடியாது என்று அறிக.) மேலும், தொடக்கக் கோட்டைப் பொருத்தமாக எடுத்துக் கொண்டால்,

$$z = A\,J_m(nr)\cos(m\,\theta)\cos(n\,ct+E) \tag{11}$$

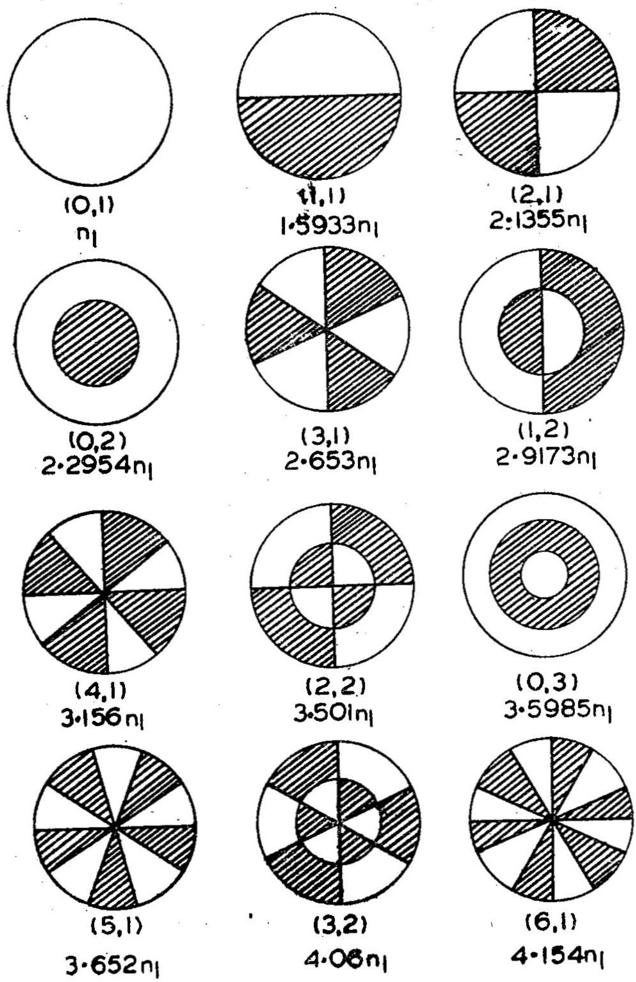
எல்லைக் கட்டுப்பாடு : வட்டப் பரிதியில் அதிர்வில்லையாத லால் $r=a$-ல், எல்லா, θ, t களுக்கும் $z=0$

$$\therefore\quad J_m(na) = 0 \tag{12}$$

Z ஒரு தனிப்பெறுமானச் சார்பாக (Single Valued Function) இருக்க வேண்டுமாயின், m ஒரு கூட்டு முழு எண்ணாக இருக்க வேண்டும். m-ன் குறிப்பிட்ட மதிப்பிற்குச் சமன்பாடு (12)-ன் மெய்த் தீர்வுகள் கந்தழி எண்ணிக்கையாகும். இத் தீர்வுகள் ஒவ்வொன்றுக்கும் [ஒத்திசைவாக n-ன் மதிப்புகளைக் கண்டறிய லாம். இத்தீர்வுகளைப் பேஸல் சார்புகள் (Bessel Functions) அட்ட வணையிலிருந்து காணலாம். இவைகளை $n_{m,1}$, $n_{m,2}$,...$n_{m,k}$,...

என்று குறிப்போம். (11)-லிருந்து நிகழ்வெண் $\frac{nc}{2\pi}$. n-ன்

மதிப்பை $n_{m,k}$ என்று கொண்டால் (11), (m, k) இயல் நிலை வகை எனப்படும். ($m, = 0, 1, 2,\ldots; k=1, 2, \ldots$) கணுக் கோடுகள் வட்டங்களும், விட்டங்களுமாகும். படம் 28 சில வகை அதிர்வுகளைக் கொடுக்கின்றது. கோடிட்ட பகுதிகள் கோடிடாத பகுதிகளுக்கு எதிராக இடம் பெயரு கின்றன.



படம் 28

மிக முக்கியமான இயல்நிலை வகைகளின் அதிர்வுகளைப் படங்கள் காட்டுகின்றன. அடிப்படை நிகழ்வெண் n_1 என்றால் மற்றைய இயல்நிலை வகைகளின் நிகழ்வெண்கள் n_1 ஐப் பொருத்து கணக்கிடப்பட்டு படங்களின் கீழ் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

படங்கள் 26, 28 சலாடினியின் (Chladini) படங்கள் எனப் படும். செய் முறையில் அதிர்வுறும் சவ்வில் கணுக்கோடுகளைக் காண்பதற்கு, சலாடினியின் முறைப்படி, சவ்வில் மிக நுண் மணலைத் தூவியபின் சவ்வை அதிர்வுறச் செய்தால், அதிர்விலாக் கணுக்கோடுகளில் மணல் குவிவதைக்காண லாம்.

செவ்வகச் சவ்வைப் போன்றே, வட்டச் சவ்விலும் மேல் சுரங்கள் அடிப்படைச் சுரத்துடன் எண்ணளவில் எளிய தொடர்பு கொண்டிருக்கவில்லை. இக்காரணத்தால் முரசொலி அவ்வளவு இனிமையாக இருப்பதில்லை. அதிரும் மணி இதைப் போன்ற வகையினதேயாயினும் அதில் சில முக்கிய மேல் சுரங்கள் அடிப்படை சுரத்துடன் எண்ணளவில் தொடர்பு கொண்டிருப்பதை நிறுவுதல் இயலும். நன்கு நிர்மாணிக்கப் பட்ட மணியின் ஓசை இனிமையாயிருத்தலை இது விளக்கு கிறது. மணியின் வடிவம் மரபொழுங்கைச் சாராது சிறிது மாறுபட்டிருப்பினும் மணியோசை வழக்கமாக இனிமையாக விராது.

பயிற்சி IV

1. ஒரு செவ்வகச் சவ்வின் பக்கங்கள் 6, 2 என்றால் இனச் சிதைவு ஏற்படும் இரு இயல்நிலை வகைகளைக் காண்க.

2. 25 கிராம் பொருண்மையுடைய 25 செ.மீ. $\times$ 15 செ.மீ. உள்ள ஒரு செவ்வகச் சவ்வு 10 கி. கிராம் விசையுடன் இழுத் துக் கட்டப்பட்டால் அதன் அதிர்வின் அடிப்படை நிகழ்வெண் யாது?

3. $x=0, a$; $y=0, a$, என்ற கோடுகளை எல்லைகளாகக் கொண்ட ஒரு சதுரச் சவ்வு $z=A\sin\dfrac{3\pi x}{a}\sin\dfrac{4\pi y}{a}$ என்ற வடி வத்திற்கு உருத்திரிக்கப்பட்டு ஓய்வு நிலையிலிருந்து விடுவிக்கப் படுகிறது. பின் நிகழும் இயக்கத்தை விவரி. மேலும் t என்ற நேரத்தில் நிலை மற்றும் இயங்கு ஆற்றல்களைக் காண்க. அதிர் வின் ஆற்றல் எங்கிருந்து வருகிறது?

4. சவ்வு, a, b பக்கங்களையுடைய செவ்வக வடிவமைப் புடையதாயின் $z = A \sin pt. \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$ என்பது நிற்கும் அலையின் சரியான ஒரு வடிவம்தான் என நிறுவுக; இங்கு $\left(\frac{p}{\pi}\right)^2 = C^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)$ [M.U. 1967]

5. a, $\frac{a}{\sqrt{2}}$ பக்கங்களைக் கொண்ட செவ்வகச் சவ்வின் அடிப்படைக் காலக்கூறு τ எனின் $\frac{\tau}{\sqrt{11}}$ ஐக் காலக் கூறுகக் கொண்ட இரு இயல்நிலை வகைகளைக் காண்க. [M.U. 1967]

[விடை : (5, 2), (1, 4)].

6. a, b பக்கங்களையுடைய ஒரு செவ்வகச் சவ்வில் நிகழும் குறுகதிர்வுகளின் (m, n) இயல்நிலை வகையின் நிகழ்வெண்ணைக் காண்க. $a = 2b$ என்றால் $(2m, n)$, $(2n, m)$ என்ற இயல்நிலை வகைகள் இனச் சிதைவு வகைகள் என நிறுவுக.
[M.U. 1962]

(7) இரு பரிமாணத்து அலையோட்டச் சமன்பாட்டின் தீர்வை

$$\phi = \frac{\sin}{\cos}\left(\frac{p\cos\theta}{c}x\right)\frac{\sin}{\cos}\left(\frac{p\sin\theta}{c}y\right)$$ என்ற வடிவத்தில் கொடுக்க இயலும் எனக் காட்டுக. இங்கு நிகழ்வெண் $p/2\pi$. ஓரங்கள் இணைக்கப்பட்டுள்ள இரு சமபக்கச் செங்கோண முக்கோண வடிவிலுள்ள சவ்வின் எல்லைக் கட்டுப்பாடுகளை

$$\phi = A\left[\cos\frac{(2m+1)\pi x}{2a}\cos\frac{(2n+1)\pi y}{2a} - \cos\frac{(2n+1)}{2}\frac{(2m+1)\pi y}{2a}\right]$$

திருப்தி செய்கிறது என நிறுவுக. இங்கு நிகழ்வெண் சமன்பாட்டினைக் காண்க. [M. U. 1966]

(8) குறுக்கு அதிர்வுறும் வட்டச்சவ்வின் இயல்நிலை வகை $z = J_m(nr) \cos m\theta \cos nct$-ஐக் காண்க. மேலும் (2, 1), (0, 2), (0,3) என்ற இயல்நிலை வகைகளுக்குச் சலாடினியின் படங்களை வரைக. [M. U. 1962]

(9) பரிதியில் இணைக்கப்பட்டுள்ள ஒரு வட்டச்சவ்வில் நிகழும் குறுக்கு அதிர்வுகளை ஆராய்ந்து (1, 1), (2, 1), (0, 2), (0, 3), (2, 2) என்ற இயல்நிலை வகைகளுக்குச் சலாடினியின் படங்களை வரைக. [M. U. 1964]

(10) பரிதியில் இணைக்கப்பட்டுள்ள ஒரு வட்டச்சவ்வில் நிகழும் குறுக்கதிர்வுகளின் நிகழ்வெண் சமன்பாடு

$J_n \left(a w \sqrt{\frac{m}{T}} \right) = 0$ எனக் காட்டுக. இங்கு a என்பது

வட்டத்தின் ஆரம். m என்பது ஒருமப்பரப்பின் பொருண்மை. T என்பது இழுவிசை. தொடக்க இடப் பெயர்ச்சி கொடுக்கப் பட்டால் செவ்வொழுங்குடன் நிகழும் அதிர்வுகளின் முழுத் தீர்வையும் காண்க. [M. U. 1966]

(11) 72° கோணத்தைத் தாங்கும் வட்டக் கோணப் பகுதி வடிவில் இழுக்கப்பட்ட சவ்வில் நிகழும் அதிர்வுகளின் இயல் நிலை வகைகளைக் காண்க,

(12) அதிரும் வட்டச் சவ்வின் இயக்க, நிலை ஆற்றல்களின் கோவைகளைக் (Expressions) காண்க. $z = A J_m(nr) \cos m\theta \cos nct$ என்ற இயல்நிலை வகைக்கு θ-வைப் பொருத்துத் தொகை கண்டு இவ்வாற்றல்களின் மதிப்புகளைக் காண்க.

(13) வட்டச் சவ்வில் கணுக்கோடுகள் $r =$ மாறிலி என்ற வட்டங்களும், $\theta =$ மாறிலி என்ற ஆர வெக்டார்களும் ஆகும் என நிறுவுக.

(14) ஒரே சீராக இழுக்கப்படாத a, b பக்கங்களையுடைய சவ்வின் இழுவிசை x திசையில் T_1, y திசையில் T_2. இயக்கத் தின் சமன்பாடு,

$$T_1 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + T_2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \rho \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \text{ என நிறுவுக.}$$

$\frac{x}{\sqrt{T_1}}, \frac{y}{\sqrt{T_2}}$ என்ற புதிய மாறிகளில் மாற்றி

யமைக்க இச்சமன்பாடு திட்ட வடிவம் அடையும் என நிறுவுக. இதன் வாயிலாக இயல்நிலை வகைகளைக் காண்க.

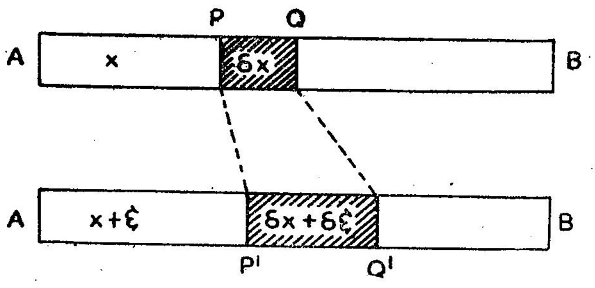
(15) a, b பக்கங்களைக் கொண்ட செவ்வகச் சவ்வில் நிகழ்வெண் N-க்குக் குறைவான இயல்நிலை வகைகளின் எண்ணிக்கை தோராயமாக நீள்வட்டம் (Ellipse) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{4\rho N^2}{T}$ இன், கால் பகுதி (Quadrant)-யின் பரப்பிற்குச் சமம் என நிறுவுக. இதிலிருந்து தோராயமாக இந்த எண் $\frac{\pi \rho a b N^2}{T}$ என நிறுவுக. [M. U. 1965]

(16) 100 gm. பொருண்மையுள்ள 20 cm. × 40 cm. எனும் செவ்வகச்சவ்வின் இருபக்கங்களும் முறையே 50 kg. 100 kg. இழுவிசைகளினால் இழுக்கப்பட்டால் அதிர்வின் நிகழ்வெண்ணைக் காண்க.

4. நீளப்பாங்கு அலைகள்

(Longitudinal Waves)

§4.1. அலை செலுத்தப்படும் திசைக்குச் செங்குத்தாக நிகழும் இடப் பெயர்ச்சிகளைக் கொண்ட குறுக்கு அதிர்வுகளைப் பற்றி சென்ற அத்தியாயங்களில் கண்டோம். இனி, இப் பகுதியில் அலை செல்லும் திசையிலேயே நிகழும் இடப் பெயர்ச்சிகளைக் கொண்ட நீளப்பாங்கு அலைகளைப் பற்றி ஆராய்வோம்.



படம் 29

ஒரும நீளத்தின் பொருண்மை ρ-வுடன், சீரான குறுக்கு வெட்டையுடைய AB என்ற கோலை எடுத்துக் கொள்வோம். கோலின் ஊடாகச் செல்லும் நீளப்பாங்கு அலை கோலின் ஒவ்வொரு தனிமத்தின் நெடு நீளமான அதிர்வினுல் கொடுக்கப் படுகிறது. δx நீளமுள்ள PQ என்ற ஒரு சிறு தனிமத்தை எடுத்துக் கொள்வோம்; இங்கு $AP=x$. அதிர்வின் பொழுது PQ நிலை $P'Q'$ என்போம். P-யிலிருந்து P'-க்கு இடப்பெயர்ச்சி ξ என்றால் Q-விலிருந்து Q'-க்கு இடப்பெயர்ச்சி $\xi+\delta\xi$ ஆகும். ஆகவே $P'Q'=\delta x+\delta\xi$. $P'Q'$-ல் செயல் புரியும் விசைகளைக் கண்டு $P'Q'$-ன் இயக்க சமன்பாட்டைக் காண்போம். முதலில்

P'–ல் உள்ள இழுவிசை Tp'-ஐக் கணக்கிடுவோம். δx பூஜ்ஜியத்திற்குச் சுருங்குவதாகக் கொள்வதிலிருந்து இதை அறியலாம். ஹூக்கின் விதிப்படி (Hooke's Law),

$$T_p = \lambda \frac{\text{நீட்சி}}{\text{இயல்நீளம்}} = \lambda \lim_{\delta x \to 0} \frac{(\delta x + \delta\xi) - \delta x}{\delta x}$$

$$= \lambda \frac{\partial \xi}{\partial x} \qquad (1)$$

$P'Q'$–ன் பொருண்மை PQ-ன் பொருண்மையான $\rho\delta x$ ஆகும்.

படம் 30

$P'Q'$-ன் இயக்கச் சமன்பாடு

$$\rho\delta x \,.\, \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = T_{q'} - T_{p'}$$

$$= \left[T_{p'} + \frac{\partial (T_{p'})}{\partial x} \partial x \right] - \mathrm{T}_{p}'$$

$$= \frac{\partial (T_{p'})}{\partial x} \delta x = \lambda \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \delta x, \qquad \text{(1)-லிருந்து}$$

$$\therefore \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{(\lambda/\rho)} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \qquad c^2 = \lambda/\rho \qquad (2)$$

ஆகவே, கோலினூடே செல்லும் அலையின் திசைவேகம் $\sqrt{\lambda/\rho}$. இந்த முடிவு கம்பியின் குறுக்கதிர்வின் திசைவேகம் போன்று இருக்கிறது.

§ 4.2. எல்லைக் கட்டுப்பாடுகள் :

எல்லைக்கட்டுப்பாடுகள் தெரிந்தால் (2)-ன் முழுத் தீர்வைக் காணலாம்.

(a) கட்டற்ற முனையில் (Free End) இழுவிசை மறைய வேண்டும். ஆகவே (1)-லிருந்து கட்டற்ற முனையில் $\frac{\partial \xi}{\partial x}=o$. ஆனல், பொதுவாக, இடப்பெயர்ச்சியும் இங்கு மறைய வேண்டியதில்லை.

(b) நிலையான முனையில் (Fixed End) அதிர்வு இல்லாமையால் இடப்பெயர்ச்சி ξ மறைய வேண்டும். ஆனல், பொதுவாக, இழுவிசையும் இங்கு மறைய வேண்டியதில்லை.

4.3. *மூன்று வகைகள் :*

l நீளமுள்ள ஒரு கோலில் நிகழும் அதிர்வுகளை ஆராய (2)-ன் நிற்கும் அலை வகைத் தீர்வுகளை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$\xi=\frac{\cos}{\sin} px. \quad \frac{\cos}{\sin} pct \tag{3}$$

(i) கோலின் இரு முனைகளும் கட்டற்றவை என்போம். ஆதியை ஒரு முனையில் எடுத்துக்கொண்டால் எல்லைக் கட்டுப்பாடு (a)-யிலிருந்து, $x=o$, $x=l$-களில் $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ மறைய வேண்டும். $x=o$-ல் $\frac{\partial \xi}{\partial x}=o$ என்பதனுல், ξ-ல் $\sin px$ உறுப்பு இருக்கவியலாது. மேலும் $x=l$-ல் $\frac{\partial \xi}{\partial x}=o$ என்பதனுல் $\sin pl=o$; அதாவது $pl=r\pi$, $r=1, 2, 3$.........

$$\therefore\ \xi=a_r \cos\frac{r\pi x}{l}\cos\left(\frac{r\pi ct}{l}+E_r\right) \tag{4}$$

இது r-ஆவது இயல்நிலை வகையெனப்படும்.

ஒருங்கிணைக்கும் கோட்பாட்டின்படி, மிகப் பொதுத் தீர்வு

$$\xi=\sum_r a_r \cos\frac{r\pi x}{l}\cos\left(\frac{r\pi ct}{l}+E_r\right) \tag{5}$$

இதை $\xi = \sum_{r} \phi_r \cos \frac{r\pi x}{l}$ என்றால், $\phi_r = a_r \cos\left(\frac{r\pi ct}{l} + E_r\right)$

$\phi_1, \phi_2, \ldots$ என்பன இயல்நிலை ஆயக்கூறுகள் எனப்படும். r ஆவது இயல்நிலை வகையின் நிகழ்வெண் $= \frac{rc}{2l}$. ஆகவே அடிப்படை நிகழ்வெண் $= c/2l$. இங்கு மேல் சுரங்கள் அடிப்படை சுரத்துடன் எண்ணளவில் தொடர்பு கொண்டுள்ளன. $x = l/2r$, $\frac{3l}{2r}$, $\frac{5l}{2r}$, ... $\frac{(2r-1)l}{2r}$ என்பன (3)-ன் கணுப்புள்ளிகள் ; $x = o$, $\frac{2l}{2r}$, $\frac{4l}{2r}$, ..., l என்பன (3)-ன் எதிர்க் கணுப்புள்ளிகள்.

(1)-லிருந்து, அலையோட்டத்தின் கணுக்கள் இழுவிசையின் எதிர்க்கணுக்கள்; இழுவிசையின் கணுக்கள் அலையோட்டத்தின் எதிர்க்கணுக்கள் என்று அறிகிறோம். இதே போன்ற குறிப்பிடத்தக்க பண்பினை பின்வரும் ஒலி அலைகள் அத்தியாயத்திலும் காணலாம்.

(ii) கோலின் இரு முனைகளும் நன்கு உறுதியாகப் பிணைக்கப்பட்டுள்ளன என்போம். முன் போலவே ஆதியை ஒரு முனையில் எடுத்துக் கொண்டால், எல்லைக் கட்டுப்பாடு (b)-யிலிருந்து $x = o$, $x = l$-களில் $\xi = o$ ஆக இருக்கவேண்டும். $\therefore$ (3)-லிருந்து ξ-ல் $\cos px$ உறுப்பு இருக்கவியலாது ; மற்றும், $\sin pl = o$ ஆகவே, $pl = r\pi$

$$\therefore \xi = a_r \sin\frac{r\pi x}{l} \cos\left(\frac{r\pi ct}{l} + E_r\right) \tag{6}$$

இத்தீர்வு, இரண்டாவது அத்தியாயத்திலுள்ள குறுக்கு அதிர்வின் தீர்வுகளைப் போன்று இருத்தலைக் காணலாம். ஒருங்கிணைக்கும் கோட்பாட்டின்படி மிகப் பொதுத் தீர்வு

$$\xi = \sum_{r=1}^{\infty} a_r \sin\frac{r\pi x}{l} \cos\left(\frac{r\pi ct}{l} + E_r\right) \tag{7}$$

இதை $\xi = \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r \sin \frac{r\pi x}{l}$ என்றால், $\phi_r = a_r \cos\left(\frac{r\pi ct}{l} + E_r\right)$

$\phi_1, \phi_2, \ldots\ldots$ என்பன இயல்நிலை ஆயக்கூறுகள் எனப்படும்.

(iii) கோலின் ஒருமுனை மட்டிலும் நன்கு உறுதியாகப் பிணைக்கப்பட்டு மறு முனை கட்டற்று உள்ளது என்போம். ஆதியை பிணைக்கப்பட்டுள்ள முனையில் எடுத்துக் கொள்வோம். எல்லைக் கட்டுப்பாடு (a)–யிலிருந்து $x = o$-ல் $\xi = o$. $\therefore$ (3)-லிருந்து ξ–ல் $\cos px$ உறுப்பு இருக்கவியலாது. கட்டற்ற முனை $x = l$ ஆதலால், எல்லைக் கட்டுப்பாடு (b)-யிலிருந்து $x = l$-ல் $\frac{\partial \xi}{\partial x} = o$. இக் கட்டுப்பாட்டிலிருந்து $\cos pl = o$.

$$\therefore pl = \frac{(2r+1)}{2}\pi, \quad r \text{ என்பது முழு எண்.}$$

$$\therefore \xi = a_r \sin \frac{(2r+1)\pi x}{2l} \cos\left[\frac{(2r+1)\pi ct}{2l} + E_r\right] \tag{8}$$

இது r–ஆவது இயல்நிலை வகையாகும். r–ஆவது இயல்நிலை வகையின் நிகழ்வெண் $\frac{(2r+1)\,c}{4l}$. ஒருங்கிணைக்கும் கோட்பாட்டின்படி மிகப் பொதுத் தீர்வு

$$\xi = \sum_r a_r \sin \frac{(2r+1)\pi x}{2l} \cos\left[\frac{(2r+1)\pi ct}{2l} + E_r\right] \tag{9}$$

$$= \sum_r \phi_r \sin \frac{(2r+1)\pi x}{2l}, \quad \phi_r = a_r \cos\left[\frac{(2r+1)}{2l}\pi ct + E_r\right]$$

$\phi_1, \phi_2, \ldots\ldots$ என்பன இயல்நிலை ஆயக்கூறுகள்.

§ 4.4. **ஆற்றல்கள்**

தனிமம் PQ–வின் இயக்க ஆற்றல் $\frac{1}{2}\rho\partial x\dot{\xi}^2$. ஆகவே

கோலின் இயங்கு ஆற்றல், $T = \int_0^l \frac{1}{2}\rho\, \dot{\xi}^2\, dx$ (10)

§ 4.3–ல் வகை (i)-ன் பொதுத்தீர்வு (5)-ஐ இயல்நிலை ஆயக்கூறு வடிவத்தில் எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$\xi = \sum_r \phi_r \cos\frac{r\pi x}{l}, \qquad \phi_r = a_r \cos\left(\frac{r\pi ct}{l} + E_r\right)$$

∴ இயக்க ஆற்றல் $T = \frac{1}{2}\rho\int_0^l \dot{\xi}^2$

$$= \frac{1}{2}\rho\int_0^l \left[\sum_r \dot{\phi}_r \cos\frac{r\pi x}{l}\right]^2 dx.$$

$$= \frac{1}{2}\rho\int_0^l \left[\sum_r \dot{\phi}_r^2 \cos^2\frac{r\pi x}{l}\right] dx +$$ [குறுக்குப் பெருக்கல் உறுப்புகளைக் கொண்ட தொகைகள்].

$$= \frac{1}{2}\rho\, \Sigma_r \dot{\phi}_r^2 \left[l/2\right],$$ [∵ குறுக்குப் பெருக்கல் உறுப்புகளைக் கொண்ட தொகை $= 0$, $\int_0^l \cos^2\frac{r\pi x}{l}\, dx = l/2$]

$$= \frac{1}{4}\rho l \sum_r \dot{\phi}_r^2 \qquad (11)$$

P′ Q′-ல் சேமித்து வைக்கப்பட்டுள்ள நிலைஆற்றல் தோராயமாக இழுவிசையை நீளத்தின் நீட்சியால் பெருக்குவதில் பாதியாகும்; அதாவது, P′ Q′-ல் உள்ள நிலைஆற்றல்

$$= \frac{1}{2} \lambda \frac{\partial \xi}{\partial x} \partial \xi = \frac{\lambda}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \partial x$$

$$\therefore \text{ கோலின் நிலைஆற்றல் } V = \int_0^l \frac{1}{2} \lambda \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 dx$$

$$\xi = \sum_r \phi_r \cos \frac{r\pi x}{l} \text{ என்றால்}$$

$$\text{நிலைஆற்றல் } V = \frac{1}{2} \lambda \int_0^l \left[\sum_r \phi_r \frac{r\pi}{l} \sin \frac{r\pi x}{l} \right]^2 dx$$

$$= \frac{1}{2} \lambda \int_0^l \left[\sum_r \phi_r \frac{r^2\pi^2}{l^2} \sin^2 \frac{r\pi x}{l} \right]^2 dx +$$

[குறுக்குப் பெருக்கல் உறுப்புகளைக் கொண்ட தொகைகள்]

$$= \frac{\lambda}{2} \sum_r \frac{r^2\pi^2}{l^2} \phi_r^2 \left[\frac{l}{2} \right]$$

$$= \frac{\rho c^2 \pi^2}{4l} \sum_r r^2 \phi_r^2 \qquad (12)$$

§ 4.3-ன் (ii), (iii) வகைகளுக்கு இயங்கு, நிலை ஆற்றல்களைக் காண்பது பயிற்சியாக விடப்பட்டுள்ளது.

§ 4.5. தொடக்கத்திலேயே, கோல் இழுக்கப்பட்ட நிலையில் உள்ளது என்றால் நீளப்பாங்கு அதிர்வுகளின் முடிவுகளைச் சிறிது மாற்றியமைக்க வேண்டும். l நீளத்தில் இழுத்துக்

கட்டப்பட்டுள்ள l_o நீளமுடைய கோலின் நீளப்பாங்கு அதிர்வுகளை ஆராய்வோம். கோலின் சமநிலை இழுவிசை T_o என்றால்

$$T_o = \lambda \frac{l-l_o}{l_o} \tag{13}$$

படம் (29)-ல் P′ Q′-ன் அதிரா நிலையில் அதன் இழுக்கப்பட்ட நீளம் ∂x ஆகும். இனி P′ Q′-ன் இழுக்கப்படாத நீளத்தைக் காண்போம். கோலின் இழுக்கப்பட்ட நீளம் l எனின் கோலின் இழுக்கப்படாத இயல் நீளம் lo; எனவே ∂x-ஐ இழுக்கப்பட்ட நீளமாக உடைய தனிமத்தின் இழுக்கப்படாத நீளம் $\frac{l_0}{l}\,dx$ ஆகும். இதுவே P′ Q′-ன் இழுக்கப்படாத நீளம். ஆகவே P′-ல் உள்ள இழுவிசையைக் காண (1)-ஆவது வாய்பாடு பொருந்தாது. திருத்தியமைக்கப்பட்ட இந்த உறவு,

$$T_{p'} = \lambda \lim_{\partial x \to 0} \frac{\partial x + \partial \xi - \frac{l_o}{l}\,\partial x}{\frac{l_o}{l}\,\partial x}$$

$$= T_o + \lambda \frac{l}{l_o}\frac{\partial \xi}{\partial x}, \text{ (13)-லிருந்து} \tag{14}$$

இழுக்கப்படாத கோலின் அடர்த்தி ρ_o எனின் P′ Q′-ன் பொருண்மை $= \left(\frac{l_a\,\partial x}{l}\right)\rho_o$

∴ P′ Q′-ன் இயக்கச் சமன்பாடு

$$\rho_o\left(\frac{l_o}{l}\right)\partial x\,\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = T_{q'} - T_{p'}$$

$$= \frac{\partial\, T\rho'}{\partial x}\,\delta x$$

$$= \frac{\lambda\, l}{l_o}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\;\delta x, \qquad \text{(14)லிருந்து}$$

$$\therefore \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2},\; c^3 = \frac{\lambda\, l^2}{\rho_o\, l_o^{\,2}} \tag{15}$$

இதுவே திட்டவடிவ அலையோட்டச் சமன்பாடு.

தொடக்கத்தில் இழுக்கப்படாத நிலையில் உள்ள கோலி லுள்ள அலையோட்டத்தின் திசைவேகம் C_o எனின்

$$c_o = \sqrt{\frac{\lambda}{\rho_0}} \qquad \therefore\ c = \left(\frac{l}{l_o}\right) c_o \qquad (16)$$

ஆகவே இழுக்கப்படுவதால் கோலில் அலை வேகம் அதிகரிக் கிறது. கோல் இழுக்கப்பட்ட நிலையில் உள்ளதால் அதன் இரு முனைகளும் பிணைக்கப்பட்டிருக்க வேண்டும் ஆகவே இவ்விரு முனைகளிலும் $\xi = 0$. ஒரு முனையை ஆதியிலும் மறுமுனையை $x = l$விலும் எடுத்துக் கொண்டால் (15)-ன் தீர்வு,

$$\xi = a_r \sin\frac{r\pi x}{l} \cos\left[\frac{r\pi ct}{l} + E_r\right],\ r = 1, 2 \qquad (17)$$

(17), r-ஆவது இயல்நிலைவகையைக் குறிக்கிறது.

r-ஆவது இயல்நிலை வகையின் நிகழ்வெண் $= \dfrac{rc}{2l} = \dfrac{rc_o}{2l_o}$,

(16)-லிருந்து. ஆகவே, நிகழ்வெண் இழுக்கப்படும் அளவினைச்

சார்வதில்லை எனத் தெளிவாகிறது. $x = 0,\ \dfrac{l}{r},\ \dfrac{2l}{r}, \ldots\ldots\ldots l$

என்பன (17)-ன் கணுப்புள்ளிகள். ஒருங்கிணைக்கும் கோட்பாட் டின்படி, பொதுத் தீர்வு

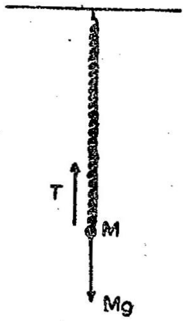
$$\xi = \sum_r a_r \sin\frac{\pi x}{l} \cos\left[\frac{r\pi ct}{l} + E_r\right] \qquad (18)$$

§ 4.6 மேல் முனையிலிருந்து கட்டப்பட்டு தொங்கவிடப்பட் டுள்ள ஒரு சுருள்வில்லின் (Spring) அடிமுனையில் பொருண்மை M கட்டப்பட்டுள்ளது. இச் சுருள்வில்லின் அதிர்வுகளை ஆராய்வோம். முதலில் சுருள்வில்லின் பொருண்மை புறக் கணிக்கத்தக்கது என்போம். இவ்வகையில் M-ன் இயக்கச் சமன்பாடு.

$$M \frac{d^2x}{dt^2} = Mg - T$$

$$= Mg - \lambda \frac{(x-l)}{l}$$

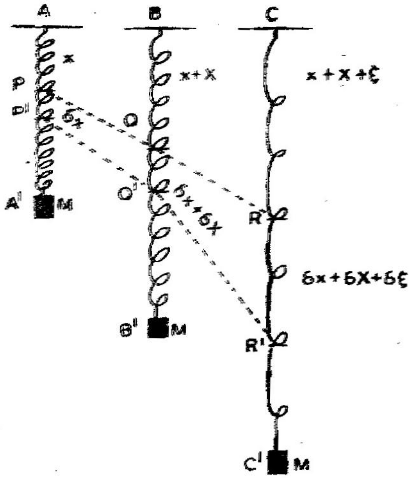
$$\therefore \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\lambda}{Ml}\left[x - l - \frac{glM}{\lambda} \right]$$



படம் 31

$$\therefore \frac{d^2X}{dt^2} = -\frac{\lambda X}{Ml}, \; X = x - l - \frac{glM}{\lambda}, \qquad (19)$$

ஆகவே, காலக்கூறு $2\pi\sqrt{\frac{Ml}{\lambda}}$......(20), உள்ள தனி இசை வியக்கத்தில் (Simple Harmonic Motion) M இயங்குகின்றது. இரண்டாவதாக, சுருள்வில்லின் பொருண்மை m எனக் கொள்வோம். இழுக்கப்படாத நிலையில், சுருள் வில்லின் நீளம் l என்றும், அடர்த்தி ρ என்றும் கொள்வோம். $\therefore\ m = \rho l$. சுருள் வில்லை மூன்று நிலைகளில் காண்போம். நிலை (i)–ல் சுருள்வில் இழுக்கப்படாத நிலையில் l நீளத்துடன் உள்ளது. மேல்முனை A யிலிருந்து x தொலைவிலுள்ள தனிமம் PP'-ன் நீளம் δx என்போம். நிலை (ii)-ல், சுருள்வில்தனது எடையாலும், அதனடியில் கட்டப்பட்டுள்ள எடையாலும் இழுக்கப்பட்டு சமநிலையிலுள்ளது. இங்கு தனிமம் PP', QQ' ஆக இடம் பெயர்ந்துள்ளது. P கீழாக X தொலைவும், P' கீழாக $X+\delta X$ தொலைவும் இடம் பெயர்ந்துள்ளன. கடைசியாக, நிலை (iii) சுருள்வில் அதிரும் நிலையாகும். தனிமம் QQ', RR' ஆக இடம் பெயர்ந்துள்ளது. Q'-உம் Q'-உம் தமது சமநிலைகளிலிருந்து முறையே ξ, $\xi+\delta\xi$ தொலைவுகள் இடம் பெயர்ந்துள்ளன. ஆகவே RR'-ன் நீளம் $\delta x + \delta X + \delta\xi$.



படம் 32

(i) இழுபடாத நிலை (ii) சமநிலை (iii) அதிரும் நிலை

இனி RR'-ன் இயக்கச் சமன் பாட்டைக் காண்போம்.

RR'-ன் பொருண்மை PP'-ன் பொருண்மை போன்றதாதலால் இது $\rho\,\delta x$ ஆகும். RR'-ல் செயல்படும் விசைகள், கீழ் நோக்கிச் செயல்படும் அதன் எடை $g\,\rho\,\delta x$, மற்றும் அதன் இரு முனைகள் R, R'-களில் உள்ள இழுவிசைகள் ஆகும். ஹூக்கின் விதிப்படி R-ல் உள்ள இழுவிசை T_R ஐக் காணலாம்.

$$T_R = \lambda \frac{\text{நீட்சி}}{\text{இயல் நீளம்}}$$

$$= \lambda \lim_{\delta x \to o} \frac{\delta x + \delta X + \delta \xi - \delta x}{\delta x}$$

$$= \lambda \left[\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \right] \qquad (21)$$

∴ RR'ன் இயக்கச் சமன்பாடு,

$$\rho\,\delta x \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \text{விசைகளின் விளைவு, கீழ்நோக்கி}$$

$$= g\rho\delta x + T_{R'} - T_R$$

$$= g\,\rho\,\delta x + \frac{\partial T_R}{\partial x}\,\partial x$$

$$= g\,\rho\delta x + \lambda \left[\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right] \delta x$$

$$\therefore \quad \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = g + \frac{\lambda}{\rho}\left[\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\right] \tag{22}$$

இச் சமன்பாடு $\xi = 0$ என்ற சமநிலை இருப்பையும் திருப்தி செய்யவேண்டும்.

$$\therefore \quad 0 = g + \frac{\lambda}{\rho}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \tag{23}$$

$\therefore$ சமன்பாடுகள் (22), (23) லிருந்து

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}, \qquad c^2 = \frac{\lambda}{\rho} = \frac{\lambda l}{m}, \tag{24}$$

இது திட்டவடிவ அலையோட்டச் சமன்பாடாகும். இச் சமன்பாட்டின் தீர்வு திருப்தி செய்யவேண்டிய எல்லைக் கட்டுப்பாடுகளைக் காண்போம். முதலாவதாக, மேலே கட்டப்பட்டுள்ள முனைக்கு அதிர்வுகிடையாது, அதாவது எல்லா t-க்கும் $x=0$-ல் $\xi=0$, $x=l$-ல் M-ன் இயக்கச் சமன்பாடு

$$M\left[\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}\right]_{x=l} = Mg - T_{x=l}$$

$$= Mg - \lambda\left[\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial\xi}{\partial x}\right]_{x=l} \qquad [(21)\text{லிருந்து}]$$

$$\therefore \quad \left[\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}\right]_{x=l} = g - \frac{\lambda}{M}\left[\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial x}\right]_{x=l} \tag{25}$$

இச் சமன்பாடு $\xi=0$ என்ற சமநிலை இருப்பையும் திருப்தி செய்யவேண்டும்.

$$\therefore \quad 0 = g - \frac{\lambda}{M}\left[\frac{\partial X}{\partial x}\right]_{x=l} \tag{26}$$

சமன்பாடுகள் (25), (26)லிருந்து

$$\left[\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}\right]_{x=l}=-\frac{\lambda}{M}\left[\frac{\partial\xi}{\partial x}\right]_{x=l} \tag{27}$$

சமன்பாடு (24)-ன் தீர்வு,

$$\xi=\frac{\cos}{\sin}\,p\,x\,\frac{\cos}{\sin}\,p\,c\,t.$$

எல்லா t-க்கும், $x=0$-ல் $\xi=0$ என்ற எல்லைக் கட்டுப்பாட்டிலிருந்து ξ-ல் $\cos\,p\,x$ உறுப்பு இருக்கவியலாது.

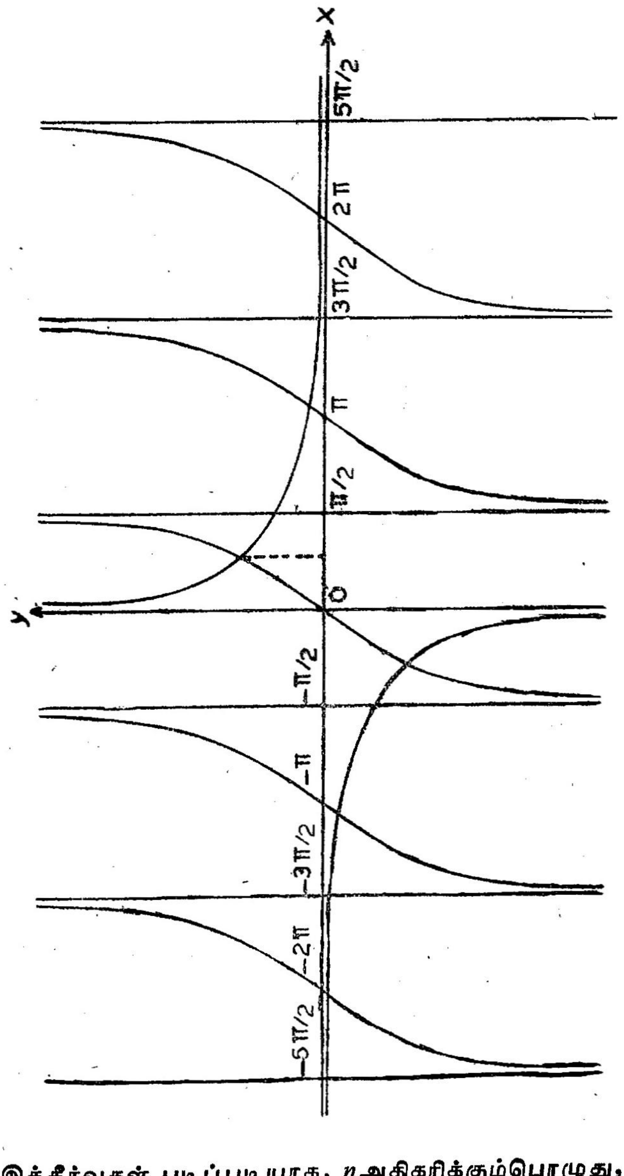
$$\therefore\quad \xi=A\sin\,p\,x\cos\,(pct+E) \tag{28}$$

இரண்டாவது எல்லைக் கட்டுப்பாடு (27)ஐ, தீர்வு (28)

திருப்தி செய்யவேண்டுமெனின் $p\,l\tan\,p\,l=\frac{m}{M}$ (29)

= ஒரு மாறிலி.

$p\,l=x$ என்க. $\therefore$ $p\,l$-ன் மதிப்பு, $x\tan x=\frac{m}{M}$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளில் எதுவாகிலும் ஒன்றாக இருக்கலாம். இது கந்தழி எண்ணிக்கையுடைய தீர்வுகளைக் கொண்ட கடந்தச் சமன்பாடாகும். இதன் தீர்வுகளை வரைப்படத்தின் வாயிலாகக் காணலாம். $y=\tan x$, $y=\frac{m}{Mx}$ என்ற வளைவரைகள் வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளிகளின் x-ஆயக்கூறுகள்தான் இச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகளாகும். படத்திலிருந்து x-ன் மதிப்புகள் $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\pi,\ \frac{3\pi}{2}\right]$, $\left[2\pi,\ \frac{5\pi}{2}\right]$, $\left[3\pi,\ \frac{7\pi}{2}\right]$ என்ற இடைவெளிகளில் அமைந்துள்ளதைக் காணலாம்.



படம் 33

இத்தீர்வுகள் படிப்படியாக, n அதிகரிக்கும்பொழுது, $n\pi$-ஐ நெருங்குகின்றன.

சுருள்வில்லின் முனையிலுள்ள M-ன் இயல்நிலை அதிர்வுகளை அடிப்படை, அதாவது, மிகக் குறைந்த, நிகழ்வெண் தருவதால் நாம் பொதுவாக அடிப்படை நிகழ்வெண்ணில் கவனம் செலுத்துவோம். மேல் சுரங்கள் சுருள்வில்லிலுள்ள நிற்கும் அலைகளை வெளிப்படுத்துகின்றன. $\frac{m}{M}$ சிறியது என்றால், சமன்பாடு (29)–ன் மிகக் குறைந்த மூலமும் (Root) சிறியதாகும்.

$$x \tan x = \frac{m}{M}$$

tan x-ஐ விரித் தெழுதி, $x\left[x+\frac{x^3}{3}+\ldots\ldots\right]=\frac{m}{M}$

தோராயமாக, $x^2\left[1+\frac{x^2}{3}\right]=\frac{m}{M}$.

$$\therefore \quad x^2 = \frac{m}{M}$$, முதல் தோராயமாக,

இம்மதிப்பிலிருந்து, இரண்டாவது தோராயமாக

$$x^2 = \frac{\frac{m}{M}}{1+\frac{m}{3M}} \qquad (30)$$

(28)-ன் மிகக் குறைந்த நிகழ்வெண்

$$= \frac{2\pi}{pc} = \frac{2\pi l}{cx} = 2\pi\sqrt{\frac{l\left(M+\frac{m}{3}\right)}{\lambda}}$$

$$\left[\because \quad c^2 = \frac{\lambda l}{m}, \quad \text{மற்றும் (30)-லிருந்து}\right]$$

சுருள்வில்லின் பொருண்மை m புறக்கணிக்கப் பட்டால், இதிலிருந்து, அடிப்படை நிகழ்வெண் $= 2\pi\sqrt{\frac{lM}{\lambda}}$. இதுதான் சமன்பாடு (20). ஆகவே சுருள்வில்லின் பொருண்மையை

எடுத்துக் கொள்வதின் விளைவு மிக நெருங்கிய தோராயத்தில், இப் பொருண்மையின் மூன்றிலொரு பங்கைச் சுருள்வில்லின் அடியில் இணைப்பதற்கு ஒப்பானதைப்போல் தோற்றமளிக்கிறது.

பயிற்சி V

(1) இரு அரை-கந்தழி (Semi-infinite) நீளமுள்ள கோல்கள் இணைக்கப்பெற்று கந்தழி நீளமுள்ள கோலாக்கப்படுகின்றன. இவ்விரு கோல்களின் அடர்த்திகள் ρ_1, ρ_2 ; மீட்சிக் குணகங்கள் λ_1, λ_2. முதல் ஊடகத்திலுள்ள இசையலைகள் கோல்களின் இணைப்பை அடையும்பொழுது ஏற்படும் எதிரொலிப்பின் மாறுபாட்டுப்படியையும் காண்க. (M.Sc.M.U. 1968)

$$\left[\text{விடை}: \; R = \left\{ \frac{\sqrt{\lambda_1 \rho_1} - \sqrt{\lambda_2 \rho_2}}{\sqrt{\lambda_1 \rho_1} + \sqrt{\lambda_2 \rho_2}} \right\}^2 \right]$$

(2) m பொருண்மையுள்ள ஒரு கயிறுல் M பொருண்மையுள்ள துகள் (Particle) ஒன்று கட்டித் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. நிலைக்குத்தாக (Vertical) இத்துகளைச் சிறிது இடப் பெயர்ச்சி செய்தால் விளையும் அதிர்வுகளின் காலக்கூறு $= \dfrac{2\pi}{z}\sqrt{\dfrac{ml}{\lambda}}$, $z \tan z = \dfrac{m}{M}$ என்ற சமன்பாட்டினுல் கிடைக்கிறது எனக் காட்டுக. இங்கு கயிறின் நீளம் l, மீட்சிக் குணகம் λ. (Modulus of Elasticity)

(3) $2l$ நீளமும், $2m$ பொருண்மையும் உடைய ஒரு சுருள் வில்லின் ஒரு முனையிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டு, அதன் மறு முனையிலும், நடுப்புள்ளியிலும் பொருண்மை M கட்டப் பெற்றுள்ளது. நிலைக்குத்து அதிர்வின் காலக்கூறு $= \dfrac{2\pi}{nc}$ என்றுல் $K^2 - 3K \cot nl + \cot^2 nl = 1$, $K = \dfrac{Mln}{m}$ என நிறுவுக.

(4) ρ_0 அடர்த்தியுள்ள கோலில் கந்தழியிலிருந்து வரும் நீளப்பாங்கு அலைகள், l நீளமும், அடர்த்தி ρ_1-உம் உடைய கோலில் செலுத்தப்பட்டு, பின், ρ_2 அடர்த்தியுள்ள மற்றொரு கோலின் வழியே கந்தழிக்குச் செல்லுகின்றன. இங்கு, வீச்சு A

$$\left[\left(1+\frac{\rho_2 c_2}{\rho_0 c_0}\right)^2 \cos^2\frac{nl}{c}+\left(\frac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1}+\frac{\rho_1 c_1}{\rho_0 c_0}\right)^2 \sin^2\frac{nl}{c}\right]^{\frac{1}{2}} : 2$$

என்ற விகிதத்தில் குறைகிறது எனக் காட்டுக. இங்கு

$C_n = \dfrac{A_n}{\rho_n}$, $(n=0, 1, 2)$ (M.Sc., M.U. 1965)

5. திரவங்களில் அலைகள்-1

(WAVES IN LIQUIDS—I)

§ **5.1** இங்கு திரவங்களில் நிகழும் அலையோட்டங்களைப் பற்றி ஆராய்வோம். திரவம் அழுந்தாத் தன்மையுடன் (Incompressible) மாரு அடர்த்தி ρ உடையது என்போம். இந்த நிபந்தனையை ஏறத்தாழ எல்லா திரவங்களும் திருப்தி செய்கின்றன. திரவத்தில் நிகழும் அலைகள் பொதுவாக, காற்றழுத்தம், புவி ஈர்ப்பு போன்ற கிளர்ச்சி செய்யும் விசைகள், கப்பல் அல்லது ஆற்றின் சீரற்ற அடிப்படுகை போன்றவற்ருல் நிகழ்கின்றன. ஆகவே, பாகுநிலை (Viscosity) இல்லை என்று கொண்டால் இயக்கம் சுழற்சியற்றது (Irrotational) ஆகும். இயக்கம் சுழற்சியற்றதாளுல் திசைவேகப் பொடன்ஷியல் ϕ (Velocity Potential) உள்ளதாகக் கொள்ளலாம். இப் பகுதிக்குத் தேவையான வாய்ப்பாடுகளை இங்கு விவரிப்போம்.

(i) பாய்பொருளின் எந்தப் பகுதியின் திசைவேகமும் $\vec{U}$ என்ற வெக்டாரால் (Vector) கொடுக்கப்பட்டால்

$$\vec{U} = -\Delta\phi \tag{1}$$

$$\vec{U} = (u,\ v,\ w) \text{ என்ருல் } u = -\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$v = -\frac{\partial \phi}{\partial y}$$

$$w = -\frac{\partial \phi}{\partial z}$$

(ii) *எல்லைக் கட்டுப்பாடு:* நிலையான எல்லையின் செங்குத்துத் திசையில் திசைவேகத்திற்குக் கூறு (Component) கிடையாது. எனவே, $\frac{\partial}{\partial \nu}$ என்பது செங்குத்துத் திசையில் வகைக்கெழு காணுதலைக் குறித்தால்

$$\frac{\partial \phi}{\partial \nu}=0 \qquad (2)$$

(iii) *தொடர்ச்சிச் சமன்பாடு* (Equation of Continuity) :

திரவம் உண்டாக்கப்படுவதோ அல்லது அழிக்கப்படுவதோ கிடையாது என்று கொள்வதானல், தொடர்ச்சிச் சமன் பாடு பொருண்மைப் பேணுகையை (Conservation of Mass) வெளிப் படுத்தவேண்டும். இச் சமன்பாடு

$$\Delta . \vec{U} \equiv \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad (3)$$

(1), (3) களிலிருந்து ϕ லெப்லாஸின் சமன்பாடு (Laplace's Equation)

$\Delta^2 \phi \equiv \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$ (4)-ஐத் திருப்தி செய்வதைக் காணலாம்.

(iv) பாய்பொருளின் ஒருதுகளின் திசைவேகம், அழுத்தம் அல்லது அடர்த்தி போன்ற ஒரு பண்பு $H(x, y, z, t)$ என்ற சார்பினுல் கொடுக்கப் பட்டால், $\frac{\partial H}{\partial t}$ என்பது வெளியில் (Space) உள்ள ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியில் H-ன் மாறுபாட்டைக் காட்டும். $\frac{DH}{Dt}$ என்பது பாய் பொருளின் ஒரு துகளுக்கு உள்ள H-ன் மாறுபாட்டைக் காட்டும். $\frac{DH}{Dt}$ என்பது முழுவகைக்கெழு (Total Differential Co-efficient) எனப்படும்

வெக்டார் கணிதத்திலிருந்து,

$$\frac{DH}{Dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \vec{U} . \Delta H \qquad (5)$$

என நிறுவலாம்.

$$\therefore \quad \frac{DH}{Dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + u . \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y} + w \frac{\partial H}{\partial z} \qquad (6)$$

(v) *ஆயிலரின் இயக்கச் சமன்பாடு* (Euler's Dynamical Equations): பாய்பொருளின் ஒருமப் பொருண்மையில் செயல் படும் புற விசையை (External Force) $\vec{F}$ என்ற வெக்டாரினல் குறித்துக் காட்டினல், பாய்பொருளின் ஓட்டச் சமன்பாட்டை வெக்டார் அமைப்பில்

$$\frac{D\vec{U}}{Dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \Delta p \qquad (7)$$

என்று கொடுக்கலாம். தெக்காட்டின் அமைப்பில் இது

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \qquad (8)$$

$$\frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = F_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \qquad (9)$$

$$\frac{Dw}{Dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} + F_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} \qquad (10)$$

எனும் மூன்று சமன்பாடுகளாகப் பிரிந்து நிற்பதைக் காண லாம்.

(vi) *பெர்னேலியின் சமன்பாடு* (Bernoulli's Equation):

புறவிசை $\vec{F}$-க்கு ஒரு பொடன்ஷியல் V இருப்பின் $\vec{F} = -\Delta V$. இவ்வகையில் ஓட்டச் சமன்பாட்டின் மிக முக்கியமான தொகை யொன்றுள்ளது. இது,

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}\vec{U}^2 + V - \frac{\partial \phi}{\partial t} = \xi \qquad (11)$$

இத் தொகை பெர்னேலியின் சமன்பாடு எனப்படும். இதில் ξ. நேரத்தின் ஒரு விதிக்கட்டில்லாச் சார்பு (Arbitrary Function), ϕயுடன், நேரம் t-ன் ஒரு சார்பைச்சேர்ப்பதால், ϕயினல் கொடுக் கப் படும் திசை வேகத்தின் பரவல் (Distribution) பாதிக்கப்

படுவதில்லை என்பது சமன்பாடு (1)லிருந்து தெளிவாகிறது. இதனால், ξ-யை $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ உறுப்புடன் ஈர்த்துக் கொண்டு சமன்பாடு (11)ஐக் கீழ்க்கண்டவாறு திருத்தியமைக்கலாம்.

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}\vec{U}^2 + V - \frac{\partial \phi}{\partial t} = \text{மாறிலி} \qquad (12)$$

§ **5.2** திரவங்களில் நிகழும் அலையோட்டத்தை இரு பிரிவுகளாகப் பிரிக்கலாம்.

1. நீள அலைகள் (Tidal Waves) அல்லது ஆழமற்ற நீரில் நீள அலைகள் (Long Waves in Shallow Water).

2. மேற்பரப்பு அலைகள் (Surface Waves):

1. *நீள அலைகள்* : திரவத்தின் ஆழம் அலை நீளத்துடன் ஒப்பிடக் குறைவாக உள்ள அலைகள் நீள அலைகள் எனப்படும். இவ்வகை அலைகளில் கிடை முடுக்கத்துடன் (Horizontal Acceleration) ஒப்பிட்டு, நிலைக்குத்து முடுக்கத்தை (Vertical Acceleration) புறக்கணித்துவிடலாம்; மேலும், நிலைக்குத்துத் தளத்திலிருந்து திரவம் அதிர்வின்பொழுது ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்திலேயே இருக்கும். இவ்வாறு, ஒவ்வொரு திரவத் தளமும் முழுமையாகவே இயங்கும். திரவம் முழுமையிலும் கிளர்ச்சியின் விளைவு இருக்கும். கடற்கரையில் நிகழும் அலைகள் நீள அலைகளாகும்.

2. *மேற்பரப்பு அலைகள்* : இத்தகைய அலைகளில் கிளர்ச்சி மேல் பரப்பின் வெகு தொலைவிற்குக் கீழே எட்டுவதில்லை. மேலும் இங்கு நிலைக்குத்து முடுக்கம் புறக்கணிக்கத் தக்கதல்ல. அலை நீளம் திரவத்தின் ஆழத்தைவிட மிகக் குறைவாகும். பெரும்பாலான காற்றலைகளும், புறப் பரப்பு இழுவிசை (Surface Tension) அலைகளும் இவ்வகையைச் சார்ந்தன. மேற்பரப்பு அலைகளின் முடிவுகளிலிருந்து சில கட்டுப்பாடுகளைப் புகுத்துவதின் மூலம் நீள அலைகளின் முடிவுகளைத் தோராயமாக அறியலாம். இனி, தனித்தனியே இவ்விருவகை அலைகளைப் பற்றி ஆராய்வோம்.

§ **5.3** *நீள அலைகள்* (Tidal Waves): முதலில் நீள அலைகளைப் பற்றிப் பார்ப்போம். z அச்சை நிலைக்குத்துத் திசையில்

எடுத்துக் கொள்வோம். சமன்பாடு (10)லிருந்து z திசையில் இயக்கச் சமன்பாடு,

$$\frac{Dw}{Dt} = -g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

நிலைக்குத்து முடுக்கத்தைப் புறக்கணிக்கலாம் என்று கொண்டால் $\frac{\partial p}{\partial z} = -g\rho$

தொகை காண, $p = -g\rho z +$ மாறிலி (13)

x, y தளத்தைச் சலனமில்லாக் கட்டற்ற மேற்பரப்பில் எடுத்துக் கொண்டு (x, y, o) என்ற புள்ளிக்கு மேல் திரவத்தின் எழுச்சியை $\zeta(x, y, t)$ ஆல் குறிப்போம். வளிமண்டல அழுத்தம் (Atmospheric Pressure) p_0 என்றால், $z = \zeta$-வில் $p = p_0$. ஆகவே, (13)லிருந்து, அழுத்தத்தின் சமன்பாடு

$p = p_0 + g\rho(\zeta - z)$ ....(14) என்றாகிறது. கிடை இயக்கச் சமன்பாடு (8), (9)-களில் p-ன் மதிப்பை இட,

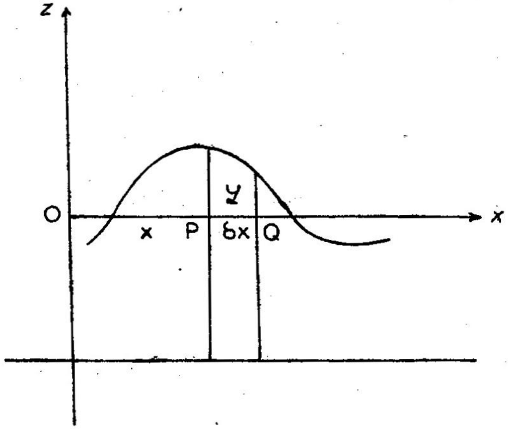
$$\frac{Du}{Dt} = -g\frac{\partial \zeta}{\partial x} \quad (15)$$

$$\frac{Dv}{Dt} = -g\frac{\partial \zeta}{\partial y} \quad (16)$$

இச்சமன்பாடுகளின் வலது பக்கங்கள் z-ன் சார்பற்றவை என்பதிலிருந்து இவ்வகை இயக்கத்தில் கிடை முடுக்கம் எல்லா ஆழத்திலும் ஒருப்போன்றதே என்று உய்த்தறிகிறோம். இதன் விளைவாக, ஆழமற்ற நீரில் திசைவேகம் ஆழத்தைப் பொறுத்து மாறுபடுவதில்லை. தொடக்கத்தில், ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்திலிருந்த துகள்கள் அவ்வாறே ஒரு நிலைகுத்துந் தளத்தில் நீடிக்கின்றன. இத்தளம் முழுவதுமாகவே நகருகிறது.

§ 5.4 கிடைத்தளத்தை அடிப்பக்கமாகவும், இணையான நிலைக்குத்துத் தளங்களைப் பக்கங்களாகவும் உள்ள ஒரு நேரான கிடைநிலை வாய்க்காலின் (Horizontal Channel) நெடுக நிகழும் நீள அலைகளைப் பற்றி ஆராய்வோம். வாய்க்காலின் குறுக்குவெட்டு (Cross Section) A, இடத்திற்கு இடம் மாறுகிறது என்றும், வாய்க்காலின் ஆழம் மாறிலி என்றும் கொள்வோம். x அச்சை நீரின் சலனமில்லா கட்டற்ற மேற்பரப்பில் வாய்க்காலின் போக்கிலும், z அச்சை நிலைக்குத்தாகவும் கொள்வோம்.

அலைகள் x திசையில் மட்டிலுமே நகர்கின்றன என்றும் கொள்வோம்.



படம் 34

x, $x+\delta x$ தொலைவிலுள்ள P, Q என்ற புள்ளிகள் வழியே செல்லும் இரு நிலைக்குத்துத் தளங்களுக்கிடையேயுள்ள சிறிய கன அளவு திரவத்தின் இயக்கச் சமன்பாட்டை நிறுவுவோம். P வழி செல்லும் நிலைக்குத்துத் தளத்திலுள்ள திரவம், ஆழத்தைப் பொறுத்து வேறுபடாத ஒரே கிடைத்திசை வேகம் (Horizontal Velocity) $u\ (x, t)$ உடன் நகருகிறது. y-திசையில் இயக்கம் இல்லாத வகையில் குறுக்குவெட்டு A, போதுமான அளவு மெதுவாக மாறுகிறது என்றும் கொள்வோம். கிடை இயக்கச் சமன்பாடு (15) மற்றும் தொடர்ச்சிச் சமன்பாடு மூலமாக இயக்கத்தின் விவரங்களை அறியலாம். x திசையில் கிடை இயக்கச் சமன்பாடு :—

சமன்பாடு (15)-லிருந்து,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\ \frac{\partial u}{\partial x} + w\ \frac{\partial u}{\partial z} = -\ g\ \frac{\partial \zeta}{\partial x}$$

[y திசையில் இயக்கம் இல்லாமையால் $\frac{Du}{Dt}$ யில் $v\ \frac{\partial u}{\partial y}$ உறுப்பு கிடையாது].

திசைவேகம் $u(x, t)$ ஆழத்தின், அதாவது z-ன் சார்பற்றது, எனவே $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$. மேலும், திரவத்தின் எந்தத் தனிமத்தின் திசை வேகமும் மிகச்சிறியது எனக்கொண்டு இரண்டாம் வரிசைச் சிறிய மதிப்புடைய $u\frac{\partial u}{\partial x}$ஐப் புறக்கணித்து விடுவோம். எனவே மேற்கண்ட சமன்பாடு

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - g \frac{\partial \zeta}{\partial x} \tag{17}$$

என்று திருத்தியமைக்கப்படுகிறது.

தொடர்ச்சிச் சமன்பாடு: § 5.1-ல் கொடுக்கப்பட்ட தொடர்ச்சிச் சமன்பாடு (3) இங்கு தீர்வு காணுதற்குரிய எளிய அமைப்பில் இல்லாமையால் வேறொரு தகுந்த தொடர்ச்சிச் சமன்பாட்டை இங்கு காண்போம். P, Q-களில் உள்ள நிலைக் குத்துத் தளங்களுக்கு இடைப்பட்ட திரவத்தின் கன அளவைக் கணக்கிட்டு இத்தொடர்ச்சிச் சமன்பாட்டைப் பெறுதல் இயலும். P-யில் நீரின் மேற்பரப்பின் அகலம் $b(x)$ என்போம். இனி, P யில் உள்ள நீர்த்தளத்தின் பரப்பு$=[A+b\zeta]_p$. ஆகவே இந்த கன அளவினுள் ஒருமநேரத்தில் P தளத்தின் வழியே பாயும் நீரின் அளவு $[(A+b\zeta)u]_p$. இதே போன்று, இக் கன அளவினை விட்டு Q தளத்தின் வழியே ஒருமநேரத்தில் வெளியே பாயும் நீரின் அளவு $=[(A+b\zeta)u]_q$. இவைகளின் வேறுபாடு, கன அளவினுள் நீரின் மட்டம் உயரும் வீதத்தினால் (Rate) ஈடு செய்யப் படுகிறது. ஆகவே,

$$[(A+b\zeta)u]_P - [(A+b\zeta)u]_Q = b\,\delta x \frac{\partial \zeta}{\partial t}$$

$$\text{அதாவது,}\quad -\frac{\partial}{\partial x}[(A+b\zeta)u] = b\frac{\partial \zeta}{\partial t}$$

[டெய்லரின் விரிவைப் பயன் செய்து].

இனி, $b\zeta u$ இரண்டாம் வரிசை சிறிய மதிப்புடையதாதலால் இவ்வுறுப்பைப் புறக்கணித்துவிடலாம்.

$$\therefore -\frac{\partial (Au)}{\partial x} = b\frac{\partial \zeta}{\partial t} \tag{18}$$

சமன்பாடுகள் (17), (18)-களிலிருந்து u-வை நீக்கம் செய்ய,

$$b \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(Ag \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) \tag{19}$$

A ஒரு மாறிலி என்ற வகையில் (19)-ஆம் சமன்பாடு கீழ்க் கண்டவாறு மாறுகிறது.

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \tag{20}$$

இங்கு $c^2 = \frac{Ag}{b}$. இதுதான் ஒரு பரிமாண அலையோட்டத்தின் திட்டவடிவச் சமன்பாடு. அலைகள் $\sqrt{\frac{Ag}{b}}$ என்ற திசை வேகத்துடன் மாரு அலை வடிவுடன் செல்கின்றன என உய்த்தறிகிறேம். வாய்க்காலின் குறுக்குவெட்டு h ஆழமுள்ள செவ்வக வடிவமெனின் $A = bh$. இவ்வகையில்

$$c = \sqrt{gh} \tag{21}$$

மாதிரி: நிலைக்குத்துக் கரைகளையுடைய ஒரு வாய்க்காலின் குறுக்குவெட்டு a ஆரம் கொண்ட ஒரு அரைவட்டமெனில் செலுத்தப்படும் நீள அலைகளின் திசைவேகம் $\frac{1}{2}\sqrt{\pi a g}$ என நிறுவுக.

இங்கு $A = \frac{1}{2}\pi a^2$, $b = 2a$

$$\therefore c^2 = \frac{Ag}{b} = \frac{1}{4}\pi a g$$

$$\therefore c = \frac{1}{2}\sqrt{\pi a g}$$

§ **5.5.** ***அளவிற்குட்பட்ட வாய்க்காலில் நீள அலைகள் :*** கந்தழி நீளமுள்ள வாய்க்காலில், x-ஐ உள்ளடக்கிய எல்லைக் கட்டுப்பாடுகள் கிடையாது. நாம் கொண்டுள்ள தோராயங்களுக்குட்பட்டு எவ்வடிவம் கொண்ட அலையும் இரு திசைகளிலும் செல்லவல்லது. அளவிற்குட்பட்ட வாய்க்காலில் எல்லைக் கட்டுப்பாடுகள் உள்ளன. உதாரணமாக முனைத்தளங்கள்

நிலைக்குத்தாயின் அத்தளங்களில் அவைகளுக்குச் செங்குத்துத் திசையில் திசைவேகம் பூஜ்ஜியமாகும்; அதாவது அத்தளங்களில் $u=0$.

l நீளமுள்ள செவ்வகத் தொட்டியில் நிகழும் அலையைப் பற்றி ஆராய்வோம். தொட்டியின் இரு முனைகளும் $x=0, l$ என்ற தளங்கள் என்போம். (20)-ன் தீர்வு,

$$\zeta=(\alpha \cos px+\beta \sin px) \cos (pct+\epsilon), \quad c^2=gh$$

எல்லைக் கட்டுப்பாடுகள் : $x=0, l$–களில் $u=0$ இங்கு $A=bh$, எனவே (18) லிருந்து,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{h}\frac{\partial \zeta}{\partial t}$$

$$= \frac{pc}{h}\left[\alpha \cos px+\beta \sin px\right] \sin (pct+\epsilon)$$

தொகைகாண,

$$u = \frac{c}{h}\left[\alpha \sin px - \beta \cos px\right] \sin (pct+\epsilon)$$

எல்லைக் கட்டுப்பாடுகளினால், $\beta=0$, மேலும் $\sin pl=0$. ஆகவே $p=\frac{r\pi}{l}$. எனவே,

$$\zeta=\alpha_r \cos \frac{r\pi x}{l} \cos\left[\frac{r\pi ct}{l}+\epsilon_r\right] \tag{22}$$

$$r=1, 2, 3\ldots\ldots$$

$$u = \frac{\alpha_r c}{h} \sin \frac{r\pi x}{l} \sin\left(\frac{r\pi ct}{l}+\epsilon_r\right) \tag{23}$$

ζ-வின் கணுக்களும், u–வின் கணுக்களும் நிகழ்வதில்லை என்று அறிக.

தொடர்ச்சிச் சமன்பாட்டின் பொதுவாக்கப்பட்ட வடிவம் (3)லிருந்து, நிலைக்குத்துத் திசை வேகத்தைக் காணலாம். தொடர்ச்சிச் சமன்பாடு,

$$\Delta . \vec{U}=0$$

அதாவது இங்கு $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$

u, z-ன் சார்பற்றது. மேலும் திரவத்தின் அடித்தளம் $z=-h$-ல் $w=0$ இக்கட்டுப்பாடுகளுக்குட்பட்டு மேற்கண்ட தொடர்ச்சிச் சமன்பாட்டின் தொகை காண்போம்.

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial u}{\partial x}$$

தொகை காண, $w = -\frac{\partial u}{\partial x} z +$ தொகை மாறிலி.

$$= -(z+h)\frac{\partial u}{\partial x} \quad [\because z=-h\text{-ல் } w=0]$$

$$= -\frac{\pi r \alpha_r c}{l\,h}(z+h)\cos\frac{r\pi x}{l}\sin\left(\frac{r\pi ct}{l}+\epsilon_r\right)$$

நிலைக்குத்து முடுக்கத்தைப் புறக்கணித்து விடலாம் என்ற நமது மூலக்கற்பிதம் எந்த நிபந்தனைகட்கு உட்பட்டு உண்மையாகும் என்பதைச் சமன்பாடு (24)–ஐப் பயன் செய்து காணலாம்.

நிலைக்குத்து முடுக்கம் $= \frac{Dw}{Dt}$

$$= \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial z}$$

முன்போலவே, இரண்டாவது வரிசை சிறிய மதிப்புடைய $u\frac{\partial w}{\partial x}$, $w\frac{\partial w}{\partial z}$ என்பனவற்றைப் புறக்கணித்துவிட்டால்,

$$\frac{Dw}{Dt} = \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\pi^2 r^2 c^2 \alpha_r}{l^2 h}(z+h)\cos\frac{r\pi x}{l}\cos\left[\frac{r\pi ct}{l}\cos+\epsilon_r\right]$$

ஆகவே, நிலைக்குத்து முடுக்கத்தின் மீப்பெரு மதிப்பு $\frac{\pi^2 r^2 c^2 \alpha_r}{l^2}$; இதைக் கிடை முடுக்கத்தின் மீப்பெரு மதிப்பு $\frac{\pi r c^2 \alpha_r}{l\,h}$ உடன் ஒப்பிடுவோம். இவ்விரு மதிப்புகளின் விகிதம்

$$= \frac{\pi r h}{l} = \frac{2\pi h}{\lambda}\left[\because (22) \text{ லிருந்து } \lambda = \frac{2l}{r}\right]$$

λ, h-ஐ விட மிக அதிகமெனின், $\frac{h}{\lambda}$ மிகச் சிறியது. ஆகவே அலை நீளம் திரவத்தின் ஆழத்தைவிட மிக அதிகமாக இருந்

தால், அதாவது நீள அலைகளில், கிடைமுடுக்கத்துடன் ஒப்பிட, நிலைக்குத்து முடுக்கத்தைப் புறக்கணித்து விடலாம்.

§ 5.6 சென்ற பகுதி § 5.5-ல் உள்ள செவ்வகத் தொட்டியில் உள்ள ஒவ்வொரு துகளின் பாதையையும் காணலாம். சமன்பாடுகள் (23), (24)-களிலிருந்து,

$$\frac{w}{u} = -\frac{\pi r\,(z+h)}{l}\cot\frac{r\pi x}{l}$$

இம்மதிப்பு நேரத்தின் சார்பற்றது. ஆகவே திரவத்தின் எந்தத் துகளும், மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள $\frac{w}{u}$-வின் மதிப்பைச் சாய்வு வீதமாக (Slope) உடைய நேர்க்கோட்டில் எளிய இசையியக்கத்தில் (Simp e H rmon c Mo ion) உள்ளது. சமன்பாடு (22)லிருந்து, கணுப்புள்ளிகளில் $\cos\frac{r\pi x}{l}=0$; எதிர்க்கணுப் புள்ளிகளில் $\sin\frac{r\pi x}{l}=0$. ஆகவே, குறிப்பிட்ட ஆழத்தில், இந்த நேர்க்கோட்டின் திசை, கணுவின் அடியில் முற்றிலும் கிடை நிலையிலிருந்து, எதிர்க்கணுவின் அடியில் முற்றிலும் நிலைக்குத்தாகிறது.

§ 5.7 மாறும் குறுக்குவெட்டையுடைய வாய்க்காலில் நிகழும் அலையோட்டத்தில் சில தனிப்பட்ட வகைகளை இங்கு காண்போம்,

1. சீரான ஆழமுடைய வாய்க்காலின் அகலம் $x=0$, என்ற முனையிலிருந்துள்ள தொலைவு போன்று மாறுபடுகின்றது என்போம். மேலும், வாய்க்காலின் முகத்துவாரம் $(x=a)$ திறந்த கடலுடன் தொடர்பு கொண்டுள்ளது என்றும், கடலில் $\zeta=A\cos(pt+\epsilon)$ என்ற நீள அலைகள் தொடர்ந்து செயலாற்றப்படுகின்றன என்றும் கொள்வோம்.

$$b\,\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(A\,g\,\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right) \qquad (19)$$

இங்கு $$\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\frac{1}{x}\,\frac{\partial\zeta}{\partial x}=\frac{1}{h_0 g}\,\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} \qquad (25)$$

$\zeta=B.X(x)\cos(pt+\epsilon)$ என்க,

∴ (25) லிருந்து,

$$x^2 \frac{d^2X}{dx^2} + x\frac{dX}{dx} + [k^2x^2 - 0]\, X = 0,\ \ k^2 = \frac{p^2}{gh}$$

இதன் தீர்வு, $X = J_0\,(kx)$

$$\therefore\ \ \zeta = B\,J_0\,(kx)\cos(pt+\epsilon)$$

ஆனால், $x = a$-ல் $\zeta = A\cos(pt+\epsilon)$

$$\therefore\ \ A\cos(pt+\epsilon) = B\,J_0\,(ka)\cos(pt+\epsilon)$$

$$\therefore\ \ \zeta = A\,\frac{J_0\,(kx)}{J_0\,(ka)}\cos(pt+\epsilon) \qquad (26)$$

$z = J_0\,(x)$-ன் வரை படத்தை வரைக.

முகத்துவாரத்திலிருந்து வாய்க்காலில் முன்னேறிச் செல்லச் செல்ல அலையின் வீச்சு அதிகரிக்கின்றது; ஆனால் அலை நீளம் அனேகமாக மாறுபாடடைவதில்லை, என இப்படத்திலிருந்து தெளிவாக அறியலாம். இது பயிற்சியாக விடப்பட்டுள்ளது.

2 வாய்க்காலின் ஆழம் மட்டிலுமே மாறுபாடடைகிறது என்போம்; இம்மாறுபாடு, வாய்க்காலின் ஒரு முனை $x=0$-விலிருந்து முகத்துவாரம் வரை சீராக அதிகரிப்பது என்போம். இது நீங்கலாக மற்றைய நிபந்தனைகள் சென்ற வகையில் உள்ளது போன்றதே என்போம். ஆகவே $h = \dfrac{h_0\,x}{a}$, $b = b_0$, [h_0, b_0 மாறிலிகள்]. இம்மதிப்புகளைச் சமன்பாடு (19)-ல் பிரதியீடு செய்ய;

$$\frac{\partial\left[x\,\dfrac{\partial\zeta}{\partial x}\right]}{\partial x} = \frac{a}{h_0 g}\,\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}$$

அதாவது, $x\,\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \dfrac{\partial\zeta}{\partial x} = \dfrac{a}{h_0 g}\,\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}$ (27)

$\zeta = B.X(x)\cos(pt+\epsilon)$ என்க.

பிரதியீடு செய்ய,

$$x\,\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{dX}{dx} + KX = 0,\ \ \left[K = \frac{a\,p^2}{g\,h_0}\right] \qquad (28)$$

இதன் தீர்வுகாண, $2\sqrt{Kx}=\xi$ என்க

$$\therefore \frac{dX}{dx}=\frac{dX}{d\xi}\cdot\frac{d\xi}{dx}=\frac{dX}{d\xi}\cdot\frac{2k}{\xi}$$

$$\frac{d^2X}{dx^2}=\left[\frac{d^2X}{d\xi^2}\,\frac{2K}{\xi}-\frac{dX}{d\xi}\cdot\frac{2K}{\xi^2}\right]\frac{2K}{\xi}$$

மாற்றியமைக்கப்பட்ட மாறி ξ-ல் (28) ஆவது சமன்பாடு

$$\frac{d^2X}{d\xi^2}+\frac{1}{\xi}\frac{dX}{d\xi}+X=0$$ என மாறுகிறது.

இதன் தீர்வு $X=J_0(\xi)=J_0(2\sqrt{kx})$

$$\therefore \quad \zeta=B\,J_0(2\sqrt{kx})\cos(pt+\epsilon)$$

ஆனால் $x=a$-ல் $\zeta=A\cos(pt+\epsilon)$; எனவே $B=\dfrac{A}{J_0(2\sqrt{ka})}$

$$\therefore \quad \zeta=A\,\frac{J_0(2\sqrt{kx})}{J_0(2\sqrt{ka})}\cos(pt+\epsilon) \qquad (29)$$

$z=J_0(\sqrt{x})$-ன் வரைபடத்தை வரைக. வாய்க்காலில் முன்னேறிச் செல்லச் செல்ல அலையின் வீச்சு தொடர்ச்சியாக அதிகரிக்கின்றது, ஆனால் அலைநீளம் குறைவடைகின்றது எனப் படத்திலிருந்து அறிகிறோம். இது பயிற்சியாக விடப்பட்டுள்ளது.

3. வாய்க்காலின் ஆழமும், அகலமும் $x=0$ என்ற முனையிலிருந்துள்ள தொலைவு போன்று மாறுபடுகின்றது என்போம். மற்ற நிபந்தனைகள் முன்போன்றே என்போம்.

இங்கு $b=\dfrac{b_0x}{a}$, $h=\dfrac{h_0x}{a}$, $[h_0, b_0$, மாறிலிகள்$]$

$$\therefore A=bh=\frac{b_0h_0}{a^2}\,x^2$$

இம்மதிப்புகளைச் சமன்பாடு (19)-ல் பிரதியிடு செய்ய,

$$x \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + 2\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{a}{gh_0} \frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} \tag{30}$$

$\zeta = B\,X(x)\cos(pt+\epsilon)$ என்க.

பிரதியிடு செய்ய,

$$x\frac{d^2X}{dx_2} + 2\frac{dX}{dx} + KX = 0, \quad K = \frac{p^2a}{gh_0}$$

இதன் தீர்வு,

$$X = \frac{J_1(2\sqrt{Kx})}{\sqrt{Kx}}$$ எனக் காணலாம்.

$$\therefore\ \zeta = B\frac{J_1(2\sqrt{Kx})}{\sqrt{Kx}}\cos(pt+\epsilon)$$

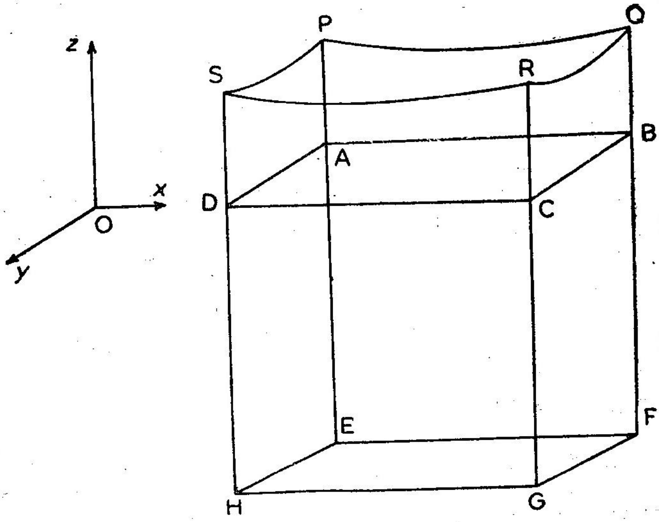
ஆனால் $x=a$-ல் $\zeta = A\cos(pt+\epsilon)$

$$\therefore\ B = \frac{\sqrt{Ka}}{J_1(2\sqrt{Ka})}A$$

$$\therefore\ \zeta = A\left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{J_1(2\sqrt{Kx})}{J_1(2\sqrt{Ka})}\cos(pt+\epsilon) \tag{31}$$

இங்கு கொள்ளப்பட்ட கற்பிதங்களைக் கொண்டுள்ள பிரிஸ்டல் வாய்க்கால் (Bristol Channel) மற்றும் சில வாய்க்கால்களில் நிகழும் நீள அலைகளைப்பற்றி நேரில் கண்டறிந்தன மேற்கண்ட வாய்ப்பாடுடன் மிகச் சிறந்த அளவில் ஒத்துள்ளன.

§ 5.8 *இரு பரிமாணத்தில் நீள அலைகள் :* இதுகாறும் ஒரு பரிமாணத்து நீள அலைகளைப் பற்றி ஆராய்ந்தோம். இனி இரு பரிமாணத்து நீள அலைகளைப் பற்றி இங்கு ஆராய்வோம். முன்போன்று, z அச்சை நிலைக்குத்துத் திசையில் எடுத்துக் கொள்வோம். மேலும், xy-தளத்தைச் சலனமில்லா நிலையிலுள்ள கட்டற்ற மேற்பரப்பில் எடுத்துக்கொள்வோம். $(x, y, o,)$ என்ற புள்ளிக்கு மேலுள்ள திரவத்தின் எழுச்சியை $\zeta(x, y, t,)$ ஆல் குறிப்போம். x, $x+\delta x$, y, $y+\delta y$ என்ற தளங்களால் அடைக்கப்பெறும் நிலைக்குத்துப் பட்டகத்தினுள் திரவத்தின் பாயும் வீதத்தைக் காண்போம். படம் 35-ல் A B C D



படம் 35

என்பது பட்டகத்தில் சலனமற்ற திரவத்தின் பரப்பு; $EFGH$ திரவத்தின் அடிப்பரப்பு; $PQRS$ என்பது $ABCD$க்கு மேல் $\zeta\,(x, y, t)$ உயரத்தில் இயங்கும் பரப்பு. u, v என்பன x, y அச்சு திசைகளில் உள்ள கிடைத்திசைவேகம். h என்பது பட்டகத்தின் ஆழம்.

தொடர்ச்சிச் சமன்பாடு: திரவம் பட்டகத்தினுள் பாயும் வீதம், பட்டகத்தின் மட்டம் உயரும் வீதத்தினல் ஈடு செய்யப் படுகின்றது என்ற தொடர்ச்சிச் சமன்பாட்டை எடுத்துக் கொள்வோம். திரவம், $PEHS$ என்ற தளத்தினூடே பட்ட கத்தினுள் பாயும் வீதம் $=[u\,(h+\zeta)\,\delta y]_x$; திரவம், $QFGR$ என்ற தளத்தினூடே பட்டகத்தின் வெளியே பாயும் வீதம் $=\Big[u\,(h+\zeta)\,\delta y\Big]_{x+\delta x}$. ஆகவே இவ்விரு தளங்கள் மூலம் பட்ட கத்தினுள் நிகர ஈட்டு

$$=\Big(u\,(h+\zeta)\,\delta y\Big)_x-\Big(u\,(h+\zeta)\,\delta y\Big)_{x+\delta x}$$

$$=-\frac{\partial}{\partial x}\,[u\,(h+\zeta)]\;\delta x.\,\delta y.$$

இதேபோன்று, மற்ற இரு தளங்கள் $PQFE$, $SRGH$ மூலம் பட்டகத்தினுள் நிகர ஈட்டு $= -\frac{\partial}{\partial y}[v(h+\zeta)]\ \delta x.\ \delta y.$

பட்டகத்தினுள் மொத்த ஈட்டு அதன் மட்டம் உயருவதால் நிறை செய்யப் படுகிறது.

அதாவது, $-\frac{\partial}{\partial x}[u(h+\zeta)]\ \delta x.\ \delta y - \frac{\partial}{\partial y}[v(h+\zeta)]\ \delta x.\ \delta y =$ $\frac{\partial \zeta}{\partial t}\ \delta x.\ \delta y.$ முன்போலவே, $u\zeta$, $v\zeta$ என்ற உறுப்புகளை நீக்கக் கிடைப்பது தொடர்ச்சிச் சமன்பாடு

$$\frac{\partial}{\partial x}(hu) + \frac{\partial}{\partial y}(hv) = -\frac{\partial \zeta}{\partial t} \tag{32}$$

இரு கிடை இயக்கச் சமன்பாடுகள் :

சமன்பாடு (15)லிருந்து, x திசையில் கிடை இயக்கச் சமன்பாடு $\frac{Du}{Dt} = -g\frac{\partial \zeta}{\partial x}$

அதாவது, $\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -g\frac{\partial \zeta}{\partial x}$

இரண்டாம் வரிசைச் சிறிய மதிப்புகளையுடைய $u\frac{\partial u}{\partial x}$, $v\frac{\partial u}{\partial y}$. களைப் புறக்கணித்து விடுவோம். மேலும் $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$

$$\therefore\ \frac{\partial u}{\partial t} = -g\frac{\partial \zeta}{\partial x} \tag{33}$$

இதேபோன்று, சமன்பாடு (16)லிருந்து y-திசையில் கிடையியக்கச் சமன்பாடு

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -g\frac{\partial \zeta}{\partial y} \tag{34}$$

சமன்பாடுகள் (32), (33), (34)களிலிருந்து u, v, களை நீக்க,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[h\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[h\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right] = \frac{1}{g}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \tag{35}$$

மாரு ஆழமுடைய குளத்தில் h ஒரு மாறிலி. ஆகவே (35) லிருந்து,

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2},\quad c^2 = gh \tag{36}$$

சமன்பாடு (36) இருபரிமாணத்தில் திட்டவடிவ அலையோட்டச் சமன்பாடு; இங்கு திசைவேகம் $\sqrt{gh}$. ஒரு பரிமாணத்து அலைகளுக்கு ζ, y-ன் சார்பற்றதால், $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}=0$ என சமன்பாடு (36)ல் இட ஒரு பரிமாணத்து அலையோட்டச் சமன்பாடு கிடைக்கிறது.

§ **5.9** எல்லைக் கட்டுப்பாடுகள் :—

(i) நிலையான எல்லையில், $\frac{\partial}{\partial \nu}$ என்பது எல்லையின் செங்குத்துத் திசையில் வகைக் கெழு என்றால், $\frac{\partial \zeta}{\partial \nu}=0$

(ii) x-அச்சிற்குச் செங்குத்தாக உள்ள நிலையான எல்லையில் $\frac{\partial \zeta}{\partial x}=0$

(iii) y அச்சிற்குச் செங்குத்தாக உள்ள நிலையான எல்லையில் $\frac{\partial \zeta}{\partial y}=0$

(iv) அடித்தளம் $z=-h$-ல், $w=0$

§ **5.10** செவ்வகக் குளம் (Rectangular Tank): ஒரே ஆழமுடைய ஒரு செவ்வகக் குளத்தின் பக்கங்கள் $x=0, a$; $y=0, b$ என்ற தளங்கள் என்போம். எனவே இங்கு எல்லைக் கட்டுப்பாடுகள் $x=0$, a-ல் $\frac{\partial \zeta}{\partial x}=0$; மற்றும் $y=0$, b-ல் $\frac{\partial \zeta}{\partial y}=0$, இக் கட்டுப்பாடுகளுக்கு உட்பட்டு, சமன்பாடு (36)-ன் தீர்வு

$$\zeta=A_{mn}\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\cos(rct+\epsilon_{mn}) \qquad (37)$$

$$m=0,\ 1,\ 2,\ldots\ ;\quad n=0,\ 1,\ 2,$$

$$r^2=\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}$$

அதிர்வுறும் சவ்வினதை இத்தீர்வு ஒத்திருப்பதைக் காணலாம்.

§ **5.11** வட்டமான குளம் (Circular Tank): ஆதியை வட்டமையத்தில் எடுத்துக்கொண்டு $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ என்ற

வாய்ப்பாடுகளால், போலார் ஆயக்கூறுகளில் சமன்பாடு (36)-ஐ மாற்றியமைக்க,

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\zeta}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial\zeta}{\partial\theta^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad (38)$$

$r=0$-ல் ζ எல்லைக்குட்பட்டிருக்க வேண்டும் என்ற நிபந்தனைக் குட்பட்டும் முதற்கோட்டை (Initial Line) தகுந்த வண்ணம் எடுத்துக் கொண்டும் சமன்பாடு (38)-ன் தீர்வு,

$$\zeta=A_{mn}J_m(nr)\cos m\theta\cos(nct+\epsilon_{mn}) \qquad (39)$$

இங்கு $m=0, 1, 2,\ldots\ldots$

$r=a$-ல், $\frac{\partial\zeta}{\partial r}=0$ என்ற எல்லைக் கட்டுப்பாட்டுக்குட்பட்டு

$$J'_m(na)=0 \qquad (40)$$

m-ன் குறிப்பிட்ட முழு எண் மதிப்பிற்கு இக்கட்டுப்பாட்டி லிருந்து n-க்குக் கந்தழி எண்ணிக்கையுள்ள மதிப்புகள் கிடைக் கும்; இம்மதிப்புகளை, பேஸல் சார்பு அட்டவணையிலிருந்து காணலாம். இங்கு கணுக்கோடுகள் ஓர்மைய வட்டங்களும், விட்டங்களுமாகும்.

$m=0$ என்ருல் இயக்கம் ஆதியைப் பொறுத்து செவ் வொழுங்குடையது (Symmetrical). இங்கு அலைகள் கூர்வரை (Ridges)-களையும் ஆழ்வடுக்களையும் (Furrows) உடைய வளையங்களாகும். $J'_0(na)=0$ அல்லது $J_1(na)=0$-களின் சிறிய தீர்வுகள்,

$$\frac{na}{\pi}=1.2197,\quad 2.2330,\quad 3.2383\ldots\ldots$$

என்பனவற்ருல் கொடுக்கப்படுகின்றன. இவ்வெண்கள் இறுதி யாக $\frac{na}{\pi}=s+\frac{1}{4}$, s ஒரு முழு எண், என்ற வடிவத்தை நெருங்குகின்றன. செவ்வொழுங்கு இயக்கத்தில் (அதாவது $m=0$), s-ஆவது இயல்நிலை வகையில் s கணுவட்டங்கள் (Nodal circles) உள்ளன. இக்கணுவட்டங்களின் ஆரங்கள் $J_0(nr)=0$ என்ற சமன்பாட்டிலுல் கொடுக்கப்படுகின்றன. இதன் தீர்வுகள்,

$$\frac{nr}{\pi}=0.7655,\quad 1.7571,\quad 2.7546,\ldots\ldots$$

உதாரணமாக, செவ்வொழுங்கின் முதல் இயல்நிலைவகையில் $r=0.628a$ என்ற ஆரத்தையுடைய வட்டம் கணுவட்டமாகும்.

$m=0$ என்றால், சமதொலைவிலுள்ள m கணுவிட்டங்கள் உள்ளன; இவைகளைத் தவிர கணுவட்டங்களும் $J_m(nr)=0$ என்ற சமன்பாட்டினால் கொடுக்கப்படுகின்றன.

§ 5.12. *சீரியக்கத்திற்கு மாற்றியமைத்தல்* (Reduc ion to Steady Motio): மாறா வடிவத்துடன் ஒரே திசையில் செல்லும் அலைகளில் திரவத்தின் முழுப் பொருண்மையின் மீதும் செலுத்துகைத் திசை வேகத்திற்குச் (Velocity of Propagation) சமமான திசை வேகத்தை எதிர்த்திசையில் புகுத்தினால் இயக்கம் சீரியக்கம் (Steady Motion) ஆகிறது. அதேபொழுதில், எந்த துகளின் மேலும் செயல்படுத்தப்படுகின்ற விசையும் முன் போலவே அமையும். இப்பொறியமைப்பினால் (Artifice) அலை செலுத்துகையின் விதிகளை மிக எளிதில் கண்டறியலாம். இம் முறையில் அலை செலுத்துகையின் திசைவேகம் c-ன் மதிப்பு மிக எளிய முறையில் கிடைப்பதாகும். மாறாக்குறுக்கு வெட்டு A-உம், b அகலமும் உள்ள வாய்க்காலை எடுத்துக் கொள்வோம். திரவத்தின் முழுப் பொருண்மையின் மீது $-c$ திசை வேகத்தைப் புகுத்தினால் அலைமுகப்பு நிலையாகிறது; திரவம் அதனடியில் சராசரித் திசைவேகம் c-யுடன் பாய்கிறது. அதாவது, நெளி நெளியாக வளைக்கப்பட்ட தகட்டின் (Corrugated Sheet) அடியில் திரவம் பாய்வதற்கு இது ஒப்பாகும். ஆனால் இங்கு திரவத்தின் குறுக்குவெட்டுப் பரப்பு ஒரு மாறிலி யில்லையாதலால் எந்த ஒரு புள்ளியிலும் உண்மையான திசை வேகம் c-யிலிருந்து மாறுபடும். திரவத்தின் எழுச்சி ζ உள்ள இடங்களில் இப்பரப்பு $A+b\,\zeta$; இப்பரப்பு ζ-வைப் பொறுத்து வேறுபடும் திரவத்தின் உயரம் ζ உள்ள குறுக்குவெட்டு இடங்களில் (Cross Sections) இத்திசை வேகம் $c+\theta$ என்போம். திரவம் ஒருசேரக் குவிய வழியில்லை யாதலால், திரவம் பாயும் திசைக்குச் செங்குத்தாக உள்ள எந்தத் தளத்தின் வாயிலாகச் செல்லும் திரவத்தின் கன அளவும் ஒரு மாறிலியாக இருத்தல் வேண்டும்.

ஆகவே தொடர்ச்சிச் சமன்பாடு,

$$(A+b\,\zeta)\,(c+\theta)=\text{மாறிலி}=Ac \qquad (41)$$

அலையோட்டத்தினால் உண்டாகும் அதிகப்படியான அழுத்தத்தை ∂p குறித்தால், பெர்னோலியின் சமன்பாட்டிலிருந்து (பெர்னோலியின் சமன்பாட்டில் சீரியக்கத்தினால் $\frac{\partial \phi}{\partial t}=0$)

$$\frac{\partial p}{\rho}+\tfrac{1}{2}\,(c+\theta)^2+g\,\rho=\text{மாறிலி}=\tfrac{1}{2}\,c^2 \qquad (42)$$

சமன்பாடுகள் (41), (42) லிருந்து θவை நீக்கம் செய்ய,

$$\partial p = \tfrac{1}{2}\rho c^2 \left\{ \frac{1 - A^2}{(A+b\zeta)^2} \right\} - \rho g \zeta$$

$$= \left\{ \tfrac{1}{2} c^2 \frac{[2 4b+b^2\zeta]}{(A+b\zeta)^2} - g \right\} \rho \zeta \qquad (43)$$

A/b ஐப் பொருத்து ζ சிறியது என்றால் சமன்பாடு (43) லிருந்து,

$$\partial p = \left[\frac{c^2 b}{A} - g \right] \rho \zeta \qquad (44)$$

கட்டற்ற மேற்பரப்பு (Free Surface) இருக்க வேண்டுமாயின், மேற் பரப்பில் அழுத்தம் மாரு வளியழுத்தத்திற்குச் (Atmosperic Pressure) சமமாயிருத்தல் வேண்டும்; அதாவது $\partial p = 0$. எனவே கட்டற்ற மேற்பரப்பு இருக்க சமன்பாடு (44)லிருந்து முதல் தோராயமாக, $c^2 = \frac{gA}{b}$.

நிலையான நீரில் நீள அலைகளின் செலுத்துகைத் திசை வேகத்தை c-ன் மதிப்பு கொடுக்கிறது.

$c^2 = \frac{gA}{b}$ என்று கொண்டு, (43)-ல் இம்மதிப்பைப் பிரதியீடு செய்ய, இரண்டாம் தோராயமாக,

$$\partial p = -\frac{3_\rho g b \zeta^2}{2A}$$

எனவே, அலையில் ζ பூஜ்ஜியமில்லாத எல்லா இடங்களிலும் அழுத்தம் குறைபாடுடையது என அறிகிரோம். ஆகவே ζ^2 புறக்கணிக்கப் படாவிட்டால் நீள அலைகளுக்குக் கட்டற்ற மேற்பரப்பின் நிபந்தனையை ஈடு செய்ய முடியாது; அதாவது, நீரின் ஆழத்தைப் பொறுத்துச் சிறிய உயரமில்லாத நீள அலைகளை நிலையான நீரில் வடிவமைப்பு மாருமல் செலுத்தல் இயலாது.

இனி, சமன்பாடு (44)லிருந்து, மேற் பரப்பில் அழுத்தம் மாரு வளியழுத்தமெனின், அதாவது $\partial p = 0$ எனின்

$$c^2 = \frac{2g}{b} \frac{[A+b\zeta]^2}{(2A+b\zeta)} \qquad (45)$$

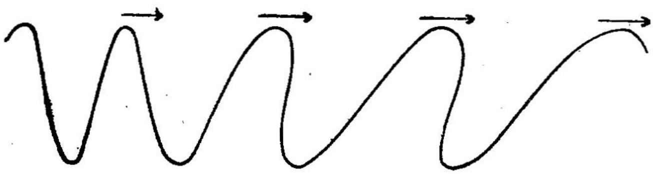
இங்கு,

$$c^2 - \frac{gA}{b} = \frac{2g}{b}\,\frac{(A+b\zeta)^2}{(2A+b\zeta)} - \frac{gA}{b} = g\zeta\,\frac{3A+2b\zeta}{2A+b\zeta}$$

$$\therefore\ \zeta > 0 \text{ என்றால், } c^2 > \frac{gA}{b};$$

$$\zeta < 0 \text{ என்றால், } c^2 < \frac{gA}{b}.$$

ஆகவே, நீள அலையின் உயரப் பகுதி, தாழ் பகுதியைவிட சிறிது அதிக வேகத்துடன் செல்கிறது. ஆகவே, நீள அலையை வடிவம் மாறாமல் செலுத்துதல் இயலாததாகும். நீள அலையின் உச்சி அதன் அடியைவிட வேகமாகச் செல்லுவதனால் தான் கடல் அலைகள் ஆழமற்ற கரைப் பகுதியை அடைந்தவுடன் சிதறுகின்றன (Break on the Sea Shore).



படம் 36

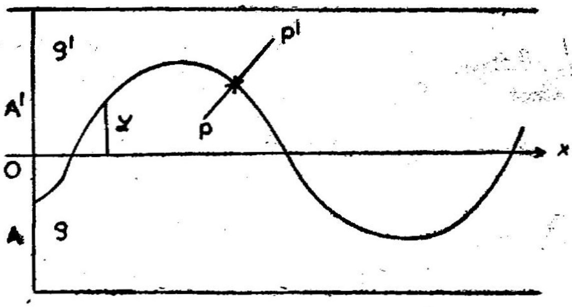
(கடலோரத்தில் நீள அலைகள் சிதறுகின்றன)

§ 5.13 வெவ்வேறு அடர்த்தியுள்ள இரு திரவங்களின் பொதுப்பரப்பில் நிகழும் (Common Surface) நீள அலைகளின் திசைவேகத்தைச் சீரியக்கத்திற்கு மாற்றியமைக்கும் முறைப்படி காணலாம். ρ, ρ' அடர்த்திகளையும், A, A' இரு திரவங்களின் வாய்க்காலின் குறுக்குவெட்டையும், b பொதுப்பரப்பின் அகலத்தையும் குறிக்கட்டும். அலையோட்டத்தினால் பொதுப் பரப்பின் எழுச்சி ζ என்போம். முன்போலவே, திரவத்தின் உயரம் ζ உள்ள குறுக்குவெட்டு இடங்களில் திசைவேகம் இரு திரவங்களிலும் $c+\theta$, $c+\theta'$ என்போம். இரு திரவங்களிலும் தொடர்ச்சிச் சமன்பாடு

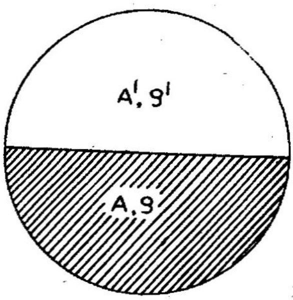
$$(A+b\zeta)(c+\theta) = AC$$

$$(A'-b\zeta)(c+\theta') = A'C$$

அல்லது,
$$\left.\begin{aligned} A\theta + bc\zeta &= 0 \\ A'\theta' - bc\zeta &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (46)$$



படம் 37



படம் 38

பெர்னேலியின் சமன்பாட்டிலிருந்து,

$$\frac{\delta p}{\rho} + g\,\zeta + \tfrac{1}{2}\,(c+\theta)^2 = \tfrac{1}{2}\,c^2$$

$$\frac{\delta p'}{\rho'} + g\,\zeta + \tfrac{1}{2}\,(c+\theta')^2 = \tfrac{1}{2}c^2$$

புறப்பரப்பு இழுவிசை (Surface Tension) இல்லையெனில் $\delta p = \delta p'$

$$\therefore \quad g\,(\rho-\rho')\,\zeta = (\rho'\theta' - \rho\theta)\,c \qquad (47)$$

சமன்பாடுகள் (46), (47)-களிலிருந்து ζ, θ, θ'-களை நீக்க

$$c^2 = \frac{g\,(\rho-\rho')}{b\left[\frac{\rho}{A} + \frac{\rho'}{A'}\right]} \qquad (48)$$

பயிற்சி VI

1. l நீளமுள்ள தொட்டியில், நீள அலைகளுக்கு நிலை ஆற்றலையும், இயக்க ஆற்றலையும் காண்க.

[விடை : $V = \frac{1}{4}\,g\,\rho\,l\,a_r^2\,\cos^2\left(\frac{r\pi ct}{l} + \epsilon_r\right)$;

$T = \frac{1}{4}\,g\,\rho\,l\,a_r^2\,\sin^2\left(\frac{r\pi ct}{l} + \epsilon_r\right)$]

2. ஒருமை அகலமுடைய வாய்க்காலின் ஆழம் $h=kx$, (k ஒரு மாறிலி) நிகழ்வெண் $\frac{p}{2\pi}$ உடைய நீள அலைகள்

$\zeta = A\,J_0\,(\alpha\sqrt{x})\cos pt,\ \alpha^2=\frac{4p^2}{kg}$ என்ற சமன்பாட்டினால் கொடுக்கப்படுகின்றன எனக் காட்டுக.

3. $x=0$-ஐ ஒரு முனையாகக் கொண்ட ஒரு ஆழமற்ற தொட்டியின் ஆழம் $h=h_0\,x^{2m}$; அகலம் $b=b_0\,x^n$, நிகழ்வெண் $\frac{p}{2\pi}$ உடைய நீள அலைகளுக்கு $\zeta = A\,x^u\,J_q\,(r\,x^s)\cos pt$, இதில்,

$s=1-m,\ \alpha^2=\frac{p^2}{gh_0},\quad r=\frac{\alpha}{s},\ 2u=1-2m-n,\ q=\left|\frac{u}{s}\right|$

என நிறுவுக.

4. $2a$ நீளமும் மாறு அகலமும் உள்ள வாய்க்காலின் ஆழம் $h=h_0\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$, இங்கு நடுவிலிருந்துள்ள தூரத்தை x குறிக்கின்றது. நிகழ்வெண் $\frac{p}{2\pi}$ உடைய நீள அலைகளுக்கு

$$\zeta = A\,P_n\left(\frac{x}{a}\right)\cos\ (pt+\epsilon),\ p^2=n(n+1)\,\frac{gh_0}{a^2}$$ என

நிறுவுக.

5. $x=0$-லிருந்து $x=a$ வரையுள்ள ஒரு கழிமுகத்தில் (Estuary) x தொலைவிலுள்ள செவ்வகக் குறுக்குவெட்டின் சீரான ஆழம் $h=h_0\,x$; அகலம் $b=b_0\,x$; இங்கு h_0, b_0 மாறிலிகள். $\zeta=\zeta_0\cos(pt+E)$ என்ற நீள அலைகள் தொடர்ந்து செயலாற்றப் பெறும் திறந்த கடலை, கழிமுகம் $x=a$-ல் சந்திக்கிறது. கழிமுகத்தில்

$$\zeta=\zeta_0\,\frac{\sqrt{a}\ J_1\,(K\sqrt{x})}{\sqrt{x}\ J_1\,(K\sqrt{a})}\quad\cos\,(pt+\epsilon),\ K^2=\frac{4p^2}{gh_0}$$

என நிறுவுக.

6. நீள அலைகள் நிகழும் a ஆரமுள்ள வட்ட வடிவக் குளத்தின் நீரில் ஏதாகிலும் ஒரு துகளின்திசை வேகத்தைக் காண்க.

[விடை: ஆரத்திசை வேகம் (Radial Velocity)

$$=-\frac{g\,A}{C}\cos m\,\theta\ \ J'_{\mathrm{m}}\,(n\,r)\sin\,(nct+\epsilon)$$

குறுக்குத் திசைவேகம் (Transverse Velocity)

$$= \frac{g\,A\,m}{n\,c\,r} \sin m\,\theta\; J_m(n\,r)\; \sin(nct+\epsilon)]$$

(7) வட்ட வடிவக் குளத்தில் நீள அலைகளின் செவ்வொழுங்கு இயக்கத்தில், அதாவது சமன்பாடு (39)ல் $m=0$ என்றால் குளத்துடன் பொது அச்சுக் (Co-axial) கொண்ட உருளையில் முதலாவதாக உள்ள துகள்கள், ஊசலாடும் ஆரம் கொண்ட ஒரு பொது அச்சு உருளையில் அமையும் என நிறுவுக. மேலும், இவ்வாரத்தில் ஊசலாடும் வீச்சைக் காண்க.

$$\left[\text{விடை}: \frac{gA}{C} J_0'\,(n+r) \right]$$

8. h ஆரமும், a பக்கமும் உடைய ஒரு சதுரத் தொட்டியில் நிகழும் நீள அலைகளின் இயல்நிலை வகைகளைக் கண்டு, அவைகள் ஒவ்வொன்றுக்கும் நிலை மற்றும் இயக்க ஆற்றல்களைக் காண்க. ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட இயல்நிலைவகை இருக்கும்பொழுதுள்ள முழு ஆற்றல், ஒவ்வொரு இயல்நிலை வகையின் தனித்தனி முழு ஆற்றலின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமமென நிருவுக.

$$\left[\text{விடை}: \; \zeta_r = A_r \cos\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{n\pi y}{a} \cos\frac{r\pi ct}{a},\; r^2 = m^2+n^2 ; \right.$$

$$T_r = \tfrac{1}{8}\, g\,\rho\, A_r^2\, a^2 \sin^2 \frac{r\pi ct}{a} ,$$

$$V_r = \tfrac{1}{8}\, g\,\rho\, A_r^2\, a^2 \cos^2\left(\frac{r\pi ct}{a}\right)$$

$$\left. E_r = T_r + V_r \;;\quad E = \sum_r E_r,\; E_r = T_r + V_r \right]$$

9. நீள அலைகள் நிகழும் சதுரத் தொட்டியில் நீர்த்துகள்களின் பாதையைக் காண்க.

$$\left[\text{விடை}: \; \frac{X}{Y} = \frac{m}{n} \tan\frac{m\pi x}{a} \cot\frac{n\pi y}{a} \right]$$

10. வாய்க்காலில் நிகழும் ஒரு பரிமாண நீள அலைகளில், வாய்க்காலின் எக்குறுக்கு வெட்டிலும் நீரின் திசைவேகமானது

சமநிலைக்குமேல் நீரின் எழுச்சியின் அளவொத்தது என நிறுவுக.

11. கட்டற்ற மேற்பரப்பின் அகலமும், சீரான குறுக்கு வெட்டுக் கொண்ட வாய்க்காலின் ஒருமநீளத்திலுள்ள நீரின் கன அளவும் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால், நீள அலைகள் செலுத் தப்படும் திசைவேகம் குறுக்குவெட்டின் எல்லா வடிவத்திற்கும் ஒன்றேயாகும் என நிறுவுக.

12. வாய்க்காலின் ஆழம் $h = \frac{x^2}{2b}$ என்றால், $\frac{2\pi}{p}$ நிகழ் வெண்கொண்ட நீள அலைகளுக்கு

$$\zeta = a x^{-\frac{1}{2}} \cos \left[p \left\{ \sqrt{\frac{2b}{g} - \frac{1}{4p^2}} \log x + t \right\} + \epsilon \right]$$ என

நிறுவுக.

13. கட்டற்ற மேற்பரப்பின்அகலம் b-உம், குறுக்குவெட்டு S-உம் உடைய வாய்க்காலில் நீள அலைகளால் நீரின் எழுச்சி ζ

$$b \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = g \frac{\partial}{\partial x} \left(S \frac{\partial y}{\partial x} \right)$$ என்ற சமன்பாட்டால் கொடுக்கப்

படுகிறது என நிறுவுக.

6. திரவங்களில் அலைகள்

(Waves in Liquids – 2)

§ **6.1** இனி மேற்பரப்பு அலைகளை ஆராய்வோம். இங்கு அலை நீளத்தைவிட ஆழம் மிக அதிகமானதாகும். மிக ஆழமுள்ள கட்டற்ற நீர் நிலையின் மேற்பரப்பில் நிகழும் அலை இயக்கத்தைப் பார்ப்போம். இங்கு கிளர்ச்சி உள்ள நீரின் ஆழம் ஒரு எல்லைக் குட்பட்டே இருக்கும். இத்தகைய அலைகளில் நிலைக்குத்து முடுக்கம் புறக்கணிக்கத் தக்கதல்ல. இயக்கம் இரு பரிமாணத்தது. x y தளம் கிளர்ச்சியற்ற மேற்பரப்பிலும் z-அச்சு நிலைக்குத்தாகவும் எடுத்துக் கொள்ளப் படுகின்றன. திசை வேகப் பொடன்ஷியல் ϕ-ன் மூலம் இதன் தீர்வினைக் காண்போம்.

நிபந்தனை (i) : ϕ லெப்லாஸியின் சமன் பாட்டைத் திருப்தி செய்ய வேண்டும். $\Delta^2 \phi = 0$ (1)

நிபந்தனை (ii) ; நிலையான எல்லையில் $\frac{\partial \phi}{\partial \nu} = 0$ (2)

கட்டற்ற மேற்பரப்பில் இரு நிபந்தனைகள் பொருத்தி அமைக்க இருக்கின்றன. முதலில் துகள்களின் திசைவேகத்தின் வர்க்கம் புறக்கணிக்கத் தக்கது எனக் கொள்வோம்,

எனவே திசைவேகம் மிகச் சிறியதானால் $\vec{U}^2$ புறக்கணிக்கத் தக்கது. வெளியேயுள்ள அழுத்தமும், புவி ஈர்ப்பும், மட்டிலுமே நீரின் மேல் செயல்படும் புற விசைகள் (External Forces) எனின் பெர்னேலியின் சமன்பாட்டில் $V = g\,\zeta$ ஆகும். ஆகவே (iii)வது நிபந்தனையாக, பெர்னேலியின் சமன்பாடு கட்டற்ற மேற்பரப்பில்,

$$\zeta = \frac{1}{g}\left[\frac{\partial \phi}{\partial t}\right]_{\text{கட்டற்ற மேற்பரப்பில்}} \quad (3)$$

என ஆகிறது.

அடுத்த நிபந்தனை (iv) ஐக் கீழ்க் கண்டவாறு காணலாம். கட்டற்ற மேற்பரப்பில் முதலாவதாக இருந்த பாய்பொருளின் ஒரு துகள் எப்பொழுதும் அவ்வாறே இருக்கும். $z = \zeta\,(x, y, t)$ என்பதனால் கட்டற்ற மேற்பரப்பின் சமன்பாட்டை

$$0 = f(x, y, z, t) = \zeta\,(x, y, t) - z$$

என்று எழுதலாம். இதன் விளைவாக, கட்டற்ற மேற்பரப்பில் உள்ள ஒரு துகளுக்கு f என்ற சார்பு எப்பொழுதும் பூஜ்ஜியமாகவே இருக்கும், எனவே சென்ற அத்தியாயத்தில் சமன்பாடு (6)-ல் Hக்குப் பதிலாக f எனக் கொண்டால்,

$$0 = \frac{Df}{Dt} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u\frac{\partial \zeta}{\partial x} + v\frac{\partial \zeta}{\partial y} - w$$

சமன்பாடு (3)லிருந்து, கட்டற்ற மேற்பரப்பில்

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{1}{g}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) = -\frac{1}{g}\,\frac{\partial u}{\partial t},\quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\because\ \frac{\partial \phi}{\partial t}\right) = u$$

ஆகவே,

$\frac{\partial \zeta}{\partial x}$ உம் u போன்ற சிறு மதிப்புக் கணியமாகும். ஆதலால்

$u\,\frac{\partial \zeta}{\partial x}$, $v\frac{\partial \zeta}{\partial y}$ என்ற இரண்டாவது வரிசைச் சிறிய மதிப்புகளைப் புறக்கணித்து விடலாம்.

$$\therefore\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} - w = 0$$

$$\therefore\ \text{கட்டற்ற மேற்பரப்பில்,}\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} = w = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \qquad (4)$$

சமன்பாடுகள் (3), (4) களிலிருந்து மாற்றுவகையாக நிபந்தனை (v):

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g\,\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \qquad (5)$$

(3), (4), (5) என்ற மூன்று சமன்பாடுகளில் ஏதாவது இரு நிபந்தனைகள் மட்டிலுமே ஒன்றுக்கொன்று சார்பற்றதாகும்; மூன்ருவது நிபந்தனையை இவ்விரு நிபந்தனைகள் மூலம் பெறலாம்.

§ 6.2 *ஒரு பரிமாணத்தில் முன்னேறும் மேற்பரப்பு அலைகள் :* h ஆழமுள்ள கந்தழி நீள்ச் செவ்வகத் தொட்டியில்

நிகழும் மேற்பரப்பு அலைகளைப் பற்றி ஆராய்வோம். தொட்டியின் நீளம் கந்தழியாகையால் இங்கு c வேகமுடைய முன்னேறும் அலைகளுக்கான தீர்வைக் கொள்ளுவோம். அலையோட்டம் தொட்டியின் நீளப்போக்கில் அமைகிறது. இத்திசையில் x அச்சை எடுத்துக் கொள்ளுவோம். x y-தளம் கிளர்ச்சியற்ற மேற்பரப்பில் அமைகிறது. சமன்பாடு (1) லிருந்து,

$$\Delta^2 \phi \equiv \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \qquad (1)$$

$\phi = f(z).\cos m(x-ct)$ என்க.

சமன்பாடு (1)-ல் பிரதியீடு செய்ய,

$$f''(z) - m^2 f(z) = 0$$

$$\therefore \quad f = A e^{mz} + B e^{-mz}$$

$$\therefore \quad \phi = (A e^{mz} + B e^{-mz}) \cos m(x-ct)$$

மற்ற நிபந்தனைகள் மூலம் A, B, m, c க்களின் மதிப்புகளைக் காணலாம். தொட்டியின் அடித்தளத்தில், (2) லிருந்து $\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$ அதாவது $A e^{-mh} - B e^{mh} = 0$

$$\therefore \quad A e^{-mh} = B e^{mh} = \frac{\xi}{2} \text{ என்க.}$$

$$\therefore \quad \phi = \xi \cos h\, m(z+h) \cos m(x-ct) \qquad (6)$$

கட்டற்ற மேற்பரப்பில் நிபந்தனை (v) உண்மையாகும். கிளர்ச்சி ζ மிக அதிகமில்லையெனின், கட்டற்ற மேற்பரப்பின் சமன்பாட்டை $z=0$ என எடுத்துக் கொள்ளலாம். ஆகவே, சமன்பாடு (5) லிருந்து, $z=0$-ல்

$$[-m^2 c^2 \xi \cos h\, m(z+h) \cos m(x-ct)$$
$$+ g m \xi \sin h\, m(z+h) \cos m(x-ct)] = 0$$

$$\therefore \quad C^2 = \frac{g}{m} \tan h\, mh.$$

அலை நீளம் λ என்ருல், $m = \frac{2\pi}{\lambda}$

$$\therefore \quad c^2 = \frac{g\lambda}{2\pi} \tan h \frac{2\pi h}{\lambda} \qquad (7)$$

நிபந்தனை (iii) லிருந்து ζ-வின் வடிவத்தைக் காணலாம். சமன்பாடு (3) லிருந்து,

$$\zeta = \frac{1}{g}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_{\text{கட்டற்ற மேற்பரப்பு } z=0\text{-ல்.}}$$

$$= \frac{m\,c\,\xi}{g}\ \cosh mh \sin m\,(x-ct)$$

$$= a \sin m\,(x-ct) \text{ என்க} \tag{8}$$

$\therefore\ a = \dfrac{m\,c\,\xi}{g}\ \cosh mh.$ இங்கு a என்பது ζ-வின் வீச்சாகும்.

$\therefore$ சமன்பாடு (6) லிருந்து,

$$\phi = \frac{g\,a}{mc}\ \frac{\cos h\,m\,(z+h)}{\cos h\,m\,h} \cos m\,(x-ct) \tag{9}$$

வகை (i)

தொட்டியின் ஆழம் வெகு அதிகம் என்க. $\theta \to \infty$ என்றால் $\tan h\,\theta \to 1$, ஆதலால் $h \to \infty$ என்றால் $\tan h\ \dfrac{2\pi h}{\lambda} \to 1$

$$\therefore\ c^2 = \frac{g\lambda}{2\pi} \text{ (மிக ஆழமான தொட்டியில்)} \tag{10}$$

இங்கு, அலையின் திசைவேகம் ஆழத்தைப் பொருத்ததல்ல.

வகை (ii)

தொட்டியின் ஆழம் கந்தழி என்றால் தான் $c^2 = \dfrac{g\,\lambda}{2\pi}$ என்பதில்லை. ஆழம் பாதி அலை நீளத்தைவிட அதிகமெனினும் c^2-ன் மதிப்பு $\dfrac{g\lambda}{2\pi}$ என நிறுவுவோம்.

$\tan h\ \pi$-ன் மதிப்பு, தோராயமாக ஒன்றுக்குச் சமம் என்று அறிவோம். ஆகவே, $h \geq \dfrac{\lambda}{2}$ எனின் $c^2 = \dfrac{g\,\lambda}{2\pi}$ ஆகும்.

வகை (iii)

மேற்பரப்பு அலைகளுக்கு c-ன் மதிப்பிலிருந்து நீள அலைகளுக்கு c-ன் மதிப்பைத் தோராயமாக அறியலாம். θ-வின் மதிப்பு சிறியது எனின், $\tan h\,\theta \to \theta$ என்று அறிவோம். நீள அலைகளுக்கு $\frac{h}{\lambda}$ சிறியது.

$\therefore \frac{h}{\lambda}$ சிறியது எனின், $\tan h\,\frac{2\pi h}{\lambda} \to \frac{2\pi h}{\lambda}$.

$\therefore$ நீள அலைகளுக்கு $c^2 = \frac{g\lambda}{2\pi}$. $\frac{2\pi h}{\lambda} = gh$.

காலக்கூறு $\frac{\lambda}{c}$-க்கும், அலைநீளம் λ-விற்குமுள்ள தொடர்பைச் சமன்பாடு (7) கொடுக்கிறது. சமன்பாடு (7)-ன் வடிவில் $y = \frac{\tan h\,x}{x}$ என்றால் இதன் மடக்கை வகைக் கெழு காண,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x} + \frac{2}{\sin h\,2x}.$$

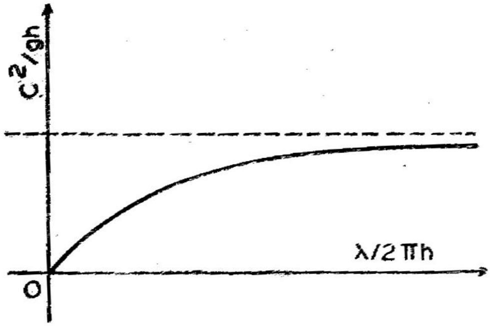
ஆனால் $\sin h\,2x = 2x + \frac{(2x)^3}{3!} + \ldots\ldots$ என்பதனால், $x > 0$ எனின் y-ன் வகைக் கெழு கழிவுக் குறியுடையது; ஆகவே, x-ன் மதிப்புக் குறைந்தால், y-ன் மதிப்புக் கூடுகின்றது. ஆகவே சமன்பாடு (7)-லிருந்து குறிப்பிட்ட ஆழம் h-ல், அலைநீளம் λ-வின் மதிப்புக் கூடும்பொழுது அலை செலுத்தப்படும் திசைவேகம் c-ன் மதிப்பும் கூடுகின்றது. ஆனால் $\tan h\,\frac{2\pi h}{\lambda}$வை விரித்தெழுத, c-ன் மதிப்பு $\sqrt{hg}$ ஐ விட அதிகரிக்க முடியாது; இம்மதிப்பு, நீள அலைகளின் திசைவேகம் என்று முன்னரே கண்டுள்ளோம். கீழேயுள்ள அட்டவணைகளில் இம்முடிவுகளின் உண்மையைக் காணலாம். h, λ-களின் சில எண் மதிப்புகளுக்கு இத்தொடர்பு கீழ்க்கண்ட அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. [இங்கு $g = 32.16$ அடி/நொடி^{2}]

நீரின் ஆழம் (அடிகளில்)	அலை நீளம் (அடிகளில்)				
	1	10	100	1,000	10,000
	அலையின் காலக் கூறு (விநாடிகளில்)				
1	0.442	1.873	17.645	176.33	1763.3
10	0.442	1.398	5.923	55.80	557.62
100	0.442	1.398	4.420	18.73	176.45
1,000	0.442	1.398	4.420	13.98	59.23
10,000	0.442	1.398	4.420	13.98	44.20

நீரின் ஆழம் (அடிகளில்)	அலை நீளம் (அடிகளில்)					
	1	10	100	1000	10,000	
	அலையின் திசை வேகம் (அடி/நொடி)					$\sqrt{gh}$
1	2.262	5.339	5.667	5.671	5.671	5.671
10	2.262	7.154	16.88	17.92	17.93	17.93
100	2.262	7.154	22.62	53.39	56.67	56.71
1000	2.262	7.154	22.62	71.54	168.8	179.3
10,000	2.262	7.154	22.62	71.54	226.2	567.1

$y = \dfrac{\tanh x}{x}$ என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து y-ன் ஒவ்வொரு மதிப்பிற்கும் ஒரேயொரு x–ன் மதிப்புத்தான் உள்ளது. ஆகவே சமன்பாடு (7)-லிருந்து, கொடுக்கப்பட்ட திசைவேகம் c-க்குப் பொருத்தமான அலைநீளம் λ ஒன்று மட்டிலுமே இருக்கவியலும். மேலும் $\sqrt{gh}$ வரையுள்ள திசைவேகம் ஒவ்வொன்றும் ஏதாவது ஒரு அலையின் திசைவேகமாகும். இம்முடிவுகளை

$\dfrac{c^2}{gh} = \dfrac{\lambda}{2\pi h} \tan h \dfrac{2\pi h}{\lambda}$-ன் வரைபடம் (39) விளக்குகின்றது:



படம் 39

§ 6.3 துகள்களின் பாதை : பகுதி § 6.2-ல் ஆராய்ந்த, நேரான கந்தழி நீளமுள்ள வாய்க்காலில் நிகழும் முன்னேறும் அலை இயக்கத்தில் திரவத்தின் துகள்களின் உண்மையான பாதையைத் தீர்மானம் செய்யலாம். (x, z) என்ற புள்ளியில் இடை நிலையை (Mean Position) உடைய துகளின் இடப் பெயர்ச்சியை X, Z என்று குறிப்போம்.

$$\therefore \quad \frac{dX}{dt} = -\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{ga}{c}\,\frac{\cosh m\,(z+h)}{\cosh mh}\,\sin m\,(x-ct)$$

$$\frac{dZ}{dt} = -\frac{\partial\phi}{\partial z} = -\frac{ga}{c}\,\frac{\sinh m\,(z+h)}{\cosh mh}\,\cos m\,(x-ct$$

தொகை காணக,

$$X = \frac{ga\cosh m\,(z+h)}{mc^2\cosh mh}\cos m\,(x-ct)$$

$$Z = \frac{ga\sinh m\,(z+h)}{mc^2\cosh mh}\sin m\,(x-ct)$$

இவ்விரு சமன்பாடுகளிலிருந்து t-ஐ நீக்க, துகளின் பாதை,

$$\frac{X^2}{\cosh^2 m\,(z+h)} + \frac{Z^2}{\sinh^2 m\,(z+h)}$$

$$= \frac{g^2 a^2}{m^2 c^4\cosh^2 mh} = \frac{a^2}{\sinh^2 mh} \quad \left[\because\ c^2 = \frac{g}{m}\tanh mh\right] \qquad (11)$$

வெவ்வேறு துகள்களின் பாதைகள் வாய்க்காலின் போக்குக்கு இணையான நிலைக்குத்துத் தளத்தில் நீள் வட்டங்களாகும்

(Ellipse). எல்லா நீள் வட்டங்களிலும் பேரச்சுக்கள் (Major-axis) கிடையாக அமைகின்றன. துகள்களின் ஆழம் அதிகரிக்க அதிகரிக்க அச்சுக்கள் குறைகின்றன. $z=-h$-ல் சிற்றச்சு (Minor-axis) மறைகிறது. எல்லா நீள் வட்டங்களிலும் இரு குவியங்களுக்கு (Foci) இடைப்பட்ட தூரம்

$= 2\sqrt{A^2-B^2}$ [$2A$, $2B$ என்பன நீள் வட்டத்தின் பேரச்சு, (Major-axis), சிற்றச்சு (Minor-axis) நீளங்கள்]

$$= \frac{2a}{\sinh mh}$$

= மாறிலி

கொடுக்கப்பட்டுள்ள துகளுக்கு, $mx-nt$, நீள் வட்டத்தின் கோட்டக் கோணம் (Eccentric Angle) போன்றுள்ளது. தூரத்தைப் பொருத்து மாறுபடுகின்ற மையவிசை (Central Force)-க்கு உட்பட்டுச் செல்லும் ஒழுக்கில் (Orbit) போன்று இம்மையக் கோணம் சீரான வீதத்தில் அதிகரிக்கிறது.

§ 6.4 **ஒரு பரிமாணத்தில் நிற்கும் அலைகள்** : ஒருங்கிணைக்கும் கோட்பாட்டின் படி, எதிர் எதிர்த் திசைகளில் செல்லும் இரு முன்னேறும் அலைகளை ஒருங்கிணைக்க நிற்கும் அலைகள் கிடைக்கும். ஆகவே எல்லையுள்ள தொட்டியில் நிற்கும் அலைகளுக்கு

$$\zeta = a \sin mx \cos mct \qquad (12)$$

$$\phi = \frac{ga}{mc} \frac{\cosh m(z+h)}{\cosh mh} \sin mx \sin mct \qquad (13)$$

என்ற இவ்விரு சமன்பாடுகளின் மூலம் தீர்வுகாணல் இயலும். சென்ற பகுதியில் உள்ள குறியீட்டின் படி

$$\dot{X} = -\frac{\partial\phi}{\partial x} = -\frac{ga}{c} \frac{\cosh m(z+h)}{\cosh mh} \cos mx \sin mct$$

$$\dot{Z} = -\frac{\partial\phi}{\partial z} = -\frac{ga}{c} \frac{\sinh m(z+h)}{\cosh mh} \sin mx \sin mct$$

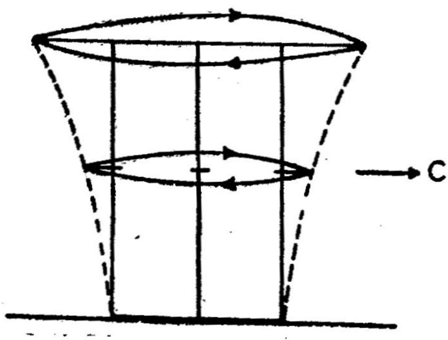
தொகை காண,

$$X = \frac{ga}{mc^2} \frac{\cosh m(z+h)}{\cosh mh} \cos mx \cos mct$$

$$Z = \frac{ga}{mc^2} \frac{\sinh m(z+h)}{\cosh mh} \sin mx \cos mct$$

$$\therefore \frac{Z}{X} \tanh m(z+h) \tan mx$$

இச்சமன்பாடு t-ல் சார்பற்றதாகையால், ஒவ்வொரு துகளின் இயக்கமும் நேர்க்கோட்டில் அமையும். இந்நேர்க்கோட்டின் திசை, எதிர்க்கணுக்கள் $mx=(k+\frac{1}{2})\pi$-ல் நிலைக்குத்துத் திசையிலிருந்து கணுக்கள் $mx+k\pi$-ல் கிடைத்திசை வரை வேறுபடுகின்றது. ஆகவே எதிர்க்கணுக்களின் அடியில் துகள்கள் நிலைக்குத்தாகவும், கணுக்களின் அடியில் கிடையாகவும் செல்லுகின்றன.



படம் 40

§ 6.5 **ஆழமான வாய்க்காலில் முன்னேறும் அலைகள் :** அலை நீளம் λ வைப் பொருத்து வாய்க்காலின் ஆழம் h மிக அதிகமாக இருந்து e^{-mh} புறக்கணிக்கத் தக்கதானால்

$$\phi=(A\,e^{mz}+B\,e^{-mz})\cos m\,(x-ct)\text{-ல் } B=0.$$

$$\therefore\ \phi=(A\,e^{mz}\ \cos m\,(x-ct)$$

ஆகவே சமன்பாடு (5)-லிருந்து,

$$c^2=\frac{g}{m}=\frac{g\lambda}{2\pi}$$

இம்முடிவு § 6.2-ன் வகை (1)-ல் காணப்பட்டதேயாகும். மேலும் சமன்பாடு (3)-லிருந்து, கட்டற்ற மேற்பரப்பில்,

$$\zeta=\frac{1}{g}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right]_{z=o}$$

$$=\frac{mcA}{g}\sin m\,(x-ct)$$

$= a \sin m\,(x-ct)$ என்க.

$$\therefore\ \phi = \frac{ag}{mc}\, e^{mz} \cos m\ (x-ct)$$

மேலும், (x, z) என்ற புள்ளியில் இடைநிலையை உடைய துகளின் இடப்பெயர்ச்சி (x, z) எனின்

$$X = a\, e^{mz} \cos m\,(x-ct)$$

$$Z = a\, e^{mz} \sin m\,(x-ct)$$

ஆகவே துகளின் பாதை $X^2+Z^2=a^2e^{2mz}$ என்ற வட்டமாகும். $\sqrt{gm}$ என்ற சீரான கோணத்திசை வேகத்துடன் இவ் வட்டப் பாதையில் துகள் நகருகிறது.

§ 6.6. இரு பரிமாணத்தில் நிற்கும் அலைகள் :

(i) முதலாவதாக a, b பக்கங்களையுடைய h ஆழமுள்ள செவ்வகத் தொட்டியில் நிகழும் மேற்பரப்பு அலைகளை ஆராய்வோம். $x\,y$ தளத்தைக் கிளர்ச்சியற்ற மேற்பரப்பில் கொள்வோம்.

$$\triangle^2 \phi \equiv \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = o$$

நிற்கும் அலைகளுக்கான தீர்வு காண,

$$\phi = \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\, px\, \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\, qy\, e^{\pm rz} \sin rct, \quad r^2=p^2+q^2$$

எல்லைக்கட்டுப்பாடுகள் :

(i) $x=o$, a-களில், $\dfrac{\partial \phi}{\partial x} = o$

(ii) $y=o$, b-களில், $\dfrac{\partial \phi}{\partial y} = o$

(iii) $z=-h$-ல் $\dfrac{\partial \phi}{\partial z} = o$

முதலிரண்டுக் கட்டுப்பாடுகளுக்கு உட்பட்டு,

$$\varphi = \left[A_1\, e^{rz} + B_1\ e^{-rz}\right] \cos\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{n\pi y}{b} \sin rct,$$

$$r^2 = \pi^2 \left[\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right].$$

கட்டுப்பாடு (iii)-லிருந்து,

$$A_1\ e^{-rh} \rightarrow B_1\, e^{rh} = o$$

$$\therefore\ A_1\, e^{-rh} = B_1\, e^{rh} = \zeta/2 \text{ என்க}$$

$$\therefore \phi = \zeta \cosh r\,(z+h) \cos\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{n\pi y}{b} \sin rct.$$

$$m = 1,\ 2, \ldots\ldots\ ; \qquad n = 1,\ 2, \ldots\ldots\ ;$$

$$r^2 = \left[\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right]$$

சமன்பாடு (3)-லிருந்து ζ-வின் மதிப்பை அறியலாம்

$$\zeta = \frac{1}{g}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right]_{\text{கட்டற்ற மேற்பரப்பு } z=o\text{-ல்}}$$

$$= \frac{1}{g}\ \zeta\ r\ c \cosh r\ h \cos\frac{m\ \pi\ x}{o}\ \cos\ \frac{n\ \pi\ y}{b} \cos rct.$$

$$= A \cos\frac{m\ \pi\ x}{a}\ \cos\ \frac{n\ \pi\ y}{b}\ \cos rct \text{ என்க} \qquad (14)$$

$$\therefore\quad A = \frac{\zeta\ r\ c}{g} \cosh r\ h,\ \ A \text{ என்பது } \zeta\text{-வின் வீச்சு,}$$

$$\therefore\quad \phi = \frac{g\ A}{rc}\ \frac{\cosh r\ (z+h)}{\cosh r\ h} \cos\frac{m\ \pi\ x}{a} \cos\frac{n\ \pi\ y}{b}\ \sin rct \qquad (15)$$

இனி, சமன்பாடு (4) அல்லது (5) ஐப் பயன் செய்து c-ன் மதிப்பைக் காணலாம். உதாரணமாகச் சமன்பாடு (5) ஐப் பயன் செய்து

$$\left[\frac{\partial^2\ \phi}{\partial\ t^2} + g\ \frac{\partial\ \phi}{\partial\ z}\right]_{z=0} = 0$$

அதாவது, $-r^2\, c^2 \cosh r\ h + g\ r \sinh r\ h = 0$, அல்லது

$$c^2 = \frac{g}{r}\ \tanh r\ h \qquad (16)$$

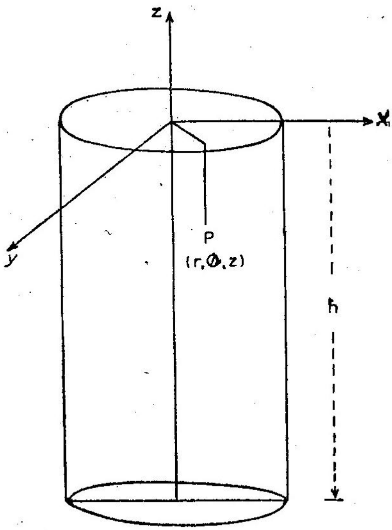
(ii) இரண்டாவதாக h ஆழமுள்ள r ஆரமுடைய வட்டத் தொட்டியில் நிகழும் மேற்பரப்பலைகளை ஆராய்வோம். மையத்

தில் ஆதியை எடுத்துக் கொண்டு, உருளை போலார் ஆயக் கூறுகளில் (Cylindrical Polar Co-ordinates) லெப்லாஸின் சமன் பாடு,

$$\Delta^2 \phi \equiv \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \partial}{\partial z^2} = 0 \qquad (1)$$

$c\,t = i\,z$, $i^2 = -1$, என மாறியை மாற்றியமைக்க,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$$



படம் 41

∴ சமன்பாடு (1) $\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$ என மாற்றியமைக்கப்படுகிறது. இதன் தீர்வு

$$\phi = \frac{J_m}{Y_m}(n\,r)\frac{\cos}{\sin}\,m\,\theta\,\frac{\cos}{\sin}\,n\,c\,t.$$

ஆனல் $c\,t = i\,z$,

$$\therefore\ \phi = \frac{J_m}{Y_m}(n\,r)\frac{\cos}{\sin}\,m\,\theta\,\frac{\cosh}{\sinh}\,n\,z.$$

$r=0$-ல் $Y_m(nr)$ கந்தழியாகையால் தீர்வில் $Y_m(nr)$ உறுப்பை விட்டுவிடுவோம். மேலும் θ அளக்கப் பெறும் முதற்கோட்டைத் தகுந்தவாறு எடுத்துக் கொள்ள,

$$\phi=J_m(n\,r)\cos m\,\theta\,(A\cosh n\,z+B\sinh n\,z)$$

தொட்டியின் அடி $z=-h$-ல் $\dfrac{\partial\phi}{\partial z}=0$. இவ்வெல்லைக் கட்டுப்பாட்டினால் $A\sinh n\,h=B\cosh n\,h$

$$\therefore\ \frac{A}{\cos h\,nh}=\frac{B}{\sinh\ nh}=\zeta \text{ என்க}$$

$$\therefore\ \phi=\zeta\,J_m(nr)\cos m\theta\cosh n\,(z+h)$$

மாறிலிகள் m, n ஒன்றுக்கொன்று சார்பற்றவையல்ல. அவைகளுக்கிடையே உள்ள தொடர்பு $r=a$-ல் $\dfrac{\partial\phi}{\partial r}=0$ என்ற எல்லைக் கட்டுப்பாட்டினால் கிடைக்கப்பெறுகின்றது. இது $J'_m(na)=0$. ஆகவே, தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட m-ன் மதிப்பிற்கு இச்சமன்பாட்டின் தீர்வுகளிலிருந்து n-ன் மதிப்பு கிடைக்கும். ζ நேரத்தின் சார்புடையது. நிகழ்வெண் f உள்ள வகைகளுக்கு, $\zeta\alpha\sin 2\pi ft$, என்று கொள்வோம். $\zeta=D\sin 2\pi ft$ என்க, இங்கு D என்பது, r, θ, z அல்லது t-களின் சார்பற்ற ஒரு மாறிலியாகும்.

$$\therefore\ \phi=D\,J_m(nr)\cos m\,\theta\cosh n\,(z+h)\sin 2\pi ft \qquad (17)$$

முன்போலவே, சமன்பாடு (3) லிருந்து ζ-வின் வடிவத்தைக் காணலாம்.

$$\therefore\ \zeta=\frac{1}{g}\left[\frac{\partial\phi}{\partial t}\right]_{\text{கட்டற்ற மேற்பரப்பு } z=0\text{-ல்}}$$

$$=\frac{2\pi Df}{g}\,J_m(nr)\cos m\,\theta\cosh nh\cos 2\pi\,ft$$

சமன்பாடு (4) அல்லது (5)-ன் மூலம் காலக்கூறு சமன்பாட்டை அறியலாம். உதாரணமாக, சமன்பாடு (5) லிருந்து,

$$\left[\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}+g\ \frac{\partial\phi}{\partial z}\right]_{z=0}=0$$

அதாவது, $[-4\pi^2 f^2\,D\,J_m(nr)\cos m\,\theta\cosh nh\sin 2\pi ft$
$+g\,n\,D\,J_m(nr)\cos m\,\theta\sinh n\,h\sin 2\pi ft]=0$

அதாவது, $4\pi^2 f^2=g\,n\tan h\,nh \qquad (19)$

தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட m-ன் முழுவெண் மதிப்பிற்கு n-ன் மதிப்பைக் காணலாம்; ஆதலால் சமன்பாடு (19) லிருந்து f-ன் மதிப்பு கிடைக்கிறது. ஆகவே சில குறிப்பிட்ட நிகழ் வெண்களே இருத்தல் இயலும் என அறிகிறோம். பெருக்கப் படும் மாறிலி D-யைத் தவிர அலையின் பண்பு முழுவதுமாக இங்கு தீர்மானிக்கப்பட்டுவிட்டது.

§ 6.7 *நிலை, இயக்க ஆற்றல்கள்* : மேற்பரப்பு அலைகளுக்கு நிலை, இயக்க ஆற்றல்களைக் காண்போம். கிளர்ச்சியற்ற மேற் பரப்பிணைப் பொருத்து நிலையாற்றலைக் கணக்கிடுவோம். $\zeta(x, y)$ என்பது திரவத்தின் எழுச்சி என்பதால் xy தளத்தில் dA என்ற பரப்பின் மேலுள்ள திரவத்தின் பொருண்மை $\rho\zeta\ dA$ ஆகும். இதன் பொருண்மை மையம் $\frac{1}{2}\zeta$ என்ற உயரத்தில் உள்ளதால் இப்பொருண்மையின் நிலையாற்றல் $=\rho\zeta\ dA\ g\ \frac{1}{2}\zeta$

$$\therefore \text{ முழு நிலையாற்றல் } V = \int \tfrac{1}{2} g\rho\zeta^2\, dA \tag{20}$$

இங்கு கிளர்ச்சியற்ற மேற்பரப்பு முழுவதும் தொகை காணல் வேண்டும்.

$d\tau$ என்ற திரவத்தின் கனஅளவு தனிமத்தின் இயக்க ஆற்றல் $= \frac{1}{2}\rho\ d\tau\ \vec{U}^2$

$$\therefore \text{ முழு இயக்க ஆற்றல்} = T = \int \tfrac{1}{2}\rho\ \vec{U}^2\, d\tau \tag{21}$$

இங்கு, திரவம் முழுமையும் தொகை காணல் வேண்டும்; இதைத் தோராயமாகக் கிளர்ச்சியற்ற நிலையில் உள்ள திரவத் தின் கன அளவாகக் கொள்ளலாம்.

$$\vec{U}^2 = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2$$

ஆகவே (21)-ன் மதிப்பைக் காண்பதற்கு கிரீனின் தேற்றம் (Green's Theorem) பயனுள்ளதாகும். இது

$$\int_v \left\{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2\right\} d\tau = \int_S \varphi\,\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\, ds \tag{22}$$

இரண்டாவது தொகையைத் திரவத்தின் மூலக்கனஅளவை அடைக்கும் பரப்பில் கணக்கிடல் வேண்டும்; $\frac{\partial}{\partial\nu}$ என்பது

இக்கனஅளவின் வெளிச் செல்லும் செங்குத்துக்கோட்டின் திசையில் வகைக்கெழு காண்பதாகும். நிலையான ஒரு எல்லையில் $\frac{\partial \phi}{\partial \nu}=0$ என்ற எல்லைக் கட்டுப்பாட்டினால் தொகை காண்பதில் சில உறுப்புக்கள் மறையும். மேலும், கட்டற்ற மேற்பரப்பில், ζ சிறியது எனின் $\frac{\partial \phi}{\partial \nu}$ என்பதற்கு $\frac{\partial \phi}{\partial z}$ என்று கொள்ளலாம்.

§ 6.8 ***முன்னேறும் அலைகளுக்கு ஆற்றல்கள் :*** ஒருமை அகலமுள்ள வாய்க்காலில் நிகழும் முன்னேறும் அலைகளுக்கு ஒரு அலைநீளம் $\lambda=\frac{2\pi}{m}$-ல் நிலை மற்றும் இயக்க ஆற்றல்களைக் காண்போம். இத்தகைய அலைகளுக்குச் சமன்பாடு (8) லிருந்து

$$\zeta = a \sin m\,(x-ct)$$

$$\text{நிலை ஆற்றல்} = V = \int_0^\lambda \tfrac{1}{2}\,\rho\, g\, \zeta^2 .\, 1 .\, dx\,; \qquad [\because\ dA = 1 .\ dx]$$

$$= \tfrac{1}{2}\,\rho\, g \int_0^\lambda a^2 \sin^2 m\,(x-ct)\, dx$$

$$= \tfrac{1}{4}\, g\, a^2\, \lambda \qquad (23)$$

இது t-ன் சார்பற்றது,

$$\text{இயக்க ஆற்றல்} = T = \int_{x=0}^{x=\lambda} \tfrac{1}{2}\,\rho \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)^2 \right\} d\tau$$

$$= \tfrac{1}{2}\,\rho \int_S \phi\, \frac{\partial \phi}{\partial \nu}\, ds, \qquad \text{[சமன்பாடு (22) லிருந்து]}$$

இங்கு திரவத்தின் மூலக் கனஅளவை அடைக்கும் பரப்பில் தொகை கணக்கிடப்படல் வேண்டும் ; மற்றும் $\frac{\partial \phi}{\partial \nu}$ என்பது இக்கன அளவின் வெளிச் செல்லும் செங்குத்துக் கோட்டுத் திசையிலுள்ள வகைக் கெழுவாகும். வாய்க்காலின்

அடித்தளம் நிலையானதாகையால் அங்கு $\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$. ஆகவே மேலேயுள்ள தொகையில் இவ்வடிப் பரப்பினால் வருகிற உறுப்பு பூஜ்ஜியமாகிறது. $x=0$-ல் வெளிச் செல்லும் செங்குத்துத் திசையில்,

$$\phi \frac{\partial \phi}{\partial \nu}\bigg]_{x=0} = -\phi \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad [\text{சமன்பாடு (6) லிருந்து}]$$

$$= -\zeta^2 m \cosh^2 m(z+h) \cos mct \sin mct$$

$x = \lambda$-வில், வெளிச் செல்லும் செங்குத்துத் திசையில்

$$\phi \frac{\partial \phi}{\partial \nu}\bigg]_{x=\lambda} = \phi \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$= \zeta^2 m \cosh^2 m(z+h) \cos mct \sin mct,$$

ஆதலால் $x = 0$, $x=\lambda$, என்ற இரு இடங்களில் கணக்கிடப்படும் தொகைகளின் கூட்டுத் தொகை பூஜ்ஜியமாகும். மேலும் வாய்க்காலின் இரு கரைகளிலும் உள்ள தளங்கள் நிலையானவையாதலால் அங்கு கணக்கிடப்படும் தொகைகளும் பூஜ்ஜியமாகும். ஆதலால் மீதியுள்ள பரப்பு கட்டற்ற மேற்பரப்பு மட்டிலுமேயாகும். இதிலும், ζ மிகச் சிறியது எனின் இப்பரப்பைக் கிளர்ச்சியற்ற மேற்பரப்பு $z=0$ என எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

$$\therefore \quad \text{இயக்க ஆற்றல்} = T = \frac{\rho}{2}\int_0^{\lambda} \left(\phi \frac{\partial \phi}{\partial z}\right)_{z=0} .1.\, dx$$

$$= \frac{\rho}{2} \int_0^{\lambda} g\, a^2 \cos^2 m(x-c\,t)\, dx\,;$$

$$\left[\because \quad \zeta = \frac{a\,g}{mc} \operatorname{sech} mh, \;\; c^2 = \frac{g}{m} \tanh m h\right].$$

$$= \tfrac{1}{4}\, \rho\, g\, a^2 \lambda \tag{24}$$

இது t-ன் சார்பற்றது.

$$\therefore \quad \text{முழு ஆற்றல்} = E = T + V = \tfrac{1}{2}\, \rho\, g\, a^2 \lambda \tag{25}$$

ஆதலால், ஒரு அலை நீளத்தில் முன்னேறும் அலைகளுக்கு முழு ஆற்றல், பாதி நிலையாற்றலாகவும் பாதி இயக்க ஆற்றலாகவும் உள்ளது.

§ 6.9 *நிற்கும் அலைக்கு ஆற்றல்கள்* : ஒரு பரிமாணத்தில் நிற்கும் அலைக்கு, சமன்பாடு (11), (12)களின்று,

$$\zeta = a \sin m x \cos m c t \tag{11}$$

$$\phi = \frac{g a}{m c} \frac{\cosh m(z+h)}{\cosh m h} \sin mx \sin mct \tag{12}$$

சமன்பாடு (20) லிருந்து, ஒரு ஆலை நீளம் λவிற்கு,

முழு நிலையாற்றல் $= V = \int \frac{1}{2} g \rho \zeta^2 d A.$

$$= \frac{1}{4} g \rho a^2 \lambda \cos^2 mct \tag{26}$$

சமன்பாடுகள் (21), (22)-லிருந்து, ஒரு அலை நீளம் λ-விற்கு

முழு இயக்க ஆற்றல் $= T = \int \frac{1}{2} \rho \vec{U}^2 d \tau$

$$= \int \left[\frac{1}{2} \rho \left(\phi \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right). d s\right.$$

$$= \frac{1}{4} g \rho a^2 \lambda \sin^2 mct \tag{27}$$

ஆகவே, ஒரு அலை நீளம் λ-வில் எந்த நேரத்திலும்,

முழு ஆற்றல் $= E = T + V = \frac{1}{4} g \rho a^2 \lambda =$ ஒரு மாறிலி (28)

நிலையாற்றலும் இயக்க ஆற்றலும் நேரம் t-யுடன் தொடர்ச்சியாக மாறுபடுகின்றன.

§ 6.10 *குழுத்திசை வேகம்* (Group Velocity) : குழுத்திசை வேகம் என்ற முக்கியமான கோட்பாட்டைப் பற்றி இங்கு பார்ப்போம். நீர் அலைகளில் மட்டிலுமன்றி, அலை செலுத்தப் படும் திசைவேகம் அலை நீளத்தைப் பொறுத்து மாறுபடும் மற்ற எல்லா வகை அலைகளிலும் இது பயன்படுகிறது. சலனமற்ற நீரின் ஓரிடத்தில் கல் எறிவதால் அல்லது ஓடம் செல்லுவதால் உண்டாகும் கிளர்ச்சியினுல் ஏற்படும் வெவ்

வேறு அலை நீளத்துடன் உள்ள அலைகள் எல்லாம் வெவ்வேறு திசை வேகங்களுடன் செலுத்தப் படுகின்றன. அலை செலுத்தப் படும் திசைவேகம் அதன் அலை நீளத்தைப் பொருத்ததாகை யால், வெவ்வேறு அலை நீளங்களையுடைய அலைகள் எல்லாம் படிப்படியாக, ஏறத்தாழ ஒரே அலை நீளத்தையுடைய அலை களைக் கொண்ட தனித்தனிக் குழுக்களாகப் பிரிந்து நிற்கின்றன. நீர் அலைகளில், இக் குழுவின் திசைவேகம், பொதுவாக, குழு வில் அடங்கியுள்ள தனியொரு அலையின் திசைவேகத்தைவிட குறைவேயாகும். குழுவின் முன்னுள்ள அலைகள் குழுவை விட்டு வெளியேறுகின்றன; புது அலைகள் குழுவின் பின் வழியே நுழைகின்றன. குழுவின் ஆற்றல் மாருமல் அமை கின்றது.

ஒரே வீச்சுடன், ஆனல் சிறிது மாறுபட்ட அலை நீளங் களையுடைய இரு எளிய-இசை அலைகளை ஒருங்கிணைக்க இத் தகைய குழுவின் உருவமைப்புக் கிடைக்கின்றது. இங்கு கட்டற்ற மேற்பரப்பினது சமன்பாட்டின் வடிவம்

$$\zeta = a \sin (m\, x - n\, t) + a \sin (m'\, x - n'\, t)$$
$$= 2\, a \cos \tfrac{1}{2} [(m-m')\, x - (n-n')\, t] \sin [(m+m')\, x - (n+n')\, t] \qquad \text{......(29)}$$

மிகத் தோராயமாக $m=m'$ எனின் $(m+m')\,x$ ஐ விட $(m-m')\,x$ மிக மெதுவாக x ஐப் பொருத்து வேறுபடும்; இதனல் மேலே யுள்ள கோவையில் cos உறுப்பு x ஐப் பொருத்து மிக மெது வாக வேறுபடும். ஆகவே, எந்த நேரத்திலும் அலை முகப்பு ஒரு sine வரைபடத்தின் வடிவமைப்புக் கொண்டது; இதன் வீச்சு படிப்படியாக 0, $2a$. என்ற மதிப்புகளுக்கிடையே மாறியமை கிறது. ஆகவே மேற்பரப்பானது குழுக்களின் தொடர்கள் போன்று காட்சியளிக்கின்றது; குழுக்கள் சம இடைவெளிகளில் ஏறத்தாழ சலனமற்ற நீர்நிலைகளால் பிரிக்கப்படுகின்றன. ஒவ் வொரு குழுவின் இயக்கமும் இரு குழுக்களின் மையங்களுக் கிடைப்பட்ட தூரம் $\frac{2\pi}{m-m'}$. இத்தூரத்தைக் கடக்க எடுத்துக் கொள்ளும் நேரம் $\frac{2\pi}{n-n'}$. ஆகவே குழுக்கள் செலுத்தப்படும் திசைவேகம் $U = \frac{n-n'}{m-m'}$ அல்லது,

$$U = \frac{dn}{dm} \qquad (30)$$

[மூல அலைத் தொடர்களில் அலைநீளங்களின் வேறுபாடு மிகச்சிறியது எனின்]

ஆனால், ஒரு தனி அலை செலுத்தப்படும் திசைவேகம் $c = \frac{n}{m}$

$$\therefore \quad U = \frac{d(mc)}{dm} = c + m\frac{dc}{dm}$$

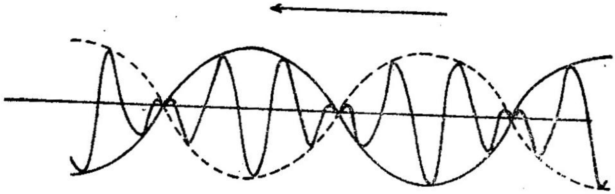
$$= c - \lambda\frac{dc}{d\lambda} \qquad \left[[\because \; m = \frac{2\pi}{\lambda}\right] \quad (31)$$

இதிலிருந்து, பொதுவாக, குழுத்திசை வேகம் தனித்தனி அலைகள் செலுத்தப்படும் திசைவேகத்திலிருந்து மாறுபடுகின்றது என அறிகிறோம். இம்முடிவு, ஆழ்கடலில் அலைகளின் குழுவில் குழுவினூடே முன்னேறும் தனி அலைகளின் வீச்சுகள் முதலில் அதிகரித்து, பின், மற்ற அலைகளுக்கு இடம் கொடுத்து, மறைகின்றன என்ற காட்சியறிவிற்கு ஒத்துள்ளது. h ஆழமுள்ள நீரின் மேற்பரப்பிலுள்ள அலைகளுக்கு,

$$c^2 = g/m \tanh mh$$

$$\therefore \; U = \tfrac{1}{2}c\,[1 + 2mh \operatorname{cosec} 2mh] \qquad (32)$$

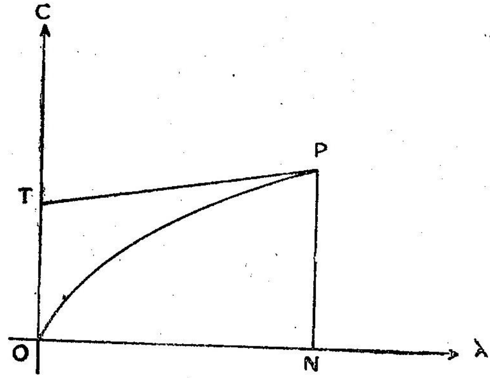
ஆகவே, அலைத்திசை வேகத்திற்குக் குழுத்திசை வேகத்தின் வீதம் $= \frac{1}{2} + \frac{mh}{\sinh 2mh}$ அலை நீளம் λ-வைப் பொருத்து ஆழம் h மிகச்சிறியதானல் இந்த வீதம் 1 ஆகும்; அதாவது, ஆழமற்ற நீரில் (h/λ சிறியது) குழுத்திசைவேகம் அலைத்திசை வேகத்திற்குச் சமமாகும். h-ன் மதிப்பு கந்தழியாக அதிகரிக்க இந்த வீதம் $\frac{1}{2}$ ஆகக் குறைகின்றது ; அதாவது, ஆழ்கடலில் குழுத்திசைவேகம் அலைத்திசை வேகத்தில் பாதியாகும். நீர் அலைகளிலுள்ள குழுவின் தன்மையாகிய இச்சிறப்பியல்பு ஒலியலைகளிலும் விம்மல் (Beats) என்ற பெயரில் விளங்குகிறது.



படம் 42

சமன்பாடு (31)-ஐ எளிய வரைபட உருவமைப்பில் கொடுத்தல் இயலும். λ-வை கிடை-ஆயக்கூறு அச்சாகவும் c-யை

நிலைக்குத்து ஆயக்கூறு அச்சாகவும் கொண்டு c, λவின் தொடர்பைக் கொடுக்கும் வளைவரையில் வரையப்பட்டுள்ள தொடுகோடு c-அச்சில் வெட்டும் வெட்டுத்துண்டு (Intercept) குழுத்திசைவேகம் ஆகும். படத்தில், O N அலை நீளமுள்ள அலையின் திசைவேகம் P N-ஆல் கொடுக்கப்படுகின்றது ; இங்கு O T குழுத்திசை வேகத்தைக் குறிக்கின்றது. மேலும் அலையின் நிகழ்வெண் tan ∠PON-ஆல் கொடுக்கப்படுகின்றது.



படம் 43

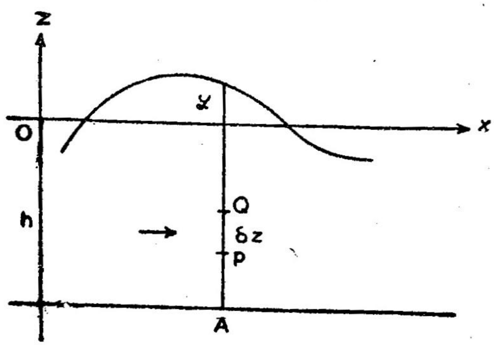
§ 6.11 *ஆற்றலைக் கடத்துதல்* (Transmission of Energy) : பிரிவுக்கூறு § 6.8-ல் முன்னேறும் அலையின் ஆற்றலைக் கணக்கிடும் முறையைப் பார்த்தோம். ஒரு முன்னேறும்அலையில் குறிப்பிட்ட திசைவேகத்துடன் அலைவடிவம் முன்னேறுவதைக் கண்டோம் இதுவேதான் ஆற்றல் கடத்தப்படும் வீதமும் என்று இதிலிருந்து முடிவு செய்துவிடல் இயலாது. ஏனெனில், நீரின் துகள்கள்தான் ஆற்றலைப் பெற்றுள்ளன; அலைவடிவம் முன்னேறும் வீதத்திலேயே துகள்களும் ஆற்றலைக் கடத்துகின்றன என்று கொள்ளத் தக்க காரணம் எதுவும் இல்லை. இவ்வினவை Prof. Osborne Reynolds விரிவாக ஆராய்ந்துள்ளார் (1877). அலைத்திசை வேகத்திற்கும் குழுத்திசை வேகத்திற்கும் உள்ள வேறுபாட்டைத் தெளிவாக விளக்குவதற்காக Reynolds கீழ்க்கண்ட சோதனையொன்றை அமைத்தார். சமநீளமுள்ள கயிறுகளால் கட்டப் பட்ட பல பந்துகள் ஒரு வரிசையில் தொங்க விடப்பட்டுள்ளன. இவ்வரிசைக்குச் செங்குத்துத் தளங்களில் இப்பந்துகள் முறையே அடுத்தடுத்து ஆட்டிவிடப்படுகின்றன, இங்கு இயக்கம், வரிசையின் ஒரு முனையிலிருந்து மறுமுனைக்குச் செலுத்தப்படும் அலைகளின் தொடர்புபோன்று காட்சியளிக்கின்றது. ஆனால் உண்மையில் ஒவ்வொரு ஊசலும்

(Pendulum) தனித்தனியாக மற்றதைச் சாராது ஊசலாடுகின்றது. எனவே இங்கு ஆற்றலின் தொடர்பு இல்லை. ஆயினும், பந்துகள் ஒரு மீள் சக்தி இழையினால் (Elastic String) கட்டப் பட்டு ஒரு பந்திற்குக் குறுக்கு இயக்கத்தைக் கொடுத்தால் இது மற்ற பந்துகளுக்கும் இயக்கத்தைக் கொடுக்கும். ஆகவே இங்கு ஆற்றல் கடத்தப் படுகின்றது. முதற்பந்து மற்றவை களுக்கு ஆற்றலைக் கொடுக்கும் வீதம், கயிறின் இழுவிசையைப் பொருத்து இருக்கும் என்பது தெளிவு. மற்றுமொரு எடுத் துக் காட்டு : நேர்க்கோட்டில் தரையில் கிடக்கும் கயிற்றின் ஒருமுனை கட்டப்பட்டு மறுமுனை மேற்புறமாக வெட்டியிழுக்கப் படுகின்றது. இதனால் கயிற்றின் ஒரு வளைவு முன்னேறி அடுத்த முனையை அடைகின்றது ; பின் கயிறு தரையில் நேர்க் கோட்டில் அமைகின்றது. இங்கு அலை செலுத்தப்படும் வீதத் திலேயே ஆற்றலும் கடத்தப்படுகின்றது.

சிறப்பாக, மேற்பரப்பு அலைகளில், ஆற்றல் கடத்தப்படும் வீதத்தைப்பற்றி இங்கு ஆராய்வோம். இவ்வகை மேலே குறிப்பிடப்பட்டுள்ள இருவகைகளுக்கும் நடுப்பட்டது. இங்கு ஆற்றல் கடத்தப்படும் வீதம் அலையின் திசைவேகத்தைவிடக் குறைவானதாகும்.

§ 6.12. எளிய இசை மேற்பரப்பு அலைகளில் ஆற்றல் கடத்தப்படும் வீதத்தைக் காணல்.

பிரிவுக்கூறு 6.2-ல் உள்ள h ஆழமுள்ள செவ்வகத் தொட்டியில் நிகழும் முன்னேறும் மேற்பரப்பு அலைகளுக்கு இம்முறையை விவரிப்போம். அலை செலுத்தப்படும் திசைக் குச் செங்குத்தான கற்பனைத் தளத்தைப் படம் 55-ல் AA' குறிக்கின்றது. AA'-ன் இடதுபுறமுள்ள நீரின் அழுத்தம்



படம் 44

வலதுபுறமுள்ள நீரின்மேல் செய்யும் வேலை வீதத்தைக் கணக்கிட்டு ஆற்றல் கடத்தப்படும் வீதம் அளக்கப்படுகிறது. தொட்டி ஒருமஅகலமுடையது என்போம். AA'-ல் z, $z+dz$ என்ற கோடுகளுக்கிடையேயுள்ள பகுதி PQ-வின் எல்லாப் புள்ளிகளிலும் அழுத்தம் p, திசைவேகம் u. ஆகவே செய்யப்படும் வேலை வீதமானது $pu.\,dz$. இதனால், செய்யப்படும் வேலையின்

$$\text{முழு வீதம்} = \int_{-h}^{o} pu.\,dz. \tag{33}$$

[தொகை 33-ல், எல்லைகளை $-h$-லிருந்து ζ வரை எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும்; ஆனால் o-லிருந்து ζ வரையுள்ள எல்லையில் a^3 உறுப்பு வரும். இது புறக்கணிக்கத் தக்கது].

பெர்னேலியின் சமன்பாட்டிலிருந்து p–ன் மதிப்பைக் காணலாம். $\vec{U}^2$ புறக்கணிக்கத் தக்கது. மற்றும் $V=gz$; ρ, மாறிலி என்பதால் $p+\rho gz-\rho\dfrac{\partial\phi}{\partial t}=$ மாறிலி $=p_o$ (என்க).

$$\therefore p=p_o+\rho\frac{\partial\phi}{\partial t}-g\rho z$$

மேலும், $u=-\dfrac{\partial\phi}{\partial x}$.

$$(9)\text{-லிருந்து } \phi=\frac{ga}{mc}\,\frac{\cosh m(z+h)}{\cosh mh}\,\cos m(x-ct)$$

தொகை (33)-ல் இம்மதிப்புகளை இட,

$$\text{வேலை செய்யும் வீதம்} = \left[\sin m(x-ct)\int_{-h}^{o}\frac{ga}{c}\,\frac{\cosh m(z+h)}{\cosh mh}\right.$$

$$\left.(p\rho-g\rho z)\,dz+\sin^2 m(x-ct)\int_{-h}^{o}\frac{\rho g^2a^2}{c}\,\frac{\cosh^2 m(z+h)}{\cosh^2 mh}\,dz\right]$$

இக்கோவை, நேரம் t-யுடன் மாறுபடுகின்றது. ஆகவே இதன் சராசரி மதிப்பைக் காண்போம்.

$$\sin m(x-ct)\text{-ன் சராசரி மதிப்பு} = \frac{\int_0^{2\pi/mc} \sin m(x-ct)\, dt}{2\pi/mc}$$

$$= \frac{-1}{2\pi}\Big[\cos m(x-ct)\Big]_0^{2\pi/mc} = 0$$

$$\sin^2 m(x-ct)\text{-ன் சராசரி மதிப்பு} = \frac{\int_0^{2\pi/mc} \sin^2 m(x-ct)\, dt}{2\pi/mc}$$

$$= \frac{mc}{2\pi}\int_0^{2\pi/mc} \frac{[1-\cos 2m(x-ct)]\, dt}{2}$$

$$= \frac{mc}{4\pi}\left[t - \frac{\sin 2m(x-ct)}{2mc}\right]_0^{2\pi/mc}$$

$$= \frac{mc}{4\pi}\,\frac{2\pi}{mc} = \tfrac{1}{2}$$

∴ வேலை செய்யப்படும் சராசரி வீதம்

$$= \frac{\rho g^2 a^2}{2c}\ \text{sech}^2\, mh \int_{-h}^{0} \cosh^2 m(z+h)\, dz$$

$$= \frac{\rho g^2 a^2}{4c}\ \text{sech}^2\, mh \int_{-h}^{0} [1+\cosh 2m(z+h)]\, dz$$

$$= \frac{\rho g^2 a^2}{4c}\ \text{sec}\,h^2\, mh \left[z + \frac{\sin h\, 2m(z+h)}{2m}\right]_{-h}^{0}$$

$$= \frac{\rho g^2 a^2}{4c} \operatorname{sech}^2 mh \left[h + \frac{\sinh 2mh}{2m}\right]$$

$$= \frac{\rho g^2 a^2 c}{8 m c^2} \operatorname{sech}^2 mh \,[2mh + \sinh 2mh]$$

$$= \frac{\rho g a^2 c}{8 \sinh mh \cosh mh} [2mh + \sinh 2mh]$$

$$[\because \quad c^2 = g/m \tanh mh].$$

$$= \frac{\rho g a^2 c}{4 \sinh 2mh} [2mh + \sinh 2mh]$$

$$= \tfrac{1}{4} \rho g a^2 c \,[1 + 2mh \operatorname{cosech} 2mh] \qquad (34)$$

ஒருமை அகலமுள்ள வாய்க்காலில், சமன்பாடு (25)லிருந்து, ஒருமை நீளத்திற்கு முழு ஆற்றல் $= \frac{1}{2} \rho g a^2$.

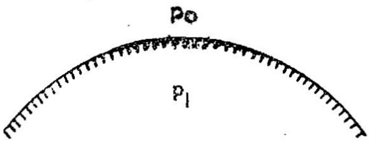
∴ ஆற்றல் பாய்வதின் திசைவேகம் =

$$= c/2 \,[1 + 2mh \operatorname{cosech} 2mh] \qquad (35)$$

சமன்பாடு (32) லிருந்து இதுதான் குழுத்திசை வேகம். எனவே, அலை செலுத்தப் படும் திசைக்குச் செங்குத்தாக உள்ள நிலையான நிலைக்குத்துத் தளத்தை ஆற்றல் குழுத்திசை வேகத்திற்குச் சமமான சராசரி வீதத்தில் கடக்கிறது.

§ 6.13 *புறப்பரப்பு இழுவிசை* (Surface Tension): முன் பகுதிகளில் புறப்பரப்பு இழு விசையைப் (Surface Tension) புறக்கணிக்கலாம் என்று கொண்டோம். ஆனால் சிறிய அலை களில் இக்கற்பிதம் ஏற்றுக் கொள்ளத் தக்கதல்ல. ஆகவே புறப்பரப்பு இழுவிசையையும் எடுத்துக் கொண்டால் நிகழும் விளைவுகளை இப்பகுதியில் ஆராய்வோம். புறப்பரப்பு இழு விசை T என்றால், திரவத்தின் மேற்பரப்பில் வரையப்பட்டுள்ள ஒருமை நீளக் கோட்டின் ஒரு புறமுள்ள திரவம் மறு புறமுள்ள திரவத்தை T இழுவிசையுடன் இழுக்கின்றது என்று பொருள் படும். ஆதலால், புறப்பரப்பு இழுவிசையின் விளைவு, T இழு விசையுடன் எல்லாப் புறமும் இழுக்கப்பட்டுள்ள சவ்வின தைப் போன்றதேயாகும், என்பது தெளிவு. அத்தியாயம் 3-ல்

சவ்வு வளையும்பொழுது அதன் ஒருமப் பரப்பில் கீழ்நோக்கி செயல் புரியும் இழுவிசையின் மதிப்பு தோராயமாக,



படம் 45

$$= -T \left\{ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right\}$$

படம் 45-ல் திரவத்தின் சற்று சிறிது உள்ளே (Just Inside) அழுத்தம் p_1, வெளி அழுத்தம் p_0-க்குச் சமமாக இருக்காது. இதன் மதிப்பு,

$$p_1 = p_0 - T \left\{ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right\} \tag{36}$$

இவ்வாறு, திரவத்தின் கட்டற்ற மேற்பரப்பில் $p=p_0$, என்பதற்குப் பதிலாக $P + T \left\{ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right\}$ என்பது மாறிலி p_0-க்குச் சமம் என்பதுதான் சரியான நிபந்தனையாகும். இம் முடிவிலிருந்து பெர்னேலியின் சமன்பாட்டில் $\vec{U}^2$-ஐப் புறக்கணித்து, $V = gz$ என்று பிரதியீடு செய்ய

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - g\zeta + \frac{T}{\rho} \left\{ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right\} = 0 \tag{37}$$

இப் புதுக் கட்டுப்பாடு, பிரிவுக்கூறு § 6.1-ல் உள்ள கட்டுப்பாடு (iii)-க்குப் பதிலாகும். பிரிவுக்கூறு § 6.1-ல் உள்ள கட்டுப்பாடு (iv) மேற்பரப்பில் ஏற்படும் திடீர் மாற்றத்தினால் வேறுபாடு அடைவதில்லையாதலால் அது இங்கும் பொருந்துவதாகும். § 6.1-ல் (v)-வது கட்டுப்பாட்டிற்குப் பதிலாக (4), (37)-களிலிருந்து,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{T}{\rho} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right\} \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \tag{38}$$

மேலேயுள்ள வாய்ப்பாடுகளை இங்கு சேர்த்துக் கொடுப்போம்.

(i) $\Delta^2 \phi = 0$

(ii) $\frac{\partial \phi}{\partial \nu} = 0$

(iii) $\frac{\partial \phi}{\partial t} - g\zeta + \frac{T}{\rho}\left\{\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right\} = 0$ [கட்டற்ற மேற்பரப் பில்]

(iv) $\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{\partial \phi}{\partial z}$, [கட்டற்ற மேற்பரப்பில்]

(v) $\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{T}{\rho}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right\}\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$

[கட்டற்ற பரப்பில்]

கடைசி மூன்று வாய்ப்பாடுகளில் ஏதாவது இரண்டு மட்டிலுமே சார்பற்றவை.

§ 6.14 *தந்துகி அலைகள்* (Capillary Waves): புறப்பரப்பு இழுவிசையின் விளைவு முக்கியமான அலைகளுக்குத் தந்துகி அலைகள் (Capillary Waves) என்று பெயர். h ஆழமுள்ள எல்லையற்ற நீரில் முன்னேறும் அலைகளுக்குச் சென்ற பிரிவுக் கூறின் முடிவுகளைப் பயன்படுத்துவோம். முன்போலவே, பிரிவுக்கூறு § 6.2 லிருந்து, முதலிரண்டு நிபந்தனைகளை

$$\phi = \xi \cosh m(z+h) \cos m(x-ct) \quad (39)$$

சமன் செய்கின்றது. நிபந்தனை (iv) ζ-வின் வடிவத்தைக் கொடுக்கின்றது.

$$\zeta = \frac{\xi}{c} \sinh mh \sin m(x-ct) \quad (40)$$

நிபந்தனை (v) லிருந்து,

$$[-m^2 c^2 \xi \cos h\, mh \cos m(x-ct) + m\xi g \sinh mh$$

$$.\cos m(x-ct) + \frac{T}{\rho} m^3 \xi \sinh mh \cos m(x-ct)] = 0$$

அதாவது, $c^2 = \left(\frac{g}{m} + \frac{Tm}{\rho}\right) \tanh mh \quad (41)$

இச்சமன்பாட்டில் $T=0$ என்றால், சமன்பாடு (10) கிடைக்கிறது. h-ன் மதிப்பு அதிகமெனின் $\tanh mh=1$;

$$\therefore\ c^2 = \frac{g}{m}+\frac{Tm}{\rho}$$

$$=\frac{g\lambda}{2\pi}+\frac{2\pi T}{\lambda\rho} \tag{42}$$

இனி, λ-வின் எந்த மதிப்பிற்கு c மீச்சிறு மதிப்பை அடைகிறது என்று பார்ப்போம்.

λ-வைப் பொருத்து வகைக் கெழுகாண,

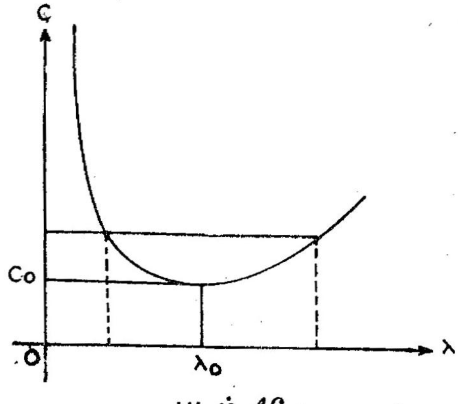
$$2c\frac{dc}{d\lambda}=\frac{g}{2\pi}-\frac{2\pi T}{\lambda^2\rho}$$

$$\frac{dc}{d\lambda}=0 \text{ எனின்,} \qquad \lambda^2=\frac{4\pi^2T}{g\rho} \tag{43}$$

மேலும், $2c\dfrac{d^2c}{d\lambda^2}+2\left(\dfrac{dc}{d\lambda}\right)^2=\dfrac{4\pi T}{\lambda^3}$

$\therefore\ \lambda^2=\dfrac{4\pi^2T}{g\rho}$ எனின், $\dfrac{d^2c}{d\lambda^2}>0$; அதாவது $\lambda^2=\dfrac{4\pi^2T}{g\rho}$ என்றால் c மீச்சிறு மதிப்பு அடைகிறது.

புறப்பரப்பு இழுவிசை முதன்மையாக உள்ள அலைகளில் λ-வின் மதிப்பு (43)-ஆல் கொடுக்கப் படுவதைவிடக் குறைவான அலைகளுக்குச் சிற்றலைகள் (Ripples) என்று பெயர்.



படம் 46

படம் 46, சமன்பாடு (42)-ன் வரைபடமாகும். படத்திலிருந்து திசைவேகம் c-ன் மீச்சிறு மதிப்பைவிட அதிகமான எந்த மதிப்பிற்கும் இரு விதமான முன்னேறும் அலைகள் உள்ளன. இவற்றில் ஒன்று சிற்றலைகளாகும்.

$$\text{திசைவேகம் } c\text{-ன் மீச்சிறு மதிப்பு} = \left(\frac{4gT}{\rho}\right)^{\frac{1}{4}}$$

நீரில் $T=75$, $\rho=1.0$, $g=981$. $c.g.s.$ அலகுகள்

இங்கு c-ன் மாறுநிலை மதிப்பு (Critical Value)

$=23$ செ.மீ./நொடி (தோராயமாக)

λ-வின் மாறுநிலை மதிப்பு $=1.7$ செ.மீ.

சீரியக்கத்திற்கு மாற்றி (Reduction to Steady Motion) சமன்பாடு (42)-ஐக் காணும் முறையைப் பின்னர் காணலாம்.

6.15. பாய்வளிக் கோடு (Stream Line): "பாய்வளிக் கோடு என்பது ஒரு வளைவரை; எந்த ஒரு நேரத்திலும் இவ் வளைவரையின் ஒரு புள்ளியில் வரையப்படும் தொடுகோடு அப்புள்ளியில் திரவம் செல்லும் திசையில் அமையும்."

பாய்வளிச் சார்பு (Stream Function): ψ என்ற சார்பு $u=-\dfrac{\partial\psi}{\partial y}$, $v=\dfrac{\partial\psi}{\partial x}$ என்று அமைந்தால், ψ என்பது பாய்வளிச் சார்பு எனப்படும். பாய்வளிக் கோடுகள் $\psi=c$, c ஒரு விதிக் கட்டில்லா மாறிலி, என்ற சமன்பாட்டால் கிடைக்கின்றன. திசைவேகப் பொடன்ஷியல் ϕ என்றால்

$$u=-\frac{\partial\phi}{\partial x}\ ,\quad v=-\frac{\partial\phi}{\partial y}$$

$w=\phi+i\psi$ என்க. $z=x+iy$ என்க.

$w=f(z)$ அல்லது $\phi+i\psi=f(x+iy)$ என்பது இரு பரிமாணத்தில் சுழற்சியற்ற இயக்கத்தைக் கொடுக்கும்.

§ **6.16** மேற்பரப்பு—முன்னேறும் அலைகளின் திசை வேகத்தைச் சீரியக்கத்திற்கு மாற்றியமைத்துக் காண்போம். பிரிவுக் கூறுகள் §5.12, §5.13 போன்று திரவத்தின் பொருண்மை

முழுதும் செலுத்துகை திசைவேகத்திற்குச் சமமான திசை வேகத்தை எதிர்த் திசையில் பொருத்தியமைக்க இயக்கம் சீரியக்கம் ஆகிறது. அலைமுகப்பு வெளியில் (Space) நிலையா கிறது. இங்குள்ள தீர்வாய்வு (Problem) இரு பரிமாணத்தது. திரவத்தின் கட்டற்ற மேற்பரப்பும், அடிப்பகுதியும் பாய்வளிக் கோட்டின் கட்டுப்பாடுகளைத் திருப்தி செய்யும் வகையில் திசைவேகப் பொடடன்ஷியல் மற்றும் பாய்வளிச் சார்பின் கோவைகளை எடுத்துக்கொள்ள வேண்டும்.

$w = cz + P\cos mz - iQ\sin mz$ (44) எனக் கொள்வோம். அதாவது,

$$\phi + i\psi = c\,(x+iy) + P\cos m\,(x+iy) - iQ\sin m\,(x+iy)$$

இதிலிருந்து, மெய்ப்பகுதிகளையும், கற்பனைப் பகுதிகளையும், பிரிக்க,

$$\left.\begin{aligned}\phi &= cx + (P\cosh my + Q\sinh my)\cos mx\\ \psi &= cy - (P\sinh my + Q\cosh my)\sin mx\end{aligned}\right\} \quad (45)$$

இக் கோவைகள் லெப்லாஸின் சமன்பாட்டை நிறைவு செய்கின்றன. அடிப்பகுதி பாய்வளிக் கோடாக அமைவதற்கு $y=-h$-ல் ψ ஒரு மாறிலியாக இருக்கவேண்டும்.

$$\therefore\ -ch - (-P\sinh mh + Q\cosh mh)\sin mx = \text{ஒரு மாறிலி}$$

$$\therefore\ -P\sinh mh + Q\cosh mh = 0$$

எனவே, $\dfrac{P}{\cosh mh} = \dfrac{Q}{\sinh mh} = A$ (என்க)

$$\therefore\ P = A\cosh mh, \qquad Q = A\sinh mh$$

இம்மதிப்புகளைச் சமன்பாடு (45)-ல் பிரதியீடு செய்ய,

$$\left.\begin{aligned}\phi &= cx + A\cosh m\,(y+h)\cos mx\\ \psi &= cy - A\sinh m\,(y+h)\sin mx\end{aligned}\right\} \quad (46)$$

கட்டற்ற மேற்பரப்பு ஒரு எளிய ஸைன் (Sine) வளைவரை $\zeta = a\sin mx$ எனக்கொள்வோம். இது பாய்வளிக்கோடு $\psi = 0$ எனின் சமன்பாடு (46)-லிருந்து,

$$ca\sin mx - A\sinh m\,(a\sin mx + h)\sin mx = 0$$

ஆகவே, சிறிய மதிப்புகளின் உயர்படிகளைப் புறக்கணித்து

$$[ca - A \sinh mh] \sin mx = 0$$

$$\therefore\ ca - a \sinh mh = 0$$

$$\therefore\quad A = \frac{c\,a}{\sinh mh} \qquad (47)$$

$\therefore$ சமன்பாடு (47) லிருந்து,

$$\phi = c\,x + \frac{c\,a \cosh m\,(y+h)}{\sinh mh} \cos m\,x$$

$$\psi = c\,y - \frac{c\,a \sinh m\,(y+h)}{\sinh mh} \sin m\,x.$$

பெர்னௌலியின் சமன்பாட்டிலிருந்து அழுத்தத்திற்கான வாய்ப்பாடு

$$\frac{p}{\rho} + \tfrac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2\right\} + g\,y = \text{மாறிலி}$$

கட்டற்ற மேற்பரப்பு $y = a \sin mx$-ல் இது,

$$\frac{p}{\rho} + \tfrac{1}{2}\left\{\left[c - \frac{c\,a\,m \cosh m(a \sin m\,x + h)}{\sinh mh} \sin m\,x\right]^2\right.$$

$$\left. + \left[o + \frac{c\,a\,m \sinh m\,(a \sin m\,x + h)}{\sinh mh} \sin m\,x\right]^2\right\}$$

$$+ g\,a \sin m\,x = \text{மாறிலி}$$

என மாறுகிறது. இதிலிருந்து a^2, ...ஐப் புறக்கணிக்க,

$$\frac{p}{\rho} + \tfrac{1}{2} c^2 \quad [1 - 2\,a\,m \coth mh \sin mx] + g\,a \sin mx = \text{மாறிலி}.$$

கட்டற்ற மேற்பரப்பில் p ஒரு மாறிலியாதலால் இங்கு $\sin mx$-ன் கெழு மறையவேண்டும்.

$$\therefore\quad m\,c^2 \coth mh = g$$

அல்லது $c^2 = g/m \tanh mh$ (48)

செவ்வகக் குறுக்கு வெட்டுள்ள கிடையான ஒரு நேர்க் குழாயின் மேற்பரப்பு $\zeta = a \sin \frac{2\pi x}{\lambda}$ என்ற நெளிவுகளை (Corrugations) உடையது என்போம். இக்குழாயில் நீரை எந்த வேகத்துடனும் பாயச்செய்ய முடியும். ஆனால், குழாயின் மேற்பரப்பிலுள்ள நெளிவுகளை நீக்கி, சமன்பாடு (48)-ஆல் கொடுக்கப்படும் வேகத்துடன் குழாயில் நீரைச் செலுத்தினால் மேற்பரப்பிலிருந்த நெளிவுகளின் வடிவம் மாருமல் நீர் பாயும்.

§ 6.17 ஆழமான நீரில், மேலேயுள்ளதைப் போன்று

$$\left.\begin{aligned} \phi &= c\,x + A\,e^{my} \cos m\,x \\ \psi &= c\,y - A\,e^{my} \sin m\,x \end{aligned}\right\} \qquad (49)$$

$\zeta = a \sin m\,x$ என்பது கட்டற்ற மேற்பரப்பு என்க. கட்டற்ற மேற்பரப்பு பாய்வளிக் கோடு $\psi = 0$. என்பதால்,

$$0 = c\,a \sin m\,x - A\,e^{ma \sin mx} \sin m\,x.$$

சிறிய மதிப்புகளின் உயர்படிகளைப் புறக்கணித்து,

$$c\,a = A \qquad (50)$$

ஆகவே (49)-லிருந்து,

$$\left.\begin{aligned} \phi &= c\,x + c\,a\,e^{my} \cos m\,x \\ \psi &= c\,y - c\,a\,e^{my} \sin m\,x \end{aligned}\right\} \qquad (51)$$

பெர்னேலியின் சமன்பாட்டிலிருந்து, அழுத்தத்திற்கான வாய்ப்பாடு,

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2\right\} + g\,y = \text{மாறிலி}.$$

எனவே, (51)-லிருந்து,

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}\,c^2\left\{1 - 2\,a\,m\,e^{my} \sin m\,x + m^2 a^2 e^{2my}\right\} + g\,y$$
$$= \text{மாறிலி}.$$

a^2 ஐப் புறக்கணிக்க,

$$\frac{p}{\rho}+(g-m\,c^2)\,y+m\,c\,\psi=\text{மாறிலி}\ [(49)\text{லிருந்து}] \qquad (52)$$

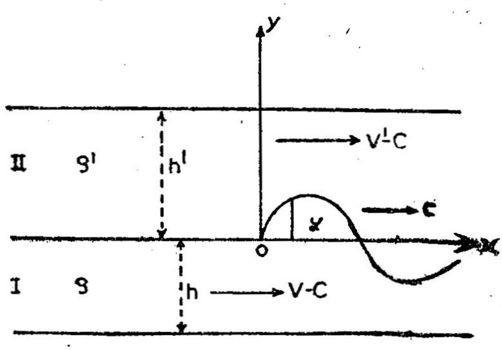
கட்டற்ற மேற்பரப்பு $y=\sin mx$-ல், $p=$ மாறிலி, $\psi=0$

$$\therefore\quad c^2=\frac{g}{m} \qquad (53)$$

மேலும், (52)-லிருந்து $c^2=g/m$ எனில், ஒவ்வொரு பாய் வளிக் கோட்டிலும் அழுத்தம் ஒரு மாறிலி என அறிகிறோம்.

§ 6.18 இரு திரவங்களின் பொதுப் பரப்பில் அலைகள்:

திசைவேகம் V-யுடன் செல்லும் h ஆழமும் ρ அடர்த்தியுமுள்ள திரவத்தின் மீது h' ஆழமும் ρ' அடர்த்தியுமுள்ள திரவம் அதே திசையில் திசைவேகம் V′-உடன் செல்லுகின்றது. திரவங்கள் மேலும் கீழும் இரு நிலையான கிடைத்தளங்களால் அடைபட்டுள்ளன. திரவங்களின் பொதுப் பரப்பில் திரவங்கள் செல்லும் திசையில் செலுத்தப்படும் அலைகளின் திசைவேகம் c என்க. கிளர்ச்சியில்லா பொதுப் பரப்பில் இத்திசையில் x அச்சையும் நிலைக்குத்துத் திசையில் y அச்சையும் எடுத்துக் கொள்வோம். திரவங்களின் முழுப் பொருண்மை மீது திசைவேகம் c-ஐ ஒருங்கிணைத்து இயக்கத்தைச் சீரியக்கமாகச் செய்வோம். இதனுல் அலைவடிவம் வெளியில் (Space) ஓய்வு நிலையை அடைகின்றது.



படம் 47

கீழேயுள்ள திரவம் I-க்கு சிக்கல் பொடன்ஷியல் (Complex Potential) $w(z)=\phi+i\psi$ என்க;

மேலேயுள்ள திரவம் II-க்கு சிக்கல் பொடன்ஷியல் (Complex Potentiai) $w'(z)=\phi'+i\psi'$ என்க,

$$\left.\begin{aligned} \therefore\ w(z)=\phi+i\psi=-(V-c)\,z+P\cos mz-i\,Q\sin mz \\ w'(z)=\phi'+i\psi'=-(V'-c)\,z+P'\cos mz-iQ'\sin mz \end{aligned}\right\}\quad(54)$$

$$\left.\begin{aligned} \therefore\ \phi=-(V-c)\,x+(P\cosh my+Q\sinh my)\cos mx \\ \psi=-(V-c)\,y-(P\sinh my+Q\cosh my)\sin mx \end{aligned}\right\}\quad(55)$$

$$\left.\begin{aligned} \phi'=-(V'-c)\,x+(P'\cosh my+Q'\sinh my)\cos mx \\ \psi'=-(V'-c)\,y-(P'\sinh my+Q'\cosh my)\sin mx \end{aligned}\right\}\quad(56)$$

அடித்தளம் ஒரு பாய்வளிக் கோடு. ஆகவே $y=-h$-ல் $\psi=$ ஒரு மாறிலி. இதிலிருந்து, முன்போலவே,
$P\sinh mh=Q\cosh mh$.

$$\therefore\ \frac{P}{\cosh mh}=\frac{Q}{\sinh mh}=A \text{ என்க.}$$

$$\left.\begin{aligned} \therefore\ \phi=-(V-c)\,x+A\cosh m(y+h)\cos mx \\ \psi=-(V-c)\,y-A\sinh m(y+h)\sin mx \end{aligned}\right\}\quad(57)$$

அடுத்ததாக, மேல்தளம் ஒரு பாய்வளிக்கோடு ஆகவே

$y=h'$-ல், $\psi'=$ ஒரு மாறிலி.

இதிலிருந்து $P'\sinh mh'+Q'\cosh mh'=0$

$$\therefore\ \frac{P'}{\cosh(-mh')}=\frac{Q'}{\sinh(-mh')}=A' \text{ என்க.}$$

$$\left.\begin{aligned} \therefore\ \phi'=-(V'-c)\,x+A'\cosh m(y-h')\cos mx \\ \psi'=-(V'-c)\,y-A'\sinh m(y-h')\sin mx \end{aligned}\right\}\quad(58)$$

பொதுப் பரப்பின் இடப்பெயர்ச்சி $\zeta=a\sin mx$ என்க. திரவங்கள் பிரிவதில்லை எனின் இது ஒரு பாய்வளிக்கோடாகும் அதாவது $y=\zeta=a\sin mx$-ல் $\psi=\psi'=0$.

$y=a\sin mx$-ல் $\psi=0$ என்பதிலிருந்து,

$$-(V-c)\,a\sin mx-A\sinh m(a\sin mx+h)\sin mx=0$$

சிறிய மதிப்புகளின் உயர்படிகளை நீக்கி, இதில் $\sin mx$-ன் கெழுவைப் பூஜ்ஜியத்திற்குச் சமன் செய்ய,

$$-(V-c)\,a-A\sinh mh+0\qquad(59)$$

இதேபோன்று $y=a \sin m x$-ல் $\phi'=0$ என்பதிலிருந்து,

$$-(V'-c)\, a+A' \sinh m h'=0 \tag{60}$$

அடுத்ததாகக் கீழேயுள்ள திரவத்தின் சீரியக்கத்திற்குப் பெர்னேலியின் சமன்பாடு :

$$\frac{p}{\rho}+g y+\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2\right\}=\text{மாறிலி}$$

அதாவது, $\frac{p}{\rho}+g y+\frac{1}{2}\Big[[-(v-c)-A m \cosh m (y+h) \sin m x]^2$

$$+[A m \sinh m (y+h) \cos m x]^2 \Big]=\text{மாறிலி}$$

பொதுப்பரப்பில், அதாவது $y=a \sin m x$-ல், a^2...நீக்கி

$$\frac{p}{\rho}+g a \sin m x+\tfrac{1}{2} (v-c)^2 \left\{1-2 a m \coth mh \sin mx\right\}$$

$=$ மாறிலி [(59)ஐப் பயன்படுத்தி] (61)

இதே போன்று, மேலேயுள்ள திரவத்தின் சீரியக்கத்திற்குப் பெர்னேலியின் சமன்பாட்டிலிருந்து, பொதுப் பரப்பு $y=a \sin m x$-ல்,

$$\frac{p'}{\rho'}+g a \sin m x+\tfrac{1}{2} (v'-c)^2 \left[1+2 a m \coth m h' \sin m x\right]$$

$=$ மாறிலி [(60)ஐப் பயன் படுத்தி] (62)

புறப் பரப்பு இழுவிசை இல்லையெனின் பொதுப் பரப்பில் $p=p'$

$\therefore$ சமன்பாடுகள் (61), (62)-களிலிருந்து,

$$\rho\, ga \sin mx+\tfrac{1}{2} \rho (v-c)^2 \,[1-2\, am \coth mh \sin mx]+\text{மாறிலி}$$

$$= \rho' ga \sin mx+\tfrac{1}{2} \rho' (v'-c)^2 [1+2\, am \coth m h' \sin mx)] +\text{மாறிலி}$$

இச்சமன்பாட்டிலிருந்து, இருபுறமும் சமமாக இருக்க இருபுறமும் sin mx-ன் கெழுக்கள் சமமாக இருக்க வேண்டும். அதாவது, $\rho\, ga-\rho (v-c)^2\, am \coth mh$

அதாவது, $= \rho' ga+\rho' (v'-c)^2\, am \coth mh'$

$$\rho\,(v-c)^2 \coth mh+\rho'\,(v'-c)^2 \coth mh' = \frac{g}{m}(\rho+\rho') \quad (63)$$

V, V′ திசை வேகங்களுடன் ஓடும் இரு திரவங்களின் பொதுப் பரப்பில் $2\pi/m$ நீளமுள்ள அலைகள் செலுத்தப்படும் திசைவேகம் c-ஐச் சமன்பாடு (63) நிர்ணயிக்கிறது.

சிறப்பு வகை (i): அலையோட்டம் தவிர திரவங்கள் ஓய்வு நிலையில் உள்ளன என்போம்; அதாவது $V=V'=0$. இவ்வகையில் சமன்பாடு (63)-லிருந்து அலையோட்டத்தின் திசைவேகம்

$$c^2=\frac{g}{m}\;\frac{\rho-\rho'}{\rho \coth mh+\rho' \cot mh'} \quad (64)$$

என்ற சமன்பாட்டால் கொடுக்கப்படுகிறது.

இதிலிருந்து, $\rho'>\rho$ என்றால் c-க்கு மெய்மதிப்பு கிடையாது என அறிகிறோம். ஆகவே $\rho'>\rho$ என்றால் சமநிலை (Equilibrium) உறுதியற்றதாகும் (Unstable).

(ii) மேலேயுள்ள வகையில் திரவங்களின் ஆழங்கள் கந்தழியெனின் $\coth mh=\coth mh'=1$

$$\therefore\ c^2=\frac{g}{m}\;\frac{\rho-\rho'}{\rho+\rho'} \quad (65)$$

(iii) மேற்பகுதியில் உள்ள திரவத்திற்குப் பதிலாக, ஒப்படர்த்தி (Specific Gravity), $s=\frac{\rho'}{\rho}$ உள்ள காற்று கந்தழி ஆழம் உள்ளது என்போம். இங்கு $\coth mh'=1$

∴ (64)-லிருந்து,

$$c^2=\frac{g}{m}\,\frac{\rho\,(1-s)}{\rho\,[\coth mh+s]}$$

$$=\frac{g}{m}(1-s)\tanh mh\,(1+s\tanh mh)^{-1}$$

$$=\frac{g}{m}\,(1-s)\tanh mh\ [1-\ s\tanh mh],$$

[ஈருறுப்புத் தேற்றத்தின்படி விரிவு செய்து, s^2......களைப் புறக்கணித்து]

$$= \frac{g}{m} \tanh mh \{-s(1+\tanh mh)\} \text{ [s}^2\text{-ஐப் புறக்கணித்து]} \quad (66)$$

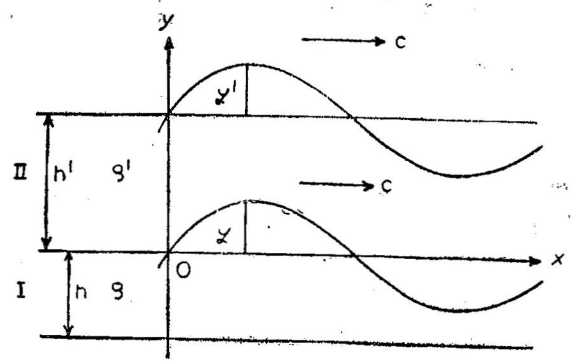
இவ்வாறு, காற்று மண்டலம் இருத்தலின் விளைவாக c-ன் மதிப்பு குறைகிறது.

(iv) c-ன் திசையுடன் V, V' களின் திசைகள் முறையே α, α' என்ற கோணங்களை உண்டாக்கினால்,

$$\rho\,(V\cos\alpha-c)^2+\rho'\,(V'\cos\alpha'-c)^2=\frac{g}{m}\,(\rho-\rho') \quad (67)$$

ஏனெனில், c-ன் திசைக்குச் செங்குத்துத் திசையில் உள்ள $V\sin\alpha$, $V'\sin\alpha'$, என்ற கூறுகளால் c-ன் மதிப்பில் மாற்ற விளைவு கிடையாது.

§ 6.19 *கட்டற்ற மேற்பரப்புடன், இரு திரவங்களின் பொதுப் பரப்பிலும் நிகழும் அலைகள் :* இங்கு h ஆழமுள்ள ρ அடர்த்தித் திரவத்தின் மீது h' ஆழமுள்ள ρ' அடர்த்தித் திரவம் உள்ளது. இங்கு அலையோட்டம் நீங்கலாக இருதிரவங்களும் ஓய்வு நிலையில் உள்ளன என்போம். பொதுப்பரப்பில் செலுத்தப்படும் அலையின் திசை வேகமும் கட்டற்ற மேற்பரப்பில் செலுத்தப்படும் அலையின் திசை வேகமும் c என்போம். இயக்கத்தைச் சீரியக்கமாக்க முழுப் பொருண்மையின் மீதும் திசைவேகம் $-c$-ஐ ஒருங்கிணைக்க வேண்டும்.



படம் 48

கீழேயுள்ள திரவம் I-க்குச் சிக்கல் பொடன்ஷியல் $w(z) = \phi+i\psi$ எனின், $y=-h$ பாய்வளிக்கோடு, ψ=மாறிலி என்பதனால்

$$\left.\begin{aligned}\phi&=cx+A\cosh m(y+h)\cos mx\\ \psi&=cy-A\sinh m(y+h)\sin mx\end{aligned}\right\} \quad (68)$$

மேலேயுள்ள திரவம் II-க்குச் சிக்கல் பொடன்ஷியல் $w'(z)=\phi'+i\psi'$ எனின்,

$$\left.\begin{aligned}\phi'&=cx+(B\cosh my+\zeta\sinh my)\cos mx\\ \psi'&=cy-(B\sinh my+\zeta\cosh my)\sin mx\end{aligned}\right\}\qquad(69)$$

பொதுப்பரப்பில் இடப்பெயர்ச்சி $\zeta=a\sin mx$ எனின் இது பாய்வளிக்கோடு $\psi=\psi'=0$ ஆகும்.

$y=a\sin mx$-ல் $\psi=0$ என்பதனுல்,

$$c\,a\sin mx-A\sinh m\,(a\sin mx+h)\sin mx=0$$

அதாவது, $(c\,a-A\sinh mh)\sin mx=0$, (சிறிய மதிப்புகளின் உயர்படிகளைப் புறக்கணித்து)

$$\therefore\quad c\,a-A\sinh mh=0\qquad(70)$$

$y=a\sin mx$-ல் $\psi'=0$ என்பதனுல்

$$c\,a\sin mx-(B\cosh ma\sin mx+\zeta\sinh ma\sin mx)\sin mx=0$$

அதாவது, $(c\,a-B)\sin mx=0$

[$\sinh(ma\sin mx)$-ஐப் புறக்கணித்து, $\cosh(ma\sin mx)=1$

$\because$ $ma\sin mx$ மிகச் சிறிது]

$$\therefore\quad c\,a-B=0\qquad(71)$$

இனி, கட்டற்ற மேற்பரப்பு $y=h'+b\sin mx$,

பாய்வளிக்கோடு $\psi'=$ மாறிலி என்பதனுல்

$$c\,b\sin mx-[B\cosh m\,(h'+b\sin mx)+\zeta\sinh m(h'+b\sin mx)]\sin mx=\text{மாறிலி}$$

அதாவது, $[c\,b-(B\cosh mh'+\zeta\sinh' mh')=0\qquad(72)$

கீழேயுள்ள திரவத்திற்குப் பெர்னேலியின் சமன்பாடு

$$\frac{p}{\rho}+gy+\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2\right.=\text{மாறிலி}$$

இதிலிருந்து, பொதுப்பரப்பு $y=a\sin mx$-ல் சிறிய மதிப்புகளின் உயர்படிகளைப் புறக்கணித்தால்

$$\frac{p}{\rho}+ga\sin mx+\frac{1}{2}\left[c^2-2\,\mathrm{A}\,mc\cosh mh\sin mx\right]$$
$$=\text{மாறிலி} \qquad (73)$$

மேலேயுள்ள திரவத்திற்குப் பெர்னேலியின் சமன்பாடு

$$\frac{p'}{\rho'}+gy+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\phi'}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi'}{\partial y}\right)^2\right]=\text{மாறிலி}$$

இதிலிருந்து, பொதுப்பரப்பு $y=a\sin mx$-ல், சிறிய மதிப்புகளின் உயர்படிகளைப் புறக்கணித்து,

$$\frac{p'}{\rho'}+ga\sin mx+\tfrac{1}{2}\left[c^2-2mc\,\zeta\sin mx\right]=\text{மாறிலி} \qquad (74)$$

பொதுப் பரப்பில், $p=p'$,

∴ சமன்பாடுகள் (72), (73)களிலிருந்து,

$$\rho ga\sin mx+\tfrac{1}{2}\rho c^2-\rho\mathrm{A}\,mc\cosh mh\sin mx$$
$$=\rho' ga\sin mx+\tfrac{1}{2}\rho' c^2-\rho' mc\,\zeta\sin mx$$

$\sin mx$-ன் கெழுக்களைச் சமன் செய்ய,

$$\rho ga-\rho\,\mathrm{A}\,mc\cosh mh=\rho' ga-\rho' ma\,\zeta$$

அதாவது,

$$ga(\rho-\rho')=mc\left[\mathrm{A}\,\rho\cosh mh-\rho'\zeta\right] \qquad (75)$$

சமன்பாடுகள் (71), (72)-களிலிருந்து

$$\zeta\sinh mh'=cb-ca\cosh mh'$$

$$\therefore\ \zeta=cb\,\mathrm{cosech}\,mh'-ca\coth mh') \qquad (76)$$

∴ (75) லிருந்து, (70), (76)களைப் பயன்படுத்தி,

$$ga(\rho-\rho')=mc^2\left[\rho a\coth mh-\rho'(b\,\mathrm{cosech}\,mh'-a\coth mh')\right]$$

$$\therefore\ g(\rho-\rho')=mc^2\left[\rho\coth mh+\rho'\coth mh'-\frac{b}{a}\right.$$
$$\left.\rho'\,\mathrm{cosech}\,mh'\right] \qquad (77)$$

கட்டற்ற மேற்பரப்பு $y=h'+b\sin mx$-ல், $p'=$மாறிலி. பெர்னேலியின் சமன்பாட்டிலிருந்து, கட்டற்ற மேற்பரப்பில் a^2, b^2 களைப் புறக்கணித்து,

$$\frac{p'}{\rho'}+g(h'+b\sin mx)-mc(B\sinh mh'+\zeta\cosh mh')\sin mx = \text{மாறிலி}$$

p' ஒரு மாறிலி என்பதனுல்

$$gb-mc[B\sinh mh'+\zeta\cosh mh']=0 \tag{78}$$

$$\therefore\ gb=mc^2[a\sinh mh'+b\coth mh'-a\coth mh'\cosh mh']$$

[(71), (76), (78) களிலிருந்து]

$$=mc^2[b\coth mh'-a\,\text{cosech}\ mh']$$

$$\therefore\ g=mc^2\left[\coth mh'-\frac{a}{b}\,\text{cosech}\ mh'\right]$$

$$\therefore\ \frac{b}{a}=\frac{mc^2}{mc^2\cosh mh'-g\sinh mh'} \tag{79}$$

இச் சமன்பாடு இரு அலைகளின் வீச்சுக்களின் வீதத்தைக் கொடுக்கிறது.

சமன்பாடு (76)-ல் b/a-ன் மதிப்பைப் பிரதியீடு செய்ய

$$c^4m^2(\rho\coth mh\coth mh'+\rho')-$$
$$c^2mg\rho(\coth mh+\coth mh')+g^2(\rho-\rho')=0 \tag{80}$$

இச் சமன்பாடு c-ன் மதிப்பைக் கொடுக்கிறது. $\rho>\rho'$ என்ருல் கொடுக்கப் பட்டுள்ள அலை நீளத்திற்கு இரு செலுத்து கைத் திசை வேகங்களைச் சமன்பாடு (79)-லிருந்து அறியலாம்.

சிறப்பு வகை : கீழேயுள்ள திரவம் மிக ஆழமானது எனின், $\coth mh=1$, $\therefore$ சமன்பாடு (79) லிருந்து,

$$c^4m^2(\rho\coth mh'+\rho')-c^2mg\rho(1+\coth mh')+g^2(\rho-\rho')=0.$$

அல்லது,

$$(mc^2-g)[mc^2(\rho\coth mh'+\rho')-g(\rho-\rho')]=0$$

$$\therefore\ c^2=\frac{g}{m}\ \text{மற்றும்}\ c^2=\frac{g}{m}\,\frac{\rho-\rho'}{\rho\coth mh'+\rho'} \tag{81}$$

மேலேயுள்ள அலை மற்றும் கீழேயுள்ள அலைகளின் வீச்சுக்களின் வீதம் இவ்விரு வகைகளிலும் முறையே,

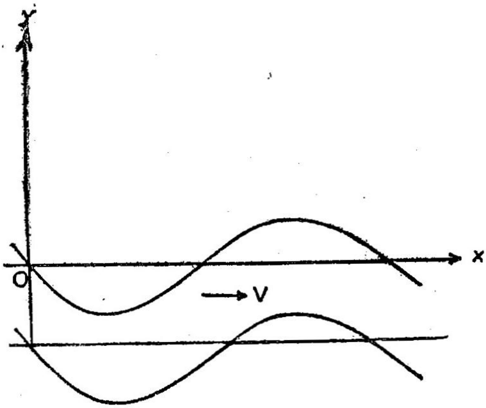
$$e^{mh'}, -\left(\frac{\rho}{\rho'}-1\right) e^{-mh'}$$ ஆகும்.

§ 6.20 ஓடும் நீரில் நிற்கும் அலைகள் [Stationary Waves in Running Water]: நீளப்பாங்கு குறுக்குவெட்டு சைன் (Sine) வளைவரையுள்ள அடிப்படுகையின் மேல், நீர் சீரான திசை வேகத்துடன் செல்லுகிறது. ஆய அச்சுக்களை வழக்கம்போல் கொண்டு அடிப்படுகையின் சமன்பாடு,

$$y=-h+k \sin m x.$$ என்போம்.

சராசரி திசைவேகம் V என்க. இங்கு

$$\left.\begin{aligned} \phi &= -V x+(A \cosh m y+B \sinh m y) \cos m x \\ \psi &= -V y-(A \sinh m y+B \cosh m y) \sin m x \end{aligned}\right\} \quad (82)$$



படம் 49

அடிப்படுகை $y=-h+k \sin m x$ ஒரு பாய்வளிக்கோடு

$\psi =$ மாறிலி.

$$\therefore \quad -V(-h+k \sin m x)-[A \sinh mh+B \cosh mh] \sin m x = \text{மாறிலி}$$

$$\therefore \quad V k=A \sinh mh-B \cosh mh \quad (83)$$

நீரின் இடப்பெயர்ச்சி $\zeta=a \sin m x$ எனின், கட்டற்ற மேற் பரப்பு $y=a \sin m x$ ஒரு பாய்வளிக் கோடு $\psi=0$ ஆகும்.

$$\therefore \quad -\mathrm{V}\,a-\mathrm{B}=0 \qquad (84)$$

சீரியக்கத்திற்குப் பெர்னேலியின் அழுத்தச் சமன்பாடு

$$\frac{p}{\rho}+gy+\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2\right\}=\text{மாறிலி} \qquad (85)$$

கட்டற்ற மேற்பரப்பு $y=a\sin mx$ ல்

$$\frac{p}{\rho}+g\,a\sin m\,x+\mathrm{V}\,\mathrm{A}\,m\sin m\,x=\text{மாறிலி},$$

[சிறிய மதிப்புகளின் உயர்படிகளைப் புறக்கணித்து].

ஆனல் கட்டற்ற மேற்பரப்பில் $p=$ மாறிலி.

$$\therefore \quad g\,a+\mathrm{V}\,\mathrm{A}\,m=0. \qquad (86)$$

சமன்பாடுகள் (82), (83), (84) களிலிருந்து, A, B, a களின் மதிப்புகளைக் கண்டு

$$\zeta=\frac{k}{\cosh\,mh-\frac{g}{m\,\mathrm{V}^2}\sinh\,m\,h}\sin m\,x \qquad (87)$$

இது கட்டற்ற மேற்பரப்பைக் கொடுக்கிறது. k கூட்டுக் குறி (Positive Sign) யுடையது என்று கொண்டால் சமன்பாடு (87)-ல் $\sin m\,x$-ன் கெழு, கூட்டு அல்லது கழிவுக் குறியுடையது என்பது முறையே V^2ன் மதிப்பு $g/m\tanh mh$-ஐ விடக் கூடுதல் அல்லது குறைவு என்பதைப் பொருத்ததாகும்; அதாவது, V-ன் மதிப்பு, h ஆழமுள்ள சலனமற்ற நீரில் அடிப்படுகை நெளிவின் நீளம் $2\pi/m$ போன்ற நீளமுடைய அலையின் திசைவேகத்தை விட கூடுதல் அல்லது குறைவு போன்றதாகும். முதல் வகையில் கட்டற்ற மேற்பரப்பின் கூர் வரைகள் (Ridges) மற்றும் குழிவுகள் (Hollows) முறையே, அடிப்படுகை நெளிவின் கூர்வரைகள் மற்றும் குழிவுகளுக்கு நிலைக்குத்தாக இருக்கும். இரண்டாவது வகையில், கட்டற்ற மேற்பரப்பின் கூர்வரைகள் அடிப்படுகை நெளிவின் குழிவுகளுக்கு மேலே அமையும்.

$\mathrm{V}^2=g/m\tanh m\,h$, என்ருல் a-ன் மதிப்பு சிறியதாக இருக்க வியலாது. ஆகவே சமன்பாடு (87) இங்கு உண்மையில்லை.

§ 6.21 **தந்துகி அலைகள் ;** சீரியக்கத்திற்கு மாற்றியமைத்து தந்துகி அலைகளின் திசைவேகம் c ஐக் காண்போம். முழுப் பொருண்மை மீது $-c$ திசைவேகத்தை ஒருங்கிணைக்க, இயக்கம் சீரியக்கமாகிறது.

$$\text{இங்கு, } \phi = cy - A \sinh m(y+h) \sin mx \qquad (88)$$

கட்டற்ற மேற்பரப்பு $\zeta = a \sin mx$ என்றால், இது பாய்வளிக் கோடாகும். $\therefore ca = A \sinh mh$ (89)

[§ 6.15-ல் போன்று]

பெர்னோலியின் சமன்பாட்டிலிருந்து கட்டற்ற மேற்பரப்பில் § 6.16-ல் போன்று

$$\frac{p}{\rho} + ga \sin mx + \tfrac{1}{2} c^2 (1 - 2 ma \coth mh \sin mx) = \text{மாறிலி} \qquad (90)$$

புறப்பரப்பின் இழுவிசையினால் இங்கு p ஒரு மாறிலியில்லை;

ஆனால், $p = p_0 - T \dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}$, p_0 ஒரு மாறிலி. இம்மதிப்பை (89)-ல் இட்டு $\sin mx$-ன் கெழுவை பூஜ்ஜியத்திற்குச் சமப் படுத்த

$$c^2 = \left[\frac{g}{m} + \frac{Tm}{\rho} \right] \tanh mh \qquad (91)$$

அலை நீளத்தைப் பொருத்து h மிக அதிகமெனின் $\tanh mh = 1$,

$$\therefore c^2 = \left[\frac{g}{\mathrm{m}} + \frac{T\mathrm{m}}{\rho} \right] \qquad (92)$$

§ 6.22 **இரு திரவங்களின் பொதுப் பரப்பில் தந்துகி அலைகள் :** இங்கு, பொதுப் பரப்பின் இருபுறமும் அழுத்தத்தைக் கண்டுபிடிப்பது வரையுள்ள விவாதம், பிரிவுக் கூறு § 6 18 போன்றதேயாகும்.

$$\frac{p}{\rho} + ga \sin mx + \tfrac{1}{2} (v-c)^2 \left\{ 1 - 2\, a\, m \coth mh \sin mx \right\}$$

$$= \text{மாறிலி.} \qquad (61)$$

$$\frac{p'}{\rho'} + ga \sin mx + \tfrac{1}{2} (v' - c)^2 \left\{ 1-2\, am \coth mh' \sin mx \right\}$$

$$= \text{மாறிலி} \qquad (62)$$

இங்கு $p-p' = -T \dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}$; $\zeta = a \sin mx$, இதிலிருந்து

$$Tm + \frac{g}{m} (\rho-\rho') = (v-c)^2 \rho \coth mh + (v'-c)^2 \rho' \coth mh' \qquad (93)$$

சிறப்பு வகை (i):—அலை நீளத்தைப் பொருத்து திரவங்களின் ஆழங்கள் மிக அதிகமெனின் $\coth mh' = \coth mh' = 1$ எனலாம். மேலும் அலையோட்டத்தைத் தவிர திரவங்கள் ஓய்வு நிலையில் இருப்பின் $V = V' = 0$. இங்கு அலையோட்டத் திசை வேகம் c_0 எனின்

$$c_0^2 = \frac{g}{m} \frac{\rho-\rho'}{\rho+\rho'} + \frac{Tm}{\rho+\rho'} \qquad (94)$$

சிறப்பு வகை (ii):—ஆழமான நீரில் காற்றின் விளைவைக் காண (93)-ல் $V=0$, $\coth mh = \coth mh' = 1$ என பிரதியிட

$$Tm + \frac{g}{m} (\rho-\rho') = c^2 \rho + (V'-c)^2 \rho'$$

அதாவது, $c^2 (\rho+\rho') - 2 \rho' V' c' + \rho' V'^2 -$

$$\left[Tm + \frac{g}{m} (\rho-\rho') \right] = 0$$

$$\therefore\ c^2 - \frac{2\rho'}{\rho+\rho'} V'C + \frac{\rho'}{\rho+\rho'} V'^2 -$$

$$\left[\frac{Tm}{\rho+\rho'} + g/m \frac{\rho-\rho'}{\rho+\rho'} \right] = 0$$

அதாவது, $c^2 - \dfrac{2\rho' V' C'}{\rho+\rho'} + \dfrac{\rho' V'^2}{\rho+\rho'} c_0^2 = 0 \qquad (95)$

[(94)-லிருந்து]

காற்று இல்லாதபொழுது உள்ள அலையின் திசைவேகத்தை c_0 கொடுக்கிறது.

இதிலிருந்து $c = \frac{\rho' V'}{\rho+\rho_{\prime}} \pm \left[c_0^2 - \frac{\rho \rho' V'^2}{(\rho+\rho')^2} \right]^{\frac{1}{2}}$

கொடுக்கப்பட்ட அலை நீளம் $2\pi/m$ உள்ள அலையின் திசை வேகம் C-ன் மீப் பெருமதிப்பு காற்றின் திசைவேகம் $V' = c_0 \left(1 + \frac{\rho'}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}$ என்ற பொழுதிலாகும்; இங்கு c-ன் மீப்பெரு மதிப்பு V' ஆகும். இதிலிருந்து, காற்றின் வேகம் அலையின் திசை வேகத்தின் மதிப்பைத் தவிர வேறு எதுவாக இருப்பினும் அலை வேகம் குறையும்.

எடுத்துக்காட்டுகள்

(1) ஆழமான நீரில் ஒரு நிலையான மிதவை (Buoy) ஒரு நிமிடத்தில் இருபது தடவைகள் மேலும் கீழுமாக ஏறி இறங்குவதாகக் கணக்கிடப்பட்டது. அலையின் திசைவேகம் மணிக்கு 10.5 மைல்கள் எனக்காட்டுக.

அலையின் திசைவேகம் c என்க.

$$\therefore \; c^2 = \frac{g\lambda}{2\pi} \qquad (1)$$

நிகழ்வெண் n ஒரு நிமிடத்திற்கு 20 அல்லது ஒரு விஞடிக்கு $\frac{1}{3}$ ஆகும்.

$$c = n\lambda = \tfrac{1}{3}\lambda \qquad (2)$$

$$\therefore \; c^2 = \frac{g}{2\pi} \; 3c$$

அல்லது, $c^2 = \frac{3g}{2\pi} = \frac{168}{11}$ அடி/விஞடி

$= 10.5$ மைல்/மணி

(2) ஆழமான நீரின் மேற்பரப்பில் λ நீளமுள்ள எளிய இசையலைகள் செலுத்தப்படுகின்றன. மேற்பரப்பின் கீழே h ஆழத்திலுள்ள ஒரு புள்ளி, நீர் கிளர்ச்சியற்றபொழுது $h+\zeta$ ஆழத்திலிருக்கும்பொழுதுள்ள அழுத்தத்திற்கும், நீர் கிளர்ச்சியற்றபோது அப்புள்ளியிலுள்ள அழுத்தத்திற்கும் உள்ள விகிதம்

$$1+\frac{\zeta}{h}\;e^{\frac{-2\pi h/\lambda}{\lambda}}\;:1$$ எனக் காட்டுக.

இங்கு வளிமண்டல அழுத்தமும், புறப்பரப்பு இழுவிசையும் புறக்கணிக்கப்பட்டுள்ளன.

இங்கு $\phi=a\,c\,e^{my}\cos m\,(x-ct)$ என எளிதில் அறியலாம்.

$$\therefore\ \dot{\phi}=a\,c^2\,m\,e^{my}\sin m\,(x-ct)$$

$$=a\,g\,e^{my}\sin m\,(x-ct),\quad [\because\ c^2=g/m],$$

$$=g\,\zeta\,e^{my}\qquad [\because\ \zeta=a\sin m\,(x-ct)] \tag{1}$$

பெர்னேலியின் அழுத்தச்சமன்பாடு,

$$\frac{p}{\rho}+gy-\frac{\partial\phi}{\partial t}=\frac{p_0}{\rho},$$ [இங்கு $\frac{1}{2}\vec{U}^2$ உறுப்பு புறக்கணிக்கப்பட்டுள்ளது]

$=0,$ [$\because$ வளிமண்டல அழுத்தம் $p_0=0$]

$$\therefore\ \frac{p}{\rho}=-gy+g\,\zeta\,e^{my},$$ [(1)-லிருந்து]

h ஆழத்திலுள்ள புள்ளியில் $y=-h$

$\therefore\ y=-h$-ல்

$$\frac{p}{\rho}=gh+g\zeta\,e^{-my} \tag{2}$$

கிளர்ச்சியில்லாத நிலையில் $\zeta=0$, $\therefore$ அப்பொழுது $y=-h$-ல்

$$\frac{p'}{\rho}=gh \tag{3}$$

$$\therefore\ \frac{p}{p'}=1.\ \frac{\zeta}{h}\,e^{-my}$$

$$=1+\frac{\zeta}{h}\,e^{-2\pi h/\lambda}\quad\left[\because\ m=\frac{2\pi}{\lambda}\right]$$

ஆகவே அழுத்தங்கள் $1+\frac{\zeta}{h}\ e^{-2\pi h/\lambda}$: 1 என்ற விகிதத்தில் அமையும்.

(3) கந்தழி ஆழமுள்ள இருதிரவங்களின் அடர்த்திகள் ρ_1, ρ_2. சிறிய வீச்சையுடைய அலைகள் இத்திரவங்களின் பொதுப்பரப்பில் செலுத்தப்படுகின்றன. இரு திரவங்களின் துகள்களின் பாதைகள் தமது இடைநிலையைப் பொருத்த வட்டங்களாகும் என்றும், ζ எழுச்சியுள்ள பிரிக்கும் பரப்பின் (Surface of Separation) எந்தப் புள்ளியின் இருபுறமுள்ள துகள்களின் சார்வேகம் (Relative Velocity) $4\pi c\zeta/\lambda$ என்றும் நிறுவுக.

பொதுப் பரப்பில் செலுத்தப்படும் அலை,

$\zeta = a \sin m\,(x-ct)$ என்க,

கீழ் உள்ள திரவத்திற்கு,

$$\phi = A\, e^{my} \cos m\,(x-ct)$$

மேலேயுள்ள திரவற்திற்கு,

$$\phi' = A'\, e^{-my} \cos m\,(x-ct)$$

ϕ-உம், ϕ'-உம் லெப்லாஸின் சமன்பாட்டைத் திருப்தி செய்கின்றன.

மற்றும் $y \to -\infty$ என்றால் $\frac{\partial\phi}{\partial y} \to 0$:

$y \to +\infty$ என்றால் $\frac{\partial\phi'}{\partial y} \to 0$ என்ற கட்டுப்பாடுகளையும் இவைகள் திருப்தி செய்கின்றன.

இனி பொதுப்பரப்பில்.

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = \left(-\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_{y=0} = \left(\frac{\partial\phi'}{\partial y}\right)_{y=0}.$$

அதாவது,

$$-amc\cos m(x-ct) = -\mathrm{A}\,m\cos m(x-ct)$$

$$= \mathrm{A}'\,m\cos m(x-ct)$$

$$\therefore\ \mathrm{A}=ac,\quad \mathrm{A}'=-ac$$

$$\therefore\ \phi=ac\,e^{my}\cos m(x-ct)$$

$$\phi' = -ac\,e^{-my}\cos m(x-ct)$$

(X, Y) என்பன, (x, y)-ல் இடைநிலையைக் கொண்ட துகளின் இடப்பெயர்ச்சிகள் என்போம்.

$$\therefore\ \dot{X} = -\frac{\partial\phi}{\partial x} = -acm\,e^{my}\sin m(x-ct)$$

$$\dot{Y}=\frac{\partial\phi}{\partial y}=-acm\,e^{my}\cos m(x-ct)$$

இங்கு சிறிய மதிப்புகளின் இரண்டு மற்றும் உயர்படிகள் புறக்கணிக்கப்பட்டுள்ளன.

தொகை காண, (X, Y) முதலில் பூஜ்ஜியங்களாக இருந்தன என்ற கட்டுப்பாட்டால்,

$$X=-a\,e^{my}\cos m(x-ct)$$

$$Y=a\,e^{my}\sin m(x-ct)$$

$\therefore\ X^2+Y^2=a^2e^{2my}$, இது (x, y)-ஐ மையமாக உடைய வட்டமாகும்.

இதே போன்று, மேலேயுள்ள திரவத்திலும் ஒவ்வொரு துகளின் பாதையும் அதன் இடைநிலையை மையமாக உடைய

வட்டம் என நிறுவலாம். பொதுப்பரப்பின் ஒரு புள்ளியின் இரு புறமும் உள்ள துகள்களின் சார்வேகம் x திசையில்

$$=\left[\left(-\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\phi'}{\partial x}\right)\right]_{y=0}$$

$$=\left[a\,c\,m\,e^{my}\sin m\,(x-ct)+a\,c\,m\,e^{-my}\sin m\,(x-ct)\right]_{y=0}$$

$$=2\,c\,m\,\zeta,\quad [\because \zeta=a\sin m(x-ct)]$$

$$=\frac{4\pi c\zeta}{\lambda},\left[\because m=\frac{2\pi}{\lambda}\right]$$

பொதுப் பரப்பின் ஒரு புள்ளியின் இருபுறமும் உள்ள துகள் களின் சார்வேகம் y-திசையில் $=\left[\left(-\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)-\left(-\frac{\partial\phi'}{\partial y}\right)\right]_{y=0}$

$$=0$$

ஆகவே பொதுப்பரப்பில் சார்வேகம் $=\frac{4\pi c\zeta}{\lambda}$

(4) λ நீளமுள்ள அலையை காற்றுக்கு எதிராகச் செலுத்த முடியாத அளவு காற்றின் திசைவேகம் சரியாக அதிகமுள்ளது (Just greater than) எனின் காற்றுடன் செலுத்தப்படும் அலையின் திசைவேகம் $2c\left[\frac{\sigma}{1+\sigma}\right]^{\frac{1}{2}}$ என நிறுவுக. இங்கு σ, காற்றின் ஒப்பு அடர்த்தி ; c காற்று இல்லாதபொழுது அலையின் திசை வேகம்.

அலையின் திசைவேகம் U என்க.

∴ சமன்பாடு (10)லிருந்து (c-க்கு பதிலாக U என எழுத)

$$\rho\,(V-U)^2\coth mh+\rho'\,(V'-U)^2\coth mh'=g/m\,(\rho-\rho')$$

இங்கு $h=h' \to \infty$, மற்றும் $\frac{\rho'}{\rho} = \sigma$, மேலும் நீர் ஓய்வு நிலையில் உள்ளது. $\therefore V=0$

$$\therefore \quad U^2+\sigma\,(V'-U)^2=\frac{g}{m}(1-\sigma) \qquad (1)$$

காற்று இல்லாத பொழுது, அதாவது $V'=0$ எனின் $U=c$

$$\therefore \quad c^2\,(1+\sigma)=\frac{g}{m}(1-\sigma)$$

$$\text{அல்லது } c^2=\frac{g}{m}\,\frac{1-\sigma}{1+\sigma} \qquad (2)$$

அலைகள் செலுத்தப் படுவதைத் தடுக்கும் காற்றின் திசை வேகம் V'

$g\,(1-\sigma) = m\,V'^2\sigma$ [(1)ல் $U=0$ என இடக் கிடைக்கிறது)] (3)

என்ற சமன் பாட்டினுல் கிடைக்கிறது.

காற்றின் இத் திசை வேகத்துடன் அலையின் திசை வேகம் U (1)லிருந்து கிடைக்கிறது.

$$U^2+\sigma\,V'^2-2\sigma\,V'\,U+\sigma\,U^2=\frac{g}{m}(1-\sigma)$$

$$=V'^2\sigma \text{ (3)லிருந்து}$$

$$\therefore \quad U^2+U^2\sigma-2\,\sigma V'\,U=0$$

$$\therefore \quad U=0 \text{ அல்லது } U=\frac{2\,V'\,\sigma}{1+\sigma}$$

$U=0$ என்பது சாரமற்ற வகை (Trivial Case)

$$\therefore \quad U=\frac{2\,\sigma}{1+\sigma}\,V'$$

$$=\frac{2\,\sigma}{1+\sigma}\sqrt{\frac{g}{m}\,\frac{1-\sigma}{\sigma}} \qquad \text{(3) லிருந்து}$$

$$= \frac{2\sigma}{1+\sigma}\sqrt{c^2\frac{1+\sigma}{\sigma}} \qquad \text{(2) லிருந்து,}$$

$$= 2c\sqrt{\frac{\sigma}{1+\sigma}}$$

5. இரு கிடைத்தளங்களுக்கிடைப் பட்ட h, h' ஆழமுள்ள ρ, ρ' $(\rho > \rho')$ அடர்த்திகள் கொண்ட இரு திரவங்களின் பொதுப் பரப்பில் $\frac{2\pi}{m}$ நீளமுள்ள அலைகள் செலுத்தப் படுகின்றன. சம நிலையில் (Equilibrium) நிலையாற்றலைப் பூஜ்ஜியம் எனக் கொண்டால், கீழ்த் திரவத்தின் முழு ஆற்றல் : மேல் திரவத்தின் முழு ஆற்றல்

$$= \rho\,\{(2\rho - \rho')\coth mh' + \rho\coth mh'\} :$$

$$\rho'\,\{(\rho - 2\rho')\coth mh' - \rho\coth mh\} \text{ என நிறுவுக.}$$

இங்கு,

$$\phi = \frac{ga}{mc}\,\frac{\cosh m(z+h)}{\cosh mh}\cos m(x-ct),$$

$$\phi' = \frac{ga}{mc}\,\frac{\cosh m(z-h')}{\cosh mh'}\cos m(x-ct),$$

$$\zeta = a\sin mx,$$

மற்றும் $g(\rho - \rho') = c^2 m\,[\rho\coth mh + \rho'\coth mh']$

கீழ்த்திரவத்தில் ஒரு அலை நீளத்தில் இயக்க ஆற்றல்

$$T = \tfrac{1}{2}\rho\int \phi\,\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\,ds$$

$$= \tfrac{1}{2}\rho\int_0^\lambda \left(\phi\,\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_{z=0} dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\rho\, m a^2 c^2 \coth mh \int_0^\lambda \cos^2 m(x-ct)\,dx$$

$$\left[\because \; c^2 = \frac{g}{m} \tanh mh\right]$$

$$= \tfrac{1}{4}\lambda \rho a^2 c^2 m \coth mh \qquad \text{(i)}$$

கீழ்த் திரவத்தில் ஒரு அலை நீளத்தில் நிலையாற்றல்

$$V = \tfrac{1}{2} g \rho \int \zeta^2 \, dx$$

$$= \tfrac{1}{2} g \rho a^2 \int_0^{\lambda} \sin^2 m(x-ct)\, dx$$

$$= \tfrac{1}{4} g \rho a^2 \lambda \qquad \text{(ii)}$$

∴ கீழ்த் திரவத்தில் ஒரு அலை நீளத்தில் முழு ஆற்றல்

$$E = T + V$$

$$= \tfrac{1}{4} g \rho a^2 \lambda \left[1 + \frac{(\rho - \rho') \coth mh}{\rho \coth mh + \rho' \coth mh'}\right]$$

$$= \tfrac{1}{4} g a^2 \lambda \rho \frac{[(2\rho - \rho') \coth mh + \rho' \coth mh']}{\rho \coth mh + \rho' \coth mh'} \qquad \text{(iii)}$$

இதே போன்று மேல் திரவத்தில் ஒரு அலை நீளத்தில் இயக்க ஆற்றல் $T = \frac{1}{4} \lambda \rho' a^2 c^2 m \coth mh'$

(iv) மேல் திரவத்தில் ஒரு அலை நீளத்தில் நிலையாற்றல்

$$V = -\tfrac{1}{4} g \rho' a^2 \lambda \qquad \text{(v)}$$

∴ மேல் திரவத்தில் ஒரு அலை நீளத்தில் முழு ஆற்றல்

$$= \tfrac{1}{4} g a^2 \lambda \rho' \left[\frac{(\rho - \rho') \coth mh'}{\rho \coth mh + \rho' \coth mh'} - 1\right]$$

$$= \tfrac{1}{4} g a^2 \lambda \frac{\rho' [(\rho - 2\rho') \coth mh' - \rho \coth mh]}{\rho \coth mh + \rho' \coth mh'}$$

∴ கீழ் திரவத்தின் முழு ஆற்றல் : மேல் திரவத்தின் ஆற்றல் $= \rho\, [(2\rho - \rho') \coth mh + \rho' \coth mh]$

$: \rho' \, [(\rho - 2\rho') \coth mh' - \rho \coth mh]$

(6) § 6.2-ல் அலையோட்டத்தைத் தவிர திரவங்கள் ஓய்வு நிலையிலிருந்து (அதாவது, $V = V' = O$), $2\pi/m$-ஐப் பொருத்து, h, h' மிகச் சிறியது எனின்

$$c^2 = \frac{h h' \, [(\rho - \rho') g + Tm^2]}{p' h' + \rho' h}$$ என நிறுவுக.

இங்கு,

$$mc^2 \, [\rho \coth mh + \rho' \coth mh'] = g \, (\rho - \rho'] + Tm^2 \qquad \text{(i)}$$

ஆனால், h மற்றும் h' $2\pi/m$-ஐப் பொருத்துச் சிறியனவாதலால்

$$\tanh mh = mh$$

$$\tanh mh' = mh'$$

∴ (i)-லிருந்து,

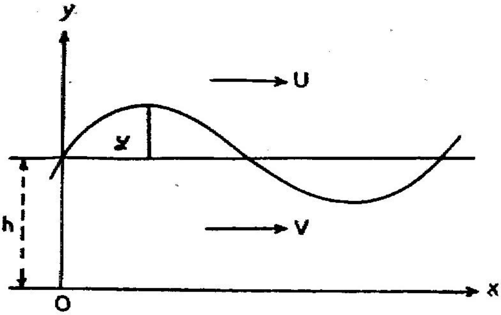
$$c^2 \left[\frac{\rho}{h} + \frac{\rho'}{h'} \right] = g \, [\rho - \rho'] + Tm^2$$

அல்லது, $c^2 = hh' \dfrac{[(\rho - \rho') g + Tm^2]}{\rho h' + \rho' h}$

(7) h ஆழமுள்ள நீரின் திசை வேகம் அடிப்படுகையிலிருந்துள்ள தொலைவின் விகிதசமத்தில் உள்ளது; ஆற்றின் மேற்பரப்பில் திசைவேகம் V ஆகும். நீரின் போக்கில் செலுத்தப்படும் அலையின் திசைவேகம் U எனின்

$$(U - V)^2 + V \, (U - V) \frac{W^2}{gh} - W^2 = 0$$ என நிறுவுக.

[W = சலனமற்ற நீரில் அலையின் திசைவேகம்]



படம் 50

ஆய அச்சுக்களைப் படத்தில் உள்ளவாறு எடுத்துக் கொள்வோம். அடிப்படுகையிலிருந்து y உயரத்தில் திரவத்தின் திசைவேகம் $u=ky$

ஆனால் $y=h$-ல் $u=V$

$$\therefore k=\frac{V}{h}$$

$$\therefore\ y \text{ உயரத்தில் திசைவேகம்} =\frac{V}{h}\,y$$

$$u=-\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y}.$$

முழுப் பொருண்மை மீது திசைவேகம் $-U$-வை இணைக்க இயக்கம் சீரியக்கமாகிறது. இங்கு பாய்வளிச் சார்பு

$$\psi=\frac{Vy^2}{2h}-Uy+(A\cosh my+B\sinh my)\sin mx \qquad \text{(i)}$$

(i) அடிப்படுகை $y=0$ ஒரு பாய்வளிக் கோடு $\psi=0$

$$\therefore A=0 \qquad \text{(ii)}$$

(ii) கட்டற்ற மேற்பரப்பு $y=h+a\sin mx$ ஒரு பாய்வளிக் கோடு $\psi=$ மாறிலி.

$$\therefore \frac{V}{2h}(h+a\sin mx)^2-U(h+a\sin mx)+B\sinh mh\sin mx = \text{மாறிலி.}$$

(சிறிய மதிப்புகளின் உயர்படிகளைப் புறக்கணித்து)

அதாவது, $Va-Ua+B\sinh mh=0$

$$\therefore\quad B=\frac{(U-V)a}{\sinh mh} \tag{iii}$$

$$\therefore\ \phi=\frac{Vy^2}{2h}-Uy+\frac{(U-V)}{\sinh mh}\,a\sin h\,my\sin mx \tag{iv}$$

அடுத்ததாக, பெர்னோலியின் சமன்பாடு :

$$\frac{p}{\rho}+gy+\tfrac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2\right\}=\text{மாறிலி}$$

அதாவது,

$$\frac{p}{\rho}+gy+\tfrac{1}{2}\left\{\left(\frac{Vy}{h}-U+\frac{(U-V)}{\sinh mh}\,a\,m\cos h\,my\sin mx\right)^2\right\}$$

$=$ மாறிலி ; (a^2-ஐப் புறக்கணித்து).

$\therefore$ கட்டற்ற மேற்பரப்பு $y=h+a\sin mx$-ல்

$$\frac{p}{\rho}+g\,(h+a\sin mx)$$

$$+\tfrac{1}{2}\left[(V-U)+\frac{V}{h}\,a\sin mx+(U-V)\coth mh\sin mx\right]^2$$

$=$மாறிலி.

அதாவது,

$$\frac{p}{\rho}+g\,(h+a\sin mx)-(U-V)^2\,am\coth mh\sin mx$$

$$+\frac{V(V-U)}{h}\,a\sin mx=\text{மாறிலி} ;\ (a^2\text{–ஐப் புறக்கணித்து}) \tag{v}$$

கட்டற்ற மேற்பரப்பில் $p=$ மாறிலி ; ஆகவே (v)–ல் $\sin mx$-ன் கெழுவைப் பூஜ்ஜியத்திற்குச் சமப்படுத்த,

$$(U-V)^2 m \coth mh + \frac{V(U-V)}{h} - g = 0$$

ஆனல் $W = \frac{g}{m} \tan h\, mh.$

$$\therefore\ (U-V)^2 \frac{g}{W^2} + \frac{V(U-V)}{h} - g = 0$$

அல்லது, $(U-V)^2 + \frac{V(U-V)}{gh} W^2 - W^2 = 0.$

பயிற்சி VII

1. கந்தழி ஆழமுள்ள செவ்வக வாய்க்காலில் மேற்பரப்பு அலைகளின் திசைவேகம் $\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$ என நிறுவுக.

2. கந்தழி ஆழமுள்ள a ஆர வட்டக்குளத்தில் நிகழும் மேற்பரப்பு அலைகளுக்கு நீர்த்துகள்களின் பாதையைக் காண்க.

[விடை : $X:Y:Z = nr\,J'_m(nr) : -m\,J_m(nr) \tan m\theta : nr\,J_m(nr)$]

3. a, b பக்கங்களையுடைய செவ்வகக் குளத்தில் நிகழும் மேற்பரப்பு அலைகளுக்கு நீர்த்துகள்களின் பாதையைக் காண்க.

$$\left[\text{விடை : } \frac{a}{p\pi} \cot \frac{p\pi x}{a} X = \frac{b}{q\pi} \cot \frac{q\pi y}{b} Y = \frac{1}{r} \coth r(z+h)\, Z\right]$$

4. h ஆழமுள்ள ஒரு தொட்டி, 72° கோணத்தைத் தாங்கும் a ஆரமுள்ள ஒரு வட்டக்கோணப் பகுதியாக (Sector of a Circle) அமைந்துள்ளது ; நிகழும் மேற்பரப்பு அலைகளின் இயல்நிலை வகைகளைக் காண்க.

$$\left[\text{விடை : } \zeta = \frac{2\pi Df}{g} J_m(nr) \cos m\theta \cosh nh \cos 2\pi ft,\right.$$

$$\left. 4\pi^2 f^2 = gn \tanh nh,\ m = \frac{5k}{2},\ k = 0, 1, 2\ldots\ldots\right]$$

5. h ஆழமும், a ஆரமும் உள்ள வட்டக்குளத்தில் நிகழும் மேற்பரப்பு அலைகளின் இயல்நிலை வகைகளின் நிலை, மற்றும் இயக்க ஆற்றல்கள் :

$$V = \frac{2\pi^3 D^2 f^2 \rho}{g} \cosh^2 nh \cos^2 2\pi ft \int_0^a J^2_m (nr)\, rdr,$$

$$T = \frac{1}{2} n\pi \rho D^2 \sin^2 2\pi ft \cosh nh \sinh nh \int_0^a J^2_m (nr)\, r\, dr$$ என

நிறுவுக.

இம் முடிவுகளிலிருந்தும், முழு ஆற்றல், நேரத்தைச் சார்ந்ததில்லை என்ற உண்மையிலிருந்தும், காலக் கூறுச் சமன்பாடு

$$4\pi^2 f^2 = gn \tanh n h$$ என உய்த்தறிக.

6. தந்துகி அலைகளுக்கு, உருளை-போலார் ஆயக்கூறுகளில், கட்டற்ற மேற்பரப்பில் அழுத்தக் கட்டுப்பாடு (Pressure Condition)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - g\zeta + \frac{T}{\rho}\left[\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \zeta}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \theta^2}\right] = 0$$ என நிறுவுக.

இக் கட்டுப்பாட்டைப் பயன்படுத்தி, கந்தழி ஆழமுள்ள வட்டக் குளத்தில், தந்துகி அலைகளுக்கு

$$\varphi = \zeta J_m (nr) \cos m\theta\, e^{nz} \cos 2\pi ft,$$

$$\zeta = -\frac{n\zeta}{2\pi f} J_m (nr) \cos m\theta \sin 2\pi ft,$$

$$J'_m (na) = 0,\ 4\pi^2 f^2 = gn + \frac{Tn^3}{\rho}$$ என நிறுவுக.

7. a, b பக்கங்களையுடைய h ஆழமுள்ள செவ்வகக் குளத்தில் நிகழும் தந்துகி அலைகளுக்கு

$$\varphi = A\frac{\cosh r(z+h)}{\sinh rh}\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\cos 2\pi ft,$$

$$\zeta = -\frac{r\,A}{2\pi f}\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\sin 2\pi\, ft,$$

இங்கு $m=0, 1, 2\ldots\ldots;\quad n=0, 1, 2,\ldots\ldots;$

$r^2=\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)$; காலக்கூறுச் சமன்பாடு,

$4\pi^2 f^2=\left(gr+\frac{Tr^3}{\rho}\right)\tanh rh.$ என நிறுவுக.

மேலும், $m=0$ என்ற வகையை விவரிக்கவும்.

8. h ஆழமுள்ள நீரில், சிறு உயரம் கொண்ட சாமானிய சீரிசையியக்க (Simple Harmonic Motion) மேற்பரப்பு அலைகளுக்கு

$w=A\cos\frac{2\pi}{\lambda}(z+ih-Vt)$ என்பது

சிக்கல்-பொடன்ஷியல் என நிறுவுக. A-ன் மதிப்பை மேற்பரப்பு அதிர்வின் வீச்சு a மூலம் கொடுக்கவும். மேலும்,

$V^2=\frac{g\lambda}{2\pi}\tanh\frac{2\pi h}{\lambda}$ என நிறுவுக. இதிலிருந்து, V-ன் $\sqrt{gh}$ ஐவிடக் குறைந்த ஒவ்வொரு மதிப்பும் ஏதாவதொரு அலையின் திசைவேகம் என நிறுவுக.

ஒவ்வொரு துகளின் பாதையும் அதன் சமநிலையையொட்டிய நீள்வட்டமாகும் என நிறுவுக.

நீரின் ஆழம் கந்தழி எனின் மேற்கண்ட முடிவுகளையொத்த முடிவுகளைக் காண்க.

9. ஆழமான நீரில் முன்னேறும் அலைகளுக்கு இயக்க ஆற்றல், மற்றும் நிலை ஆற்றல்களைக் காண்க. இவ்விரு

ஆற்றல்களும் சமமாயிருத்தல் வேண்டும் என்ற நிபந்தனை யிலிருந்து,

$$c^2 = \frac{g\,\lambda}{2\pi}$$

என்ற சமன்பாட்டைக் காண்க.

புறப்பரப்பு இழுவிசை புறக்கணிக்கத் தக்கதல்ல எனின் இம்முடிவு எவ்வாறு மாறுபடும் எனக் காட்டுக.

10. ஆழமான நீரில்,

$$\phi = \tfrac{1}{2}\, ch\, e^{-2\pi z/l} \cos \frac{2\pi}{l}\,(x-ct)\text{-ஆல்}$$

கொடுக்கப்படும் அலைகளுக்கு $\left(\frac{h}{l}\right)^2$ புறக்கணிக்கத் தக்கது எனின், நீர்த்துகள்கள் சீரான வேகத்துடன் வட்டப்பாதையில் செல்லுகின்றன என நிறுவுக.

11. நீளப் பாங்கு குறுக்கு வெட்டு Sine வளைவரையுள்ள நெளிவு அடிப்படுகையின் மேல் நீர் சீரான திசைவேகத்துடன் சென்றால் கீழ்க்கண்ட முடிவை நிறுவுக :

$$\zeta = a\,\frac{\sinh mh'}{\sinh m\,(h'-h)}\,\sin mx\ ;\ \text{இங்கு}$$

$mu^2 = g \tanh mh'$ என்ற சமன்பாட்டால் h' கொடுக்கப்படுகிறது

12. $h + a \sin mx$ (a-ம், mh-ம் சிறியன) ஆழமுள்ள, நெளிவு அடிப்படுகையுடைய வாய்க்காலில் திசைவேகம் V யுடன் நீர் பாய்கிறது. இங்கு நிற்கும் அலைகளின் எழுச்சி ζ,

$$\zeta = \frac{a \sin mx}{\left(\dfrac{g\,h}{V^2} - 1\right)}\ \text{என்ற சமன்பாட்டால் கொடுக்கப்}$$

படுகின்றது என நிறுவுக.

வாய்க்காலின் அடுப்படுகையின் நெளிவுகளினுல் முன்னேறும் அலைகளின் திசைவேகம் மாறுபடுமா ?

13. h ஆழமுள்ள ρ_1 அடர்த்தித் திரவம், கந்தழி ஆழமுள்ள ρ_2 $(\rho^2 > \rho_1)$ அடர்த்தித் திரவத்தின் மேலுள்ளது. மேல் திரவத்தின் கட்டற்ற மேற்பரப்பில் புறப்பரப்பு இழுவிசை T_1; பொதுப் பரப்பில் புறப்பரப்பு இழுவிசை T_2. இவ்விரு பரப்புகளிலும் செலுத்தப்படும் $\dfrac{2\pi}{k}$ அலை நீளமுடைய அலைகளின் திசை வேகம் V,

$$V^4 k^2 \rho_1 (\rho_2 + \rho_1 \tanh kh) -$$
$$V^2 k \left[k^2 \{\rho_1 (T_1 + T_2) + \rho_2 T_1 \tanh kh\} + \rho_1 \rho_2 g (1 + \tanh kh)\right]$$
$$+ \{k^2 T_1 + \rho_1 g\} \{k^2 T_2 + (\rho_2 - \rho_1) g\} \tanh kh) = 0$$

என்ற சமன்பாட்டால் கொடுக்கப்படுகிறது என நிறுவுக.

14. ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியை ஒரு நிமிடத்தில் 13.5 தடவைகள் கடந்து செல்லும் 100 அடி நீளமுள்ள நீர் அலைகளின் திசைவேகம் யாது?

15. ஒரு நீர் அலை 20 $m\,p\,h$ திசை வேகத்துடன் செல்ல வேண்டுமாயின் நீர் அலையின் அலை நீளம் என்ன இருக்க வேண்டும் எனக் கணக்கிடுக.

16. ஒரு நீர் அலையின் திசைவேகத்தைப் போன்று மற்றொன்றின் திசை வேகம் இருமடங்காயின் இவ்விரு அலைகளின் நீளத்தின் விகிதத்தைக் காண்க.

17. ஒரு அலையின் வீச்சு $1\frac{1}{2}$ அடி; நீளம் 50 அடிகள். அலையின் திசைவேகத்தையும், நிகழ்வெண்ணையும் காண்க.

7. ஒலி அலைகள்

(Sound Waves)

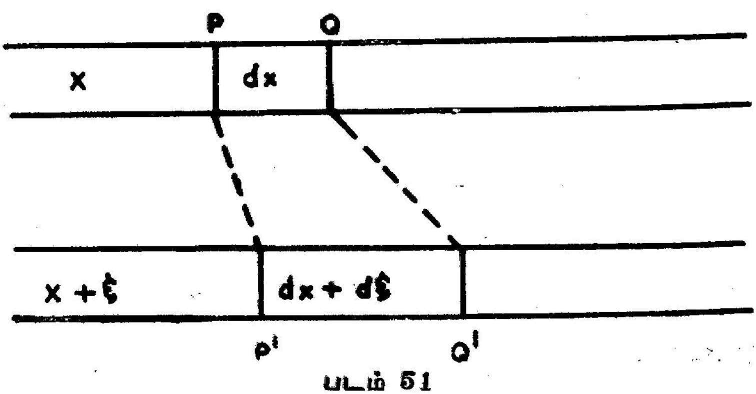
§ **7.1** அழுந்தாத் தன்மை (Incompressible) உள்ள திரவத்தில் நிகழும் அலைகளைப்பற்றிச் சென்ற பகுதிகளில் விரிவாகக் கூறப்பட்டது. இனி இப்பகுதியில் அமுக்கத் தன்மையுள்ள பாய்பொருளான (Fluid) வளியில் (Gas) நிகழும் அலைகளைப் பற்றி ஆராய்வோம். வளியூடகத்தின்வழியே ஒலியலை செல்லும் பொழுது, வளியின், துகள்கள் அலை செலுத்தப்படும் திசையில் ஊசல் இயக்கத்தில் (Oscillatory Motion) உள்ளன. எனவே, இத்தகைய அலைகள் நீளப்பாங்கு அலைகளாகும். வளியின் அடர்த்தி (Density) ρ ஒரு மாறி; இவ்வடர்த்தி ρ, அழுத்தம் p-ன் சார்பாகும். ρ, p-களுக்கிடையேயுள்ள இத் தொடர்பை நாம் அறிய வேண்டும். வளியில் இறுக்கமும் (Compression) அடர் குறைப்பும் (Rarefaction) இணைந்து உருவாக்கும் அலைகள் ஒன்றன்பின் ஒன்ருக வெப்பநிலை (Temperature) மாருவண்ணம் மிக மெதுவாகத் தொடர்வனவாயின் ρ, p-களுக்கிடையேயுள்ள தொடர்பு $p=k\rho$. இது சமவெப்ப நிலை வேறுபாடு (Isothermal Change) எனப்படும். ஆனல், வெப்ப நிலை மாருவண்ணம் இருக்க வேண்டுவதற்குரிய வெப்பத்தின் பாய்வு (Flow of Heat) பொதுவாகச் சாத்தியமற்றது. இவ்வகைகளில் $p=k\rho^{\gamma}$; இங்கு மாறிலிகள் k, γ-களின் மதிப்புகள், பயன்படுத்தப்பட்டுள்ள ஊடகமான வளியைப் பொருத்ததாகும். இவ்வகை, மாரு வெப்ப நிலை வேறுபாடு (Adiabatic Change) எனப்படும். தேவையான இடங்களில் மாரு வெப்பநிலைத் தொடர்பையே நாம் எடுத்துக் கொள்வோம்.

§ **7.2** *சீரான* நேர் உருளைக் குழாயில் நிகழும் அலைகளைப் பற்றி முதலில் காண்போம். குழாயின் முனைகள் மூடியோ அல்லது திறந்தோ இருக்கலாம். இங்கு தீர்வாய்வு (Problem) கோலில் நீளப் பாங்கு அலைகளுக்குரியது போன்றது. முதலில் கீழ்க்கண்ட கற்பிதங்களை எடுத்துக் கொள்வோம்: வளியின் துகள்களின் இயக்கம் குழாயின் திசையிலேயே உள்ளது என்போம். மேலும், குழாயின் குறுக்குவெட்டில் உள்ள

எல்லாப் புள்ளிகளின் இடப் பெயர்ச்சி மற்றும் திசைவேகம் ஒன்றேயாகும் என்போம்; அதாவது நாம் எடுத்துக் கொள்ளும் அலைகள் தள அலைகளாகும் (Plane Waves). குழாயின் குறுக்கு வெட்டு ஒருமப் பரப்புடையது என்போம். பாகுநிலை (Viscous) விளைவுகளைப் புறக்கணிக்கப் போதுமான அளவு குழாயின் விட்டம் பெரியது எனக் கொள்வோம். மேலும் குழாயின் நீளத்தைப் பொருத்தும், ஒலியலையின் நீளத்தைப் பொருத்தும் குழாயின் விட்டம் மிகச் சிறியது என்றும் கொள்வோம். குழாயின் சுவர்கள் உறுதியானவை என்றும் எடுத்துக்கொள்ளப் படுகின்றது.

திறந்த முனையையுடைய குழாயிலும் ஒலியலைகள் தள அலைகள் என்று கொள்வது தவறாகும். ஏனெனில் திறந்தமுனையிலிருந்து ஒலியலைகள் புறத்திலே சூழ்ந்துள்ள ஊடகத்தில் கோள அலைகளாக விரிவடைகின்றன. ஆதலால் ஒலியின் ஆற்றல் புறத்தேயுள்ள ஊடகத்தில் கடத்தப்படுகிறது. இதனால் ஆற்றல் இழக்கப்படுகிறது. இவ்வாறு திறந்த முனையில் அலை எதிரொளிக்கும் ஒவ்வொரு முறையும் இழக்கப்படும் ஆற்றலினால் குழாயில் நிகழும் ஊசல்கள் அழிவடைகின்றன. மேலும், குழாயின் திறந்த முனையின் விளைவால் குழாயின் செயல் விளைவுடைய நீளம் (Effective Length) அதிகரிப்பது நிகழ்வெண்ணின் மதிப்பைக் குறைக்கிறது. ஆகவே திறந்த முனையுடைய குழாய்க்கு முனைத் திருத்தம் அவசியமாகிறது. இதைப் பின்னர் பார்க்கலாம்.

இனி, குழாயில் ஒரு நிலையான புள்ளியிலிருந்து x, $x+dx$ தொலைவுகளில் உள்ள தளங்கள் P, Q-களுக்கிடையேயுள்ள வளியின் இயக்கத்தை ஆராய்வோம். P-க்கும் Q-விற்கும் இடை



படம் 51

யேயுள்ளதொலைவு dx அதிர்வுகளின்பொழுது PQஎனும் தனிமம் $P'Q'$ என்ற நிலைக்குச் செல்லுகின்றது; இங்கு, P அதன் இடை நிலையிலிருந்து ξ தொலைவும், Q அதன் இடைநிலையிலிருந்து $\xi+d\xi$ தொலைவும் இடம் பெயருகின்றன. ஆகவே, $P'Q'$-ன் நீளம் $dx+d\xi$ ஆகும். இனி $P'Q'$-ன் இயக்கச் சமன்பாட்டைக் காண்போம். $P'Q'$-ன் இயக்கச் சமன்பாட்டை எழுதுவதற்கு, $P'Q'$-ன் பொருண்மையும் P', Q' முனைகளில் செயல்புரியும் அழுத்தமும் தேவையாகும். $P'Q'$-ன் பொருண்மை கிளர்ச்சியற்ற நிலையில் உள்ள தனிமம் PQ-ன் பொருண்மை போன்றதாதலால் $P'Q'$-ன் பொருண்மை $\rho_0\, dx$ ஆகும்; இங்கு ρ_0 என்பது சராசரி அடர்த்தி. P'-ல் செயல் புரியும் அழுத்தத்தைக் காண dx-ன் மதிப்பு பூச்சியத்தை நெருங்குவதாகக் கொள்ளுவோம். இதிலிருந்து P'-ன் அடர்த்தி ρ-வின் மதிப்பைக் கணக்கிட்டு, ρ, p-களிடையேயுள்ள மாறுவெப்ப நிலைவேறுபாடுத் தொடர்பிலிருந்து அழுத்தம் p-ன் மதிப்பை அறியலாம்.

$$\rho = \lim_{dx\to 0} \frac{\rho_0\, dx}{dx+d\xi}$$

$$= \lim_{dx\to 0} \rho_0 \frac{1}{\left(1+\frac{d\xi}{dx}\right)}$$

$$= \rho_0 \frac{1}{\left(1+\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)}$$

$$= \rho_0 \left(1-\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^{-1}$$

$$= \rho_0 \left(1-\frac{\partial\xi}{\partial x}\right), \quad (1)$$

$\frac{\partial\xi}{\partial x}$-ன் உயர்படிகளின் மதிப்புகள் மிகச் சிறியதெனப் புறக்கணிக்கப்பட்டுள்ளன. (1)

அடர்த்தியின் பின்ன வேறுபாடு (Fractional Change) $\frac{\rho-\rho_0}{\rho_0}$ என்ற கணியம் சுருக்கம் (Condensation) s எனப்படும். சாதாரண ஒலியலைகளுக்கு s-ன் மதிப்பு தோராயமாக 10^{-3} ஆகும்.

$$\rho = \frac{\rho - \rho_\circ}{\rho_\circ}$$

$$= -\frac{\partial \xi}{\partial x} \quad \text{(1)-லிருந்து,} \qquad (2)$$

$$\therefore \quad \rho = \rho_\circ (1+s) \qquad \text{(1), (2)-களிலிருந்து,} \qquad (3)$$

$P'Q'$-ல் செயல்புரியும் விசை $= p_{P'} - p_{Q'}$

$$p_{P'} = f(x) \text{ என்க}$$

$$\therefore \quad p_{Q'} = f(x+\delta x)$$

$$\therefore \quad p_{P'} - p_{Q'} = f(x) - f(x+\delta x)$$

$$= f(x) - [f(x) + \delta x\, f'(x) + \ldots\ldots\ldots]$$

$$= -\delta x\, f'(x)$$

$$= -\delta x\, \frac{\partial p}{\partial x}$$

ஆகவே $P'Q'$-ன் இயக்கச் சமன்பாடு

$$\rho_\circ dx\, \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial x}\, dx$$

அதாவது, $$\rho_\circ \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial x} \qquad (4)$$

$$= -\frac{dp}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x}$$

$$= \rho_\circ \frac{dp}{d\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \qquad \text{(1)-லிருந்து.}$$

$$\therefore \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \quad c^2 = \frac{dp}{d\rho} \qquad (5)$$

எனவே, திட்டவடிவ அலையோட்டச் சமன்பாட்டை ξ நிறைவு செய்கிறது. இதிலிருந்து, எவ்வடிவம் கொண்ட அலைகளும் $\sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$ எனும் திசைவேகத்துடன் இருபுறமும் செலுத்தப்பட

வல்லது என அறிகிறோம். $0^\circ c$ வெப்பத்தில் சாதாரண காற்றுக்கு p-க்கும் ρ-விற்கும் இடையேயுள்ள தொடர்பை மாரு வெப்பநிலை வேறுபாடாக எடுத்துக் கொண்டால், ஒலியலையின் திசைவேகம் $c = 332$ மீட்டர்/வினாடி. இம் மதிப்பு செய்முறைச் சோதனையின் மதிப்புடன் ஒத்துள்ளது. ஆனால், p-க்கும், ρ-விற்கும் இடையேயுள்ள தொடர்பைச் சமவெப்பநிலை வேறுபாடாகக் கொண்டு ஒலியலையின் திசைவேகம் c-ன் மதிப்பை நியூட்டன் கணித்தது தவருக இருந்தது.

$\dfrac{\partial \xi}{\partial x}$-ன் உயர்படிகளின் மதிப்புகளைப் புறக்கணிக்கவில்லையெனின், அலையோட்டச் சமன்பாட்டின் வடிவத்தை மிகத் திருத்தமாகக் காணலாம். சமன்பாடு (1)-லிருந்து, மிகத் திருத்தமாக,

$$p = k\,\rho^{\gamma}$$

$$= \frac{k\cdot \rho^{\gamma}_{\circ}}{\left(1+\dfrac{\partial \xi}{\partial x}\right)^{\gamma}}$$

$\therefore$ அலையோட்டத்தின் இயக்கச் சமன்பாடு (4)-லிருந்து,

$$\rho_{\circ}\,\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$= \frac{\gamma\, k\, \rho^{\gamma}_{\circ}}{\left(1+\dfrac{\partial \xi}{\partial x}\right)^{\gamma+1}} \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

அதாவது,

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\gamma\, p_{\circ}}{\rho_{\circ}}\,\frac{1}{\left(1+\dfrac{\partial \xi}{\partial x}\right)^{\gamma+1}}\,\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \left(\because\ p_{\circ} = k\,\rho_{\circ}{}^{\gamma}\right) \qquad (6)$$

சமன்பாடு (6)-ல் $\dfrac{\partial \xi}{\partial x}$-ஐ ஒன்றைப் பொருத்து புறக்கணித்தால் சமன்பாடு (5) கிடைக்கும். சமன்பாடு (6) அலையோட்டச் சமன்பாட்டின் திட்டவடிவத்தில் இல்லாமையால், செலுத்தப்படும் அலையின் திசைவேகம் அதன் நிகழ்வெண்ணைச் சார்ந்ததாகும். எனவே, பொதுவாக, வடிவம் மாருமல் அலை செலுத்தப்பட முடியாது.

§ 7.3. எல்லைக் கட்டுப்பாடுகள் : இப் பகுதியில் எல்லைக் கட்டுப்பாடுகளைப் பற்றிக் காணலாம். கந்தழி நீளமுள்ள குழாயில் எல்லைக் கட்டுப்பாடுகள் கிடையாது. ஆனால் குழாயின் ஒருமுனை $x=a$ என்ற புள்ளியில் உறுதியாக மூடப் பட்டிருந்தால் (Rigidly Closed) இந்த நிலையான எல்லை $x=a$-ல் வளியின் துகள்கள் இடப்பெயர்ச்சியற்றதாதலால் $x=a$-ல் $\xi=0$ குழாயின் ஒருமுனை அல்லது இருமுனைகளும் வளி மண்டலத் துடன் (Atmosphere) திறந்து இருப்பினும் பொதுவாக எல்லைக் கட்டுப்பாடுகள் உண்டு. குழாயில் நிகழும் அலைகள் குழாயின் முனைக்கு வெளியேயுள்ள காற்றில் செயல்புரியவில்லையென எடுத்துக் கொண்டால், திறந்த முனைகளில் அழுத்தம் வளி மண்டல அழுத்தம் போன்றதாகும். ஆகவே, $p = k\,\rho^{\gamma}$, $\rho = \rho_{\circ}\left[1-\dfrac{\partial \xi}{\partial x}\right]$ என்பதிலிருந்து திறந்த முனைகளில் $\dfrac{\partial \xi}{\partial x}=0$, எல்லா t-க்கும். ஆனால், உண்மையில், அலைகள் குழாய்க்குச் சிறிது வெளியேயும் செயல்புரிகின்றன. இதனால் மேலே கூறப்பட்டுள்ள, குழாயின் திறந்த முனைக்குரிய எல்லைக் கட்டுப்பாடு முற்றிலும் திருத்தமானதல்ல. ஆகவே குழாயின் குறுக்கு வெட்டைப் பொருத்து குழாயின் மெய்யான நீளத் தைச் சிறிது கூட்டுவது பொதுவான திருத்தமாகும். இத் திருத்தம் பற்றிய முடிவுகளைப் பின் பகுதியில் காண்போம்.

மேலே கூறப்பட்டுள்ள எல்லைக் கட்டுப்பாடுகளைப் பயன் படுத்தி l நீளமுள்ள ஒரு குழாயில் இயக்கத்திலுள்ள வளியின் இயல்நிலை வகைகளைக் காண்போம். இத்தகைய அலைகள் நிற்கும் அலைகள் என்பது தெளிவு. ஆகவே,

$$(5)\text{-லிருந்து } \xi = \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\; nx\; \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\; n\,ct \tag{7}$$

வகை (1): குழாயின் இருமுனைகளும் $x=0$, $x=l$ என்ற புள்ளிகளில் உறுதியாக மூடப்பட்டிருந்தால் $x=0$, $x=l$–களில் $\xi=0$. முதல் எல்லைக் கட்டுப்பாட்டிலிருந்து ξ-ல் $\cos nx$ உறுப்பு இருக்கவியலாது. இரண்டாவது எல்லைக் கட்டுப்பாட்டிலிருந்து $nl=r\pi$, $r=1, 2, 3\ldots\ldots$

$$\therefore\ \xi=a_r \sin \frac{r\pi x}{l} \cos\left[\frac{r\pi ct}{l}+\epsilon r\right],\ r=1, 2, 3 \tag{8}$$

ஒருங்கிணைக்கும் கோட்பாட்டிலிருந்து பொதுத் தீர்வு,

$$\xi = \sum_{r=1}^{\infty} a_r \sin \frac{r\pi x}{l} \cos\left[\frac{r\pi ct}{l} + \epsilon_r\right] \qquad (9)$$

r-ஆவது இயல்நிலைவகையின் நிகழ்வெண் $= \dfrac{rc}{2l}$; அடிப்படை நிகழ்வெண் $= \dfrac{c}{2l}$

வகை (2): குழாயின் ஒருமுனை $x=0$ என்ற புள்ளியில் உறுதியாக மூடப்பட்டு மறுமுனை $(x=l)$ திறந்துள்ளது எனின் $x=0$-ல், $\xi=0$, $x=l$-ல் $\dfrac{\partial \xi}{\partial x}=0$. முதல் எல்லைக் கட்டுப்பாட்டிலிருந்து ξ-ல் $\cos nx$ என்ற உருப்பு இருக்கவியலாது.

இரண்டாவது எல்லைக் கட்டுப்பாட்டிலிருந்து $nl=(r+\frac{1}{2})\pi$, $r=0, 1, 2,\ldots\ldots$

$$\xi = \sum_{r=0}^{\infty} a_r \sin (r+\tfrac{1}{2}) \frac{\pi x}{l} \cos\left[(r+\tfrac{1}{2})\frac{\pi ct}{l} + \epsilon_r\right]$$

$r=0, 1, 2\ldots\ldots$

ஒருங்கிணைக்கும் கோட்பாட்டிலிருந்து பொதுத்தீர்வு,

$$\xi = \sum_{r=0}^{\infty} a_r \sin (r+\tfrac{1}{2}) \frac{\pi x}{l} \cos\left[(r+\tfrac{1}{2})\frac{\pi ct}{l} + \epsilon_r\right] \qquad (10)$$

r-ஆவது இயல்நிலைவகையின் நிகழ்வெண் $= \dfrac{(2r+1)c}{4l}$;

அடிப்படை நிகழ்வெண் $= \dfrac{c}{4l}$

$s=2r+1$ என்றால் நிகழ்வெண்கள் $= \dfrac{sc}{4l}$, $s=1, 3, 5$.

ஆகவே, மேல்சுரங்கள் ஒற்றைப்படை வரிசையில் உள்ளனவாதலால் ஒற்றைப்படை மேல்சுரங்கள் மட்டிலுமே கிடைக்கின்

றன. $l, 3l, 5l, \ldots\ldots$ முதலிய நீளங்களையுடைய குழாய்கள் வெவ்வேறு இயல்நிலை வகைகளில் ஒரே விதமான தனியொலி யிசையைக் (Note) கொடுக்கவல்லது என அறிகிறோம். ஒரு முனை மூடப்பட்டு மறுமுனை திறந்துள்ள குழாய் 'மூடப்பட் டுள்ள' குழாய் (Closed Pipe) எனப்படும்.

வகை 3 : $x=0$, $x=l$ என்ற புள்ளிகளில் உள்ள குழாயின் இருமுனைகளும் திறந்துள்ளன என்றால்

$x=0$, $x=l$-களில் $\dfrac{\partial \xi}{\partial x}=0$. முதல் எல்லைக் கட்டுப்பாட்டி லிருந்து ξ-ல் $\sin nx$ உறுப்பு இருக்கவியலாது. இரண்டாவது எல்லைக்கட்டுப்பாட்டிலிருந்து $nl=r\pi$, $r=1, 2, 3, \ldots\ldots$

$$\therefore \quad \xi=a_r \cos\frac{r\pi x}{l}\cos\left(\frac{r\pi ct}{l}+\epsilon_r\right) \tag{11}$$

ஒருங்கிணைக்கும் கோட்பாட்டிலிருந்து பொதுத் தீர்வு,

$$\xi=\sum_{r=1}^{\infty} a_r \cos\frac{r\pi x}{l}\cos\left(\frac{r\pi ct}{l}+\epsilon_r\right) \tag{12}$$

r-ஆவது இயல்நிலைவகையின் நிகழ்வெண் $=\dfrac{rc}{2l}$;

அடிப்படை நிகழ்வெண் $=\dfrac{c}{2l}$; இவ்வகையிலுள்ள குழாய் 'திறக்கப்பட்டுள்ள குழாய்' (Open Pipe) எனப்படும்.

ஒத்த நிகழ்வெண்களுக்கு, திறக்கப்பட்டுள்ள குழாயின் நீளம் மூடப்பட்டுள்ள குழாயின் நீளத்தைப் போன்று இருமடங் காகும் என எளிதில் அறியலாம். திறக்கப்பட்டுள்ள குழாயில் எல்லா மேல்சுரங்களும் உள்ளன ; ஆனால் மூடப்பட்டுள்ள குழாயில் ஒற்றைப்படை மேல்சுரங்கள் மட்டிலுமே உள்ளன, இவ்வேறுபாட்டினால்தான் இவ்விருவகைக் குழாய்களின் ஒலிப் பண்புகளும் மாறுபட்டுள்ளன.

மேலேயுள்ள மூன்று வகைகளிலும் ஒத்திசைகள் அடிப் படை நிகழ்வெண்ணுடன் எளிய முறையில்- எண்ணளவில் தொடர்பு கொண்டுள்ளன. இக்காரணத்தால்தான் ஆர்கன் பைப்பில் (Organ Pipe) ஒலி இனிமையாக உள்ளது.

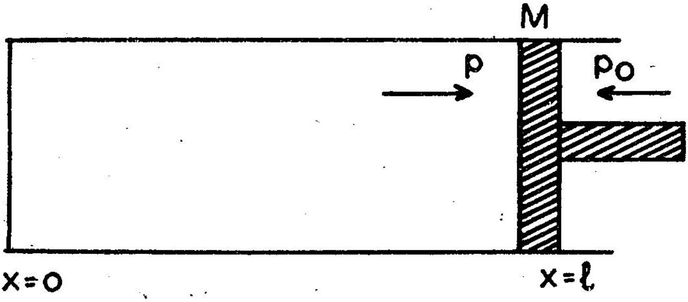
முனை திருத்தம் (End Correction): மேலே விளக்கப்பட்டுள்ள கொள்கையில் குழாயின் திறந்த முனை ஒரு எதிர்க்கணு (Anti-node) என்றும், குழாயில் உள்ள ஒலியாற்றல் திறந்த முனைகளில் முற்றிலுமாக எதிரொளிக்கிறது என்றும் கொண்டுள்ளோம். ஆனால் இக் கற்பிதம் முற்றிலும் சரியான உண்மையல்ல. ஒவ்வொரு எதிரொளிப்பிலும் ஒலியாற்றல் சிறிது வெளிச் சென்று குழாயின் திறந்த முனையிலிருந்து கோள அலைகளாக (Speherical Waves) பரவுகின்றன. திறந்த முனைக்கப்பால் இருக்கும் காற்று அதிர்வுறுகிறது. ஆற்றல் புறத்துள்ள ஊடகத்தில் கடத்தப்படுகிறது. ஆகவே ஆற்றல் இழக்கப்படுகிறது. இவ்வாறு திறந்த முனையில் அலை எதிரொளிக்கும் ஒவ்வொரு முறையும் இழக்கப்படும் ஆற்றலினால் குழாயினுள் நிகழும் ஊசல்கள் அழிவடைகின்றன. உதாரணமாக ஆர்கன் பைப்பில் (Organ Pipe) ஊதப்படும் காற்று திடீரென நிறுத்தப்பட்டால், ஒலி விரைவில் அழிந்து விடுகிறது. குழாயின் உண்மையான நீளத்தைவிட குழாயின் செயல்விளைவுடைய நீளம் கூடுதலாகும். இந்நீளத்தின் வேறுபாட்டைக் கணக்கிடுவது மிகக் கடினம். குழாயின் ஆரம் R என்றால் குழாயின் திறந்த முனைத் திருத்தம் $\frac{\pi}{4}$R என்று Helmholtz உய்த்தறிந்தார். கந்தழி ∴பளாஞ்சு (Flange) உள்ள குழாய்க்கு முனைத் திருத்தம் 0.82R என Rayleigh கொள்கை முறையில் (Theoretically) கண்டுள்ளார். பெரிய ∴ப்ளாஞ்சு உள்ள குழாய்க்கு முனைத்திருத்தம் 0.8R, ∴ப்ளாஞ்சு இல்லாத குழாய்க்கு முனைத் திருத்தம் 0.6R என சோதனைச் செய்முறைகளினால் காணப்பட்டுள்ளது. திறந்த முனையின் விளைவினால் குழாயின் எல்லா மேல்சுரங்களின் நிகழ்வெண்களின் மதிப்புகளும் குறைக்கப்படுகின்றன. முனைத்திருத்தம் அலைநீளத்தையும் சிறிது சார்ந்தது. ஆகவே குழாயின் மேல்சுரங்கள் சரியான இசைவரிசைத் தொடரில் இருப்பதில்லை. ஆயினும் இவ்வேறுபாடு, நடைமுறையில் பாதிக்கும் அளவு முக்கியமானதல்ல.

§ **7.4** ஒருமக் குறுக்குவெட்டுள்ள ஒரு குழாயின் ஒரு முனை உறுதியாக மூடப்பட்டுள்ளது; தங்குதடையின்றி குழாயில் செல்லவல்ல M பொருண்மையுள்ள ஒரு உந்துதண்டு (Piston) குழாயின் மறுமுனையில் உள்ளது. இக்குழாயில் நிகழும் அலைகளுக்கு இயல்நிலை வகைகளைக் காண்போம். உறுதியாக மூடப்பட்டுள்ள முனையில் $x=0$ என்ற எல்லையையும், உந்துதண்டின் சமநிலையில் (Equilibrium) $x=l$ என்ற எல்லையையும் எடுத்துக் கொள்வோம். அலையோட்டத்தின் திட்டவடிவ சமன்

பாடு (5)-ன் தீர்வை எல்லைக் கட்டுப்பாடுகளுக்கு உட்பட்டுக் காணவேண்டும். $x=0$ உறுதியாக மூடப்பட்டுள்ள முனையாதலால், $x=0$-ல் $\xi=0$ என்பது ஒரு எல்லைக்கட்டுப்பாடு. இவ்வெல்லைக் கட்டுப்பாட்டினுல், சமன்பாடு (5)-ன் தீர்வு (7)-ல் cos px உறுப்புக் கிடையாது. ஆகவே,

$$\xi=A\sin nx\cos(nct+\epsilon) \tag{12}$$

மற்ருெரு எல்லைக் கட்டுப்பாடு உந்துதண்டின் இயக்கத்தினுல் கிடைக்கிறது. $x=l$-ல் குழாயின் உட்புறமுள்ள அதிக அழுத்தத்தின் விளைவாக உந்து தண்டு முடுக்கம் (Acceleration) பெறுகிறது. ஆகவே, M பொருண்மையுள்ள உந்து தண்டின்



படம் 52

இயக்கச் சமன்பாடு :

$$M\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=p-p_\circ,\quad x=l\text{-ல்}$$

ஆனுல் $p-p_\circ=\dfrac{dp}{d\rho}(\rho-\rho_\circ)$

$$=c^2(\rho-\rho_\circ)\left(\because\frac{dp}{d\rho}=c^2\right)$$

$$=-c^2\rho_\circ\frac{\partial\xi}{\partial x}\left[(1)\text{-லிருந்து}\right]$$

$$\therefore\quad M\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=-c^2\rho_\circ\frac{\partial\xi}{\partial x},\quad x=l\text{-ல்}$$

சமன்பாடுகள் (12), (13)-களிலிருந்து,

$$M n^2 c^2 A \sin nl \cos (nct+\epsilon)=c^2 \rho_\circ nA \cos nl \cos (nct+\epsilon)$$

அதாவது, $n M \sin nl=\rho_\circ \cos nl$

அதாவது,

$$nl \tan pl= \frac{\rho_\circ l}{M} \tag{14}$$

$=$ ஒரு மாறிலி.

$nl=x$ என்க.

$\therefore$ nl-ன் மதிப்பு, $x \tan x= \frac{\rho_\circ l}{M}$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளில் எதுவாகிலும் ஒன்ருக இருக்கலாம். இச் சமன்பாடு கந்தழி எண்ணிக்கையுடைய தீர்வுகளைக் கொண்ட கடந்தச் சமன்பாடாகும் (Transcendental Equation). இதன் தீர்வுகளை வரைபடத்தின் வாயிலாகக் காணலாம். $y=\tan x$, $xy = \frac{\rho_\circ l}{M}$ என்ற வளைவரைகள் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளிகளின் x-ஆயக் கூறுகள் தான் இச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகள். x–ன் மதிப்பு, முதல் தோராயமாக, $r\pi$ என்றும், இரண்டாவது தோராயமாக, $r\pi + \frac{\rho_\circ l}{Mr\pi}$ என்றும் நிறுவுவது மாணவர்க்குப் பயிற்சியாக விடப்பட்டுள்ளது.

இரு சிறப்பு வகைகள் :

(i) $M=0$ என்க. இவ்வகையில் குழாயில் $x=l$ என்ற முனை திறந்துள்ள முனைக்கு ஒப்பாகும். சமன்பாடு (14)–ல் இருந்து,

$$nl \tan nl = \infty, \qquad \therefore \quad nl = (r + \tfrac{1}{2})\pi$$

$$\therefore \quad n=(r+\tfrac{1}{2}) \frac{\pi}{l}$$

பிரிவுக்கூறு § 7.3-ல், $x=0$-ல் உறுதியாக மூடப்பட்ட முனையையும் $x=l$-ல் திறந்துள்ள முனையையும் கொண்ட வகையில் n–ன் மதிப்புடன் இம்மதிப்பு ஒத்துள்ளதைக் காண்க.

(ii) $M=\infty$ என்க. இவ்வகையில், குழாயின் $x=l$ என்ற முனை உறுதியாக மூடப்பட்டுள்ள முனைக்கு ஒப்பாகும். சமன்பாடு (14)-லிருந்து $nl \tan nl=0$.

$$\therefore\ nl=r\pi, \quad \therefore\ n=\frac{r\pi}{l}$$

பிரிவுக்கூறு § 7.3-ல், $x=0$, $x=l$-களில் உறுதியாக மூடப்பட்டுள்ள வகையில் n-ன் மதிப்புடன் இம் மதிப்பு ஒத்துள்ளதைக் காண்க.

மாதிரி :—இரு முனைகளும் திறந்துள்ள $2l$ நீளமும், S குறுக்கு வெட்டுமுள்ள ஒரு நேர்க்குழாயின் நடுவில் M பொருண்மையுள்ள மெல்லிய ஒரு உந்துதண்டின் இயல்நிலை காலக்கூறு வளியற்ற வெற்றிடத்தில் (Vacuum) $2\pi/m$. வளியின் அழுத்தமும் எடுத்துக்கொள்ளப்பட்டால் இயல்நிலை காலக்கூறு $2\pi/n$,

$$M\,(m^2-n^2)=2\,\rho_0\ cn\,S\,\tan\frac{nl}{c}$$

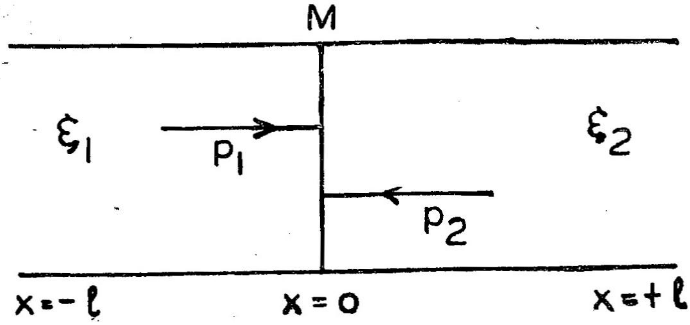
என்ற சமன்பாட்டினுல் கொடுக்கப்படுகின்றது என நிறுவுக.

வளியின் அழுத்தமும் எடுத்துக்கொள்ளப்படும் பொழுது, உந்துதண்டின் இருபுறமும் உள்ள வளி ஒன்றேயாதலால், இருபுறமும் உள்ள வளியில் p-க்கும் ρ-விற்கும் இடையேயுள்ள தொடர்பு ஒன்றேயாகும் ; ஆகவே செலுத்துகை திசைவேகம் $c\left(=\sqrt{\dfrac{dp}{d\rho}}\right)$-ம் இருபுறமும் ஒன்றேயாகும். உந்துதண்டின் சமநிலையை $x=0$-ல் எடுத்துக் கொள்ளுவோம். உந்து தண்டின் இருபுறமும் வளியின் இடப்பெயர்ச்சியை ξ_1, ξ_2 என்போம்.

$$\therefore\ \xi_1=\left(A\cos\frac{nx}{c}+B\sin\frac{nx}{c}\right)\cos(nt+\epsilon_1) \qquad (15)$$

$$\xi_2=\left(C\cos\frac{nx}{c}+D\sin\frac{nx}{c}\right)\cos(nt+\epsilon_2) \qquad (16)$$

[$\because$ வளியின் அழுத்தமும் எடுத்துக்கொள்ளப் படும் பொழுது காலக்கூறு $\dfrac{2\pi}{n}$ எனக் கொடுக்கப் பட்டுள்ளதால்].



படம் 53

எல்லைக் கட்டுப்பாடுகள் :

(i) $x=-l$ எனும் முனை திறந்துள்ளதால் $x=-l$-ல் $\dfrac{\partial \xi_1}{\partial x}=0$, எல்லா t-க்கும்.

(ii) $x=+l$ எனும் முனை திறந்துள்ளதால் $x=-l$-ல் $\dfrac{\partial \xi_2}{\partial x}=0$, எல்லா t-க்கும்.

(iii) உந்துதண்டு மெல்லியது எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளதால் $x=0$–ல் $\xi_1=\xi_2$.

சமன்பாடு (15), எல்லைக் கட்டுப்பாடு (i)-களிலிருந்து,

$$A \sin \frac{nl}{c}+B \cos \frac{nl}{c}=0. \tag{17}$$

சமன்பாடு (16), எல்லைக்கட்டுப்பாடு (ii).களிலிருந்து,

$$-C \sin \frac{nl}{c}+D \cos \frac{nl}{c}=0. \tag{18}$$

சமன்பாடுகள்கள் (15), (16), எல்லைக்கட்டுப்பாடு (iii)–களில் இருந்து,

$$A \cos (nt+\epsilon_1)=C \cos (nt+\epsilon_2). \tag{19}$$

$\therefore$ சமன்பாடுகள் (17), (18), (19)-களிலிருந்து,

$$B \cos(nt+\epsilon_1) = -D \cos(nt+\epsilon_2). \tag{20}$$

சமன்பாடு (17)-லிருந்து,

$$\frac{B}{A} = -\tan\frac{nl}{c} \tag{21}$$

M-ன் இயக்கச்சமன்பாடு: வளியற்ற வெற்றிடத்தில் *M*-ன் சாமனிய சீரிசையியக்கத்தின் (S.H.M.) சமன்பாடு

$$M\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2} = -M m^2 \xi_1 \tag{22}$$

M இயங்கும் பொழுது வளியின் அழுத்தமும் எடுத்துக் கொள்ளப்பட்டால், வெற்றிடத்தில் *M* இயங்குவதற்குத் தேவையான முடுக்கத்தையும இவ்வகையில் எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும். ஆகவே *M*-ன் இயக்கச் சமன்பாடு:

$$M\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2} = -M m^2 \xi_1 + (p_1 - p_2) S, \qquad x = 0 \text{ ல்}$$

இனி, $p_1 - p_2 = (p_1 - p_0) - (p_2 - p_0)$, p_0 = வளிமண்டல அழுத்தம்

$$= \frac{dp_1}{d\rho_1}(\rho_1 - \rho_0) - \frac{dp_2}{d\rho_2}(\rho_2 - \rho_0)$$

$$\rho_1 = \rho_0\left[1 - \frac{\partial \xi_1}{\partial x}\right]$$

$$\rho_2 = \rho_0\left[1 - \frac{\partial \xi_2}{\partial x}\right]$$

$$c^2 = \frac{dp_1}{d\rho_1} = \frac{dp_2}{d\rho_2}$$

$$\therefore\ p_1 - p_2 = -c_2 \rho_0 \frac{\partial \xi_1}{\partial x} + c^2 \rho_0 \frac{\partial \xi_2}{\partial x}$$

$$\therefore\ M\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2} = -M m^2 \xi_1 - S c^2 \rho_0 \frac{\partial \xi_1}{\partial x} + S c^2 \rho_0 \frac{\partial \xi_2}{\partial x} \tag{24}$$

சமன்பாடு (24)-ல் சமன்பாடுகள் (15), (16)-லிருந்து ξ_1, ξ_2, களின் மதிப்புகளைப் பிரதியீடு செய்ய

$$M\,(m^2-n^2)\,A = -2\,S\,\rho_0\,cn\,B \quad [\,(19),\,(20)\text{-களிலிருந்து}]$$

$$\therefore\; M\,(m^2-n^2) = 2\,S\,\rho_0\,cn\,\tan\frac{nl}{c} \quad [\,(21)\text{-லிருந்து}]$$

§ 7.5 *திசைவேகப் பொடன்ஷியல் முறை* (Velocity Potential Method): இதுவரையில் இடப்பெயர்ச்சி (Displacement) ξ முறையில் ஒலியலைகளின் தீர்வுகளைக் காணும் முறைகளைக் கண்டோம். இனி இப்பகுதியில் திசைவேகப் பொடன்ஷியல் ϕ முறையில் ஒலியலைகளின் தீர்வுகளைக் காணும் முறையைக் காண்போம். திரவத்தில் அலைகள் என்ற பகுதியில் திசைவேகப் பொடன்ஷியல் சமன் செய்ய வேண்டிய நிபந்தனைகளில் அடர்த்தி ρ ஒரு மாறிலியாக இருந்தது. ஆனால், இங்கு அடர்த்தி ρ ஒரு மாறிலியில்லையாதலால் ϕ சமன் செய்ய வேண்டிய நிபந்தனைகளில் சில இங்கு சிறிது மாறுபடும். இந் நிபந்தனைகளை Hydrodynamics புத்தகங்களில் காணலாம். இவைகள் கீழே தொகுத்துக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன :

(1) இயக்கம் சுழற்சியற்றது என்று கொள்வோம். வெளியின் எப்பகுதியின் திசைவேகமும் $\bar{u}$ என்ற வெக்டரால் கொடுக்கப்பட்டால்

$$\bar{u} = -\,\Delta\phi \tag{25}$$

$$\bar{u} = (u,\,v,\,w) \text{ எனின் } u = -\frac{\partial\phi}{\partial x}$$

$$v = -\frac{\partial\phi}{\partial y}$$

$$w = -\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

(2) *எல்லைக் கட்டுப்பாடு* : நிலையான எல்லையின் செங்குத்துத் திசையில் திசைவேகத்திற்குக் கூறு (Component) கிடையாது. எனவே $\frac{\partial}{\partial \nu}$ என்பது செங்குத்துத் திசையில் வகைக்கெழு காணுதலைக் குறித்தால் $\frac{\partial\phi}{\partial\nu} = 0$ (26)

(3) *தொடர்ச்சிச் சமன்பாடு* (Equation of Continuity) : வெளி உண்டாக்கப்படுவதோ அல்லது அழிக்கப்படுவதோ கிடை

யாது என்று கொள்வதினால், தொடர்ச்சிச் சமன்பாடு பொருண்மை பேணுகையை (Conservation of Mass) வெளிப் படுத்த வேண்டும். இச்சமன்பாடு

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \Delta \rho \bar{u} = 0 \qquad (27)$$

அதாவது, $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} = 0$

இச்சமன்பாடு § 5.1-ல் சமன்பாடு (3)–லிருந்து சிறிது மாறு பட்டிருத்தலைக் காண்க.

(4) *ஆயிலரின் இயக்கச் சமன்பாடு* (Euler's Dynamical Equations) : வளியின் ஒருமப் பொருண்மையில் செயல்படும் புறவிசையை (External Force) $\bar{F}$ என்ற வெக்டாரினால் குறித்துக் காட்டினால், வளியின் இயக்கச் சமன்பாட்டை வெக்டார் அமைப்பில்

$$\frac{D\bar{u}}{Dt} = \bar{F} - \frac{1}{\rho}\,\Delta p \qquad (28)$$

என்று கொடுக்கலாம்.

(5) *பெர்னேலியின் சமன்பாடு* (Bernoulli's Equation): புறவிசை $\bar{F}$-க்கு ஒரு பொடன்ஷியல் V இருப்பின் $\bar{F} = -\Delta V$. இங்கு பெர்னேலியின் சமன்பாடு

$$\int \frac{dp}{\rho} + \tfrac{1}{2}\,\bar{u}^2 + V - \frac{\partial \phi}{\partial t} = \text{மாறிலி}$$

(ρ ஒரு மாறி என்பதனால்) (29)

இச்சமன்பாட்டில் நேரத்தின் விதிக்கட்டில்லா சார்பு (Arbitrary Function of Time) $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ உறுப்புடன் ஈர்த்துக் கொள்ளப் பட்டுள்ளது.

§ 7.6 *ϕ முறையில் ஒலியலையின் இயக்கச் சமன்பாட்டைக் காணல்* : ஒலியலைகளில் எல்லைகளில் செயல்புரியும் புறவிசை களைத் தவிர ஏனைய பிற புறவிசைகளைப் புறக்கணித்து

விடலாம். ஆகவே சமன்பாடு (29)-ல் $V=0$. மேலும், திசை வேகங்கள் சிறிய மதிப்புடையன எனக்கொள்ளலாம். ஆகவே சமன்பாடு (29)-ல் $\bar{U}^2$ புறக்கணிக்கத்தக்கது. எனவே சமன்பாடு (29)-ல் இருந்து,

$$\int \frac{dp}{\rho} - \frac{\partial \phi}{\partial t} = \text{மாறிலி.} \tag{30}$$

இனி, $\int \frac{dp}{\rho} = \int \left(\frac{dp}{d\rho} \right) \frac{d\rho}{\rho}$

அடர்த்தியின் வேறுபாடுகள் சிறியனவாயின் $\frac{dp}{d\rho}$ ஒரு மாறிலி யெனக் கொள்ளலாம்; இம் மாறிலி c^2 ஆகும்.

$$\therefore \int \frac{dp}{\rho} = c^2 \int \frac{d\rho}{\rho}$$

$$= c^2 \log_e \rho + \text{மாறிலி}$$

$$= c^2 \log_e \rho_\circ (1+s) + \text{மாறிலி}$$

$$[\because \ \rho = \rho_\circ (1+\rho)]$$

$$= c^2 s + \text{மாறிலி}$$ (s-ன் உயர்படிகளின் மதிப்புகளை மிகச்சிறியன என்று புறக்கணித்து) (31)

$\therefore$ சமன்பாடுகள் (30), (31)-லிருந்து,

$$c^2 s - \frac{\partial \phi}{\partial t} = \text{மாறிலி.}$$

இம் மாறிலியை ϕ-யுடன் சேர்த்துக் கொண்டால்

$$c^2 s = \frac{\partial \phi}{\partial t} \tag{32}$$

தொடர்ச்சிச் சமன்பாடு (27)-லிருந்து,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \Delta \cdot (\rho \bar{u}) = 0.$$

இதில் $\rho = \rho_\circ (1+s)$; $\bar{u} = -\Delta \phi$, $\bar{u} = (u, v, w)$

$$\therefore\ \rho_0 \frac{\partial s}{\partial t} + \Delta \cdot \rho_0\,(1+s)\,\bar{u} = 0$$

அதாவது, $\rho_0 \frac{\partial s}{\partial t} + \rho_0 \Delta \cdot \bar{u} = 0$ (su, sv, sw என்ற இரண்டாவது வரிசை சிறிய மதிப்புகளைப் புறக்கணித்து)

அதாவது, $\frac{\partial s}{\partial t} = \Delta^2 \phi \quad [\because\ \bar{u} = -\Delta\phi]$ (33)

சமன்பாடுகள் (32), (33)-களிலிருந்து s-ஐ நீக்க

$$\Delta^2 \phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \tag{34}$$

இதுவே ϕ-முறையில் ஒலியலையின் திட்டவடிவச் சமன்பாடு. இச்சமன்பாட்டிலிருந்து, c ஒலியலை செலுத்தப்படும் திசைவேகம் எனப் புலனுகிறது.

§ 7.7 ϕ-முறையில் தீர்வுகாண எல்லைக் கட்டுப்பாடுகள்:

(1) நிலையான எல்லையில் $\frac{\partial \phi}{\partial \nu} = 0$

(2) குழாயின் திறந்த முனையில் அழுத்தம் வளிமண்டல அழுத்தத்திற்குச் சமமாக இருக்க வேண்டும். ஆகவே, $\rho = \rho_0 (1+s)$ என்பதனுல், குழாயின் திறந்த முனையில் $s = 0$. எனவே சமன்பாடு (32)–லிருந்து, குழாயின் திறந்த முனையில்

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \tag{35}$$

எத் தீர்வாய்வையும் (Problem) ξ–முறையிலோ அல்லது ϕ–முறையிலோ இனித் தீர்வு காணுதல் இயலும். ஒரு முறையிலிருந்து மற்றெரு முறைக்கு

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = -s = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \tag{36}$$

என்ற வாய்ப்பாட்டின் வாயிலாகச் செல்ல வழியுண்டு.

l நீளமுள்ள குழாயில் பிரிவுக்கூறு § 7.3-ல் ξ-முறையில் தீர்வு கண்ட மூன்று வகைகளுக்கும் தீர்வு காண முடியும். அலை

யோட்டச் சமன்பாடு (34)-லிருந்து நிற்கும் அலைகளுக்கான தீர்வு

$$\phi = \frac{\cos}{\sin} nx \frac{\cos}{\sin} nct \tag{37}$$

(1) குழாயின் $x=0$, $x=l$ என்ற இரு முனைகளும் உறுதியாக மூடப்பட்டிருந்தால் $x=0$, $x=l$-களில் $\frac{\partial\phi}{\partial x}=0$. முதல் எல்லைக் கட்டுப்பாட்டினால் ϕ-ல் $\sin nx$ உறுப்பு இருக்க முடியாது. இரண்டாவது எல்லைக் கட்டுப்பாட்டிலிருந்து $nl=r\pi$.

$$\therefore \quad \phi = \alpha_r \cos \frac{r\pi x}{l} \cos\left(\frac{r\pi ct}{l}+\epsilon_r\right) \tag{38}$$

பொதுத் தீர்வு,

$$\phi = \sum_r \alpha_r \cos \frac{r\pi x}{l} \cos\left(\frac{r\pi ct}{l}+\epsilon_r\right) \tag{39}$$

(2) குழாயின் $x=0$ என்ற முனை உறுதியாக மூடப்பட்டு, $x=l$ என்ற முனை திறந்துள்ளது எனின் $x=0$-ல் $\frac{\partial\phi}{\partial x}=0$; $x=l$ல் $\frac{\partial\phi}{\partial t}=0$. முதல் எல்லைக் கட்டுப்பாட்டினால் ϕ-ல் $\sin nx$ உறுப்பு இருக்க முடியாது. இரண்டாவது எல்லைக் கட்டுப்பாட்டிலிருந்து $nl=(r+\frac{1}{2})\pi$.

$$\therefore \; \phi = \alpha_r \cos (r+\tfrac{1}{2})\frac{\pi x}{l} \cos\left\{(r+\tfrac{1}{2})\frac{\pi ct}{l}+\epsilon_r\right\} \tag{40}$$

பொதுத் தீர்வு,

$$\phi = \sum_r \alpha_r \cos (r+\tfrac{1}{2})\frac{\pi x}{l} \cos\left\{(r+\tfrac{1}{2})\frac{\pi ct}{l}+\epsilon_r\right\} \tag{41}$$

(3) குழாயின் $x=0$, $x=l$ என்ற இருமுனைகளும் திறந்துள்ளன என்றால் $x=0$, $x=l$-களில் $\frac{\partial\phi}{\partial t}=0$. முதல் எல்லைக்

கட்டுப்பாட்டினால் ϕ-ல் cos nx உறுப்பு இருக்க முடியாது. இரண்டாவது எல்லைக் கட்டுப்பாட்டினால் $nl=r\pi$.

$$\therefore\ \phi=\alpha_r \sin\frac{r\pi x}{l}\cos\left(\frac{r\pi ct}{l}+\epsilon_r\right) \tag{42}$$

பொதுத் தீர்வு,

$$\phi=\sum_r \alpha_r \sin\frac{r\pi x}{l}\cos\left(\frac{r\pi ct}{l}+\epsilon_r\right) \tag{43}$$

மேலேயுள்ள மூன்று வகைகளிலும், சமன்பாடு (36)-ஐப் பயன் செய்து ξ-ன் அமைப்பைப் பெறமுடியும். இதைக் காண்பது மாணவர்க்குப் பயிற்சியாக விடப்பட்டுள்ளது. மேலும் மேலேயுள்ள மூன்று வகைகளுக்கும் நிகழ்வெண்களைக் காண்க.

§ 7.8 *கோளச் செவ்வொழுங்கு* (Spherical Symmetry): ஆதியைப் (Origin) பொருத்துக் கோளச் செவ்வொழுங்கு உள்ள வகையில் அடிப்படை திட்டவடிவ அலையோட்டச் சமன்பாடு (34)-ன் தீர்வுகளைக் காண்போம். கோளச் செவ்வொழுங்கு இருப்பின் சமன்பாடு (34),

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} \tag{44}$$

என மாறுகிறது. சமன்பாடு (44)-ன் முன்னேறும் அலைகளுக்கான தீர்வுகள்,

$$\phi=\frac{1}{r}f(r-ct)+\frac{1}{r}g(r+ct) \tag{45}$$

சமன்பாடு (44)-ன் நிற்கும் அலைகளுக்கான தீர்வுகள்

$$\phi=r^{-1}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\, nr\ \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\, nct \tag{46}$$

a ஆரமுள்ள நிலையான கோளத்தினுள் உள்ள வளிக்கு மையம் $r=0$-ல், ϕ அளவிற்குட்பட்டதாக இருக்க வேண்டும்; மேலும் $r=a$-ல், $\frac{\partial\phi}{\partial r}=0$. (இவ்விரு எல்லைக்கட்டுப்பாடுகளும்

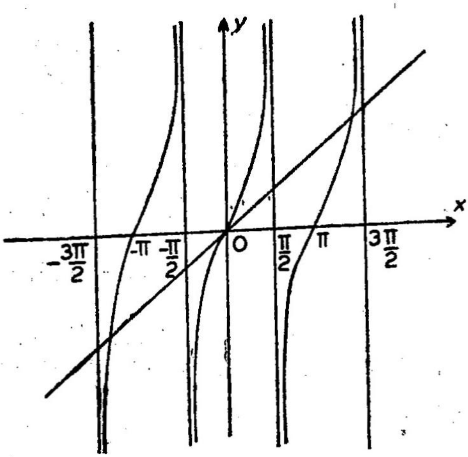
எவ்வாறு எடுத்துக் கொள்ளப்பட்டுள்ளன?) முதல் எல்லைக் கட்டுப்பாட்டினுல் ϕ-ல் cos nr உறுப்பு இருக்கவியலாது.

$$\therefore \phi = \frac{A}{r} \sin nr \cos (nct+\epsilon)$$

இரண்டாவது எல்லைக்கட்டிப்பாட்டினுல்

$$\tan na = na \qquad (47)$$

இக் காலக்கூறுச் சமன்பாடு ஒரு கடந்தச் சமன்பாடாகும். இச்சமன்பாட்டிற்குக் கந்தழி எண்ணிக்கையுள்ள தீர்வுகள் உள்ளன. வரைபடத்தில் $y = \tan x$, $y = x$ என்ற வளைவரைகள் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளிகளின் x — ஆயக்கூறுகள் சமன்பாடு (47)-ன் தீர்வுகளாகும்.



படம் 54

படத்திலிருந்து, இத்தீர்வுகள், r-ன் அதிக மதிப்பிற்கு

$$na = (r+\tfrac{1}{2})\,\pi \text{ (முதல் தோராயமாக)} \qquad (48)$$

என அணுகுகின்றன. இவ்வகையின் நிகழ்வெண்ணுடன் பிரிவுக்கூறு § 7.7-ல் வகை (2)-ன் நிகழ்வெண்ணை ஒப்பிடுவோம். இதிலிருந்து, உயர் நிகழ்வெண்களுக்குக் கோளத்தில் நிகழும்

அலைகள், ஒரு முனை மூடப்பட்டு மறுமுனை திறக்கப்பட்டுள்ள a நீளமுள்ள சீரான நேர்குழாயில் நிகழும் அலைகள் போன்றுள்ளன என்பது தெளிவாகின்றது. சமன்பாடு (47)-ன் தீர்வு (48) ஆல் முதல் தோராயமாக கொடுக்கப்படுகிறது. இனி (47)-ன் தீர்வின் இரண்டாவது தோராய மதிப்பைக் காண்போம்.

$na = (r+\frac{1}{2})\pi+h$ என்க.

(47)-லிருந்து,

$$\tan[(r+\tfrac{1}{2})\pi+h)] = (r+\tfrac{1}{2})\pi+h$$

அதாவது, $-\coth = (r+\frac{1}{2})\pi+h$

அதாவது, $-\frac{1}{h}(r+\frac{1}{2})\pi+h$ ($\because$ h சிறிய மதிப்பு உடையதாதலால் $\tan h=h$)

அதாவது, $(r+\frac{1}{2})\pi h+1=0$ (h^2-ஐப் புறக்கணித்து)

$$\therefore\ h = \frac{-1}{(r+\frac{1}{2})\pi}$$

$$\therefore\ na=(r+\tfrac{1}{2})\pi - \frac{1}{(r+\frac{1}{2})\pi}$$ (இரண்டாவது தோராயமாக) (49)

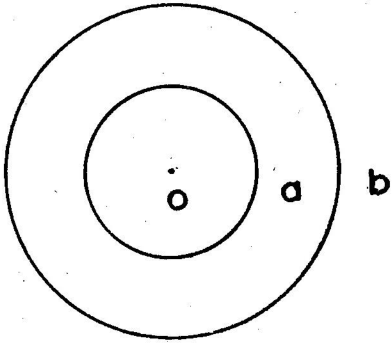
மாதிரி 1: பொதுமையமுள்ள (Concentric) a, b ஆரங்களையுடைய கோளங்களுக்கிடைப்பட்ட வெளியின் இயல்நிலை வகைகளைக் காண்க.

இது கோளச் செவ்வொழுங்குடைய வகையாதலால்

$$\frac{\partial\phi}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} \quad (50)$$

$$\therefore\ \phi = r^{-1}\ \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\ nr\ \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\ nct$$

$$= r^{-1}[A\cos nr+B\sin nr]\cos(nct+\epsilon) \quad (51)$$



படம் 55

எல்லைக் கட்டுப்பாடுகள்:

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ r=a\text{-ல் } \dfrac{\partial\phi}{\partial r}=0\\[2ex](2)\ r=b\text{-ல் } \dfrac{\partial\phi}{\partial r}=0\end{array}\right\}\qquad(52)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial r}=-\frac{1}{r^2}\,[A\cos nr+B\sin nr]\cos(nct+\epsilon)$$

$$+\frac{n}{r}\,[-A\sin nr+B\cos nr]\cos(nct+\epsilon)$$

மேலேயுள்ள இரு எல்லைக் கட்டுப்பாடுகளினால்,

$$A\,(\cos na+na\sin na)=B\,(na\cos na-\sin na)\qquad(53)$$

$$A\,(\cos nb+nb\sin nb)=B\,(nb\cos nb-\sin nb)\qquad(54)$$

(53), (54)-களிலிருந்து A, B-களை நீக்க,

$$\frac{\cos na+na\sin na}{\cos nb+nb\sin nb}=\frac{na\cos na-\sin na}{nb\cos nb-\sin nb}$$

அதாவது, $nb\cos n(b-a)-\sin n(b-a)$

$$=na\cos n(b-a)+n^2\,a\,b\,\sin(b-a)$$

அதாவது, $n(b-a)\cos n(b-a)=(1+n^2ab)\sin n(b-a)$ (55)

$\therefore$ காலக்கூறு $= \dfrac{2\pi}{nc}$, n-ன் மதிப்பு சமன்பாடு (55)-ஆல் கொடுக்கப்படுகிறது.

§ 7.9 **கூம்புக் குழாய்கள்** (Conical Pipes): இணை குழாயில் நாம் எடுத்துக் கொண்ட தள அலைகள் (Plane Waves) கூம்புக் குழாய்களுக்குப் பொருந்தாது. இவ்வகையில் கூம்புக் குழாயில் செல்லும் அலைகள் கோள அலைகளாகும். (Spherical Waves) இக் கோள அலைகள் குவியவோ (Converge) அல்லது விரியவோ (Diverge) செய்யும். கோள அலைகளுக்கு

$$\frac{\partial (r\,s)}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 (r\,s)}{\partial t^2} \tag{56}$$

(இச்சமன்பாட்டை நிறுவுக.) இதன் தீர்வு,

$$rs = (A \cos nr + B \sin nr) \cos (nct + \epsilon) \tag{57}$$

இத்தீர்வு நிற்கும் அலைகளுக்கானது. முனைகளிலுள்ள எல்லைக் கட்டுப்பாடுகளிலிருந்து மாறிலிகள் A, B-களின் மதிப்புகளை அறியலாம் மூன்று வகையான கூம்புக் குழாய்களைக் காண்போம்.

(i) திறந்துள்ள கூம்பு (Open Cone): திறந்துள்ள முனையில் $r=l$ (சாய்ந்த நீளம்), $s=0$. உச்சி முனை (Vertex) திறந்தோ அல்லது மூடியோ இருப்பினும் s-ன் மதிப்பு அளவிற்கடங்கிய தாக இருக்கவேண்டுமாதலால் $rs=0$. ஆகவே சமன்பாடு 57)-லிருந்து $A=0$; $B \sin nl = 0$.

$$\therefore\; nl = r\pi,\; r = 1, 2, 3 \ldots\ldots$$

r-ஆவது இயல்நிலைவகையின் நிகழ்வெண் $= \dfrac{rc}{2l}$, அடிப்பகுதி திறந்துள்ள கூம்பின் இசைவரிசைத் தொடரானது, கூம்பின் சாய்ந்த நீளத்தையுடைய ஒரு 'திறந்த' நேர்க்குழாயின் இசை வரிசைத் தொடரைப் போன்றுள்ளதைக் காண்க.

(ii) மூடப்பட்டுள்ள கூம்பு (Closed Cone): மூடப்பட்டுள்ள முனைகள் $r=o$, $r=l$ களில் $\dfrac{ds}{dr}=o$ என்பதே எல்லைக் கட்டுப் பாடுகளாகும். இவ்வெல்லைக் கட்டுப்பாடுகளினால்

$$\tan nl = nl \tag{58}$$

$x = nl$ என்க. $y = x$, $y = \tan x$ என்ற வளைவரைகள் வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளிகளின் x–ஆயக் கூறுகள் சமன்பாடு (58)-ன் தீர்வுகளாகும். இச்சமன்பாட்டின் தீர்வுகளின் எண்ணிக்கை கந்தழியாகும். இவ்விதமாக $\frac{nl}{\pi} = 0,\ 1.43,\ 2.46$ $3.47,\ 4.47,\ 5.48,\ 6.48, \ldots$ என்ற மதிப்புகள் கிடைக்கின்றன. r-ஆவது இயல்நிலை வகையின் நிகழ்வெண் $= \frac{rc}{2l}$; இங்கு r என்பது மேலேயுள்ள எண் தொடரில் r-ஆவது உறுப்பாகும். ஆகவே, இவ்வகையில் மேல் சுரங்கள் இசை வரிசையில் இல்லை. எதிர்க்கணுக்கள் மட்டிலுமே குழாயின் நீளப்போக்கில் சம தொலைவில் உள்ளன; ஆயின் கணுக்கள் இவ்வாறு இல்லை.

(iii) துண்டிக்கப் பட்டுள்ள கூம்பு (Truncated Cone): இங்கு கூம்பின் முனைகள் $x = l_1$, $x = l_2$ என்ற புள்ளிகளில் உள்ளன என்க. துண்டிக்கப்பட்ட கூம்பின் இரு முனைகளும் திறந்துள்ளன எனின் அடிப்படை நிகழ்வெண்ணும், மேல் சுரங்களும் கூம்பின் சாய்ந்த நீளம் $(l_2 - l_1)$க்குச் சமமான நீள முடைய ஒரு நேரான திறந்த குழாய்க்குரியது போன்றதாகும். இங்கும் எதிர்க்கணுக்கள் சமதொலைவில் உள்ளன; ஆயின் கணுக்கள் இவ்வாறு இல்லை. துண்டிக்கப்பட்ட கூம்பின் இரு முனைகளும் மூடப்பட்டிருந்தால்,

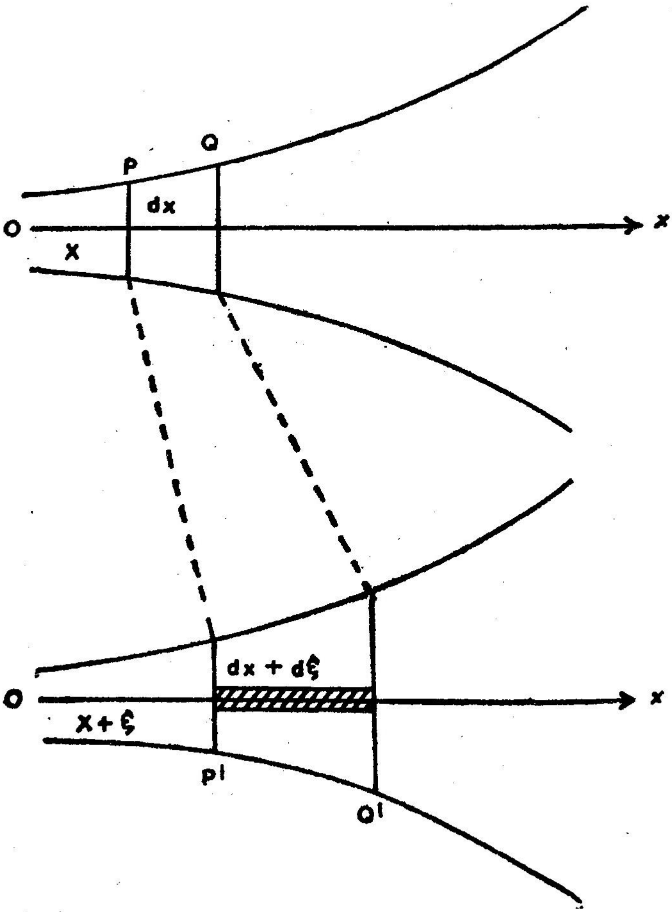
$$\tan^{-1}(n\, l_2) - \tan^{-1}(n\, l_1) = n\,(l_2 - l_1) \qquad \textbf{(59)}$$

எனக் காட்டலாம். $l_1 = o$ எனின் கூம்பின் சாய்ந்த நீளம் $= l_2$.

$\therefore$ (59)லிருந்து $\tan nl_2 = nl_2$; இது சமன்பாடு (58) போன்றதாகும்.

l_1, l_2 என்பன மிகப் பெரிய மதிப்புடையன எனின் துண்டிக்கப்பட்ட கூம்பின் கோணம் மிகச் சிறியது. ஆகவே $\tan n\,l_2$, $\tan nl_1$ என்ற இரண்டின் மதிப்புகளும் $\frac{\pi}{2}$-ன் ஒற்றைப் படைப் பெருக்கலுக்குச் சமமாகும். ஆகவே $l_2 - l_1$ என்பது $\frac{\lambda}{2}$-ன் மடங்குகளாகும். இம் முடிவு நாம் முன்னர் நேர்க் குழாய்க்குக் கண்ட முடிவுடன் ஒத்துள்ளது. மேலே கூறப்பட்டுள்ள முடிவுகளைக் காண்பது மாணவர்க்குப் பயிற்சியாக விடப்பட்டுள்ளது.

§ 7.10 குழாயின் குறுக்கு வெட்டு A குழாயின் நீளப் போக்கில் மெதுவாக வேறுபட்டால் குழாயில் நிகழும் அலைகளின் இயல்நிலை வகைகளைத் காண்போம். குழாயின் நடு அச்சு x ஆயமாக எடுத்துகொள்ளப் படுகிறது. x ஆயத்திற்குச் செங்குத்தான, குழாயின் எந்தக் குறுக்கு வெட்டின் ஊடாகவும் திசைவேகம் u ஒரு மாறிலியென்பது தோராயமாக உண்மையாகும். கிளர்ச்சிகள் சிறியன என்றும், அலை நீளம் குறுக்கு வெட்டின் விட்டத்துடன் ஒப்பிடப் பெரியது என்றும் கொள்வோம்.



படம் 56

x, $x+dx$ தொலைவுகளிலுள்ள P, Q என்ற இரு தளங்களுக்கு இடைப்பட்ட வளி, அலை செல்வதனுல் $P'Q'$ என்ற நிலையை அடைகிறது என்க; இங்கு P-ன் இடப் பெயர்ச்சி அதன் இடைநிலையிலிருந்து ξ, Q-ன் இடப் பெயர்ச்சி அதன் இடைநிலையிலிருந்து $\xi+d\xi$. $P'Q'$-ன் இயக்கச் சமன்பாட்டைக் காண்பதற்கு $P'Q'$-ல், படத்தில் காட்டப் பட்டுள்ளதைப் போன்று, வளியின் சிறிய பட்டகத்தின் இயக்கத்தை எடுத்துக் கொள்வோம். இதன் இயக்கச் சமன்பாடு தோராயமாக $P'Q'$-ன் இயக்கச் சமன்பாட்டைக் கொடுக்கிறது. பிரிவுக் கூறு § 7.2-ல் சமன்பாடு (4) போன்று

$$\rho_{\circ}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}=-\frac{\partial p}{\partial x} \tag{60}$$

தொடர்ச்சிச் சமன்பாட்டிலிருந்துஅழுத்தம் p-ஐ ξ-ன் சார்பாகக் காணவேண்டும். பொருண்மை பேணுகையினுல் $P'Q'$ல் உள்ள வளியின் பொருண்மை PQ-ல் உள்ள பொருண்மைக்குச் சமமாக இருக்கவேண்டும் என்ற நிபந்தனையிலிருந்து தொடர்ச்சிச் சமன்பாட்டை எழுதலாம். ஆகவே, $P'Q'$-ல் உள்ள வளியின் அடர்த்தி ρ எனின்

$$\rho_{\circ}\,\mathrm{A}(x)\,dx=\rho\mathrm{A}(x+\xi).\quad(dx+d\xi)$$

அதாவது, $$\rho_{\circ}\,\mathrm{A}(x)=\rho\left[\mathrm{A}(x)+\xi\ \frac{\mathrm{A}}{\partial x}\right]\left[1+\frac{\partial \xi}{\partial x}\right]$$

அதாவது, $$\rho_{\circ}=\rho\left[1+\frac{\xi}{\mathrm{A}}\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x}\right]\left[1+\frac{\partial \xi}{\partial x}\right]$$

$$=\rho\left[1+\frac{\xi}{\mathrm{A}}\ \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x}+\frac{\partial \xi}{\partial x}\right]$$

[சிறிய மதிப்புகளின் உயர்படிகளைப் புறக்கணித்து]

$$\therefore\quad \rho=\rho_{\circ}\left[1-\frac{\xi}{\mathrm{A}}\ \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x}-\frac{\partial \xi}{\partial x}\right]$$

[சிறிய மதிப்புகளின் உயர்படிகளைப் புறக்கணித்து]

$$=\rho_{\circ}\left[1-\frac{1}{\mathrm{A}}\ \frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{A}\,\xi)\right] \tag{61}$$

சமன்பாடுகள் (60), (61) களிலிருந்து p-ஐ நீக்க,

$$\rho_\circ \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$= -\frac{dp}{d\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}$$

$$= -c^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad \left(\because \frac{dp}{d\rho} = c^2\right)$$

$$= c^2 \rho_\circ \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial x}(A\,\xi)\right] \quad [(61) \text{ விருந்து}]$$

ஆகவே இயக்கச் சமன்பாடு,

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial x}(A\,\xi)\right] \tag{62}$$

A ஒரு மாறிலியெனின் சமன்பாடு (62) விருந்து, முந்திய திட்டவடிவ அலையோட்டச் சமன்பாடு (5) கிடைக்கிறது. சிறப்பு வகையாக $A = A_\circ e^{2ax}$ எனின் மிகச் சிறந்த ஓசைப் புலனைச் சார்ந்த இசைத் தட்டுப் பெட்டியின் அடுக்குக் குறி ஒலிபெருக்கியின் (Exporential Horn) வடிவம் கிடைக்கும். $A = A_\circ e^{2ax}$ எனின் சமன்பாடு (62) விருந்து,

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2\left[\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + 2a\frac{\partial \xi}{\partial x}\right] \tag{63}$$

இதன் தீர்வு

$$\xi = X(x)\,T(t) \text{ என்க,}$$

$$\therefore \frac{1}{c^2}\frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} + \frac{2aX'}{X} = -n^2 \text{ (என்க). முன்னர்}$$

பல முறைகள் தீர்வு கண்டது போன்று,

$$T = \frac{\cos}{\sin} nct$$

$$= e^{\pm inct}$$

$$= A_1 e^{inct} + B_1 e^{-inct}$$

மேலும்,

$$X'' + 2aX' + n^2X = 0$$

இதன் துணைச் சமன்பாடு

$$m^2 + 2am + n^2 = 0.$$

$$\therefore \quad m = -a \pm \sqrt{a^2 - n^2}$$

மிகப் பெரும்பாலான அடுக்குக் குறி ஒலி பெருக்கியில் n^2-ன் மதிப்பு a^2-ன் மதிப்பைவிட மிக அதிகம். ஆகவே n^2-ஐப் பொருத்து a^2-ஐ புறக்கணிக்க

$$m = -a \pm in$$

$$\therefore \quad X = e^{-ax}(A_2 e^{inx} + B_2 e^{-inx})$$

$$\therefore \quad \xi = e^{-ax}(A_2 e^{inx} + B_2 e^{-inx}) A_1 e^{inct} + B_1 e^{-inct})$$

$$= e^{-ax}(A e^{in(ct-x)} + B e^{in(ct-x)}) \qquad (64)$$

இச்சமன் பாட்டில் முதல் உறுப்பு வெளியே செல்லும் அலையையும் இரண்டாம் உறுப்பு உள்ளே வரும் அலையையும் குறிக்கின்றன. இதிலிருந்து கீழ்க்கண்ட முடிவுகள் கிடைக்கின்றன. முதலாவதாக, அலைகள் இவ்வகை ஒலிபெருக்கியின் வழியே வெளியே c திசைவேகத்துடன் செலுத்தப்பட முடியும்; ஏறத்தாழ, c நிகழ்வெண்ணின் சார்பற்றது. இரண்டாவதாக, அலையின் அழிவு செய்யும் உறுப்பும் நிகழ்வெண்ணின் சார்பற்றது. இவ்விரு சார்பற்ற தன்மையினால்தான் ஒலிபெருக்கியின் குறுகிய முனையில் உண்டாக்கப்படும் எவ்வித அலைகளும் நல்ல முறையில் பெருக்கப் படுகின்றன. இப் பண்பினாலேயே நல்ல ஒலிபெருக்கியின் அமைப்பிற்கு அடுக்குக் குறி வடிவமைப்பு எடுத்துக் கொள்ளப் பட்டுள்ளது. A-ன் மற்ற வடிவங்களுக்கு இப்பண்பு பொதுவாக உண்மையில்லை.

பயிற்சி

(1) l நீளமுள்ள ஒரு குழாயின் ஒருமுனை உறுதியாக அடைக்கப்பட்டு மறுமுனை திறந்துள்ளது. திறந்துள்ள முனையிலிருந்து குழாயின் நடுப்புள்ளி வரையில் ρ அடர்த்தியுள்ள காற்றும் மற்றப் பாதியில் ρ_1 அடர்த்தியுள்ள வளியும் உள்ளன எனின்,

நிகழும் அலைகளின் இயல்நிலை வகைகளின் நிகழ்வெண்கள் p

$\tan\frac{\pi pl}{c}\ \tan\frac{\pi pl}{c_1}=\frac{\rho_1 c_1}{\rho c}$ என்ற சமன்பாட்டைச் சமன் செய்கின்றன என நிறுவுக. இங்கு c, c_1 என்பன முறையே காற்றிலும் வளியிலும் ஒலியலையின் திசை வேகமாகும். (M.U.)

(2) இரு முனைகளும் திறந்துள்ள ஒருமப் பரப்புக் குறுக்கு வெட்டுக் கொண்டுள்ள ஒரு குழாய் M பொருண்மையுள்ள ஒரு மெல்லிய உந்து தண்டினால் l, l' நீளமுள்ள இருபகுதிகளாகப் பிரிக்கப்படுகின்றன ; சுருள்வில்லுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ள இப்பொருண்மை M-ன் இயல் அதிர்வியக்கத்தின் காலக்கூறு $\frac{2\pi}{m}$ குழாயில் காற்றும் எடுத்துக் கொள்ளப்பட்டால் நிகழும் அலைகளின் இயல்நிலை வகைகளின் நிகழ்வெண் $\frac{2\pi}{n}$ எனின்

$$M\ (m^2-n^2)=\rho cn\ \left\{\tan\frac{nl'}{c}+\tan\frac{nl}{c}\right\}$$

என நிறுவுக.

3. காற்று உள்ள ஒரு குழாயின் ஒருமுனை உறுதியாக மூடப்பட்டு மறுமுனை m பொருண்மையுள்ள அடைப்பானல் சரியாக மூடப்பட்டுள்ளது. இவ்வடைப்பான் குழாயினுள் உராய்வின்றி இயங்கவல்லது. காற்று அடைபட்டுள்ள குழாயின் நீளம் l ; அடைபட்டுள்ள காற்றின் பொருண்மை m' ; அடைபட்டுள்ள காற்றில் ஒலியலையின் திசைவேகம் c. அதிர்வியக்கத்தின் காலக்கூறு $\frac{pl}{c}\tan\frac{pl}{c}=\frac{m'}{m}$ என்ற சமன்பாட்டினல் கொடுக்கப்படுகின்றது என நிறுவுக.

4. ஒரு சீரான நேர்குழாயில் மிகச் சரியாகப் பொருந்தியுள்ள ஒரு வழவழப்பான M பொருண்மையள்ள உந்துதண்டு தங்குதடையின்றி இயக்கம் கொள்ளத்தக்கது. M-ல் ஒரு இசையலைத் தொடர்ச்சியின் எதிரொளிப்பையும் செலுத்துகையையும் ஆராய்ந்து எதிரொளிப்புக்கெழு, மற்றும் செலுத்துகைக் கெழுவையும் காண்க.

5. a_1, a_2, a_3 பக்கங்களையுடைய ஒரு செவ்வகப் பெட்டியில் நிகழும் ஒலியலைகளை ξ முறையில் ஆராய்க. பெட்டி மிகப்

பெரியதாயின் நிகழ்வெண் N-க்குக் குறைவான இயல்நிலை வகைகளின் எண்ணிக்கை தோராயமாக இருபடிக் கணியன் (Quadratic) $\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{a_2^2}+\frac{z^2}{a_3^2}=\frac{4N^2}{c^2}$-ன் கன அளவில் எட்டில் ஒரு பங்காகும் என நிறுவுக. இதிலிருந்து தோராயமாக இவ்வெண் $\frac{4\pi N^3 a_1a_2a_3}{3c^2}$ என நிறுவுக. (M.U.)

6. ஒலியலையின் திசைவேகத்தைக் காண லெப்லாஸின் திருத்தம் என்ன ?

7. ஒரு கூம்புக் குழாயில் திறந்துள்ள விரிந்த பகுதியின் ஆரம் 1 மீட்டர் என்றால் அடிப்படை நிகழ்வெண்ணின் மதிப்பைக் காண்க. இங்கு $c=332$ மீட்டர்/விநாடி.

8. $x=o$, $x=l$-களில் மூடப்பட்டுள்ள ஒரு குழாயில் x-ல் குறுக்குவெட்டின் பரப்பு $=A_a x^n$. நிற்கும் அலைகளுக்கு வளியின் இடப்பெயர்ச்சி கீழ்க்கண்ட சமன்பாட்டினால் கொடுக்கப்படுகிறது என நிறுவுக.

$$\xi=x^{(1-n)/2} J_m(qx)\cos(qct+\epsilon),$$

இங்கு $m=\frac{n+1}{2}$, $J_m(ql)=0$.

மின்காந்த அலைகள்

(ELECTROMAGNETIC WAVES)

§ 8.1 இப்பகுதியைப் படிப்பதற்கு உதவியாகவிருக்க் வெக்டார் கணிதத்திலிருந்து சில முடிவுகள் கீழே கொடுக்கப் பட்டுள்ளன.

பெருக்கல் (Multiplication)

எண்ணி பெருக்கி (Scalar Product) :

$\overline{A}.\ \overline{B} = AB \cos \angle AOB$ [$\overline{A}$ மற்றும் $\overline{B}$-க்கு இடைப்பட்ட கோணம்]

$$= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

வெக்டார் குறுக்குப் பெருக்கி (Vector Product) :

$\overline{A} \times \overline{B} = \overline{n}\ AB \sin \angle AOB$ [$\overline{A}$ மற்றும் $\overline{B}$-க்கு இடைப் பட்ட கோணம்]

$$= \overline{i}\ (A_y B_z - A_z B_y) + \overline{j}\ (A_z B_x - A_x B_z) + \overline{k}\ (A_x B_y - A_y B_x)$$

$$= \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ A_x & A_y & A_y \\ B_x & B_y & B_y \end{vmatrix}$$

வகையிடல்

(DIFFERENTIATION)

செவ்வக ஆயக்கூறுகள் (Rectangular Co-ordinates) :

($\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ என்பன ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான ஓரும வெக்டார்கள்)

கிரேடியண்ட் (Gradient)

$$\triangle P = \overline{i}\frac{\partial P}{\partial x} + \overline{j}\frac{\partial P}{\partial y} + \overline{k}\frac{\partial P}{\partial z}$$

டைவர்ஜன்ஸ் (Divergence)

$$\triangle . \overline{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

கர்ல் (Curl)

$$\triangle \times \overline{A} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

$$= \overline{i}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)$$

$$+ \overline{j}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \overline{k}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

லெப்லாஸியன் (Laplacian)

$$\triangle^2 \overline{F} = \triangle . \triangle \overline{F} = \frac{\partial^2 \overline{F}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{F}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \overline{F}}{\partial z^2}$$

$$\Delta^2 \overline{A} = \overline{i}\ \Delta^2 A_x + \overline{j}\ \triangle^2 A_y + \overline{k}\ \Delta^2 A_z$$

உருளை ஆயக் கூறுகள் (Cylindrical Co-ordinates) :

($\overline{1}_r$, $\overline{1}_\theta$, $\overline{k}$ என்பன ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான ஓரும வெக்டார்கள்)

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ z = z$$

கிரேடியண்ட் (Gradient) $\Delta P = \bar{1}_r \frac{\partial P}{\partial r} + \bar{1}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \bar{k} \frac{\partial P}{\partial z}$

டைவர்ஜன்ஸ் (Divergence) $\Delta \cdot \bar{A} = \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{A_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

கர்ல் (Curl)

$$\Delta \times \bar{A} = \begin{vmatrix} \frac{\bar{1}_r}{r} & \bar{1}_\theta & \frac{\bar{k}}{r} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_r & r A_\theta & Az \end{vmatrix}$$

2 மாதிகளில்: $\Delta \times \bar{A} = k\left(\frac{\partial A_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} + \frac{A_\theta}{r}\right)$

லெப்லாஸியன் (Laplacian) $\Delta^2 \bar{F} = \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial^2 r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{F}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial z^2}$

$$\Delta^2 \bar{A} = \bar{1}_r \left(\Delta^2 A_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} - \frac{A_r}{r^2}\right)$$

$$+ \bar{1}\theta \left(\Delta^2 A_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{A_\theta}{r^2}\right)$$

$$+ \bar{k} (\Delta^2 Az)$$

கோள ஆயக்கூறுகள் **(Spherical Co-ordinates)**

($\bar{1}_r$ $\bar{1}_\theta$, $\bar{1}_\phi$ என்பன ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான ஒரும வெக்டார்கள்)

$$x = r \cos\phi \sin\theta, \quad y = r \sin\phi \sin\theta, \quad z = r\cos\theta$$

கிரேடியண்ட் (Gradient) $\Delta P = \bar{1}_r \frac{\partial P}{\partial r} + \bar{1}_\phi \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial P}{\partial \phi} + \bar{1}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta}$

டைவர்ஜன்ஸ் (Divergence) $\Delta \cdot \bar{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial A\phi}{\partial \phi}$

$$+ \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin\theta)$$

கர்ல் Curl $\Delta X \overline{A} = \begin{vmatrix} \frac{\overline{1}_r}{r^2 \sin\theta} & \frac{\overline{1}_\theta}{r\sin\theta} & \frac{\overline{1}_\phi}{r} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\phi} \\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta A_\phi \end{vmatrix}$

லெப்லாஸியன் (Laplacian)

$$\Delta^2 \overline{F} = \frac{\partial^2 \overline{F}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \overline{F}}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 \overline{F}}{\partial\phi^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \overline{F}}{\partial r} + \frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial \overline{F}}{\partial\theta}$$

தேற்றங்கள்

Irrotational Field and Scalar Potential

$$\Delta \times (\Delta P) \equiv 0$$

மறுதலையாக, $\Delta \times \overline{B} = 0$ என்றால்

$\overline{B} = -\Delta P$ எனக் கொள்ளவியலும்.

Solenoidal Field and Vector Potential

$$\Delta \cdot (\Delta \times \overline{A}) \equiv 0$$

மறுதலையாக, $\Delta \cdot \overline{B} = 0$ என்றால்

$\overline{B} \times \Delta \times \overline{A}$ எனக் கொள்ளவியலும்.

§ 8.2 மின்காந்த அலைகளை வெளியில் (Space) செலுத்தலாம் என ஃபாரடே (Faraday) முதன் முதலாகக் கருதினார். இக்கருத்தின் உண்மை மாக்ஸ்வெல்லின் (Maxwell) ஆராய்ச்சிகளின் விளைவாக உறுதியாயிற்று. மின் காந்தத்தின் பண்புகளை அடிப்படைச் சமன்பாடுகளின் வாயிலாக மாக்ஸ்வெல் நிறுவினார். மேலும், இச் சமன்பாடுகளினின்று கிடைத்த வகைக் கெழுச் சமன்பாட்டின் (Differential Equation) தீர்வுகள், கட்டற்ற வெளியினுடே ஒளியின் திசைவேகத்துடன் செல்லும் குறுக்கு அலைகளை குறித்தன. இவ்வலைகளின் எதிரொளிப்பு, ஒளி விலகல் (Refraction), விளிம்பு விளைவு (Diffraction) போன்ற பண்புகள் செய் முறையில் ஒளியலைகளுக்கு நிறுவப் பட்ட பண்புகள் போன்றதாகும். ஆகவே ஒளியலைகள் மின்காந்த அலைகளின் வடிவமைப்புடையது என்ற கொள்கை பிறந்தது.

மாக்ஸ்வெல்லின் கொள்கை பேரளவு நிகழ்ச்சியைத்தான் (Macroscopic Phenomena) முழுவதுமாகச் சார்ந்தது. பருப் பொருள் (Matter) தொடர்ச்சியாக உள்ளது, மற்றும் அணு அமைப்பு (Atomic Structure) கிடையாது என்று இக் கொள்கை எடுத்துக் கொண்டுள்ள கற்பிதங்களால் இக் கொள்கைக்கு சில குறைபாடுகள் உண்டு. உதாரணமாக, நிறப்பிரிகை (Dispersion) நிகழ்ச்சி—ஒளி விலகல் எண் நிகழ்வெண்ணைப் பொருத்து மாறுவது போன்றவைகளுக்கு இக் கொள்கையில் விளக்கம் கிடையாது. மின் கடத்தாப் பொருள் மாறிலியும் (Dielectric Constant), ஊடகத்தின் காந்த உட்புகுத்திறனும் (Magnetic Permeability) நிகழ்வெண்ணைப் பொருத்து மாறுவதே இதன் காரணம். இத்தகைய நிகழ்ச்சியை இங்கு நாம் எடுத்துக் கொள்ளப் போவதில்லை.

இனி மின்காந்த அலைகளைப் பற்றிய அடிப்படையான மாக்ஸ்வெல்லின் சமன்பாடுகளில் (Maxwell's Equations) வரும் உறுப்புக்களைப் பார்ப்போம். $\overline{E}$ $(=E_x \overline{i} + E_y \overline{j} + E_z \overline{k})$ என்பது மின்புல வலிமை வெக்டார் (Electric Field Strength Vector) ; $\overline{H}$ $(=H_x \overline{i} + H_y \overline{j} + H_z \overline{k})$ என்பது காந்தப் புல வலிமை வெக்டார் (Magnetic Field Strength Vector) ; $\overline{B}$ என்பது காந்தத் தூண்டல் வெக்டார் (Magnetic Induction Vector) ; $\overline{D}$ என்பது மின் கடத்தா இடப்பெயர்ச்சி வெக்டார் (Dielectric Displacement Vector) ; $\overline{j}$ என்பது மின்னோட்ட அடர்த்தி வெக்டார் (Current Density Vector). நாம் எடுத்துக் கொள்ளும் ஊடகங்கள் எல்லாம் ஃபெரோ காந்தம் (Ferromagnetism) அல்லது நிலையான தள விளைவு (Permanant Polarisation) இல்லாத திசையொப்புப் பண்பியலானது (Isotropic) என்போம். ϵ என்பது மின் கடத்தாப் பொருள் மாறிலி (Dielectric Constant), μ என்பது உட் புகுத் திறன் (Permeability) எனின்,

$$B = \mu \overline{H}$$
$$D = \epsilon \overline{E}.$$

ρ என்பது மின்னூட்ட அடர்த்தி (Charge Density), σ என்பது கடத்து திறன் (Conductivity) ; $\overline{j}$, $\overline{B}$, $\overline{H}$ என்பனவற்றை e.m.u. அலகுகளினுலும், $\overline{E}$, $\overline{D}$ என்பனவற்றை e.s.u. அலகுகளினுலும் அளப்போம். இவ்விரு முறை அலகுகளின் விகிதம் c-யினுல் குறிக்கப் படுகின்றது. $\frac{1 \text{ e.m u அலகு}}{1 \text{ e.s.u. அலகு}} = c = 3 \times 10^{10}$ cm./sec மேலே கூறப்பட்டுள்ள எல்லா கணியங்களின் வரையறைகளையும் பண்புகளையும் மின் காந்தவியல் பற்றிய புத்தகத்தில் காண்க. (பார்வைக் குரிய புத்தகங்கள் பின்னுல்

கொடுக்கப் பட்டுள்ளது). இனி வெக்டார் வடிவமைப்பில் மாக்ஸ்வெல்லின் சமன்பாடுகள் கீழே கொடுக்கப் பட்டுள்ளன.

$$\Delta \cdot \overline{D} = 4\pi\rho \tag{1}$$

$$\Delta \cdot \overline{B} = 0 \tag{2}$$

$$\Delta \times \overline{H} = 4\pi\overline{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \overline{D}}{\partial t} \tag{3}$$

$$\Delta \times \overline{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \overline{B}}{\partial t} \tag{4}$$

$$\overline{D} = \epsilon\,\overline{E} \tag{5}$$

$$\overline{B} = \mu\,\overline{H} \tag{6}$$

$$\overline{j} = \sigma E \tag{7}$$

பிரிவுக் கூறு § 8.1-ல் உள்ள முடிவுகளைப் பயன்படுத்தி தெக்காட்டின் ஆயக் கூறுகளில் மாக்ஸ்வெல்லின் சமன்பாடுகள் :

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 4\pi\rho \tag{8}$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= 4\pi j_x + \frac{1}{c}\frac{\partial D_x}{\partial t} \\
\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= 4\pi j_y + \frac{1}{c}\frac{\partial D_y}{\partial t} \\
\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= 4\pi j_z + \frac{1}{c}\frac{\partial D_z}{\partial t}
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial B_x}{\partial t} \\
\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial B_y}{\partial t} \\
\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial B_z}{\partial t}
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

$$\left.\begin{aligned} D_x &= \epsilon E_x \\ D_y &= \epsilon E_y \\ D_z &= \epsilon E_z \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

$$\left.\begin{aligned} B_x &= \mu H_x \\ B_y &= \mu H_y \\ B_z &= \mu H_z \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

$$\left.\begin{aligned} j_x &= \sigma E_x \\ j_y &= \sigma E_y \\ j_z &= \sigma E_z \end{aligned}\right\} \quad 14)$$

வெக்டார் வடிவமைப்பில் சமன்பாடுகள் எளிய வடிவுடையனவாக இருந்தன. மேலும் தீர்வுகள் காணும் முறை வெக்டார் முறையில் எளியது. ஆகவே தீர்வுகளை நாம் வெக்டார் வடிவமைப்பிலேயே காண்போம். இதிலிருந்து தெக்காட்டின் வடிவமைப்பைக் காண்பது எளிது.

மாக்ஸ்வெல்லின் சமன்பாடுகளின் பௌதீகப் பண்புகளை மின்காந்தம் பற்றிய புத்தகத்திலிருந்து காண்க.

ஊடக மாற்றம் ஏற்படும் எல்லையில் உள்ள எல்லைக் கட்டுப்பாடுகளைக் காண்போம். இரு ஊடகங்களைப் பிரிக்கும் எல்லைத் தளத்திற்குச் செங்குத்துத் திசையில் உள்ள கூறு, n எனும் கீழ்க்குறி (Suffix) யாலும், எல்லைத் தளத்திலேயுள்ள எந்தந் திசையிலும் உள்ள கூறு, s எனும் கீழ்க்குறியாலும் கொடுக்கப் படுகின்றன என்க. ஒரு ஊடகத்திலிருந்து மறு ஊடகத்திற்குச் செல்லும்பொழுது

D_n, B_n, E_s, H_s என்பன தொடர்ச்சியானவை (Coutinuous) என்பதுதான் தேவையான எல்லைக் கட்டுப்பாடுகள். (15)

இரு முக்கியமான முடிவுகளைப் பயன் படுத்தப் போகிறோம். முதலாவதாக, மின்காந்தப்புலம் ஆற்றலைச் சேமித்து வைக்கிறது என்போம். ஊடகத்தின் ஒருமக் கன அளவிற்கு இவ்வாற்றலின் அடர்த்தி

$$\frac{1}{8\pi}\left\{ \epsilon\, \overline{E}^2 + \mu\, \overline{H}^2 \right\} \quad (16)$$

இரண்டாவதாக, ஆற்றல் பாயும் வீதத்தைப் பாயின்டிங் வெக்டார் (Poynting Vector) எனும் வெக்டார் கொடுக்கிறது. இவ் வெக்டாரின் பருமனும் (Magnitude) திசையும் (Direction)

$$\overline{S} = \frac{c}{4\pi}(\overline{E} \times \overline{H}) \tag{17}$$

என்பதால் கொடுக்கப் படுகின்றன. இதிலிருந்து ஒருமநேரத்தில் ஒருமப் பரப்பிற்குச் செங்குத்துத் திசையில் பாயும் ஆற்றலின் அளவு கிடைக்கிறது. $\overline{E}$-யும் $\overline{H}$-உம் மிக வேகமாக வேறுபடும் கணியங்கள். ஆகவே (17)-ன் சராசரி மதிப்புத் தான் பௌதிக முக்கியத்துவம் உடையது.

§ 8.3 கண்ணாடி போன்ற கடத்தாத ஊடகத்தை (Non-conducting Medium) எடுத்துக் கொண்டால் சமன்பாடு (7)-ல் $\sigma = 0$. மேலும் ஊடகம் ஒரு படித்தானது (Homogeneous Medium) என்றால் ϵ, μ என்பன மாறிகளாகும். மின்னூட்டத்தில் மீதியில்லையெனின் $\rho = 0$. இக்கற்பிதங்களுக்குட்பட்டு மாக்ஸ்வெல்லின் சமன்பாடுகள் :

$$\Delta\cdot \bar{E} = 0 \quad (\because \rho = 0, \bar{D} = \epsilon \bar{E})$$

$$\Delta\cdot \bar{H} = 0 \quad (\because \bar{B} = \mu H)$$

$$\Delta\cdot \times \bar{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \bar{H}}{\partial t}$$

$$\Delta \times \bar{H} = \frac{\epsilon}{c}\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \tag{18}$$

வெக்டார் கணிதத்திலிருந்து

$$\Delta \times (\Delta \times \bar{E}) = \Delta(\Delta\cdot \bar{E}) - \Delta^2 \bar{E}$$

$$= -\Delta^2 \bar{E} \quad (\because \Delta.\ \bar{E} = 0)$$

$\therefore$ (18)-ல் மூன்றாவது சமன்பாட்டிலிருந்து,

$$-\Delta^2 \bar{E} = -\Delta \times \frac{\mu}{c}\frac{\partial \overline{H}}{\partial t}$$

$$= -\frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\Delta \times \bar{H})$$

$$\therefore \Delta^2 \bar{E} = \frac{\mu\epsilon}{c^2}\frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} \tag{19}$$

இதே போன்று H-ஐ நீக்க

$$\Delta^2 \bar{H} = \frac{\mu \epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial t^2} \qquad (20)$$

ஆகவே, இத்தகைய ஊடகத்தில் $c/\sqrt{\mu\epsilon}$ திசை வேகத்துடன் அலைகள் மாறு வடிவமைப்புடன் செலுத்தப்படவல்லன என அறிகிறோம். கட்டற்ற வெளியில் (Free Space) $\epsilon = \mu = 1$ என்பதால், இத்திசை வேகம் c ஆகும். ஆனால் c என்பது இரு வகை மின் அலகுகளின் விகிதமாகும்; எனவே இவ்விகிதம் திசை வேகத்தின் பரிமாணம் (Dimension) உடையது. இதன் மதிப்பைச் செய்முறைச் சோதனை மூலமாகக் காணவியலும். உதாரணமாக, கீழ்க்கண்ட மதிப்புகள் அலகுகளின் விகிதம் c-ன் நல்ல தோராய மதிப்புகளாகும்.

Rosa and Dorsey (1907)	...	2.9971×10^{10}
Perot and Fabry (1898)	...	2.9973×10^{10}
Hurmuzescu (1896)	...	3.0010×10^{10}
Abraham (1890)	...	2.9913×10^{10}

c-ன் மிக நெருங்கிய தோராய மதிப்பு Rosa மற்றும் Dorsey யினால் கண்டுபிடிக்கப்பட்டதாகும்; அதாவது $c = 2.9971 \times 10^{10}$ கட்டற்ற வெளியில் (Free Space) ஒளியின் திசைவேகம் இம்மதிப்பேயாகும். இதிலிருந்து ஒளியலைகள், மின் காந்த அலைகளின் பண்புடையன என்ற கருத்து உருப்பெற்றது. இக்கருத்தின் உண்மை பின்னர் முழுவதுமாக நிறுவப்பட்டுவிட்டது. வானொலி அலைகள் (Radio Waves). வெப்ப அலைகள் (Heat Waves), X-கதிர்கள் (X-Rays), γ-கதிர்கள் (γ-Rays), புற ஊதா அலைகள் (Ultra-Violet Waves), புறச் சிவப்பு அலைகள் (Infra-red Waves), கம்பியில்லா அலைகள் (Wireless Waves) முதலியனவும் மின்காந்த அலைகளேயாகும்; இவைகள் ஒவ்வொன்றும் மற்றதிலிருந்து வேறுபடுவது, நிகழ்வெண் மற்றும் அலை நீளத்தின் பரிமாண வரிசையை (Order of Magnitude) மட்டிலுமே சார்ந்ததாகும். உதாரணமாக, நிகழ்வெண்ணின் வீச்செல்லை (Range) வானொலி அலைகளுக்கு 10^4 லிருந்து 10^{11} c/s வரை; γ-கதிர்களுக்கு 10^{20} c/s-ம், இதற்கு மேலும். செய்முறைச் சோதனைகளினால் முற்றிலுமாக நிறுவப்பட்டுவிட்ட இக்கருத்திலிருந்து ஒளியின் மின்காந்தக் கொள்கை (Electromagnetic Theory of

Light) பிறந்தது. செய்முறைச் சோதனை மூலம் காற்றில் ஒளியின் வேகம் மிகச் சிறந்த மதிப்பாக 2.9977×10^{10} செ.மீ/நொடி. என Michelson 1927-ஆம் ஆண்டு கண்டு பிடித்தார். இம் மதிப்பு முன்னர் கண்டுள்ள மதிப்புடன் சிறந்து ஒத்துள்ளதைக் காண்க. இவ்வாறு, இரு மின் அலகுகளின் (Electric Units) விகிதம் c மின்காந்த அலைகளின் திசை வேகத்துடன் ஒத்துள்ளது; இதுவே ஒளியின் திசைவேகமாகும்.

கண்ணுடி போன்ற மின்கடத்தா ஊடகங்களுக்கு ϵ ஒன்றுக்குச் சமமில்லை. மேலும் μ அலைகளின் நிகழ்வெண்ணைச் சார்ந்துள்ளது. ஆனல் கட்புலனுக்குட்பட்ட பகுதியில் (Visible Region) உள்ள ஒளியலைகளுக்கு $\mu = 1$ எனக் கொள்ளலாம்; ஆகவே ஒளியின் திசை வேகம் $c/\sqrt{\epsilon}$ ஒளி விலகலெண் (Refractive Index) k உள்ள ஊடகத்தில் ஒளியின் திசை வேகம் c/k எனச் செய்முறை சோதனையால் காணப்பட்டுள்ளது. நமது கற்பிதங்கள் ஆதாரமுடையவை எனின் $\epsilon = k^2$. இது மாக்ஸ்வெல்லின் தொடர்பு (Maxwell's Relation) எனப்படும். இத் தொடர்பு ஏறத்தாழ எல்லா ஊடகங்களுக்கும் உண்மையெனினும், முன்பு கூறியது போன்று, மாக்ஸ்வெல்லின் கொள்கை மின் கடத்தாப் பொருள்களின் அணு அமைப்புப் (Atomic Structure) பண்பை முழுமையாக எடுத்துக் கொள்ளாத காரணத்தால் சில வகைகளுக்கு இத்தொடர்பு பொருந்தாது.

§ 8.4 *மின் காந்த பொடன்ஷியல்கள்:* சமன்பாடு (2)லிருந்து,

$$\Delta \cdot \bar{B} = 0$$

ஆகவே $$B = \mu \bar{H}$$

$$= \Delta \times \bar{A} \qquad (21)$$

என எழுதவியலும் (§ 8.1-தேற்றங்கள்). இதில் வெக்டார் $\bar{A}$ இன்னும் நிர்ணயிக்கப்படவில்லை. இச்சமன்பாடு $\bar{A}$ ஐ முழுவதுமாக வரையறை செய்ய முடியாது; ஏனெனின் Ψ ஏதேனுமொரு திசையிலி (Scalar) யெனின்

$$\Delta \times (\bar{A} + \Delta \Psi) = \Delta \times \bar{A}, \quad \because \Delta \times \Delta\Psi = 0$$

ஆகவே, ஒரு திசையிலியின் கிரேடியண்டைக் கூட்டும் அளவிற்கு $\bar{A}$ வரையறை செய்யப்படாமல் உள்ளது. இதனால் நாம் மேலுமொரு நிபந்தனையை விதிப்போம்.

$$\bar{B} = \Delta \times \bar{A}$$

$$\Delta \times \bar{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$$

என்ற சமன்பாடுகளிலிருந்து $\bar{B}$-ஐ நீக்க,

$$\Delta \times \bar{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\Delta \times \bar{A})$$

$$= -\Delta \times \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}$$

$$\therefore \Delta \times \left[\bar{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \right] = 0$$

இதன் தொகையைக்காண,

$$\bar{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} - = \Delta \phi$$ (§ 8.1, தேற்றங்கள்)

இங்கு ϕ விதிக்கட்டில்லா திசையிலிச் சார்பு.

$$\therefore \bar{E} = -\Delta \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \qquad (22)$$

$$\mu \bar{H} = \Delta \times \bar{A}$$

$$\Delta \times \bar{H} = \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$$

என்ற சமன்பாடுகளிலிருந்து $\bar{H}$-ஐ நீக்க,

$$\Delta \times (\Delta \times \bar{A}) = \mu \Delta \times \bar{H}$$

அதாவது, $\Delta (\Delta \cdot \bar{A}) - \Delta^2 \bar{A} = \frac{\mu \epsilon}{c} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$

$$= \frac{\mu \epsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ -\Delta \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \right\}$$

[(22)-லிருந்து]

$$= -\frac{\mu \epsilon}{c} \Delta \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\mu \epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2}$$

அதாவது, $\Delta^2\bar{A} = \frac{\mu\epsilon}{c^2}\frac{\partial^2\bar{A}}{\partial t^2} + \Delta\left\{\Delta\cdot\bar{A}+\frac{\mu\epsilon}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\}$

$\bar{A}$ வெக்டார் முழுவதுமாக நிர்ணயிக்கப்பட வேண்டிய நிபந்தனையை

$$\Delta\cdot\bar{A} + \frac{\mu\epsilon}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0 \tag{23}$$

என்று எடுத்துக் கொள்ளுவோம். இதிலிருந்து $\bar{A}$,

$$\Delta^2\bar{A} = \frac{\mu\epsilon}{c^2}\frac{\partial^2\bar{A}}{\partial t^2} \tag{24}$$

என்ற திட்டவடிவ அலையோட்டச் சமன்பாட்டை நிறைவு செய்கிறது.

$\Delta\cdot\bar{D} = 0$ என்பதிலிருந்து $\Delta\cdot\bar{E} = 0$

$$\therefore 0 = \Delta\cdot\bar{E}$$

$$= \Delta\cdot\left[-\Delta\phi-\frac{1}{c}\frac{\partial\bar{A}}{\partial t}\right] \quad \text{(22)-விருந்து}$$

$$= -\Delta^2\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\Delta\cdot\bar{A})$$

$$= -\Delta^2\varphi + \frac{\mu\epsilon}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}$$

$$\therefore \Delta^2\phi = \frac{\mu\epsilon}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} \tag{25}$$

இவ்வாறு ϕ-யும் திட்டவடிவ அலையோட்டச் சமன்பாட்டை நிறைவு செய்கிறது.

ρ, $\bar{j}$-களின் மதிப்புகள் பூச்சியமில்லையெனின் கீழ்க்கண்ட முடிவுகள் கிடைக்கப்பெறும் :

$$\bar{B} = \Delta\times\bar{A} \tag{26}$$

$$\bar{E} = -\Delta\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\bar{A}}{\partial t} \tag{27}$$

$$0 = \Delta\cdot\bar{A} + \frac{\mu\epsilon}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t} \tag{28}$$

$$\Delta^2 \bar{A} = \frac{\mu\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} - 4\pi\mu\bar{j} \qquad (29)$$

$$\Delta^2 \phi = \frac{\mu\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{4\pi\rho}{\epsilon} \qquad (30)$$

இம் முடிவுகளைக் காண்பது மாணவர்க்குப் பயிற்சியாக விடப் பட்டுள்ளது.

ϕ என்பது மின்பொடன்ஷியல் (Electric Potential), $\bar{A}$ என்பது காந்தப் பொடன்ஷியல் (Magnetic Potential or Vector Potential) எனப்படும். வினுக்களை ϕ, $\bar{A}$ முறையிலோ அல்லது $\bar{E}$, $\bar{H}$ முறையிலோ தீர்வு செய்யலாம். ϕ, $\bar{A}$ முறையில் தீர்வு செய்வதற்குத் தேவையான எல்லைக்கட்டுப்பாடுகளை (15)-லிருந்து காண இயலும். ஆனுல், பொதுவாக எளிய முறையான $\bar{E}$, $\bar{H}$ முறைத் தீர்வுகளையே நாம் எடுத்துக்கொள்ளப்போவதால் ϕ, $\bar{A}$-களுக்கான எல்லைக்கட்டுப்பாடுகளை நாம் காணப்போவதில்லை.

§ *8.5 தளர்ச்சிக் காலம்* (Time of Relaxation): நமது தீர்வாய்வுகளில் ρ பூச்சியமாக எடுத்துக் கொள்ளப்படலாம் என இப்பகுதியில் நிறுவுவோம்.

$$\Delta \times \bar{H} = 4\pi\bar{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$$

$$= 4\pi\sigma\bar{E} + \frac{\epsilon}{c}\frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$$

இருபுறமும் டைவர்ஜன்ஸ் எடுக்க,

$$\Delta \cdot (\Delta \times \bar{H}) = 4\pi\sigma\, \Delta \cdot \bar{E} + \frac{\epsilon}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\Delta \cdot \bar{E})$$

அதாவது, $$0 = 4\pi\sigma \frac{4\pi\rho}{\epsilon} + \frac{\epsilon}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{4\pi\rho}{\epsilon}\right)$$

$$\left[\because\ \Delta \cdot (\Delta \times \bar{H}) = 0,\ \Delta \cdot \bar{E} = \frac{4\pi\rho}{\epsilon}\right]$$

அதாவது, $$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{4\pi\sigma c}{\epsilon}\rho$$

தொகை காண,

$$\log\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) = -\frac{4\pi\sigma c}{\epsilon} t$$ (ρ_0 என்பது தொகையின் மாறிலி)

அதாவது, $\rho = \rho_0 \; e^{-t/\theta}$, $\theta = \frac{\epsilon}{4\pi\sigma c}$ (31)

இங்கு θ என்பது தளர்ச்சிக் காலம் (Time of Relaxation) எனப்படும். சமன்பாடு (31)-லிருந்து, மின்னூட்டத்தின் மூலப்பரவல்அடுக்குக் குறியாக அழிவுறுகிறது (Decays Exponentially) என்றும், இவ்வழிவு, உடனிகழ்வான மற்ற எந்த மின் காந்தக் கிளர்ச்சியையும் சார்ந்ததல்ல என்றும் அறிகிறோம். இக்காரணத்தால் பெரும்பாலான தீர்வாய்வுகளில் $\rho = 0$ எனக் கொள்வது சரியாகும். ஊடகத்தின் உட்புறப்புள்ளியிலுள்ள மின்னூட்டத்திற்கு மட்டிலுமே சமன்பாடு (31) பொருந்தும்; கடத்தும் அல்லது கடத்தா ஊடகத்தின் எல்லையிலுள்ள மின் னூட்டத்திற்கு இச்சமன்பாடு உண்மையில்லை.

§ 8.6 *சீரான, கடத்தா ஊடகங்களில் தள அலைகள்*: (Plane Waves in a Uniform Non-conducting Vector) திசைவேகம் V-யுடன், (l, m, n) திசையில் செல்லும் தள அலைகளை எடுத்துக் கொள்வோம்.

அலை செல்லும் திசையில் $\bar{n}$ என்பது ஒருமை வெக்டார் (Unit Vector) என்போம்; ஆகவே $\bar{n} = l\,\bar{i} + m\,\bar{j} + n\,k$.

$$\bar{E} = E_x\,\bar{i} + E_y\,\bar{j} + E_z\,\bar{k}$$

$$\bar{H} = H_x\,\bar{i} + H_y\,\bar{j} + H_z\,k$$ என்க,

தள அலைகளை நாம் எடுத்துக் கொண்டுள்ளதால் $\bar{E}$, $\bar{H}$, என்பன, அதாவது E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z என்பன, $l_x + m_y + n_z - Vt$-ன் சார்புகளாக இருக்கவேண்டும்.

$u \equiv l_x + m_y + n_z - Vt$ என்க

ஆகவே, E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z என்பன u-வின் சார்புகள்.

$$\Delta \times \bar{H} = \frac{\epsilon}{c}\,\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \qquad (32)$$

என்பதிலிருந்து,

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{\epsilon}{c}\,\frac{\partial E_x}{\partial t} \qquad (33)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{\epsilon}{c}\,\frac{\partial E_y}{\partial t} \qquad (34)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \frac{\epsilon}{c}\,\frac{\partial E_z}{\partial t} \qquad (35)$$

u-வைப் பொருத்த வகைக் கெழுவை கீறுப்பிரியினுல் (Dash) குறிப்போம். ஆகவே,

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} = \frac{d H_z}{du} \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$= H'_z \cdot m$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{d H_y}{du} \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$= H'_y \cdot n$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{d E_x}{du} \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$= E'_x (-V)$$

$$= -VE'_x$$

∴ (33)லிருந்து,

$$m H'_z - n H'_y = -\frac{V\epsilon}{c} E'_x \tag{36}$$

இதேபோன்று சமன்பாடுகள் (34), (35) களிலிருந்து,

$$n H'_x - l H'_z = -\frac{V\epsilon}{c} E'_y \tag{37}$$

$$l H'_y - m H'_x = -\frac{V\epsilon}{c} E'_z \tag{38}$$

u-வைப் பொருத்துத் தொகை காண, (36)லிருந்து,

$$m H_z - n H_y = -\frac{V\epsilon}{c} E_x \tag{39}$$

சராசரி மதிப்பு பூச்சியமுள்ள, ஏற்றவிறக்கப் புலத்தை (Fluctuating Field) நாம் எடுத்துக் கொண்டுள்ளதால் இங்கு தொகையின் மாறி பூச்சியமாகும். இதே போன்று சமன்பாடுகள் (37), (38)களிலிருந்து,

$$n H_x - l H_z = -\frac{V\epsilon}{c} E_y \tag{40}$$

$$l H_y - m H_x = -\frac{V\epsilon}{c} E_z \tag{41}$$

சமன்பாடுகள் (39), (40), (41)களை முறையே $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ களினால் பெருக்கிக் கூட்ட,

$$\bar{n}\times\bar{H} = -\frac{V\epsilon}{c}\bar{E} \qquad (42)$$

இதேபோன்று, $\Delta\times\bar{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \bar{H}}{\partial t}$ என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து,

$$\bar{n}\times\bar{E} = \frac{V\mu}{c}\bar{H} \qquad (43)$$

எனக் காட்டவியலும். சமன்பாடு (42)-லிருந்து $\bar{E}$, $\bar{n}$ மற்றும் $\bar{H}$-க்குச் செங்குத்தாக உள்ளது; சமன்பாடு (43)லிருந்து $\bar{H}$, $\bar{n}$ மற்றும் $\bar{E}$-க்குச் செங்குத்தாக உள்ளது. ஆகவே, $\bar{E}$, $\bar{H}$ என்பன செலுத்தப்படும் திசை $\bar{n}$-க்குச் செங்குத்தாக உள்ளன. எனவே அலைகள் குறுக்கு அலைகளாகும் (Transverse Waves). மேலும் $\bar{E}$-உம் $\bar{H}$-உம் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக உள்ளன; $\bar{E}$, $\bar{H}$, $\bar{n}$ என்பன ஒரு வலக்கைப் பண்புடைய அச்சுக்களாகும். (Right-handed Set of Axes). இனி, அலை செலுத்தப்படும் திசைவேகம் V-ன் மதிப்பைக் காண்போம். (42), (43)-களிலிருந்து $\bar{H}$-ஐ நீக்கவும். (43)-ன் இருபுறமும் கர்ல் எடுக்க,

$$\bar{n}\times(\bar{n}\times\bar{E}) = \frac{V\mu}{c}(\bar{n}\times\bar{H})$$

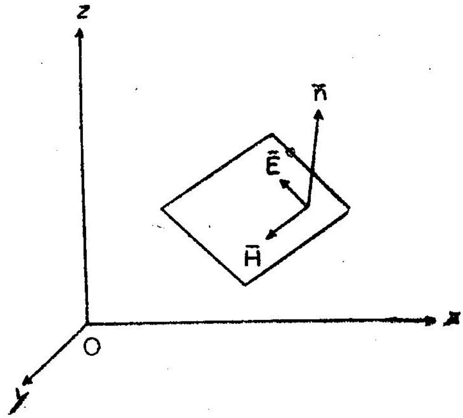
அதாவது $(\bar{n}.\bar{E})\,\bar{n} - (\bar{n}.\bar{n})\,\bar{E} = -\frac{V^2\mu\epsilon}{c^2}\bar{E}$ [(42)-லிருந்து]

$\bar{n}$-உம் $\bar{E}$யும் செங்குத்தானவைகளாதலால் $\bar{n}.\bar{E}=0$ மேலும், $\bar{n}$ ஒருமை வெக்டார் என்பதினால் $\bar{n}.\ \bar{n}=1$.

$$\therefore\ \bar{E} = \frac{V^2\mu\epsilon}{c^2}\bar{E}$$

அல்லது, $V^2 = \frac{c^2}{\mu\epsilon}$

ஆகவே அலைகளின் திசைவேகம் $= \frac{c}{\sqrt{\mu\epsilon}}$ (44)



படம் 57

§ 8.7 **தள இசையலைகள்** (Plane Harmonic Waves): சமன்பாடுகள் (42), (43)-களின் குறிப்பிட்ட வகைகளான தள இசை அலைகளைக் காண்கபாம். $\bar{H}$, $\bar{n}$ உள்ள தளம், தள விளைவுத் தளம் (Plane of Polarisation) எனப்படும். தள இசையலைகள் செலுத்தப்படும் திசையை z-அச்சாகக் கொள்க. ஆகவே $\bar{n}=\bar{k}$. அலை செலுத்தப்படும் திசைவேகம் V என்க.

வகை (i): xz தளத்தை தளவிளைவுத்தளம் என்க. எனவே $\bar{H}$, x அச்சு திசையில் உள்ளது. ஆகவே, $\bar{E}=[0,\ E_y,\ 0]$; $\bar{H}=[H_x,\ 0.\ 0]$; $\bar{n}=[0,\ 0,\ 1]$.

$$E_y = a\, e^{ip(t-z/V)} \text{ என்க.}$$

(43)-லிருந்து,

$$\bar{n}\times\bar{E} = \frac{V\mu}{c}\bar{H}$$

$$= \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\,\bar{H}\left[\because V = \frac{c}{\sqrt{\mu\epsilon}}\right]$$

$$\therefore\ \bar{H} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\,(\bar{n}\times\bar{E})$$

$$= \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & E_y & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -i\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\,E_y$$

$$\therefore\ H_x = -\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\,a\,e^{ip\,(t-z/V)}$$

$$H_y = 0$$

$$H_z = 0$$

$$E_x = 0 \qquad H_x = -\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\,a\,e^{ip\,(t-z/V)}$$

$$E_y = a\,e^{ip\,(t-z/V)} \qquad H_y = 0$$

$$E_z = 0 \qquad H_z = 0 \qquad (45)$$

வகை (ii) : $y\,z$ தளத்தை தளவிளைவுத் தளம் என்க. எனவே $\bar{H}$, y-அச்சுத் திசையில் உள்ளது. ஆகவே, $\bar{E}=(E_x,\ 0,\ 0)$; $\bar{H}=(0,\ H_y,\ 0)$, $\bar{n}=(0,\ 0,\ 1)$.

$E_x = b\,e^{ip\,(t-z/V)}$ என்க.

$$\bar{H} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}(\bar{n}\times\bar{E})$$

$$= \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \bar{j}\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\,E_x$$

$$\therefore\ H_x = 0$$

$$H_y = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\,b\,e^{ip\,(t-z/V)}$$

$$H_z = 0$$

$$E_x = b\,e^{ip\,(t-z/V)} \qquad H_x = 0$$

$$E_y = 0 \qquad H_y = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\, b\, e^{ip(t-z/V)}$$

$$E_z = 0 \qquad H_z = 0 \qquad (46)$$

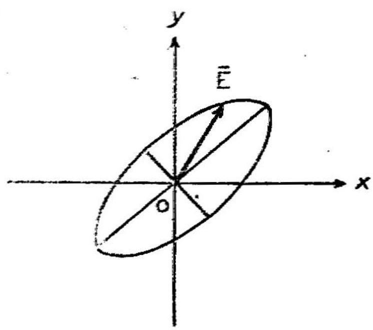
வகை (iii) : ஒருங்கிணைக்கும் கோட்பாட்டின்படி (45), (46) வகைகள் தீர்வுகளை ஒருங்கிணைக்க

$$E_x = b\, e^{ip(t-z/V)} \qquad H_x = -\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\, b\, e^{ip(t-z/V)}$$

$$E_y = a\, e^{ip(t-z/V)} \qquad Hy = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\, b\, e^{ip(t-z/V)}$$

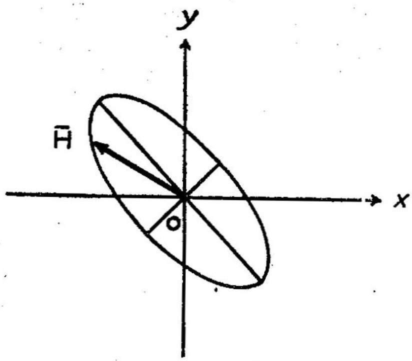
$$E_z = 0 \qquad H_z = 0 \qquad (47)$$

சமன்பாடுகள் (45), (46), (47)-களில் a, b சிக்கல் எண்களாகவும் (Complex Numbers) இருக்கலாம். இவைகளின் கோண வீச்சங்கள் (Arguments) இரு மாறுபாட்டுப் படிகளையும் (Phases) கொடுக்கும். வகை (iii) லிருந்து மாறுபாட்டுப் படிகள் வெவ்வேறாயின் நீள் வட்டத்தில் தள விளைவுக் கொள்ளும் ஒளி (Elliptically Polarised Light) கிடைக்கிறது. இங்கு $\bar{E}$ வெக்டாரின் முனை $x\ y$ தளத்திலுள்ள ஒரு நீள் வட்டத்தில் நகருகிறது.



படம் 58

இதே போன்று, $\bar{H}$ வெக்டாரின் முனை $x\ y$ தளத்திலுள்ள ஒரு நீள் வட்டத்தில் நகருகிறது.



படம் 59

(47)-ல் உள்ள சமன்பாடுகளின் மெய்வடிவத்தை எடுத்துக்கொண்டு இவ்வுண்மைகளை நிறுவுவது மாணவர்க்குப் பயிற்சியாக விடப்பட்டுள்ளது.

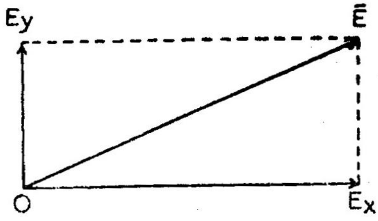
மாறுபாட்டுப்படிகள் சமமாயின் தளத்தில் தள விளைவுக் கொள்ளும் ஒளி (Plane Polarised Light) கிடைக்கிறது. இங்கு, வெக்டார் $\bar{E}$-ன் முனை $x\,y$ தளத்தில்

$$\frac{y}{x} = \frac{a \cos p\,(t - z/v)}{b \cos p\,(t - z/v)} = \frac{a}{b}$$

என்ற நேர்க்கோட்டில் உள்ளது. மேலும், வெக்டார் $\bar{H}$ ன் முனை $x\,y$ தளத்தில்

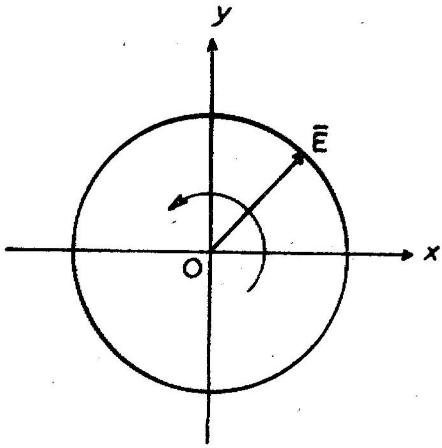
$$\frac{y}{x} = -\frac{b}{a}$$

என்ற நேர் கோட்டில் உள்ளது. ஆகவே இவ்வகையில் $y = -\dfrac{b}{a}$ என்ற தளமே தளவிளைவுக் கொள்ளும் தளமாகும்.



படம் 60

மாறுபாட்டுப்படியின் வேறுபாடு $\pi/2$ எனின் வீச்சுக்கள் மாகும். இவ்வகையில், வட்டத்தில் தளவிளைவுக் கொள்ளும் ஒளி (Circularly Polarised Light) கிடைக்கிறது. இவ்வகைக்குச் சமன்பாடு (47)ல் மெய் வடிவமைப்பை எடுத்துக்கொண்டு $\bar{E}$, $\bar{H}$ களின் முனைகள் $x\,y$ தளத்திலுள்ள வட்டத்தில் உள்ளதென நிறுவுக.



படம் 61

மேலேயுள்ள வகைகளிலெல்லாம் கட்டற்ற வெளியை எடுத்துக் கொண்டால் $\epsilon = \mu = 1$; ஆகவே $\bar{E}$, $\bar{H}$, களின் பருமன் (Magnitude) சமமாகும்.

§ 8.8 *ஆற்றல் செலுத்தப்படும் வீதம்* (Rate of Transmission of Energy) : இப்பகுதியில் *சீரான கடத்தா ஊடகத்தில்* செலுத்தப் படும் ஆற்றலின் திசை வேகம் அலையின் திசை வேகம் போன்றது என நிறுவுவோம்.

சமன்பாடுகள் (45), (46), (47) களில் உள்ள அலைகளுக்கு

பாயிண்டிங் வெக்டாரைக் கணிக்கும்பொழுது, $\frac{c}{4\pi}\ \bar{E} \times \bar{H}$

என்பது ஒரு படிச்சார்பு (Linear Function) இல்லையாதலின், $\bar{E}$, மற்றும் $\bar{H}$-ன் மெய் அல்லது கற்பனைப் பகுதியை மட்டிலுமே எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும். மாதிரியாக, சமன்பாடு (45)-ல் மெய்ப்பகுதியை எடுத்துக் கொண்டால்

$$E_x = 0 \qquad H_x = -\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\, a \cos p\,(t - z/v)$$

$$E_y = a \cos p\,(t - z/v) \qquad H_y = 0$$

$$E_z = 0 \qquad H_z = 0 \tag{48}$$

∴ ஒருமு நேரத்தில், ஒருமப் பரப்பிற்குச் செங்குத்துத் திசையில் பாயும் ஆற்றல் = பாயின்டிங் வெக்டார் $= \frac{c}{4\pi}\,(\bar{E}\times\bar{H})$

$$= -\frac{c}{4\pi}\,\bar{k}\,H_x E_y$$

$$= +\bar{k}\,\frac{ca^2}{4\pi}\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\cos^2 p\,(t - z/v) \tag{49}$$

ஆகவே z அச்சின் திசையில் உள்ள பாயிண்டிங் வெக்டாரின் பருமன் $= \frac{ca^2}{4\pi}\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\cos^2 p\,(t - z/v)$; இது ஏற்ற இறக்க முடைய கணியமாகும்; இதன், நேரத்தைப் பொருத்த, சராசரி மதிப்பு $= \frac{c\,a^2}{4\pi}\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}$ (50)

ஊடகத்தின் ஒருமக் கன அளவில் ஆற்றலின் அடர்த்தி

$$= \frac{1}{8\pi}\left(\epsilon\,\bar{E}^2 + \mu\,\bar{H}^2\right)$$

$$= \frac{\epsilon\,a^2}{4\pi}\cos^2 p\,(t - z/v) \tag{51}$$

இதன் நேரத்தைப் பொருத்த, சராசரி மதிப்பு $= \frac{\epsilon a^2}{8\pi}$

∴ செலுத்தப்படும் ஆற்றலின் திசைவேகம்

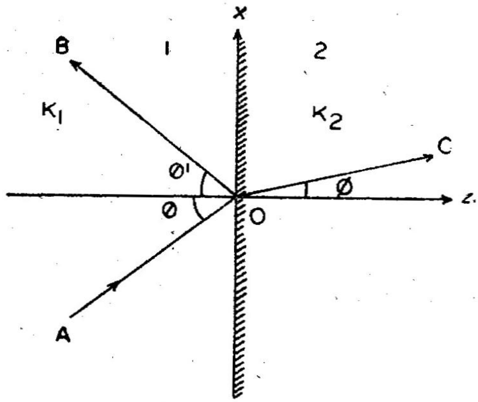
$$= \frac{\text{ஒருமை நேரத்தில் ஒருமைப் பரப்பிற்குக் குறுக்காகப் பாயும் ஆற்றல்}}{\text{ஒருமை கன அளவில் ஆற்றலின் அடர்த்தி}}$$

$$= \frac{c}{\sqrt{\mu \epsilon}} \qquad (52)$$

அலையின் திசை வேகம் $c/\sqrt{\mu \epsilon}$ என முன்னர் நிறுவினேம். ஆகவே செலுத்தப்படும் ஆற்றலின் திசைவேகம் அலையின் திசை வேகம் போன்றதேயாகும். இப்பண்பு எல்லாவித அலைகளுக்கும் உண்மையில்லை. உதாரணமாக, மேற்பரப்பு நீர் அலைகளில் ஆற்றல் செலுத்தப்படும் திசை வேகம், அலை செலுத்தப்படும் திசை வேகத்திலிருந்து வேறுபட்டது என முன்னர் காணப்பட்டுள்ளதை நினைவு கூர்க.

§ 8.9 ஒளியின் மின்காந்தவியல் கொள்கை
(Electromagnetic Theory of Light)

வெவ்வேறு ஒளிவிலகலெண்களைக் (Refractive Indices) கொண்டுள்ள இரு ஊடகங்களைப் பிரிக்கும் தளத்தில் ஒளியலைகளின் எதிரொளிப்பும் (Reflection) ஒளி விலகலும் (Refraction) நமக்கு மிகப் பழக்கமுள்ள பண்பியல்களாகும். மின்காந்தவியல் கொள்கையின் வாயிலாக இப்பண்புகள் விளக்கப்படும் எளிய முறையை இங்கு காண்போம். இரு மின்கடத்தாப் பொருள் ஊடகங்களை (Non-conducting Dielectric Media) எடுத்துக் கொள்வோம். இவ்விரு ஊடகங்களும் ஒரு தளத்தினல் பிரிக்கப்படுகின்றன எனக்கொண்டு இத்தளத்தை xy-தளம் (அதாவது $z=0$ என்ற தளம்) எனக்கொள்வோம். இரு ஊடகங்களின் ஒளிவிலகலெண்கள் முறையே K_1, K_2 என்க. $\mu_1=\mu_2=1$ எனின் இரு ஊடகங்களிலும் ஒளியின் திசை வேகங்கள் முறையே c/K_1, c/K_2 ஆகும். AO, OB, OC என்பன முறையே படு அலை (Incident Wave), எதிரொளிப்பு அலை (Reflected Wave), ஒளி விலகல் அலை (Refracted Waves), அல்லது செலுத்தும் அலை (Transmitted Wave) செல்லும் திசைகள் என்க. இவைகள் அனைத்தும் ஒரே தளத்தில் அமைவன எனப் பின்னர் நிறுவுவோம். OA காகிதத் தளத்தில் (Plane of the Paper) அமைகிறது என்க; படுதளத்தில் (Plane of Incidence) (அதாவது OA, z-அச்சு உள்ள தளம்) x—அச்சை எடுத்துக் கொள்வோம், ஆகவே, y—அச்சு காகிதத் தளத்திற்குச் செங்குத்தாக அமையும்.



படம் 62

AO, OB, OC z-அச்சுடன் முறையே θ, $\pi-\theta'$, ϕ என்ற கோணங்களை உண்டாக்குகின்றன என்க. θ என்பது படுகோணம் (Angle of Incidence), θ' என்பது எதிரொளிப்புக் கோணம் (Angle of Reflection), ϕ என்பது விலகுகோணம் (Angle of Refraction) எனப்படும்.

(l, m, n) திசையில், $\frac{c}{K_1}$ திசைவேகத்துடனும் $\frac{pc}{2\pi}$ நிகழ் வெண்ணுடனும் செல்லும் அலைகளுக்கு $\bar{E}, \bar{H}$ களின் மூன்று கூறு (Components) களும்

$$e^{ip\,[ct-K\,(lx+my+nz)\,]}$$

என்பதின் விகிதசமத்தில் இருக்கும். படுகோணம் θ என்பதனால் படு அலைகள் செல்லும் திசை $(\sin\theta, O, \cos\theta)$; மேலும் திசைவேகம் $= \frac{c}{K_1}$, நிகழ் வெண் $= \frac{pc}{2\pi}$ என்க. ஆகவே படு அலைகளுக்கு $\bar{E}, \bar{H}$ களின் மூன்று கூறுகளும்

$$e^{ip\,[ct-K_1\,(x\sin\theta+z\cos\theta)\,]}$$

என்பதின் விகித சமத்தில் இருக்கும். எதிரொளிப்பு அலைகள் (l_1, m_1, n_1) என்ற திசையிலும், ஒளிவிலகல் அலைகள் (l_2, m_2, n_2) என்ற திசையிலும் முறையே செல்லுகின்றன என்க. ஆகவே, $n_1=-\cos\theta'$, $n_2=\cos\phi$. இவ்விரு அலைகளுக்கும் $\bar{E}, \bar{H}$ களின் மூன்று கூறுகளும்

$$e^{ip\,[ct-K_1\,(l_1x+m_1y+n_1z)\,]}$$

$$e^{ip\,[ct-K_2\,(l_2x+m_2y+n_2z)\,]}$$

என்பனவற்றின் விகிதசமத்தில் இருக்கும். படு அலைகள், எதிரொளிப்பு அலைகள், ஒளிவிலகு அலைகளுக்கு E_x கூறுகளின் மதிப்புகள் முறையே

$$A \, e^{ip[ct-K_1(x\sin\theta+z\cos\theta)]}$$

$$A_1 \, e^{ip[ct-K_1(l_1 x+m_1 y+n_1 z)]}$$

$$A_2 \, e^{ip[ct-K_2(l_2 x+m_2 y+n_2 z)]}$$

இச்சார்புகள் எல்லாம் திட்டவடிவ அலையோட்டச் சமன்பாட்டினை நிறை செய்கின்றன. மேலும் இவைகள் ஒரே நிகழ்வெண்ணைக் கொண்டுள்ளன. இது இன்றியமையாத தாகும்.

முதலில், எதிரொளிப்பு அலைகளும் ஒளிவிலகு அலைகளும் படுதளத்தில் உள்ளன என நிறுவுவோம். எல்லைத் தளம் $z=0$-ல் எல்லா x, y, t களுக்கும் E_x தொடர்ச்சியாக இருக்க வேண்டு மென்பது எல்லைக் கட்டுப்பாடாகும். இதிலிருந்து

$$A\,e^{ip[ct-Kx\sin\theta]}+A_1\,e^{ip[ct-K_1(l_1 x+m_1 y)]}$$

$$=A_2\,e^{ip[ct-K_2(l_2 x+m_2 y)]}$$

இது உண்மையாகவிருக்க இதன் மூன்று உறுப்புகளின் குறிகளும் (Indices) சர்வ சமமாக இருக்கவேண்டும். அதாவது,

$$ct-K_1 x\sin\theta \equiv ct-K_1(l_1 x+m_1 y)\equiv ct-K_2(l_2 x+m_2 y)$$

ஆகவே,

$$K_1\sin\theta = k_1\, l_1 = k_2\, l_2 \qquad (53)$$

$$O = k_1\, m_1 = k_2\, m_2 \qquad (54)$$

(54)லிருந்து, $m_1=m_2=0$. அதாவது y-அச்சுத் திசையில் OB, OC களின் திசைக் கொசைன் (Direction Cosine)கள் பூச்சியமாகும். ஆகவே எதிரொளிப்பு மற்றும் ஒளிவிலகு அலைகளும் படுதளத்தில் உள்ளன.

ஆகவே $l_1=\sin\theta'$; $l_2=\sin\phi$.

(53) லிருந்து $l_1=\sin\theta$

$\therefore\ \sin\theta'=\sin\theta$

$\therefore\ \theta'=\theta$

அதாவது, எதிரொளிப்புக் கோணம் படுகோணத்திற்குச் சமமாகும். மேலும், (53)-லிருந்து,

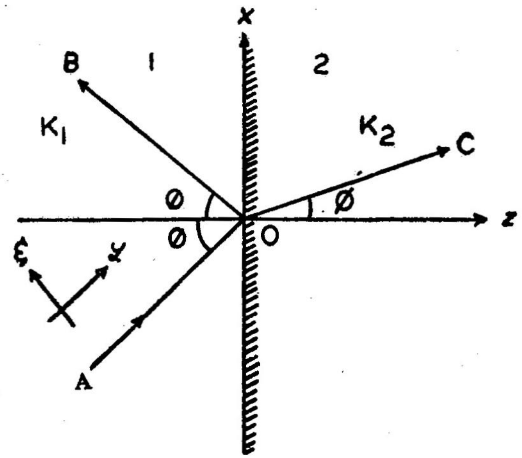
$$K_1 \sin\theta = K_2 \sin\phi \tag{55}$$

படுகோணத்திற்கும், ஒளிவிலகு கோணத்திற்கும் இடைப்பட்ட இத் தொடர்பு ஒளிவிலகலுக்கு ஸ்நெல்லின் விதி (Snell's Law for Refraction) எனப்படும்.

இவ்வாறு, எதிரொளிப்பு, ஒளிவிலகலுக்கான விதிகளை மின்காந்தவியல் கொள்கையிலிருந்து கண்டுள்ளோம்.

இனி, எதிரொளிப்பு மற்றும் ஒளிவிலகல் அலைகளின் வீச்சுக்களைக் காண்போம். இரு வகைகள் இங்குள்ளன: (1) படு ஒளி (Incident Light) படுதளத்தில் தள விளைவுடையது (2) படு ஒளி படுதளத்திற்குச் செங்குத்தாக தள விளைவுடையது.

வகை (1): படுஒளி படுதளத்தில் தளவிளைவுடையது:— இங்கு, படுகதிர் AO-வின் காந்தவெக்டர் $x\,z$ தளத்தில் AO விற்குச் செங்குத்தாக உள்ளது. இவ் வெக்டாரை x, y, zகளில் கொடுப்பதற்கு உதவியாக ஆதி O மூலமாக ξ, η, ζ அச்சுக்களை எடுத்துக் கொள்ளுவோம்; η-அச்சு y-அச்சுடன் பொருந்தியுள்ளது; ξ, ζ அச்சுக்களின் திசைகள் படத்தில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. ζ அச்சு அலைசெலுத்தப்படும் திசையில் உள்ளது; ξ அச்சு படுதளத்தில் உள்ளது. புது அச்சுக்களைப் பொருத்து $\bar{H}$ முழுவதுமாக ξ திசையிலும், $\bar{E}$ முழுவது மாக η திசையிலும் உள்ளன என்பது தெளிவு. ஆகவே



படம் 63

$$\bar{E}=(0,\ E_\eta,\ 0);\quad \bar{H}=(H_\xi,\ 0,\ 0)$$

$$E_\eta = a_1 e^{ip(ct-K_1\zeta)}$$ என்க.

(48)-லிருந்து, $\bar{n}\times\bar{E}=\dfrac{\mu V}{c}\bar{H}$

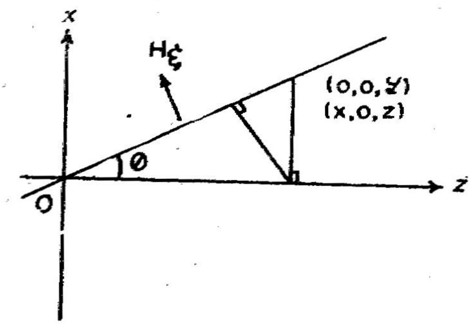
$$=\frac{1}{K_1}\bar{H},\ \left(\because\ \mu=1,\ V=\frac{c}{K_1}\right)$$

$$\therefore\ \bar{H}=K_1\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & E_\eta & 0\end{vmatrix}$$

($\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ என்பன ξ, η, ζ திசைகளிலுள்ள ஒரும வெக்டார்கள்.)

$$=-\bar{i}\,K_1\,E_\eta$$

$$\therefore\ H_\xi=-K_1E_\eta;\quad H_\eta=0;\quad H_\zeta=0$$



படம் 64

படம் (64)-லிருந்து, $\zeta = x\sin\theta + z\cos\theta$.

$$H_x = H_\xi\cos\theta$$

$$H_y = 0$$

$$H_z = -H_\xi\sin\theta$$

$$E_x = 0$$

$$E_y = E_\eta$$

$$E_z = 0$$

இதிலிருந்து, படு அலைகளுக்கு

$$\left.\begin{aligned} E_x &= 0 \\ E_y &= a_1 \; e^{ip[ct-K_1(x\sin\theta+z\cos\theta)]} \\ E_z &= 0 \\ H_x &= -K_1 a_1 \cos\theta \; e^{ip[ct-K_1(x\sin\theta+z\cos\theta)]} \\ H_y &= 0 \\ H_z &= K_1 a_1 \cos\theta \; e^{ip[ct-K_1(x\sin\theta+z\cos\theta)]} \end{aligned}\right\} \text{(I)}$$

இதே போன்று θ-விற்குப் பதிலாக முறையே $\pi-\theta$, ϕ என இட எதிரொளிப்பு அலை மற்றும் ஒளி விலகல் அலைகளுக்கான $\bar{E}$, $\bar{H}$-களின் கூறுகளின் மதிப்புகள் கிடைக்கும்.

எதிரொளிப்பு அலைகளுக்கு (I-ல் θ-வை $\pi-\theta$ ஆக மாற்றவும் a_1-ஐ b_1 ஆக மாற்றவும்)

$$\left.\begin{aligned} E_x &= 0 \\ E_y &= b_1 \; e^{ip[ct-K_1(x\sin\theta-z\cos\theta)]} \\ E_z &= 0 \\ H_x &= K_1 b_1 \cos\theta \; e^{ip[ct-K_1(x\sin\theta-z\cos\theta)]} \\ H_y &= 0 \\ H_z &= K_1 b_1 \sin\theta \; e^{ip[ct-K_1(x\sin\theta-z\cos\theta)]} \end{aligned}\right\} \text{(II)}$$

ஒளிவிலகல் அலைகளுக்கு, (I-ல் θ-ஐ ϕ ஆக K_1-ஐ K_2-ஆக மாற்றவும்) a_1-ஐ a_2-ஆக மாற்றவும்

$$\left.\begin{aligned} E_x &= 0 \\ E_y &= a_2 \; e^{ip[ct-K_2(x\sin\phi+z\cos\phi)]} \\ E_z &= 0 \\ H_x &= -K_2 a_2 \cos\phi \; e^{ip[ct-K_2(x\sin\phi+z\cos\phi)]} \\ H_y &= 0 \\ H_z &= K_2 a_2 \sin\phi \; e^{ip[ct-K_2(x\sin\phi+z\cos\phi)]} \end{aligned}\right\} \text{(III)}$$

$z=0$-ல் E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z தொடர்ச்சியானவை என்பது தான் எல்லைக் கட்டுப்பாடுகள். இவ் ஆறு நிபந்தனைகளிலிருந்து இரு சார்பற்ற நிபந்தனைகள் மட்டிலுமே கிடைக்கின்றன ; $z=0$-ல் E_y, H_x என்பன தொடர்ச்சியானவை என்பது தான் இவ்விரு சார்பற்ற நிபந்தனைகள் என்போம். இவைகளிலிருந்து,

$$a_1+b_1=a_2 \tag{56}$$

$$-K_1\, a_1 \cos\theta + K_1\, b_1 \cos\theta = -K_2\, a_2 \cos\phi \tag{57}$$

தீர்வுகாண,

$$\frac{a_1}{K_1\cos\theta+K_2\cos\phi}=\frac{b_1}{K_1\cos\theta-K_2\cos\phi}=\frac{a_2}{2K_1\cos\theta}$$

(55)-லிருந்து, ஸ்நெல்லின் விதிப்படி

$$\frac{K_1}{\sin\phi}=\frac{K_2}{\sin\theta}$$

$$\therefore\ \frac{a_1}{\sin(\theta+\phi)}=\frac{b_1}{-\sin(\theta-\phi)}=\frac{a_2}{2\sin\phi\cos\theta} \tag{58}$$

இச்சமன்பாடு எதிரொளிப்பு அலை மற்றும் ஒளி விலகல் அலைகளின் வீச்சுக்களைப் படுஅலையின் வீச்சின் வாயிலாகக் கொடுக்கிறது. இது ஃப்ரஸ்னல்லின் வாய்ப்பாடு (Fresnell's Formula) எனப்படும். சமன்பாடு (58) எதிரொளிப்பு மற்றும் ஒளிவிலகல் அலைகளுக்கான வீச்சுக்களின் விகிதத்தைக் கொடுக்கிறது. இரண்டாவது ஊடகம் முதல் ஊடகத்தைவிட அடர்மிகு ஊடகம் (Denser Medium) எனின் $K_2>K_1$; ஸ்நெல்லின் விதியிலிருந்து $\theta>\phi$. ஆகவே b_1/a_1 கழிவுக்குறியுடையது ; எனவே, எதிரொளிப்பு அடர்குறை ஊடகத்தில் (Lighter Medium) நிகழ்ந்தால் மின்புலத்தில் மாறுபாட்டுப்படி வேறுபாடு π ($e^{\pi}=-1$ என்பதால்). அடர்மிகு ஊடகத்தில் எதிரொளிப்பு நிகழ்ந்தால் மாறுபாட்டுப்படி வேறுபாடு கிடையாது. மேலும் ஒளிவிலகல் அலைக்கு மாறுபாட்டுப்படி வேறுபாடு கிடையாது. காந்தப்புலம் $\vec{H}$-க்கும் இம்முடிவுகள் உண்மையாகும்.

வகை (2): படுஒளி படுதளத்திற்குச் செங்குத்தாக தள விளைவுடையது :—

இங்கு, படுகதிர் AO-வின் காந்த வெக்டார் xz தளத்திற்கும் AO-விற்கும் செங்குத்தாக உள்ளது. ξ, η, ζ அச்சுக்களை வகை (1)-ல் போன்று எடுத்துக் கொண்டால் $\bar{H}$ முழுவதுமாக η திசையிலும் (அதாவது, y திசையிலும்), $\bar{E}$ முழுவதுமாக ξ திசையிலும் உள்ளன ; எனவே,

$$H_\xi = H_\zeta = 0, \quad E_\eta = E_\zeta = 0.$$

$$E_\xi = a_1 e^{ip[ct - K_1 \zeta]}$$ என்க.

(43)-லிருந்து, $$\bar{n} \times \bar{E} = \frac{\mu V}{c} \bar{H}$$

$$= \frac{1}{K_1} \bar{H}$$

$$\therefore \bar{H} = K_1 \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ E_\xi & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \bar{j} K_1 E_\xi$$

படு அலைகளுக்கு,

$$E_x = E_\xi \cos\theta = a_1 \cos\theta \, e^{ip[ct - K_1(x\sin\theta + z\cos\theta)]}$$

$$E_y = 0$$

$$E_z = -E_\xi \sin\theta = -a_1 \sin\theta \, e^{ip[ct - K_1(x\sin\theta + z\cos\theta)]}$$

$$H_x = 0$$

$$H_y = H_\eta = K_1 a_1 e^{ip[ct - K_1(x\sin\theta + z\cos\theta)]}$$

$$H_z = 0$$

இதேபோன்று, எதிரொளிப்பு அலைகளுக்கு,

$$E_x = -b_1 \cos\theta \, e^{ip[ct - K_1(x\sin\theta - z\cos\theta)]}$$

$$E_y = o$$

$$E_z = -b_1 \sin\theta\, e^{ip[ct-K_1(x\sin\theta - z\cos\theta)]}$$

$$H_x = o$$

$$H_y = K_1 b_1 e^{ip[ct-K_1(x\sin\theta - z\cos\theta)]}$$

$$H_z = o$$

ஒளி விலகல் அலைகளுக்கு,

$$E_x = a_2 \cos\phi\, e^{ip[ct-K_2(x\sin\phi + z\cos\phi)]}$$

$$E_y = o$$

$$E_z = a_2 \sin\phi\, e^{ip[ct-K_2(x\sin\phi + z\cos\phi)]}$$

$$H_x = o$$

$$H_y = K_2 a_2 e^{ip[ct-K_2(x\sin\phi + z\cos\phi)]}$$

$$H_z = o$$

$z=o$-ல் E_x, H_y என்பன தொடர்ச்சியாக இருக்க வேண்டுமென்ற எல்லைக் கட்டுப்பாடுகளிலிருந்து,

$$a_1\cos\theta - b_1\cos\theta = a_2\cos\phi \qquad (59)$$

$$K_1 a_1 + K_1 b_1 = K_2 a_2 \qquad (60)$$

தீர்வு காண,

$$\frac{a_1}{K_2\cos\theta + K_1\cos\phi} = \frac{b_1}{K_2\cos\theta - K_1\cos\phi} = \frac{a_2}{2K_1\cos\theta}$$

ஸ்நெல்லின் விதிப்படி

$$\frac{K_1}{\sin\phi} = \frac{K_2}{\sin\theta}$$

$$\therefore \frac{a_1}{\sin 2\theta + \sin 2\phi} = \frac{b_1}{\sin 2\theta - \sin 2\phi} = \frac{a_2}{4\cos\theta\sin\phi} \qquad (61)$$

$\sin 2\theta = \sin 2\phi$ எனின் $b_1 = 0$; $\theta \neq \phi$ என்பதனல் இங்கு $\theta + \phi = \pi/2$. ஸ்நெல்லின் விதியிலிருந்து,

$$K_1 \sin\theta = K_2 \sin\phi$$

$$= K_2 \cos\theta$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{K_2}{K_1} \qquad (62)$$

சமன்பாடு (62) ஆல் கொடுக்கப்படும் படுகோணத்தை யுடைய படுகதிருக்கு எதிரொளிப்புக் கதிர் கிடையாது. இக் கோணம் ப்ரூய்ஸ்டரின் கோணம் (Brewster's Angle) அல்லது தளவிளைவுக் கோணம் (Polarising Angle) எனப்படும். $\sin 2\theta < \sin 2\phi$ எனின் எதிரொளிப்பிற்கு E-ல் மாறுபாட்டுப்படி வேறு பாடு π ஆகும்; எதிரொளிப்பு அடர்குறை ஊடகத்தில் நிகழ்ந் தால் $K_1 < K_2$ என்பதால், தளவிளைவுக் கோணத்தை விட அதிக மதிப்புள்ள θ விற்கு இது பொருந்தும்; $K_1 > K_2$ எனின் தள விளைவுக் கோணத்தைவிடக் குறைந்த மதிப்புள்ள θ விற்கு இது பொருந்தும்.

§ 8.10 முழு அல்லது அக எதிரொளிப்பு

(Total or Internal Reflection)

§ 8.9-ல் அடர்மிகு ஊடகத்தில் எதிரொளிப்பு நிகழ்கின்ற தெனின் $K_1 > K_2$; ஆகவே ஸ்நெல்லின் விதியிலிருந்து $\phi > \theta$. θ-வின் மதிப்பு சீராக பூச்சியத்திலிருந்து அதிகரித் தால், ϕ-ன் மதிப்பும் அதிகரிக்கின்றது ; $\sin\theta = \frac{K_2}{K_1}$ எனின் $\phi = \pi/2$. θ-வின் இம்மாறுதானக் கோணத்தை (Critical Angle) விட θ-வின் மதிப்பை அதிகரித்தால் ϕ-ன் மதிப்பு கற்பனையா கிறது. இவ்வகையில் அலை முழுவதுமாக எதிரொளிக்கப்படு கிறது. ஆகவே இது முழு அல்லது அகஎதிரொளிப்பு எனப்படும். $\theta = \sin^{-1}\left(\frac{K_2}{K_1}\right)$ என்பது முழு எதிரொளிப்பிற்கு மாறுதானக் கோணம் எனப்படும். உதாரணமாக, பிரிவுக்கூறு § 8.9 வகை (1)-ல் எடுத்துக் கொள்ளப்பட்ட படுஒளி படுதளத்தில் தள விளைவுடைய வகையில் படுஅலை, எதிரொளிப்பு அலைகளுக்கு நாம் கணித்த கணியங்கள் இவ்வகையிலும் அதே மதிப்புகளை யுடையன. ஒளிவிலகல் அலையும் அதே வடிவமைப்புடையது;

அதன் அடுக்குக்குக் குறி உறுப்பில் $K_2 \sin\phi$ ($= K_1 \sin\theta$ என்பதனால்) மெய்மதிப்புடையது; ஆனால்

$$K_2 \cos\phi = \sqrt{K_2^2 - K_2^2 \sin^2\phi}$$

$$= \sqrt{K_2^2 - K_1^2 \sin^2\theta}$$

= கற்பனை மதிப்பு (அக எதிரொளிப்பு நிகழ்கிறது எனின் $\sin\theta > \frac{K_2}{K_1}$)

= $\pm iq$ என்க. (q மெய் மதிப்புடையது)

ஆகவே, ஒளிவிலகல் அலையின் வடிவம்

$$E_y = a_2 e^{ip(ct - K_1 x \sin\theta \pm iqz)}$$

$$= a_2 e^{\pm pqz} e^{ip(ct - K_1 x \sin\theta)}$$

கந்தழியில் பொருத்தமாக இருக்கக் கழிவுக்குறியை நாம் எடுத்துக்கொள்ள வேண்டும். ஆகவே

$$E_y = a_2 e^{-pqz} e^{ip(ct - K_1 x \sin\theta)}$$

ஆகவே அடர்த்தி குறைவான ஊடகத்தினுள் செல்லும் அலை அழிவுருகிறது. செங்குத்து ஒளியலைகளுக்கு ($\theta = 0$) ஊடுருவல் சில அலை நீளங்களேயாகும். ஆதலால் முழு எதிரொளிப்பு எனும் தலைப்பு இங்கு மிகப் பொருத்தமாகும். அழிவுறும் உறுப்பு e^{-pqz}-ன் மதிப்பு அலையின் நிகழ்வெண்ணின் பெரிய மதிப்புகளுக்கு மிக வேகமாகக் குறைகிறது. ஆதலால், மிகப் பெரிய நிகழ்வெண்ணைக் கொண்ட ஒளியலைகள் அரிதாகவே ஊடுறுவுகின்றன.

§ 8.11 ஒரு படித்தான கடத்தும் ஊடகம் (Homogeneous Conducting Medium)

இது வரையில் கடத்தா ஊடகங்களை எடுத்துக்கொண்டோம். இப்பகுதியில் ஒரு படித்தான கடத்தா ஊடகத்தை

ஊடகத்தை எடுத்துக் கொள்வோம். ஆகவே $\sigma \neq 0$. மாக்ஸ் வெல்லின் சமன்பாடுகளிலிருந்து,

$$\Delta \cdot \bar{E} = 0$$

$$\Delta \cdot \bar{H} = 0$$

$$\Delta \times \bar{H} = 4\pi\sigma\bar{E} + \frac{\epsilon}{c}\frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$$

$$\Delta \times \bar{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \bar{H}}{\partial t}$$

இனி, $\Delta \times (\Delta \times \bar{E}) = \Delta\ \Delta \cdot \bar{E} - \Delta^2 \bar{E}$

$$= -\Delta^2 \bar{E}$$

$$\therefore \Delta^2 \bar{E} = \frac{\mu}{c}\Delta \times \frac{\partial \bar{H}}{\partial t}$$

$$= \frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\Delta \times \bar{H})$$

$$= \frac{\mu\epsilon}{c^2}\frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} + \frac{4\pi\sigma\mu}{c}\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \qquad (63)$$

இதே போன்று,

$$\Delta^2 \bar{H} = \frac{\mu\epsilon}{c^2}\frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial t^2} + \frac{4\pi\sigma\mu}{c}\frac{\partial \bar{H}}{\partial t} \qquad (64)$$

சமன்பாடுகள் (63)-ம் (64)-ம் டெலகிராபி சமன்பாடு களாகும். (Equation of Telegraphy). இச்சமன்பாடுகளின் இடப் புறமுள்ள முதல் உறுப்பு இடப்பெயர்ச்சி மின்னோட்டம் (Displacement Current) $\frac{1}{4\pi c}\frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$ -யிலிருந்து வருவதால் இது இடப்பெயர்ச்சி உறுப்பு (Displacement Term) எனப்படும். இரண்டாவது உறுப்பு கடத்தல் மின்னோட்டம் (Conduction Current) J-விலிருந்து வருவதால் இது கடத்தல்உறுப்பு (Conduction Term) எனப்படும். $\frac{p}{2\pi}$ நிகழ்வெண்ணுடைய அலைகளுக்கு $\bar{E}$, e^{ipt}-ன் விகிதசமத்தில் இருக்கும். இவ்வலைகளுக்கு இடப் பெயர்ச்சி மற்றும் கடத்தல் உறுப்புகளின் விகிதம் $\frac{\epsilon p}{4\pi c\sigma}$. பொதுவாக,

ஒன்றின் வரிசையுடையதாதலால் $\frac{p}{2\pi}$ என்பது $c\sigma$-வை விட மிக அதிகமெனின் இடப்பெயர்ச்சி உறுப்பு மட்டிலுமே முக்கியமுடையது; இது மின் கடத்தா ஊடகங்களில் ஒளியலைகளின் வகையைச் சார்ந்தது. $\frac{p}{2\pi}$ என்பது $c\sigma$-வைவிட மிகக் குறைவெனின் கடத்தல் உறுப்பு மட்டிலுமே முக்கியமுடையது; நல்ல உலோகக் கடத்தியில் நீள அலைகள் இவ்வகையன. இடைப்பட்ட வகைகளுக்கு இரு உறுப்புகளும் முக்கியமாகும். அநேக உலோகங்களில் $p > 10^{15}$/வினாடி எனின் இரண்டாவது உறுப்பைப் புறக்கணித்து விடலாம்; $p < 10^{7}$/ வினாடி எனின் முதல் உறுப்பைப் புறக்கணித்து விடலாம்.

z திசையில் செலுத்தப்படும் தள இசையலைகளை எடுத்துக் கொள்வோம். $z\ y$ தளத்தில் தள விளைவுடையது என்க.

ஆகவே $E_y = E_z = 0$; $H_x = H_z = 0$.

$$E_x = a\, e^{ip\,(t - qz)} \tag{65}$$

$$H_y = b\, e^{ip\,(t - qz)} \tag{66}$$

என்க. இங்கு $p/2\pi$ நிகழ்வெண்; $1/q$ "திசைவேகம்". சமன்பாடு (63)-லிருந்து,

$$\Delta^2 E_x = \frac{\mu\epsilon}{c^2}\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} + \frac{4\pi\sigma\mu}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} \tag{67}$$

(65), (66) களிலிருந்து,

$$q^2 = \frac{\mu\epsilon}{c^2}\left\{1 - \frac{4\pi\sigma c}{\epsilon p}\, i\right\} \tag{68}$$

$$q = \alpha - i\,\beta \text{ என்க} \tag{69}$$

$$\therefore\quad q^2 = (\alpha^2 - \beta^2) - 2\,\alpha\,\beta\, i$$

$$\therefore\quad \alpha^2 - \beta^2 = \frac{\mu\epsilon}{c^2}$$

$$\alpha\beta = \frac{\mu\epsilon}{c^2}\cdot\frac{2\pi\sigma c}{\epsilon p}$$

$$\alpha^2+\beta^2=\sqrt{(\alpha^2-\beta^2)^2+4\,\alpha^2\,\beta^2}$$

$$=\frac{\mu\,\epsilon}{c^2}\sqrt{1+\left(\frac{4\,\pi\,\sigma\,c}{\epsilon\,p}\right)^2}$$

$$\therefore\quad \alpha^2=\frac{\mu\,\epsilon}{2c^2}\left[\left\{1+\left(\frac{4\,\pi\,\sigma\,c}{\epsilon\,p}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}+1\right] \tag{70}$$

$$=\frac{\mu\,\epsilon}{2\,c^2}\left[1+\tfrac{1}{2}\left(\frac{4\,\pi\,\sigma\,c}{\epsilon\,p}\right)^2+1\right]$$

$\left[\because\ \frac{\sigma\,c}{\epsilon\,p}\right.$ மிகச் சிறியது எனின் $\left.\right]$

$$=\frac{\mu\,\epsilon}{c^2}\left[1+\tfrac{1}{4}\left(\frac{4\,\pi\,\sigma\,c}{\epsilon\,p}\right)^2\right]$$

$$\therefore\quad \frac{1}{\alpha}=\frac{c}{\sqrt{\mu\,\epsilon}}\left[1+\tfrac{1}{4}\left(\frac{4\,\pi\,\sigma\,c}{\epsilon\,p}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{c}{\sqrt{\mu\,\epsilon}}\left[1-\tfrac{1}{8}\left(\frac{4\,\pi\,\sigma\,c}{\epsilon\,p}\right)^2\right]$$

$\left[\because\ \frac{\sigma\,c}{\epsilon\,p}\right.$ மிகச் சிறியது எனின் $\left.\right]$ (71)

$$\beta^2=\frac{\mu\,\epsilon}{2\,c^2}\left[\left\{1+\left(\frac{4\,\pi\,\sigma\,c}{\epsilon\,p}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}-1\right] \tag{72}$$

$$=\frac{\mu\,\epsilon}{2\,c^2}\left[\tfrac{1}{2}\left(\frac{4\,\pi\,\sigma\,c}{\epsilon\,p}\right)^2\right]$$

$\left[\because\ \frac{\sigma\,c}{\epsilon\,p}\right.$ மிகச் சிறியது எனின் $\left.\right]$

$$\therefore\quad \beta=\frac{\sqrt{\mu\,\epsilon}}{2\,c}\left(\frac{4\,\pi\,\sigma\,c}{\epsilon\,p}\right) \tag{73}$$

$$\therefore \frac{\beta}{\alpha} = \tfrac{1}{2}.\ \frac{4\pi\sigma c}{\epsilon p} \quad \left[\because \frac{\sigma c}{\epsilon p} \text{ மிகச் சிறியது எனின்}\right]$$

$$= \frac{2\pi\sigma c}{\epsilon p} \qquad (74)$$

சமன்பாடு (65)-லிருந்து, " திசைவேகம் " $= \dfrac{1}{q}$. ஒளி விலக லெண் K-யுள்ள ஊடகத்தில் திசைவேகம் $\dfrac{c}{K}$ என்பதனுல்

$$\frac{c}{K} = \frac{1}{q}$$

அல்லது $K = cq$

q-சிக்கலெண் ஆகையால் ஊடகத்தின் ஒளிவிலகலெண் சிக்க லெண்ணுகும். இத்தகைய சிக்கல் ஒளிவிலகலெண்கள் அலை கள் உட்கவரப்படுதலுடன் (Absorption of Waves) சம்பந்தப்பட் டுள்ளன. (65), (66), (69)-களிலிருந்து E_x-ம், H_y-ம்.

$$e^{-p\beta z} \quad e^{ip\,(t-\alpha z)} \qquad (75)$$

என்பதின் விகித சமத்திலுள்ளன. இதிலிருந்து, இத் தகைய ஊடகங்களில் ஒரு தள அலை உட்கவரப்படாமல் செலுத்தப்படமுடியாது எனத் தெளிவாகின்றது. (74)-ல் தேய்வு உறுப்பை (Decay Factor) e^{-kz} என எழுதினுல் $k = p\,\beta$; k என்பது உட்கவர்க்கெழு (Absorption Coefficient) எனப்படும். அநேக மின்கடத்தா ஊடகங்களில் ஒளியலை களுக்கு $\dfrac{4\pi\sigma c}{\epsilon p}$ ஒருமத்தைப் பொருத்து மிகச் சிறியதாகும்.

இவ்வகையில்

$$k = p\beta$$

$$= p\,\frac{\sqrt{\mu\epsilon}}{2c}\left(\frac{4\pi\sigma c}{\epsilon p}\right) \qquad \text{(தோராயமாக, (74)-லிருந்து)}$$

$$= 2\pi\sigma\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \qquad \text{(தோராயமாக)}$$

(75)-ல் அலை நீளம் $\lambda = \frac{2\pi}{\alpha p}$; ஒரு அலை நீளத்தில் வீச்சு $e^{-k\lambda}$ தடவை குறைகின்றது ; ஆனால்

$$k\lambda = p\beta \frac{2\pi}{p\alpha}$$

$$= 2\pi \frac{\beta}{\alpha}$$

$$= \frac{4\pi^2 \sigma c}{\epsilon p} \qquad [\text{(74)-லிருந்து}]$$

ஆகவே, ஒரு அலை நீளத்தில் வீச்சு $e^{-4\pi^2\sigma c/\epsilon p}$ தடவை குறைகின்றது. $c\sigma/\epsilon p$ மிகச் சிறியது என நாம் கொண்டுள்ளதால் இவ்வழிவு படிப்படியானது ; பல அலை நீளங்களுக்குப் பிறகே இவ்வழிவை அறிய முடியும். உதாரணமாக வீச்சின் மூலமதிப்பு $1/e$ தடவையாகக் குறைவதற்குச் செல்ல வேண்டிய தொலைவு $1/k$ ஆகும். இத்தொலைவு (Skin Depth) எனப்படும்.

(75)-ல் செலுத்துகை திசைவேகம் $\frac{1}{\alpha}$. ஆகவே, இது நிகழ்வெண்ணுடன் வேறுபடுகிறது. $\frac{c\sigma}{\epsilon p}$ மிகச் சிறியது என்ற தோராயத்திலிருந்து இத்திசை வேகத்தின் மதிப்பு, (71)லிருந்து

$$\frac{c}{\sqrt{\mu\epsilon}}\left[1 - \frac{1}{8}\left(\frac{4\pi\sigma c}{\epsilon p}\right)^2\right]$$

இத்தகைய அலைகளுக்கு $\bar{E}$-ம் $\bar{H}$-ம் வெளிமாறுபாட்டில் (Out of Phase) உள்ளன என நிறுவுவோம்.

(4)–லிருந்து,

$$\Delta \times \bar{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \bar{H}}{\partial t}$$

இச்சமன்பாட்டின் y-கூறு,

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial H_y}{\partial t}$$

சமன்பாடுகள் (65), (66)-களிலிருந்து E_x, H_y மதிப்புகளை இதில் இட

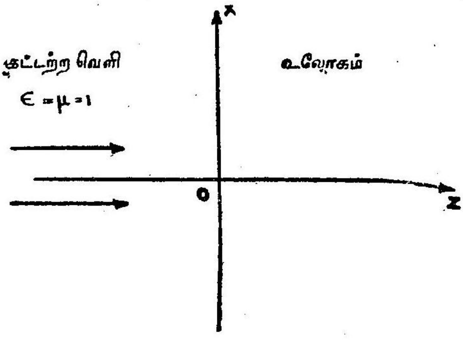
$$aq = \frac{\mu b}{c}$$

அல்லது $$\frac{b}{a} = \frac{c}{\mu} q \tag{76}$$

q ஒரு சிக்கல் எண் ஆகையால் E_x, H_y-களிடையே மாறுபாட்டுப்படி வேறுபாடுள்ளது ; இது q–வின் கழிவுக்குறி கோண வீச்சத்திற்குச் சமமாகும். $q = \alpha - i\beta$ என்பதால் மாறுபாட்டுப் படி வேறுபாடு $= \tan^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$; $\frac{c\sigma}{\epsilon p}$ மிகச் சிறியது எனக் கொண்டால், (74)லிருந்து இது தோராயமாக $\tan^{-1}\left(\frac{2\pi\sigma c}{\epsilon p}\right)$

மேலும் தோராயமாக இது $\frac{2\pi\sigma c}{\epsilon p}$

§ 8.12 சமன்பாடு (63)-ல் இடப்பெயர்ச்சி உறுப்பைப் புறக்கணிக்கத்தக்க அளவு கடத்துத் திறன் (Conductivity) மிக அதிகமுள்ள வகையை ஆராய்வோம். $z = 0$ எனும் தளத்தை எல்லையாகக் கொண்டுள்ள ஒரு கந்தழி உலோகக் கடத்தியில் (Metallic Conductor) ஒரு ஒளிக்கற்றை (Beam of Light) செங்குத்தாக விழுகிறது என்க. படு அலைகள் z அச்சின்



படம் 65

கழிவு திசையிலிருந்து கட்டற்ற வெளியில் வருகின்றன என்க. கட்டற்ற வெளியில் $\epsilon = \mu = 1$. yz தளம் தளவிளைவுடையது என்க. ஆகவே, $E_y = E_z = 0$; $H_x = H_z = 0$.

$$V = \frac{c}{\sqrt{\mu\epsilon}} = c \quad (\because \ \epsilon = \mu = 1)$$

படு அலைகளுக்கு,

$$E_x = a_1 \ e^{ip\,(t - z/c)}$$

$$H_y = a_1 \ e^{ip\,(t - z/c)}$$

எதிரொளிப்பு அலைகளுக்கு,

$$E_x = b_1 \ e^{ip\,(t + z/c)}$$

$$H_y = -\, b_1 \ e^{ip\,(t + z/c)}$$

உலோகத்தில் [(65), (66), (76) போன்று]

$$E_x = a_2 \ e^{ip\,(t - qz)}$$

$$H_y = \frac{c}{\mu} q \, a_2 \ e^{ip\,(t - qz)}$$

இடப்பெயர்ச்சி உறுப்பைப் புறக்கணித்துவிட்ட டெலகிராபி சமன்பாடு (68)-ஐ இம்மதிப்புகள் சமன் செய்ய வேண்டும்.

$$\Delta^2 \bar{E} = \frac{4\pi\sigma\mu}{c} \ \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$$

E_x இச்சமன்பாட்டைச் சமன் செய்கிறதெனின்

$$q^2 = -\frac{4\pi\sigma\mu}{pc} \, i$$

$$= -\, 2\gamma^2 \, i \text{ என்க.}$$

$$\therefore \quad \gamma^2 = \frac{2\pi\sigma\mu}{pc}$$

$$q = \alpha - i\beta \text{ என்க.}$$

$$\therefore \ \alpha = \beta = \gamma$$

$$\therefore \ q = \gamma\,(1 - i) \tag{77}$$

ஆகவே, சமன்பாடு (77)லிருந்து, உலோகத்தினுள் $\bar{E}$-ம் $\bar{H}$-ம் $\frac{\pi}{4}$ மாறுபாட்டுப்படி வேறுபாடுடையன.

$z=0$-ல் E_x-ம் H_y-ம் தொடர்ச்சியானவை என்பது எல்லைக் கட்டுப்பாடுகள். இதிலிருந்து,

$$a_1 + b_1 = a_2$$

$$a_1 - b_1 = \frac{c}{\mu} q\, a_2$$

தீர்வு காண,

$$\frac{a_1}{1+\frac{c}{\mu} q} = \frac{b_1}{1-\frac{c}{\mu} q} = \frac{a_2}{2} \qquad (78)$$

q சிக்கலெண் ஆகையால் மூன்று மின்வெக்டார்களும் மாறுபாட்டுப்படி வேறுபாடில் உள்ளன.

$$R = \frac{\text{எதிரொளிப்பு ஆற்றல்}}{\text{படு ஆற்றல்}}$$

$$= \left[\frac{b_1}{a_1}\right]^2$$

$$= \left[\frac{\mu - cq}{\mu + cq}\right]^2$$

$$= \left[\frac{\mu - c\gamma\,(1-i)}{\mu + c\gamma\,(1-i)}\right]^2$$

$$= \frac{(\mu - c\gamma)^2 + (c\gamma)^2}{(\mu + c\gamma)^2 + (c\gamma)^2}$$

ஃபெரோகந்தமில்லா உலோகங்களில் (Non-forromagnetic Metals) $c\gamma$, μ-வை விட மிக அதிகமானதாகும். ஆகவே $\frac{\mu}{c\gamma}$ மிகச் சிறியது. இவ்வகையில்

$$R = \frac{1+\left(1-\frac{\mu}{c\gamma}\right)^2}{1+\left(1+\frac{\mu}{c\gamma}\right)^2}$$

$$=\frac{1+1-\frac{2\mu}{c\gamma}}{1+1+\frac{2\mu}{c\gamma}} \quad (\because \mu/c\gamma \text{ மிகச்சிறியது என்பதால்})$$

$$=\frac{1-\frac{\mu}{c\gamma}}{1+\frac{\mu}{c\gamma}}$$

$$=\left(1-\frac{\mu}{c\gamma}\right)\left(1+\frac{\mu}{c\gamma}\right)^{-1}$$

$$=\left(1-\frac{\mu}{c\gamma}\right)\left(1-\frac{\mu}{c\gamma}\right) \left(\because \frac{\mu}{c\gamma} \text{ மிகச் சிறியது என்பதால்}\right)$$

$$=1-\frac{2\mu}{c\gamma} \left(\because \frac{\mu}{c\gamma} \text{ மிகச் சிறியது என்பதால்}\right) \quad (79)$$

இம்மதிப்பு செய்முறை சோதனை மதிப்புடன் மிகச் சிறந்து ஒத்துள்ளது.

மாதிரி 1. $\bar{j}$, $\bar{H}$ களின் பருமன்கள் $j(r, t)$, $H(r, t)$ என்பன

$$\frac{\partial}{\partial r}(H r)=4\pi r j, \quad \frac{\partial j}{\partial r}=\frac{\mu\sigma}{c}\frac{\partial H}{\partial t}$$

என்ற சமன்பாடுகளைச் சமன் செய்தால், j

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial j}{\partial r}\right)=\frac{4\pi\sigma\mu}{c}\frac{\partial j}{\partial t}$$

என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டைச் சமன் செய்யும் எனக் காட்டுக. மேலும், H

$$\frac{\partial^2 H}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial r}-\frac{H}{r^2}=\frac{4\pi\mu\sigma}{c}\frac{\partial H}{\partial t}$$

என்ற வகைக் கெழுச் சமன்பாட்டைச் சமன் செய்கிறது எனவும் காட்டுக. மாறிகளைப் பிரித்தல் முறைப்படி j-சமன்பாட்டின் தீர்வு $j=f(r)\,e^{ipt}$, இங்கு, $\frac{d^2 f}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dt}{dr}-4iaf=0$, $\alpha=\frac{\pi\sigma\mu p}{c}$ என நிறுவுக.

$$\frac{\partial}{\partial r}(Hr) = 4\pi r j \qquad \text{(i)}$$

$$\frac{\partial j}{\partial r} = \frac{\mu\sigma}{c}\frac{\partial H}{\partial t} \qquad \text{(ii)}$$

சமன்பாடுகள் (i), (ii) களிலிருந்து H-ஐ நீக்கவும்,

(i)-ன் t-ஐப் பொருத்த வகைக்கெழு காண,

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial H}{\partial t}\right) = 4\pi r\frac{\partial j}{\partial t}$$

அதாவது, $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{c}{\mu\sigma}\frac{\partial j}{\partial r}\right) = 4\pi\frac{\partial j}{\partial t}$ [(ii) லிருந்து]

அதாவது, $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial j}{\partial r}\right) = \frac{4\pi\sigma\mu}{c}\frac{\partial j}{\partial t}$ (iii)

இதுவே தேவையான j சமன் செய்யும் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு.

இனி, சமன்பாடுகள் (i), (ii) களிலிருந்து j-ஐ நீக்கவும்.

(i)-ன் r ஐப் பொருத்த வகைக்கெழு காண,

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(Hr) = 4\pi r\frac{\partial j}{\partial r} + 4\pi j$$

அதாவது, $r\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + 2\frac{\partial H}{\partial r} = 4\pi r\frac{\mu\sigma}{c}\frac{\partial H}{\partial t}$

$$+\frac{4\pi}{4\pi r}\left[r\frac{\partial H}{\partial r} + H\right]$$

அதாவது, $\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial r} - \frac{H}{r^2} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c}\frac{\partial H}{\partial t}$ (iv)

இதுவே தேவையான H சமன் செய்யும் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு.

இனி, சமன்பாடு (iii)–ன் தீர்வைக் காண்போம்.

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial j}{\partial r}\right) = \frac{4\pi\sigma\mu}{c}\frac{\partial j}{\partial t} \qquad \text{(iii)}$$

$j = f(r)\, e^{ipt}$ என்க.

(iii)-ல் பிரதியிட,

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r f'(r)\, e^{ipt}\right) = i\frac{4\pi\sigma\mu p}{c} f(r)\, e^{ipt}$$

$$= 4\, i\, \alpha\, f(r)\, e^{ipt} \quad \left[\because\ \alpha = \frac{\pi\sigma\mu p}{c}\right]$$

அதாவது, $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}[r f'(r)] = 4\, i\, \alpha\, f(r)$

அதாவது, $\frac{1}{r}[r f''(r) + f'(r)] = 4\, i\, \alpha\, f(r)$

அதாவது, $f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) - 4\, i\, \alpha\, f(r) = 0$ (v)

m வரிசையுள்ள பேஸ்ஸல்லின் சமன்பாடு

$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(n^2 - \frac{m^2}{x^2}\right) y = 0$-ன் தீர்வு

$y = \frac{J_m}{y_m}(x)$ என அறிவோம்; சமன்பாடு (v) ஐ இதனுடன் ஒப்பிட $m = 0$, $n^2 = -4i\alpha$; ஆகவே (v)-ன் தீர்வு 0— வரிசை யுள்ள பேஸ்ஸல்லின் சார்பாகும்; இச்சார்பின் மாறி (Argument) ஒரு சிக்கல் எண்ணுகும்.

மாதிரி 2.: அக எதிரொளிப்பின் மாறுதானக் கோணத்தைவிட தளவிளைவுக் கோணம் சிறியது என நிறுவுக. $K_1 = 6$, $K_2 = 1$ எனின் இவ்விரு கோணங்களின் மதிப்புகளைக் காண்க.

அக எதிரொளிப்பின் மாறுதானக் கோணம் θ_1 எனின் $\sin\theta_1 = \frac{K_2}{K_1}$; தளவிளைவுக் கோணம் θ_2 எனின் $\tan\theta_2 = \frac{K_2}{K^1}$

$\therefore \; \theta_2 < \theta_1$ என்பது $\tan\theta_2 < \tan\theta_1$ எனின்

அதாவது, $\dfrac{K_2}{K_1} < \dfrac{K_2}{\sqrt{K_1^2 - K_2^2}}$ எனின்

அதாவது, $K_1 > \sqrt{K_1^2 - K_2^2}$ எனின்

அதாவது, $K_1^2 > K_1^2 - K_2^2$ எனின்

அதாவது, $K_2^2 > 0$ எனின் இது உண்மையாகும்

ஆகவே $\theta_2 < \theta_1$

$K_1 = 6.\; K_2 = 1$ எனின் $\sin\theta_1 = \dfrac{K_2}{K_1} = \dfrac{1}{6}$; $\therefore \; \theta_1 = 9°36'$

$$\tan\theta_2 = \frac{K_2}{K_1} = \frac{1}{6} \; ; \; \therefore \; \theta_2 = 9° \, 28'$$

$$\therefore \; \theta_2 < \theta_1$$

மாதிரி 3: செங்குத்து வீழ் தடத்திற்கு (Normal Incidence கண்ணாடியிலிருந்து காற்றிற்கு எதிரொளிப்புக் கெழு காற்றிலிருந்து கண்ணாடிக்கு உள்ளது போன்றதேயாகும் என்றும், ஆனால் இரு மாறுபாட்டுப்படிகளும் வேறுபட்டன என்றும் நிறுவுக.

பிரிவுக் கூறு § 8.9-ல் வகை (1) ஆன படுஒளி படுதளத்தில் தளவிளைவுடையது என்ற வகையை எடுத்துக் கொள்வோம் இங்கு $\theta = 0$.

ஸ்நெல்லின் வாய்ப்பாடு $K_1 \sin\theta = K_2 \sin\phi$ என்பதிலிருந்து $\theta = 0$ என்றால் $\phi = 0$

$$\frac{a_1}{K_1\cos\theta + K_2\cos\phi} = \frac{b_1}{K_1\cos\theta - K_2\cos\phi} = \frac{a_2}{2K_1\cos\theta}$$

$$\therefore \; \frac{a_1}{K_1 + K_2} = \frac{b_1}{K_1 - K_2} = \frac{a_2}{2K_1}$$

$$\text{எதிரொளிப்புக் கெழு } R = \left|\frac{b_1}{a_1}\right|^2$$

$$= \left[\frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2}\right]^2$$

$K_1 > K_2$ அல்லது $K_2 > K_1$ என்ருலும் R-ன் மதிப்பு வேறு படாது; ஆகவே கண்ணுடியிலிருந்து காற்றிற்கு அல்லது காற்றிலிருந்து கண்ணுடிக்கு என்ற இருவகைகளிலும் எதிரொளிப்புக் கெழுவின் மதிப்பு ஒன்றுதான்.

கண்ணுடியிலிருந்து காற்றிற்குச் சென்ருல் $K_1 > K_2$; ஆகவே $\frac{b_1}{a_1} > 0$; இங்கு மாறுபாட்டுப்படி வேறுபாடில்லை. ஆயின், காற்றிலிருந்து கண்ணுடிக்குச் செல்லும்பொழுது $K_1 < K_2$ என்பதால் $\frac{b_1}{a_1} < 0$; ஆகவே இங்கு மாறுபாட்டுப்படி வேறுபாடு π ஆகும்.

மாதிரி 4 : K_1, K_2 ஒளிவிலகலெண்களுடைய இரு ஊடகங்களைப் பிரிக்கும் தளத்திற்குச் செங்குத்தாக ஒளி விழுகின்றது. ஆற்றலின் R பகுதி எதிரொளிக்கப்படுகிறது, T பகுதி செலுத்தப்படுகிறது எனக் காட்டுக. இங்கு

$$R = \left(\frac{K_2 - K_1}{K_2 + K_1}\right)^2, \quad T = \frac{4\, K_1\, K_2}{(K_2 + K_1)^2}$$

இரு இணை தள முகப்புக்களையுடையஒரு மின்கடத்தாப் பொருள் பாளத்திற்குச் (Slab) செங்குத்தாக ஒளி விழுந்தால் எதிரொளிக்கப்படும் ஆற்றலின் மொத்தப்பகுதி $\frac{(K_2 - K_1)^2}{K_1^2 + K_2^2}$ என்றும் செலுத்தப்படும் ஆற்றலின் மொத்தப் பகுதி $\frac{2\, K_1\, K_2}{K_1^2 + K_2^2}$ என்றும் நிறுவுக.

ஒவ்வொரு எல்லையிலும் நிகழும் பன்மடங்கான எதிரொளிப்புகளையும் எடுத்துக் கொள்ளவும்.

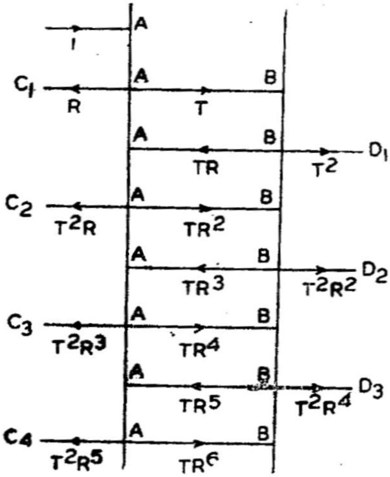
முதல் பகுதியில், மாதிரிக் கணக்கு 3-ல் போன்று,

$$\text{எதிரொளிப்புக் கெழு } R = \left\{\frac{K_2 - K_1}{k_2 + k_1}\right\}^2$$

$$\text{செலுத்துகைக் கெழு } T = 1 - R$$

$$= \frac{4\, K_1\, K_2}{(K_2 + K_1)^2}$$

இனி இரு இணைதள முகப்புகளையுடைய ஒரு மின் கடத்தாப் பொருள் பாளத்திற்குச் செங்குத்தாக ஒளி விழுகிறது என்க. ஒவ்வொரு முகப்பிலும் எதிரொளிப்பினால் அதன் ஆற்றலில் R பகுதி எதிரொளிக்கப்படுகிறது, T பகுதி செலுத்தப்படுகிறது. முதல் முகப்பில் OA படுகதிர் என்க; இது AC_1-ஆக எதிரொளிக்கிறது, AB யாகச் செலுத்தப்படுகிறது. படுகதிர் OA ஒருமை ஆற்றலுடையது எனின் ஆற்றலின் R பகுதி A-ல் எதிரொளிக்கிறது, ஆற்றலின் T பகுதி A-ல் செலுத்தப்படுகிறது.



படம் 66

இரண்டாவது முகப்பில் AB படுகதிராகும்; இதன் ஆற்றல் T, B-ல் எதிரொளிப்பும் செலுத்துதலும் நிகழ்கின்றன. ஆற்றல் T-ல் R பகுதி (அதாவது TR) B-ல் எதிரொளிக்கிறது, T பகுதி (அதாவது T^2) B-ல் செலுத்தப்படுகிறது. இனி, முதல் முகப்பில் BA படுகதிராகும்; இதன் ஆற்றல் TR. A-ல் எதிரொளிப்பும் செலுத்துதலும் நிகழ்கின்றன. ஆற்றல் TR-ல் R பகுதி (அதாவது TR^2) A-ல் எதிரொளிக்கிறது, T பகுதி (அதாவது T^2R) செலுத்தப்படுகிறது. இனி, இரண்டாவது முகப்பில் AB படுகதிராகும்;

இதன் ஆற்றல் TR^2. இவ்வாற்றல் B-ல் TR^3 ஆக எதிரொளிக்கிறது, T^2R^2 ஆக செலுத்தப்படுகிறது. இவவாறு ஒவ்வொரு முகப்பிலும் எதிரொளிப்பு நிகழும்பொழுது மேற்கண்டவாறு ஆற்றல் எதிரொளிக்கவும் செலுத்தவும் படுகிறது. ஆகவே,

முதல் முகப்பில் எதிரொளிக்கப்படும் ஆற்றலின் மொத்தப் பகுதி

$$= R + T^2 R + T^2 R^3 + T^2 R^5 + \ldots\ldots\ldots$$

$$= R + T^2 R [1 + R^2 + R^4 + \ldots\ldots\ldots]$$

$$= R + T^2 R \frac{1}{1-R^2}$$

$$= R \left(1 + \frac{(1-R)^2}{1-R^2}\right) [\because T = 1 - R]$$

$$= R\left(1 + \frac{1-R}{1+R}\right)$$

$$= \frac{2R}{1+R}$$

$$= \frac{(K_2-K_1)^2}{K_1^2+K_2^2} \qquad \left[\because \quad R = \left(\frac{K_2-K_1}{K_2+K_1}\right)^2\right]$$

இரண்டாவது முகப்பில் செலுத்தப்படும் ஆற்றலின் மொத்தப் பகுதி $= T^2 + T^2 R^2 + T^2 R^4 + \ldots\ldots$

$$= T^2 \frac{1}{1-R^2}$$

$$= \frac{(1-R)^2}{1-R^2} [\because T = 1-R]$$

$$= \frac{1-R}{1+R}$$

$$= \frac{4 K_1 K_2}{(K_2+K_1)^2}$$

பயிற்சி

1. $E_x = E_y = 0$, $E_z = A \cos nx \cos nct$ எனின் $\bar{H}$-ன் மதிப்பைக் காண்க ; $t = 0$ எனின் $\bar{H} = 0$, $\epsilon = \mu = 1$, $\rho = \sigma = 0$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. பாயிண்டிங் வெக்டாரின் மதிப்பைக் கண்டு, ஆற்றலில் சராசரி பாய்தல் இல்லையென நிறுவுக.

2. செங்குத்து வீழ்தடத்தில் கண்ணாடியிலிருந்து காற்றுக்குப் படு அலையின் 4% மட்டிலுமே எதிரொளிக்கப்படுகிறது என நிறுவுக.

3. K = 1.5 உள்ள இரு இணையான கண்ணாடி முகப்புகளுக்குச் செங்குத்தாக ஒளி செல்லுகிறது. இரு முகப்புகளிலும் நிகழும் பல எதிரொளிப்புகளை எடுத்துக் கொண்டு எதிரொளிக்கப்படும் ஆற்றலின் பகுதியையும், செலுத்தப்படும் ஆற்றலின் பகுதியையும் காண்க.

4. அக எதிரொளிப்பு நிகழும்பொழுது எதிரொளிக்கும் கற்றையில் மாறுபாட்டுப்படி வேறுபாடு உள்ளது எனக் காட்டுக.

5. $K_1 = 1.6$, $K_2 = 1$ எனின் அக எதிரொளிப்பிற்கு மாறுதானக் கோணத்தையும், தளவிளைவுக் கோணத்தையும் காண்க.

6. $\mu = 1$ எனின், உலோகத்தில் எதிரொளிப்புக்கெழு $R = 1 - \dfrac{2}{\sqrt{\dfrac{c\sigma}{\nu}}}$, ν என்பது நிகழ்வெண், என எழுதவியலும் என நிறுவுக.

7. கட்டற்ற வெளியில் மாக்ஸ்வெல்லின் சமன்பாடுகளை

$$\bar{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[(\Delta\phi) \times k\right]$$

$$\bar{E} = -\frac{\bar{k}}{c^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial z}(\Delta\phi)$$

என்பன சமன் செய்கின்றன என நிறுவுக; இங்கு $\bar{k}$ என்பது z அச்சில் ஒரும வெக்டார், ϕ என்பது $\Delta^2\phi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}$ என்ற சமன்பாட்டைச் சமன் செய்கிறது.

8. சமன்பாடுகள் (46), (47), (48)-களினால் கொடுக்கப்படும் வகைகளுக்கு ஆற்றல் செலுத்தப்படும் திசைவேகங்களைக் காண்க.

9. பொதுக் குணங்கள்

§ 9.1 டாப்ளர் விளைவு

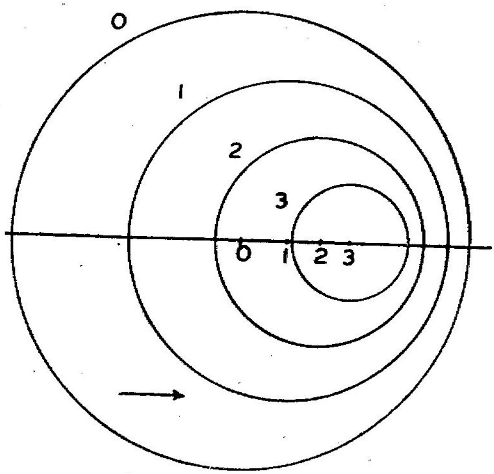
(Doppler Effect)

நோக்குநரை (Observer) நோக்கி நெருங்கி ஒலி எழுப்பிக் கொண்டு செல்லும் ஒரு ஊர்தியின் சுருதி அதன் இயல்நிலை சுருதியை விட அதிகமாக இருப்பதாக அவர் கேட்கின்றார்; ஊர்தி அவரைக் கடந்து செல்லச் செல்ல ஒலியின் சுருதி இயல்நிலை சுருதியைவிடக் குறைவாக இருப்பதாக நோக்குநர் கேட்கின்றார். இதே போன்று நிலையான ஒலி மூலத்தை (Source of Sound) நெருங்கியோ அல்லது விலகியோ செல்லும் நோக்குநர் ஒலியின் சுருதி அதன் இயல்நிலை சுருதியைவிட முறையே அதிகமாக அல்லது குறைவாகக் கேட்கப்படுவதாக உணர்கின்றார். ஒலிமூலம் நோக்குநரைப் பொருத்துச் சென்றாலோ, அல்லது நோக்குநர் ஒலிமூலத்தைப் பொருத்துச் சென்றாலோ நோக்குநரால் கேட்கப்படும் சுருதி, ஒலிமூலமும் நோக்குநரும் நகராமல் இருக்கும்பொழுது கேட்கப்படும் சுருதியிலிருந்து மாறுபட்டது. இவ்வாறு ஒலிமூலம் அல்லது நோக்குநரின் இயக்கத்தினால் நிகழ்வெண் மாறுபடுவது டாப்ளர் விளைவு (Doppler Effect) எனப்படும். இவ்விளைவு Christian Johann Doppler (1803—1853) எனும் ஆஸ்டிரியா (Austria) நாட்டுப் பௌதிகவியல் அறிஞரால் 1842-ஆம் ஆண்டு கண்டுபிடிக்கப் பட்டது.

காற்று நிலையாக உள்ளது என்க. இங்கு மூன்று வகைகள் உள்ளன.

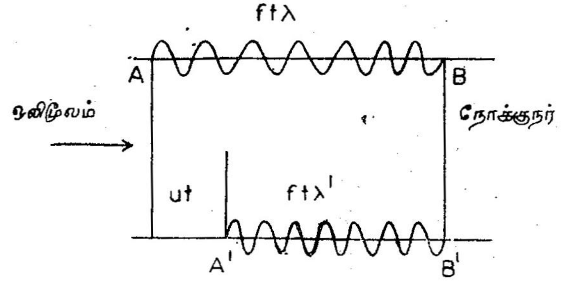
வகை (i): ஒலிமூலம் மட்டிலுமே நகருகிறது என்க. ஒலியின் திசைவேகம் ஊடகத்தை மட்டிலுமே பொருத்தது என்பதினால் காற்றில் ஒலியின் திசைவேகம் ஒலிமூலத்தின் இயக்கத்தினால் பாதிக்கப்படுவதில்லை. நகரும் ஒலிமூலம் தனது ஒலியலை

களைத் தொடர்ந்து செல்லுகிறது. ஆகவே, ஒரு விநாடிக்குப் பிறகு ஒலிமூலத்திற்கும் ஒரு குறிப்பிட்ட அலைக்கும் இடையே யுள்ள தொலைவு, ஒலிமூலம் நகராமல் இருந்திருப்பின் உள்ள தொலைவைவிடக் குறைவாகும். இதனால் ஒலிமூலத்தின் முன் ஒலியலைகள் திரள்கின்றன ; எனவே ஒலிமூலம் நகராமல் இருந் திருந்தால் ஒருவிநாடியில் பெறும் அலைகளைவிட அதிக எண் ணிக்கையான அலைகளை ஒரு விநாடியில் ஒலிமூலம் தன்னை நோக்கி நகருவதனால் நோக்குநர் பெறுகிறார் ; ஆகவே சுருதி இயல்பான மதிப்பைவிட அதிகமாக உள்ளது. நோக்குநர் நகரும் ஒலிமூலத்தின் பின்னால் இருப்பின் இதற்கு நேர்மாறா னது நிகழும்; இதனால் சுருதியின் மதிப்பு குறைவாக இருக்கும். இது படம் (67)-லிருந்து தெளிவாக விளங்குகிறது.



படம் 67

ஒலிமூலம் நகரும்பொழுது நின்றுகொண்டிருக்கும் நோக்குந ரால் கேட்கப்படும் சுருதியைக் காண்போம். ஒலிமூலம் இயக் கத்தில் இல்லாதபொழுது ஒலியின் நிகழ்வெண் F, அலைநீளம் λ என்றும், ஒலிமூலம் இயங்கும்பொழுது ஒலியின் நிகழ்வெண் F', அலைநீளம் λ' என்றும் கொள்க. c-என்பது அலையோட்டத் தின் திசைவேகம், u என்பது ஒலி மூலத்தின் திசைவேகம் என்க. ஆகவே t-நேரத்தில் ft-அலைகளை ஒலிமூலம் வெளி யிடுகிறது. ஒலி மூலம் ஓய்வில் இருந்திருப்பின் இவ்வலைகள் AB நீளமுடையனவாக இருந்திருக்கும். ஆனால் ஒலிமூலம்



படம் 68

t-நேரத்தில் அதன் இயக்கத்தினுல் ut தொலைவு சென்றுவிடுகிறது. ஆகவே ft அலைகளின் நீளம்

$$A'B' = AB - ut$$

எனக் குறிக்கப்படுகிறது. இதிலிருந்து,

$$ft\ \lambda' = ft\ \lambda - ut$$

அதாவது, $\lambda' = \lambda - \dfrac{u}{f}$

$$= \lambda\left[1 - \frac{u}{c}\right]\ (\because c = f\lambda) \quad (1)$$

இனி, $f\lambda = c = f'\lambda'$ என்பதனுல், (1)-லிருந்து,

$$f' = \frac{fc}{c-u} \quad (2)$$

இதே போன்று, ஒலிமூலம் நோக்குநரைவிட்டு விலகிச் செல்லும் பொழுது

$$f' = \frac{fc}{c+u} \quad (3)$$

சமன்பாடு (2)-லிருந்து, ஒலிமூலம் நோக்குநரை நெருங்கிச் செல்லும்பொழுது நிகழ்வெண் அதிகரிக்கப்படுகின்றது என்றும் சமன்பாடு (3)-லிருந்து ஒலிமூலம் நோக்குநரைவிட்டு விலகிச் செல்லும்பொழுது நிகழ்வெண் குறைகிறது என்றும் அறிகிருேம்.

மாதிரி: நிற்கும் நோக்குநரை நோக்கி 50 அடி/செக. வேகத்தில் செல்லும் ஊதல் ஒரு விநாடிக்கு 300 அதிர்வுகள் உள்ள ஒலியை வெளியிடுகிறது. இவ்வாறு ஒரு விநாடியில் 300 அலைகளின் தொடர்ச்சியை ஊதல் உண்டாக்குகிறது; முதல் அலை ஒரு விநாடியில் 1,100 அடிகள் சென்றுவிடுகிறது, ஆனால் கடைசி அலை அப்பொழுதுதான் வெளியிடப்படுகிறது. ஒலிமூலம் ஒருவிநாடியில் முதல் அலையை வெளியிட்ட இடத்திலிருந்து 50 அடி தொலைவு சென்றுவிடுகிறது. இங்கு நோக்குநரால் கேட்கப்படும் சுருதி

$$f' = \frac{fc}{c-u}$$

$$= \frac{300 \times 1100}{1100 - 50}$$

$= 314.286$ அதிர்வுகள்/செகண்டு.

ஒலி மூலம் நகரவில்லையெனின் கேட்கப்படும் சுருதி = 300 அதிர்வுகள்/செக. இங்கு சுருதி அதிகரித்திருப்பதைக் காண்க.

வகை (ii):—நோக்குநர் மட்டிலுமே நகருகிறார் என்க. இயக்கமில்லா ஒலி மூலத்தை விட்டு விலகி நோக்குநர் v திசைவேகத்துடன் செல்கின்றார் என்க. நோக்குநரால் கேட்கப்படும் நிகழ்வெண் f'' என்க. நோக்குநர், ஒலிமூலம் மற்றும் அலைகள் மீது $-v$ திசைவேகத்தைப் புகுத்துவோம் (Superimpose). இதனால், நோக்குநர் ஓய்வு நிலையிலும், ஒலிமூலம் $-v$ திசைவேகத்துடனும், அலைகள் $c-v$ வேகத்துடன் செல்லும். வகை கிடைக்கிறது. வகை (1), சமன்பாடு (2) போன்று

$$f'' = \frac{f(c-v)}{(c-v)-(-v)}$$

$$= \frac{f(c-v)}{c} \qquad (4)$$

இதே போன்று, நோக்குநர் ஒலி மூலத்தை நோக்கிச் செல்லும் பொழுது

$$f'' = \frac{f(c+v)}{c} \qquad (5)$$

வகை (iii) ஒரே திசையில் ஒலி மூலமும், நோக்குநரும் முறையே u, v, திசைவேகத்துடன் செல்லும்பொழுது முழு இயக்கத்தின்மீதும் v — திசை வேகத்தைப் புகுத்துவோம் இதனுல் நோக்குநர் ஓய்வு நிலையிலும், ஒலி மூலம் $u—v$ திசை வேகத்துடனும், அலைகள் ($c—v$)திசை வேகத்துடனும் செல்லும் வகை கிடைக்கிறது. வகை (i) சமன்பாடு (2) போன்று, f''' நோக்குநரால் கேட்கப்படும் நிகழ்வெண் எனின்,

$$f''' = \frac{f\,(c-v)}{(c-v)-(u-v)}$$

$$= \frac{f\,(c-v)}{c-u} \tag{6}$$

இங்கு பொதுவாக,

$$f''' = \frac{n\,(c \pm v)}{c \pm u} \tag{7}$$

டாப்ளர் விளைவு ஒலியலைகளுக்கு மட்டிலும் உரியதன்று. விண்மீனிலிருந்து (Star) நிலவுலகத்தை (Earth) நோக்கி வரும் ஒளி, இரண்டும் சார்ந்த ஓய்வு நிலையிலிருப்பதைவிட (Relative Rest), அதிக நிகழ்வெண் அல்லது குறைந்த அலைநீளத்தை உடையது. இதிலிருந்து விண்மீன்களின் இயக்கங்களைப்பற்றிய பெருமதிப்புள்ள தகவல்கள் கிடைக்கின்றன. நெருங்கி அல்லது விலகிச் செல்லும் விண்மீன்களிலிருந்து வரும் ஒளியலைகளின் மாறுபடும் அலை நீளங்களிலிருந்து, நோக்குநரைப் பொருத்து விண்மீனின் வேகம் பற்றிய முக்கியமான தகவல் கிடைக்கின்றன.

§ 9.2 விம்மல்
(Beats)

ஒலியின் செறிவு (Intensity) வீச்சின் இருபடியின் விகித சமத்திலுள்ளது. சம நிகழ்வெண்ணையுடைய இரு ஒலிகள் ஒரே சமயத்தில் ஒலிக்கப்பட்டால், ஓரிடத்தில் கேட்கப்படும் ஒலியின் செறிவு மாறிலியாகும். ஆனல் சிறிதுமட்டிலுமே வேறுபட்ட நிகழ்வெண்களையுடைய இரு ஒலிகள் ஒரே சமயத்தில் ஒலிக்கப்பட்டால் ஓரிடத்தில் கேட்கப்படும் ஒலியின் செறிவு ஏற்றவிறக்கமுடையதாக இருக்கும்; அதிக ஒலியும், ஏறத்தாழ ஒலியின்மையும் மாறி மாறி நிகழும். இரு ஒலியலைகளும் குறுக்கீட்டு விளைவினுல் (Interference) வலுப்

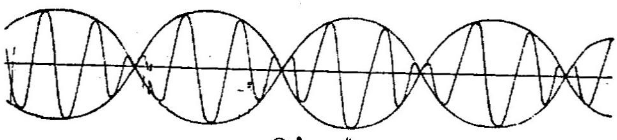
பெறும்பொழுது அதிக ஒலியும், வலுவிழக்கும்பொழுது தாழ்ந்த ஒலியும் கேட்கின்றன. சிறிது வேறுபட்ட நிகழ் வெண்களையுடைய இரு இசைக் கவைகள் (Tuning Frok) ஒரே சமயத்தில் ஒலிக்கும்பொழுதோ அல்லது சுருதியிலிருந்து சிறிது பிசகிய பியானோவின் இரு கம்பிகள் ஒரே சமயத்தில் அடிக்கப்படும் பொழுதோ இவ்வாறு நிகழ்வதைக் கேட்கலாம். சிறிது வேறுபட்ட நிகழ்வெண்களையுடைய இரு ஒலி மூலங்கள் ஒரே சமயத்தில ஒலிக்கும்பொழுது ஒலியின் செறிவில் ஏற்படும் ஏற்ற இறக்கங்கள் விம்மல் (Beats) எனப்படும்.

சம வீச்சையும், மிகச் சிறிது மட்டிலுமே வேறுபட்ட நிகழ் வெண்ணையும் உடைய இரு இசை ஒலியலைகளை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$\phi_1 = a \cos 2\pi\,(k_1 x - n_1 t)$$
$$\phi_2 = a \cos 2\pi\,(k_2 x - n_2 t)$$

ஒருங்கிணைக்கும் கோட்பாட்டின்படி,

$$\phi = \phi_1 + \phi_2$$
$$= 2a \cos 2\pi \left[\frac{k_1 + k_2}{2} x - \frac{n_1 + n_2}{2} t \right]$$
$$\times \cos \left[\frac{k_1 - k_2}{2} x - \frac{n_1 - n_2}{2} t \right] \qquad (8)$$



விம்மல்

படம் 69

முதல் கொஸைன் உறுப்பு மூல அலைகளைப் போன்ற ஒரு அலையைக் குறிக்கின்றது. இவ்வலையின் நிகழ்வெண்ணும் அலை நீளமும் முறையே அவைகளின் தொடக்க மதிப்புகளின் சரா சரியாகும். இவ்வலையின் திசை வேகம் $\frac{n_1 + n_2}{k_1 + k_2}$. இத்திசை வேகம் ஏறத்தாழ மூல அலைகளின் திசை வேகத்தைப் போன்றதாகும். இரண்டாவது கொஸைன் உறுப்பு x-ஐப் பொருத்தும் t-ஐப் பொருத்தும் மிக மெதுவாக வேறுபடு

கிறது; இது வீச்சை மாற்றும் உறுப்பு எனக் கொள்ளலாம். இவ்வாறு, இரு மூல அலைகளின் விளைவினுல் ஏறத்தாழ அதே நிகழ்வெண்ணையும், அலை நீளத்தையும், ஆனுல் நேரத்தையும், தொலைவையும் பொருத்து மாறுபடும் வீச்சையும் உடைய அலை கிடைக்கிறது. ஆகவே ஒலியின் செறிவு ஏற்ற இறக்கமுடையது. இதுவே விம்மல் எனப்படும். இதன் நிகழ்வெண் விம்மல் நிகழ்வெண் (Beat Frequency) எனப்படும்; இது $n_1 - n_2$.

கம்பி இசைக் கருவிகளில் சுருதி மீட்ட விம்மல் மிகப் பயனுள்ளது. இரு கம்பிகளை மீட்டி, தகுந்தவாறு வேறுபாடுகள் செய்து ஒரு விஞடியில் நிகழும் விம்மலின் எண்ணிக்கையைக் குறைக்க வேண்டும். விம்மல் இல்லையெனின் இரு கம்பியிலும் அலையின் நிகழ்வெண்கள் சமமாகும்; அதாவது இரு கம்பிகளும் சம சுருதியுடையன.

§ 9.3 கூட்டோசைகள்
(Combination Tones)

இரு தொனிகளில் ஒரு விஞடிக்கு 6 அல்லது 7 விம்மல் நிகழ்வெண்கள் உடைய விம்மலைக் காதினுல் கேட்டு உணர முடியும். அதிக நிகழ்வெண்களில், தனித்தனி விம்மலைக் காதினுல் வேறுபடுத்தி உணர முடியாது; இங்கு உணர்வு ஒத்திசை (Consonance) அல்லது ஒவ்வா இசையில் (Dissonance) கலந்து விடுகிறது. ஒரு விம்மல் நிகழ்வெண் காது கேட்கக் கூடிய நிகழ்வெண் வீச்சில் இருந்தாலும், அந்த நிகழ்வெண்ணுக் குறிய தொனியாக காதினுல் கேட்டுணர முடிவதில்லை. இருப்பினும், ஒரே சமயத்தில் ஒலிக்கப்பட்ட இரு ஒலிகளின் நிகழ்வெண்ணின் வித்தியாசத்திற்குச் சமமான நிகழ்வெண்ணின் தொனியைக் காதினுல் கேட்டு உணர முடிகிறது; இத்தொனி வித்தியாசத் தொனி (Difference Tone) எனப்படும். இதே போன்று இரு தொனிகளின் நிகழ் வெண்களின் கூட்டுத் தொகைக்குச் சமமான நிகழ்வெண்ணின் தொனியையும் (சிறிது கடினமாயினும்) கேட்டுணர முடியும்; இது கூட்டுத் தொனி (Summation Tone) எனப்படும். வித்தியாசத் தொனி, கூட்டுத் தொனியின் பொதுப் பெயர் கூட்டோசை (Combination Tone) எனப்படும்.

கூட்டோசைகள் விம்மல் நிகழ்ச்சி போன்றன; ஆனுல் இவைகள் காதுகேட்கும் தன்மையைச் சார்ந்தன.

$\phi = A \cos 2\pi\,(nt - kx)$ என்க.

இங்கு வீச்சு A; நிகழ்வெண் n. வீச்சு A நேரத்தைப் பொருத்து $x=0$-ல் $A=a+b\cos 2\pi pt$ எனும்படி மாறுபடுகிறது என்க. அலை $c=\frac{n}{k}$ எனும் திசைவேகத்துடன் செல்வதானால் ϕ, $ct-x$-ன் சார்பாக இருக்கவேண்டும். ஆகவே $A=a+b\cos 2\pi p\left(t-\frac{kx}{n}\right)$ இது வீச்சு வேறுபாடு (Amplitude Modulation) எனப்படும்.

$$\phi=\left\{a+b\cos 2\pi p\left(t-\frac{kx}{n}\right)\right\}\cos 2\pi(nt-kx)$$

$$=a\cos 2\pi(nt-kx)+$$

$$\frac{b}{2}\left\{\cos\left[2\pi(n+p)\left(t-\frac{kx}{n}\right)\right]+\right.$$

$$\left.\cos\left[2\pi(n-p)\left(t-\frac{kx}{n}\right)\right]\right\} \qquad (9)$$

இவ்வாறு வீச்சு வேறுபடுவதால் இரு புதிய நிகழ்வெண்கள் கிடைக்கின்றன. இப்புதிய நிகழ்வெண்கள் $n\pm p$ கூட்டோசைகள் எனப்படும்.

ஒ

§ 9.4 *குழுத்திசை வேகம்* (Group Velocity): பிரிவுக்கூறு § 6.10-ல் குழுத்திசைவேகத்தைப் பற்றி அறிந்தோம். இப்பகுதியில் மேலும் சிறிது காண்போம்.

§ 9.2-ல் இருதிசை வேகங்கள் $\frac{n_1}{k_1}$, $\frac{n_2}{k_1}$ -உம் சமமில்லையெனின் படம் (69)-ல் அலைமுகப்பு $\frac{n_1-n_2}{k_1-k_2}$ என்ற வேகத்துடன் நகருகிறது. இவ்வேகம் அதிக விரைவுடன் அதிரும் பாகத்தின் வேகம் $\frac{n_1+n_2}{k_1+k_2}$-லிருந்து மாறுபட்டது. அதாவது, படம் (69)-ல் தனித்தனி அலைகள் பின்வரும் அலைகளுக்கு இடம் கொடுத்துக்கொண்டு அலைமுகப்பினூடே படிப்படியாக அவைகளின் வீச்சை அதிகரித்துக் கொண்டும், பிறகு குறைத்துக் கொண்டும் முன்னேறுகின்றன. இத்தகைய நிலை அலையின்

திசைவேகம் V நிகழ்வெண்ணைச் சார்ந்ததெனின் நிகழ்கிறது. இந்நிகழ்ச்சி, பிரிகை (Dispersion) எனப்படும். ஆகவே, பிரிகை அமைப்பு முறையில் (Dispersive System) வடிவம் மாருமல் செலுத்தப்படவல்ல ஒரே அலை முகப்பானது ஒரு தனி இசையலைத் தொடராகும் என அறிகிறேம். இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட இசையலைத் தொடராகப் பிரிக்கப்படவல்ல வேறு எந்த அலை முகப்பும் செலுத்தப்படும் பொழுது மாறுபடும் படம் (69)-ல் அலைமுகப்பின் உண்மையான திசை வேகம் குழுத்திசை வேகம் U எனப்படும். (8)-லிருந்து

இரு பகுதிகளும் அதிக வேறுபாடற்றதாயின் $V = \frac{n}{k}$ மேலும்,

$$U = \frac{n_1 - n_2}{k_1 - k_2}$$

$$= \frac{dn}{dk} \qquad (10)$$

அலை நீளம் λ-ன் வாயிலாக, $k = \frac{1}{\lambda}$ என்பதால்

$$U = \frac{dn}{d\left(\frac{1}{\lambda}\right)}$$

$$= -\lambda^2 \frac{dn}{d\lambda} \qquad (11)$$

இதே போன்று,

$$U = \frac{dn}{dk}$$

$$= \frac{d(kv)}{dk}$$

$$= V + k \frac{dV}{dk}$$

$$= V - \lambda \frac{dV}{d\lambda} \quad \left[\because k = \frac{1}{\lambda}\right] \qquad (13)$$

இதுகாறும் நமது கணிப்புகளில் இரு அலைகள் மட்டிலுமே எடுத்துக் கொண்டோம். ஆயின் சமன்பாடு (10)-ன் அமைப்

பிலிருந்து அநேக அலைகள் ஒருங்கிணைக்கப்பட்டுள்ள வகையை யும், அவைகளில் எவ்விரண்டிற்கும் n_1-n_2, k_1-k_2 என்பனவற் றின் விகிதம் ஒரு மாறிலி மற்றும் $\frac{dn}{dk}$ விற்குச் சமம் எனும் நிபந் தனைக்குட்பட்டதெனின், எடுத்துக் கொள்ளலாம். இந் நிபந் தனை உண்மையில்லையெனின் § 9.5 போன்று மேலும் நெருங் கிய நேராயத்தை எடுத்துக் கொள்வோம்.

ஆற்றல் குழுத்திசை வேகத்துடன் செலுத்தப்படுகிறது என்பதுதான் குழுத்திசை வேகத்தின் மிக முக்கியமான பண்பா கும். அலையின் திசைவேகம் நிகழ்வெண்ணைச் சார்ந்துள்ள பல வகைகளை நாம் முன்னர் பார்த்துள்ளோம். இவைகளில் சில வற்றிற்குக் குழுத்திசை வேகத்தைக் கணக்கிடுவோம்.

அத்தியாயம் 6-லிருந்து, h ஆழமுள்ள மேற்பரப்பு அலை களுக்கு,

$$V^2 = \frac{g\lambda}{2\pi} \tanh \frac{2\pi h}{\lambda}$$

ஆகவே (13)-லிருந்து, குழுத்திசை வேகம்

$$U = V - \lambda \frac{dV}{d\lambda}$$

$$= \tfrac{1}{2} V \left\{ 1 + \frac{4\pi h}{\lambda} \operatorname{cosech} \frac{4\pi h}{\lambda} \right\} \qquad (14)$$

ஆழமான கடலில் $\frac{\lambda}{h}$ மிகச் சிறியதாகையால் $\operatorname{cosech} \frac{4\pi h}{\lambda} = 0$.

$$\therefore\ U = \tfrac{1}{2} V$$

ஆகவே ஆழமான கடலில் அலைகளுக்குக் குழுத்திசை வேகம் அலைத்திசை வேகத்தில் பாதியாகும். h மிகச்சிறியதெனின் $\operatorname{cosech} \frac{4\pi h}{\lambda} = 1$; இவ்வகையில் இரு திசைவேகங்களும் ஏறத் தாழ ஒன்றேயாகும். § 6.12-ல் சமன்பாடு (34)-ன் வாயிலாகக் கொடுக்கப்படும் மேற்பரப்பு அலைகளுக்கு ஆற்றல் கடத்தப் படும் வீதத்தின் கோவையைப் போன்று சமன்பாடு (14)

உள்ளது. ஆகவே ஆற்றல் குழுத்திசை வேகத்துடன் கடத்தப் படுகின்றது என அறிகிறோம்.

மின் கடத்தா ஊடகத்தில் மின் அலைகள் : அத்தியாயம் 8-ல் பிரிவுக்கூறு § 8.3-ல் மின் கடத்தா ஊடகத்தில் அலையின் திசைவேகம் $V^2 = \dfrac{c^2}{\epsilon\mu}$ என்ற சமன்பாட்டினுல் கொடுக்கப் படுகிறது. கட்புலனுக்கு உட்பட்ட பகுதியில் அலைகளுக்கு $\mu = 1$ எனக் கொள்ளலாம். மின் கடத்தாப் பொருள் மாறிலி ϵ நிகழ்வெண்ணைச் சார்ந்தது. ஆகவே V-ம் λ-வைச் சார்ந்தது.

(13)-லிருந்து,

குழுத்திசை வேகம் $U = V - \lambda \dfrac{dV}{d\lambda}$

$$= V \left[1 + \frac{\lambda}{2\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial \lambda} \right] \qquad (15)$$

மிகப் பெரும்பாலான பகுதிகளில், முக்கியமாக λ பெரியது எனின், λ அதிகரிக்கும் பொழுது ϵ குறைகின்றது. ஆகவே U, V ஐ விடச் சிறியது. ஆயினும் சில அலை நீளங்களுக்கு, முக்கியமாக மின் கடத்தாப் பொருளின் அணுக்களின் இயல் நிகழ்வெண்ணின் அருகாமையில், முரணிய பிரிகை (Anomalous Dispersion) உள்ளது; மேலும் U, Vஐ விட அதிகமாக இருக்க வியலும். λ மிகப் பெரியதெனின்

$$\epsilon = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4}$$

என்ற தோராய வாய்ப்பாடுள்ளது. ஆகவே (15) லிருந்து,

$$U = V \frac{A - c/\lambda^4}{A + \dfrac{B}{\lambda^2} + \dfrac{C}{\lambda^4}}$$

கடத்தும் ஊடகத்தில் மின் அலைகள் : அத்தியாயம் 8, பிரிவுக் கூறு § 8.12 லிருந்து மின்வெக்டார் $e^{ip(t-\gamma y)}$, $\gamma^2 = \dfrac{2\pi\sigma\mu}{pc}$ என்ற அடுக்குக் குறி உறுப்புடன் செலுத்தப்படுகிறது என அறிந்தோம்.

ஆகவே,

$$V^2 = \frac{1}{\gamma^2}$$

$$= \frac{pc}{2\pi\sigma\mu}$$

குழுத்திசை வேகம் $U = \frac{dp}{d(p\gamma)}$

$$= \frac{1}{\gamma + p\frac{d\gamma}{dp}}$$

எல்லா நிகழ்வெண்களுக்கும் σ-வும் μ வும் மாருதிருப்பின்,

$$U = \frac{2}{\gamma}$$

$$= 2V$$

இங்கு குழுத்திசை வேகம் அலையின் திசைவேகத்தை விட அதிகமாக உள்ளது.

§ 9.5 இனி, குழுத்திசை வேகத்தைப் பற்றிய குறிப்பை இரண்டுக்கு மேற்பட்ட அலைகளைக் கூருகக் கொண்ட வகைக்கு விரிவுபடுத்துவோம். அலைமுகப்பு கந்தழி எண்ணிக்கையுடைய

$$e^{2\pi i(kx - nt)} \tag{16}$$

போன்ற இசையலைப் பகுதிகளையுடையது என்க; இங்கு k எடுத்துக் கொள்ளத்தக்க எல்லாவித மதிப்புகளையும் உடையது. அலையின் திசைவேகம் நிகழ்வெண்ணைச் சார்ந்தது எனலாம்; ஆகவே n என்பது k-ன் சார்பாகும். பகுதி அலை (16)-ன் வீச்சு, (Amplitude) k-ன் ஒருமை வீச்செல்லையில் (Uunit Range) $a(k)$ என்ருல் முழு கிளர்ச்சி:

$$\phi(x,t) = \int_{k=-\infty}^{k=+\infty} a(k).\, e^{2\pi i(kx-nt)}\, dk \tag{17}$$

இந்த ஒருங்கிணைக்கப்பட்ட அலைகளின் திரட்டல் அலைப்பெட்டகம் (Wave Packet) எனப்படும். k-ன் சில மதிப்புகளுக்கு (k_0 என்க) வீச்சு மிகப்பெரியதாகவும் $k-k_0$ மிகப் பெரியதாயின் வீச்சு மறையும்படியாகச் சிறியதாகவும் உள்ள அலைப் பெட்டகம் மிகுந்த கவனத்திற்குரியதாகும். இங்கு பகுதி அலைகள் பெரும்பாலாக $e^{2\pi i (k_0 x \quad n_0 t)}$ என்பதை ஒத்திருக்கும்; இதிலிருந்து வேறுபடும் அலைகள் மிகக் குறைவேயாகும். இங்கு

$$a(k) = A\, e^{-\sigma\,(k-k_0)^2} \qquad (18)$$

என்ற வகையை விரிவாக ஆராய்வோம். இது கவுஸியனின் அலைப் பெட்டகம் (Gaussian Wave Packet) எனப்படும். ஒரு பெட்டகத்தில் A, σ மற்றும் k_0 என்பன மாறிலிகளாகும்.

முதலில் $t = o$ என்ற நேரத்தில் அலைமுகப்பின் வடிவமைப்பைக் காண்போம். இங்கு சமன்பாடு (17)-ல் n உறுப்பு மறைவதால் தொகை காண்பது எளிதாகிறது.

$$\phi\,(x, o) = \int_{-\infty}^{+\infty} A\, e^{-\sigma\,(k-k_0)^2}\; e^{2\pi i k x}\, dk$$

$e^{-\sigma(k-k_0)^2}$ என்ற உறுப்பினால், இத்தொகையின் முக்கியமான பங்கு k-ன் வீச்செல்லை (Range)-யில் k_0 மட்டிலுமேயாகும். $k-k_0 = \frac{1}{\sqrt{\sigma}}$ என்றால் இவ்வுறுப்பு e^{-1} என்பதினாலும், மேலும் $k-k_0$-ன் அதிக மதிப்புகளுக்கு இது விரைவில் குறைவதாலும் k-ன் இவ்வீச்செல்லையின் பரிமாண வரிசை (Order of Magnitude) $\Delta k = \frac{1}{\sqrt{\sigma}}$. மேலேயுள்ள தொகையைக் காண கீழ்க் கண்ட முடிவைப் பயன் செய்வோம் :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{au - bu^2}\, du = e^{\frac{a^2}{4b}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-b\left(u^2 - \frac{a}{b}u + \frac{a^2}{4b^2}\right)} du$$

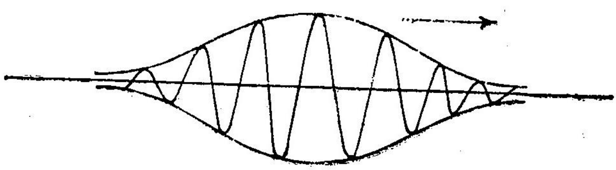
$$= e^{\frac{a^2}{4b}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-bv^2}\, dv$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{b}}\; e^{\frac{a^2}{4b}} \qquad (19)$$

இம்முடிவைப் பயன் செய்து தொகை காண,

$$\phi\,(x,\,0) = A\,\sqrt{\frac{\pi}{\sigma}}\; e^{-\pi^2 x^2/\sigma}\; e^{2\pi i k_0 x} \qquad (20)$$

$e^{2\pi i k_0 x}$ என்ற உறுப்பு ஒரு இசையலையைக் குறிக்கிறது; இதன் அலை நீளம் $\lambda = \frac{1}{k_0}$, வேறுபடும் வீச்சு $A\sqrt{\frac{\pi}{\sigma}}\, e^{-\pi^2 x^2/\sigma}$ (20)-ன் மெய்ப்பகுதியை எடுத்துக் கொண்டால் ϕ (x, 0)-ன் பொதுவடிவம் படம் (70)-ஆல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது போன்றிருக்கும்.



படம் 70

இப் படத்தில் வெளிவளைவரை இரு கவுஸியன் வளைவரைகள்

$$y = \pm A\sqrt{\frac{\pi}{\sigma}}\; e^{-\pi^2 x^2/\sigma}$$

மேலும் ϕ (x, 0) இவைகளுக்கிடையில் அலைகிறது, $t = 0$ என்ற நேரத்தில் அலைப்பெட்டகம் அநேக அலைவுகளைக் (Oscillations)

கொண்ட ஒரு பெரிய துடிப்பைக் (Pulse) குறிக்கிறது. வீச்சின் மீப்பெருமதிப்பை $\frac{1}{e}$ தடவையாக் குறைக்கும் x-ன் மதிப்பிற்கு அரை—அகலம் (Half-width) என வரையறை செய்தால் இத்துடிப்பின் அரை - அகலம் $\frac{\sqrt{\sigma}}{\pi}$ ஆகும்.

$t > 0$ எனும் பின் நேரத்தில் (17)-ன் தொகையைக் காண வேண்டுமாயின் n என்பதை k-ன் சார்பாக முழுமையாக அறிய வேண்டியது மிக அவசியமாகும். டெய்லரின் தேற்றத்தின் (Taylor's Theorem) மூலம் விரிவு செய்ய

$$n = n_0 + \alpha (k-k_0) + \beta \frac{(k-k_0)^2}{2} + \ldots\ldots$$

இங்கு

$$\alpha = \left(\frac{dn}{dk} \right)_0, \ \beta = \left(\frac{d^2 n}{d k^2} \right)_0, \qquad (21)$$

பொதுவாக முதலிரு உறுப்புக்கள் மட்டிலுமே மிக முக்கியமாகும். மற்ற உறுப்புக்களைப் புறக்கணித்து விட்டால் முடிவு (19)-ஐப் பயன் செய்து தொகை காண இயலும். இவ்வாறு,

$$\phi (x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A \, e^{-\sigma (k-k_0)^2} \, e^{2\pi i \{k x - t (n_0 + \alpha (k- k_0))\}} \, dk$$

$$= A \sqrt{\frac{\pi}{\sigma}} \, e^{-\pi^2 (x-\alpha t)^2 / \sigma} \, e^{2 \pi i (k_0 x - n_0 t)} \qquad (22)$$

$t = 0$ எனரல், இதிலிருந்து கிடைக்கும் முடிவு சமன்பாடு (20)-ல் உள்ளது போன்றதாகும். தனித்தனி அலைகள் $\frac{n_0}{k_0}$ என்ற திசைவேகத்துடன் நகருகின்றன என (22)-ன் கடைசி உறுப்பிலிருந்து அறிகிறோம். ஆனல் இவை

களின் எல்லையின் வீச்சு, முதல் உறுப்பாகிய $A\sqrt{\frac{\pi}{\sigma}}$

$e^{-\pi^2 (x-\alpha t)^2/\sigma}$ என்பதால் கொடுக்கப்படுகிறது. வலப்புற மாக αt தொலைவு இடம் பெயர்ந்துள்ளது என்பதைத்தவிர இக்கோவை படம் (70) குறிக்கும் சமன்பாடு (20) போன்றுள்ள தாகும். ஆகவே, குழு முழுவதிலுமாக $\alpha = \left(\frac{dn}{dk}\right)_0$ என்ற திசை வேகத்துடன் நகருகிறது எனும் முடிவுக்கு வருகிறோம். ஆயின் குழுவினுள் உள்ள தனித்தனி அலைகளின் திசை வேகம் $\frac{n_0}{k_0}$. குழு முழுவதற்குமான திசைவேகம் தான் நாம் முன்னர் கண்ட குழுத்திசை வேகமாகும்

சமன்பாடு (21)-ல் மற்றுமொரு உறுப்பை எடுத்துக் கொண்டு $\phi(x, t)$-ன் மதிப்பை அறிய தொகை காணின் ϕ-ன் வடிவம் (22) போன்று இருப்பதைக் காணலாம்; ஆயின் σ என்பதற்குப் பதிலாக $\sigma + \pi\beta it$ வருகிறது. இதன் விளைவு இருபடியாகும் : முதலாவதாக, $e^{2\pi i(k_0 x - n_0 t)}$ என்ற உறுப்பில் மாறுபடும் மாறுபட்டுப்படி (*Phase*) யைப் புகுத்துகிறது. இரண்டாவதாக, எல்லை வீச்சு வளைவரையின் அடுக்குக்குறி உறுப்பை

$$e^{\frac{-\pi^2\sigma(x-\alpha t)^2}{\sigma^2 + \pi^2\beta^2 t^2}}$$

என மாற்றுகிறது. இதுவும் கவுஸியனின் வளைவரையேயாகும். ஆயின் இதன் அரை — அகலம்.

$$\left\{(\sigma^2 + \pi^2\beta^2 t^2) / \sigma\pi^2\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{23}$$

என அதிகரித்துள்ளது. ஆகவே அலைப்பெட்டகம் அலைத்திசை வேகம் $\frac{n_0}{k_0}$ உடனும், குழுத்திசை வேகம் $\left[\frac{dn}{dk}\right]_0$ உடனும் t என்ற நேரத்தில் அரை—அகலம் (23)-ஆல் கொடுக்கப்படும் வண்ணம் பரவுகின்றது என அறிகின்றோம்

பிரிகை (Dispresion) நிகழும்பொழுது குழுத்திசை வேகம் ஆற்றல் செலுத்தப்படும் திசை வேகத்திற்குச் சமமாகும். இது குழுத்திசை வேகத்தின் முக்கியமான பண்பாகும்.

§ 9.6 இனி திட்ட வடிவ அலையோட்டச் சமன்பாடு $\Delta^2 \phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$ என்பதின் பொது ஆய்வுரையைப் பார்ப்போம். இங்கு c ஒரு மாறிலி. எந்த ஒரு புள்ளி P யிலும் (பொது விதி காண்பதற்கு முறண்பாடின்றி (Without Loss of Generality) P என்பதை நாம் ஆதியாக எடுத்துக்கொள்ள வியலும்) ϕ மற்றும் அதன் வகைக்கெழுக்களின் மதிப்புகளும் ϕ_p ஐத் தீர்மானம் செய்ய வேண்டிய நேரத்திலிருந்து சிறிது மாறுபட்ட நேரத்துடன் தொடர்பு கொண்டிருக்க வேண்டும்.

வேறுபட்ட நிகழ்வெண்களையுடைய கூறுகளாக ϕ-ஐப் பகுத்து ஆராய்வோம் ஒவ்வொரு கூறும் அலையோட்டச் சமன்பாட்டைச் சமன் செய்ய வேண்டும். c ஒரு மாறிலியெனின் ஒருங்கிணைக்கும் கோட்பாட்டின்படி பல கூறுகளைக் கூட்டுவதால் முழுத் தீர்வைப் பெற முடியும்.

நிகழ்வெண் p யுள்ள ϕ யின் பகுதியை முதலில் எடுத்துக் கொள்வோம். இது $\phi(x, y, z)\, e^{ikct}$ (24)

என்ற வடிவமைப்புடையது; இங்கு $k = \frac{2\pi p}{c}$ (25)

ϕ என்பது கிளர்ச்சியின் வெளிப் (Space) பகுதி. இது,

$$(\Delta^2 + k^2)\,\phi = 0 \tag{26}$$

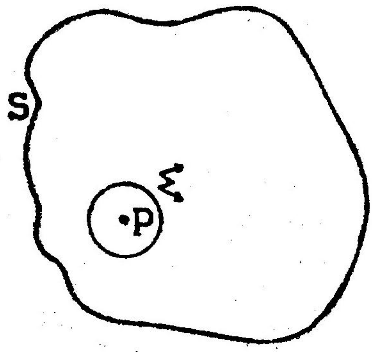
எனும் பாய்ஸானின் சமன்பாட்டைச் (Poisson Equation) சமன் செய்கிறது. கிரீனின் தேற்றத்தைப் (Green's Theorem) பயன்படுத்தி இச்சமன்பாட்டின் தீர்வைக் காணலாம். இத் தேற்றமாவது : ϕ_1, ϕ_2 என்பன ஏதேனும் இரு சார்புகள்; ஏதேனும் ஒரு மூடப்பட்டுள்ள பரப்பு S இரண்டோ அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட பகுதிகளையோ உடையது. இதனுள் ϕ_1, ϕ_2 என்பன இயன் மாறுதல் (Singularity) இல்லாதன. இவ்வாறுயின்,

$$\int \left\{ \phi_2 \Delta^2 \phi_1 - \phi_1 \Delta^2 \phi_2 \right\} d\tau$$

$$= \int \left\{ \phi_2 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} - \frac{\partial \phi_2}{\partial n} \right\} ds \tag{27}$$

இடது கைப்புறமுள்ள தொகை S-ஆல் சூழப்பட்டுள்ள கன அளவின் மேல் கணக்கிடப்படுகிறது. $\frac{\partial}{\partial n}$ என்பது dS-க்கு வெளிச் செல்லும் செங்கோட்டிற்கு (Normal) நெடுகாக வகை காணுதலைக் குறிக்கின்றது.

இச்சமன்பாட்டில் ϕ_1, ϕ_2 என்பன விதிக்கட்டில்லாதன. எனவே, ϕ_1 என்பதை ϕ என்றும், ϕ_2 என்பதை $\frac{e^{-ikr}}{r}$ என்றும் கொள்வோம். ஆதி P–யிலிருந்து ஆரையாக (Radially) r அளக்கப்படுகிறது. இங்கு ϕ என்பது சமன்பாடு (26)-ன் தீர்வு. கொடுக்கப்பட்டுள்ள மூடிய பரப்பு S-ற்கும் ஆதியைச் சூழ்ந்துள்ள சிறிய கோளம் Σ-விற்கும் இடையேயுள்ள கன அளவின்மேல் தொகை காண்போம். ஆதியை நாம் விட்டுவிட வேண்டும்; ஏனெனின், ஆதியில் ϕ_2 கந்தழியாகிறது. படம் (71)-ல் S-னுள் P அமைந்துள்ளதாகக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. S-ற்கு வெளியே P அமையும் வகையிலும் ஆய்வு இதே போன்றதாகும்.



படம் 71

$\Delta^2 \phi_2 = -k^2 \phi_2$ என எளிதில் காணலாம். ஆகவே (27)-ல் இடக்கைப்புறம் $\int \phi_2 (\Delta^2+k^2)\phi \, d\tau$ என ஆகிறது. ஆயின் $(\Delta^2+k^2)\phi=0$ என்பதனுல் இத்தொகையின் மதிப்பு பூஜ்ஜியமாகும். (27)-ன் வலது கைப்புறம் இருபகுதிகளையுடையது. இவ்விருபகுதிகளும் முறையே S மற்றும் Σ-வின் மேல் தொகை

காண்பதனுல் வருகின்றன. Σ-வின் மேல் வெளிச் செல்லும் செங்கோடு P-ஐ நோக்கியுள்ளதால் இப்பகுதி

$$\int \left\{ \frac{e^{-ikr}}{r} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial r} \right) - \phi \left(-\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{e^{-ikr}}{r} \right] \right) \right\} d\Sigma$$

Σ-வின் ஆரம் பூஜ்ஜியத்தை நெருங்கினுல் இதில் ஒரேயொரு உறுப்பு மட்டிலுமே மிஞ்சுகிறது. இவ்வுறுப்பு

$$-\int \phi \frac{e^{-ikr}}{r^2} d\Sigma = -\int \phi \frac{e^{-ikr}}{r^2} r^2 dw$$

இங்கு dw என்பது P-ஐச் சுற்றியுள்ள திண்மக்கோணத்தின் (Solid Angle) தனிமம் (Element). r பூஜ்ஜியத்தை நெருங்கும் வண்ணம் எல்லையையெடுத்தால் இதிலிருந்து கிடைக்கும் பங்கு $-4\pi\phi_p$. ஆகவே சமன்பாடு (27)-ஐச் கீழ்க்கண்டவாறு எழுதவியலும்.

$$-4\pi\phi_p = \int \left\{ \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) \right\} dS$$

$$= \int \left\{ \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi e^{-ikr} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) + ik\phi \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\partial r}{\partial n} \right\} dS \qquad (28)$$

வரையறையின்படி $\phi = \phi(x, y, z)\, e^{ikct}$ என்பதனுல் சமன்பாடு (28)-லிருந்து,

$$\phi_p = \frac{1}{4\pi} \int X\, dS \qquad (29)$$

இங்கு $X = \dfrac{e^{ik(ct-r)}}{r} \dfrac{\partial \phi}{\partial n} - \phi\, e^{ik(ct-r)} \dfrac{\partial}{\partial n} \left(\dfrac{1}{r} \right) + ik\phi \dfrac{e^{ik(ct-r)}}{r} \dfrac{\partial r}{\partial n},$

$$= A - B + C$$

X-ஐ எளிய வடிவத்தில் கொடுத்தல் இயலும். ϕ ல் நேரம் t-ஐப் பொருத்த வேறுபாடு உள்ளமையால் $\phi e^{ik(ct-r)}$ என்பது ϕ-ஐ நேரம் $t - \frac{r}{c}$ ல் எடுத்துக் கொள்வது போன்றதாகும். இதைக் குறியீட்டாக $[\phi]_{t-r/c}$ எனக் குறித்தால்

$$B = \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)[\phi]_{t-r/c}$$

இதே போன்று

$$A = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right]_{t-r/c}$$

$$C = \frac{1}{cr}\frac{\partial r}{\partial n}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right]_{t-r/c}$$

இதில் உதாரணமாக $\left[\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right]_{t-r/c}$ என்றால் $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ ஐ x, y, z, t-களின் சார்பாகக் கண்டு, பின்னர் t-க்குப் பதிலாக $t-r/c$ எனப் பிரதியீடு செய்ய வேண்டும். $t-r/c$ என்பது சுணக்க நேரம் (Retarded Time) எனப்படும். இவ்வாறாக $\phi_p = \frac{1}{4\pi}\int X\,dS$ என நிறுவியுள்ளோம்.

$$\text{இங்கு } X = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right]_{t-r/c} - \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)(\phi)_{t-r/c} + \frac{1}{cr}\frac{\partial r}{\partial n}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right]_{t-r/c} \quad (30)$$

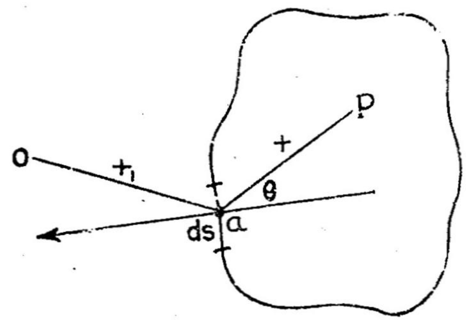
இது காறும் ஒரு குறிப்பிட்ட நிகழ்வெண்ணையுடைய அலைகளை மட்டிலுமே எடுத்துக் கொண்டோம். ஆனால் சமன்பாடு (30)-ல் t-ஐச் சார்ந்தது ஒன்றுமேயில்லை. ஆகவே, முழுமையான அலையில் இருக்கும் ஒவ்வொரு நிகழ்வெண்ணிற்கும் உரிய பங்கைக் கூட்டுவதினால் கிடைக்கும் முடிவு (30) போன்றதேயாகும்; இதில் ஒரு நிகழ்வெண்ணுக்குரியது என்ற கட்டுப்பாடு கிடையாது.

இத்தேற்றம் (Kirchhoff) கிர்காப்ஃ என்பவரால் நிறுவப் பட்டது. இது கொள்கையளவில் மிகப் பயனுடையதாகும். முதலாவதாக, ϕ-ன் மதிப்பை S-ன் ஒவ்வொரு பரப்புத் தனிமத்தின் பங்குகளான $\frac{X}{4\pi}$ களின் கூட்டுத் தொகையாகக் கருதலாம். இது சிறு தனிமங்களுக்கான கூட்டல் விதி எனலாம். இரண்டாவதாக, dS-ன் பங்கு $t-r/c$ என்ற நேரத்தில் ϕ-ன் மதிப்பைச் சார்ந்ததாகும். ஒரு சைகை (Signal) dS-லிருந்து புள்ளி P-க்குச் செல்ல எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம் $\frac{r}{c}$ ஆகும். ஆகவே ds-ஆல் கிடைக்கும். பங்கு ds-ல் ϕ-ன் தற்பொழுதிய மதிப்பைச் சார்ந்ததில்லை; இது இதற்கு முந்திய எத்தருணத்தில் ds-லிருந்து செல்லும் சைகையானது P-யில் இப்பொழுது சரியாக வந்தடைகிறதோ அத்தருணத்தில் ϕ-ன் மதிப்பேயாகும். இக்காரணம் பற்றியே சுணக்க நேரம் எனப் பெயர் பெற்றது. மேலும் இதனாலே $[\phi]_{t-r/c}$ என்பது சுணக்கப் பொடன்ஷியல் (Retarded Potential) எனப் பெயர் பெறுகின்றது.

மேலேயுள்ளது போன்று $t-\frac{r}{c}$ என்பதற்குப் பதிலாக $t+\frac{r}{c}$ வரும் வண்ணம் தீர்வு காண முடியும் என்பது தெளிவு; இதற்கு ϕ_2-ஐ $\frac{e^{-ikr}}{r}$ என்பதற்குப் பதிலாக $\frac{e^{+ikr}}{r}$ என எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும். இவ்வாறு துரிதப் பொடன்ஷியல் (Advanced Potential) $[\phi]_{t+\frac{r}{c}}$ மற்றும் துரித நேரம் (Advanced Time) கிடைக்கின்றன. பொதுவாக இவ்விரு வகைத் தீர்வுகளையும் ஒருங்கிணைக்க முடியும்.

$c=\infty$ எனும் வகையில் சைகைகள் கந்தழி திசைவேகமுடையன. இங்கு அடிப்படைச் சமன்பாடு $\Delta^2\phi=0$ எனத் திரிகிறது. இதில் நேரத்தைப் பொருத்த வேறுபாடு எழுவதில்லை. சமன்பாடு (30) மின்நிலையியல் (Electrostastics) கணக்குகளுக்குண்டான திட்டவடிவ தீர்வாகிறது.

§ **9.7** ஒரு மூலம் (Source) *O* செலுத்தும் கோள இசையலை களின் வகைக்கு இக் கொள்கையைப் பயன்படுத்துவோம். படம் (72)-ல் கண்டுள்ளபடி,



படம் 72

P என்ற புள்ளியில் ϕ-ஐக் கணக்கிடுவோம். *S* என்பது *P*-ஐச் சூழ்ந்துள்ள மூடிய பரப்பு. *Q*-ல் ஒரு சிறு தனிமம் *ds*-ஐ எடுத்துக் கொள்ளுவோம். வெளிப்புறம் செல்லும் செங்கோடு *QO* மற்றும் *PQ*-வுடன் θ_1, θ என்ற கோணங்களை முறையே உண்டாக்குகிறது. $QO=r_1$; $PQ=r$. *Q*-ல் ϕ-ன் மதிப்பு தகுந்த கோள அலைச் சமன்பாட்டினால் கொடுக்கப்படுகிறது.

$$\phi_Q = \frac{a}{r_1} \cdot \cos m\,(ct - r_1) \tag{31}$$

இவ்வாறு, $$\frac{\partial \phi}{\partial n} = -\cos\theta_1 \frac{\partial \phi}{\partial r_1}$$

$$= a \cos\theta_1 \left\{ \frac{1}{r_1^2} \cos m\,(ct - r_1) - \frac{m}{r_1} \sin m\,(ct - r_1) \right\}$$

$\lambda = \frac{2\pi}{n}$; செய்முறையில் அநேகமாக நிகழ்வது போன்று

r_1 என்பது λவை விட மிகப்பெரியது எனின்

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = -\frac{ma \cos\theta_1}{r_1} \sin m\,(ct - r_1)$$

$$\text{மேலும் } \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\cos\theta$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{a\,m\,c}{r_1}\sin m\,(ct-r_1)$$

சுணக்க மதிப்புக்களை எளிதில் காணலாம். (30)லிருந்து

$$X = -\frac{m\,a\cos\theta_1}{r\,r_1}\sin m\,(ct-[r+r_1])$$

$$+\frac{a}{r^2\,r_1}\cos\theta\cos m\,(ct-[r+r_1])$$

$$-\frac{1}{cr}\,\frac{a\,m\,c}{r_1}\cos\theta\sin m\,(ct-[r+r_1])$$

r_1 ஆனது λ வை விட மிக அதிகமெனின் வலது கைப்புற முள்ள இரண்டாவது உறுப்பைப் புறக்கணித்து விடலாம். ஆகவே,

$$X = -\frac{m\,a}{r\,r_1}(\cos\theta+\cos\theta_1)\sin m\,(ct-[r+r_1]) \qquad (32)$$

(32) உடன் (29) ஐ இணைக்க,

$$\phi_p = -\frac{1}{4\pi}\int\frac{m\,a}{r\,r_1}(\cos\theta+\cos\theta_1)\sin m\,(ct-[r+r_1])\,dS$$

$$= -\frac{a}{2\lambda}\int\frac{1}{r\,r_1}(\cos\theta+\cos\theta_1)\sin m\,(ct-[r+r_1])\,dS \qquad \ldots\ldots(33)$$

சமன்பாடுகள் (32), (33) களைக் கீழ்க்கண்டவாறு பொருள் கொள்ளலாம். P-ல் விளைவானது ஒவ்வொரு தனிமம் dS-ம் $\frac{A}{\lambda r}\left(\frac{\cos\theta+\cos\theta_1}{2}\right)dS$ வீச்சுகொண்ட ஒரு அலையைச் செலுத்துவதற்கு ஒப்பாகும். இங்கு A என்பது dSல் வீழ் அலையின்

வீச்சாகும். மேலும், இவ்வலைகள் வீழ் அலையைவிட காற்பங்கு காலக்கூறு முற்பட்டதாகும் என்பது $\cos m\,(ct-r_1)$ என்ற உறுப்பிற்குப் பதிலாக $-\sin m\,(ct-[r+r_1])$ என்ற உறுப்பிலிருந்து அறியக்கிடைக்கிறது. $\frac{1}{2}\,(\cos\theta+\cos\theta_1)$ என்பது சாய்வுக் காரணி (Inclination Factor) எனப்படும். பெரும்பாலும் முக்கியத்துவமுடைய θ மற்றும் θ_1 களின் மதிப்புகள் சிறியன வாதலால் சய்வுக் காரணியின் மதிப்பு ஒன்று ஆகும். (32), (33) சமன்பாடுகளிலிருந்து இத்தகைய பொருள் கொள்வது ஃப்ரஸ்னெல்லின் கோட்பாடு (Fresnel's Principle) எனப்படும்.

பார்வைக்குரிய புத்தகங்கள்

Abraham M., and Becker, R. : The Classical Theory of Electricity and Magnetism, Blackie and Son.

Bateman, H. : Mathematical Analysis of Electrical and Optical Wave Motion on the basis of Maxwell's Equations. Dover.

Bottcher, C. J. F. : Theory of Electric Polarization. Elsevier.

Bragg, W. : The World of Sound. Bell and Co.

Brillouin, L. : Wave Propagation and Group Velocity. Academic Press, N. Y.

Byerly, W. E. : Fourier Series and Spherical Harmonics. Dover.

Coulson, C. A. : Waves. Oliver and Boyd.

Champion E C. : University Physics. Vol. IV. Wave, Motion and Sound.

Churchill, R. V. : Fourier Series and Boundary Value Problems. McGraw Hill.

Cowling, T. G. : Magnetohydrodynamics. Interscience.

Crandall, A. B. : Theory of Vibrating Systems and Sound. Van Nastrand.

Crawford, F. S. : Waves. Berkeey Physics Course, Vol. 3. McGraw Hill.

Culner, C. A. : Musical Acoustics. Blakiston.

Fletcher, H. : Speech and Hearing. Van Nostrand.

Frenkel, J. : Wave Mechanics, Elementary Theory. Dover.

Helmholtz, H. : Sensations of Tone. Translated by A. T. Ellis. Longmans.

Jackson, J. D. : Classical Electrodynamics. John Wiley.

Jahnke, F., and Emde, E : Table of Functions. Dover.

Jeans, J. H. : The Mathematical Theory of Electricity and Magnetism.

Jorden, E. C., and Balmain, K. G. : Electromagretic Waves. Prentice Hall.

Lamb, H. : Dynamical Theory of Sound. Arnold.

Magnus, W., and Weaner, W. : The Electromagnetic field. Univ. Chicago Press.

Maxwell, J. C. : Treatise on Electricity and Magnetism. Dover.

Miller, D. C. : The Scienee of Musical Sounds. McMillan.

Miller, D. C. : Sound Waves, their Shape and Speed. McMillan.

Morse, P. M. : Vibration and Sound. McGraw Hill.

Morse, P. M. and Feshbach, H. : Methods of Theoretical Physics. McGraw Hill.

Mott, N. F. and Snedden, I. N. : Wave Mechanics and its Applications.

Mott, N. F. : Elements of Wave Mechanics.

Pain, H. J. : The Physics of Vibrations and Waves. John Wiley and Sons.

Panafsky, W. K. H. and Phillips, M. : Classical Electricity and Magnetism. Addison Wesley.

Rayleigh : Theory of Sound. McMillan.

Richardson, E. G. : Text Book of Sound. Arnold.

Schelkunoff, S. A. : Electromagnetic Waves. Nostrand.

Schiff, L. I. : Quantum Mechanics. McGraw Hill.

Sears, F. W. : Mechanics, Wave Motion and Heat. Addison-Wesley.

Skilling, H. H. : Fundamentals of Electric Waves. John Wiley

Slater, J. C. and Frank N. H.: Electromagnetism. McGraw. Hill.

Slater, J. C. and Frank, N. H.: Introduction to Theoretical Physics.

Stoker J. J.: Water Waves. Interscience.

Stratton, J. A.: Electromagnetic Theory. McGraw Hill.

Waston, G. N.: Theory of Bessel Functions. Cambridge Univ. Press.

Wood, A.: Sound Waves and their uses. Blackie.

Wood, A. B.: A Text book of Sound. Bell.

கலைச் சொற்கள்

தமிழ் — ஆங்கிலம்

A

Absorption coefficient — உட்கவர் கெழு
Absorption of waves — அலைகள் உட்கவரப் படுதல்
Acceleration — முடுக்கம்
Acceleration due to gravity — ஈர்ப்பு முடுக்கம்
Adiabatic change — மாறா வெப்பநிலை வேறுபாடு
Advanced potential — துரிதப் பொடன்ஷியல்
Advanced time — துரித நேரம்
Amplitude — வீச்சு, வீச்சம்
Amplitude modulation — வீச்சு வேறுபாடு
Angle of incidence — படு கோணம்
Angle of reflection — எதிரொளிப்புக் கோணம்
Angle of refraction — விலகு கோணம்
Annular — வட்டவடிவமான, வளைவடிவமான
Anomalous dispersion — முரணிய பிரிகை
Anti-node — எதிர்க்கணு
Approximation — தோராயம்
Arbitrary — விதிக் கட்டில்லாதது
Argument — கோண வீச்சம்
Article — பிரிவுக் கூறு
Artifice — பொறியமைப்பு, புனைவு
Assumption — கற்பிதம்
Atmosphere — வளி மண்டலம்
Atmospheric pressure — வளி மண்டல அழுத்தம்
Atomic structure — அணு அமைப்பு
Auxiliary equation — துணைச் சமன்பாடு

Axial symmetry	—	அச்சைச் சார்ந்த செவ்வொழுங்கு
Axis	—	அச்சு

B

Beam of light	—	ஒளிக் கற்றை
Beats	—	விம்மல்
Beat frequency	—	விம்மல் நிகழ்வெண்
Bernoulli's equation	—	பெர்னோலியின் சமன்பாடு
Bessel's equation	—	பேஸலின் சமன்பாடு
Boundary	—	எல்லை
Boundary condition	—	எல்லைக் கட்டுப்பாடு
Brewester's angle	—	ப்ருய்ஸ்டரின் கோணம்

C

Capillary waves	—	தந்துகி அலைகள்
Cartesian co-ordinates	—	தெக் காட்டின் ஆயக் கூறுகள்
Case	—	வகை
Central force	—	மைய விசை
Channel	—	வாய்க்கால்
Charge density	—	மின்னூட்ட அடர்த்தி
Chladni's figure	—	சலாடினியின் படம்
Circular tank	—	வட்டமான குளம்
Coefficient	—	கெழு
Combination tone	—	கூட்டோசை
Commensurable	—	பொது அளவுள்ள
Complementary function	—	துணைத் தீர்வு
Complex representation	—	சிக்கல் உறுவமைப்பு
Component	—	கூறு
Compression	—	இறுக்கம்
Condensation	—	சுருக்கம்
Condition	—	கட்டுப்பாடு, நிபந்தனை
Conduction current	—	கடத்தல் மின்னோட்டம்
Conduction term	—	கடத்தல் உறுப்பு
Conductivity	—	கடத்து திறன்
Conical pipe	—	கூம்புக் குழாய்
Conservation of mass	—	பொருண்மைப் பேணுகை பொருண்மைக் காப்பு, திணிவுக் காப்பு

Consonance — ஒத்திசை
Constant — மாறிலி
Constant of integration — தொகையின் மாறிலி
Continuity — தொடர்ச்சி
Continuous — தொடர்ச்சியான
Convergence — குவிதல்
Co-ordinates — ஆயக் கூறுகள்
Corrugation — நெளிவு
Critical angle — மாறுதானக் கோணம்
Critical value — மாறுநிலை மதிப்பு
Cross product term — குறுக்குப் பெருக்கல் உறுப்பு
Cross section — குறுக்கு வெட்டு
Curl — கர்ல்
Current density — மின்னோட்ட அடர்த்தி
Curve — வளைவரை
Cylindrical Co-ordinates — உருளை ஆயக் கூறுகள்
Cylindrical polar co-ordinates — உருளை-போலர் ஆயக்கூறுகள்

D

Damps — தளர்வுறுதல்
Dash — கீறுப் பிரி
Decay factor — தேய்வு உறுப்பு
Degenerate case — இனச் சிதைவு வகை
Degree — படி
Degree of freedom — கட்டின்மை எண்ணிக்கை
Denser medium — அடர்மிகு ஊடகம்
Density — அடர்த்தி
Dependent — சார்புள்ள
Dielectric — மின் கடத்தாப் பொருள்
Dielectric constant — மின் கடத்தாப் பொருள் மாறிலி
Dielectric displacement — மின் கடத்தா இடப் பெயர்ச்சி
Difference tones — வித்தியாசத் தொனிகள்
Differential coefficient — வகைக் கெழு
Differentiation — வகையிடல்
Diffraction — விளிம்பு விளைவு
Dimension — பரிமாணம்
Direction — திக்கு, திசை
Direction Cosine — திசைக் கொசைன்
Directly — நேராக
Discontinuity — தொடர்ச்சி முறிவு

Dispersion — நிறப் பிரிகை, பிரிகை
Dispersive system — பிரிகை அமைப்பு முறை
Displacement — இடப் பெயர்ச்சி
Displacement current — இடப் பெயர்ச்சி மின்னோட்டம்
Displacement term — இடப்பெயர்ச்சி உறுப்பு
Dissipative term — அழிவு செய்யும் உறுப்பு
Dissonance — ஒவ்வா இசை
Distribution — பரவல்
Disturbance — கிளர்ச்சி
Divergence (of a vector) — டைவர்ஜன்ஸ்
Divergence — விரிதல்
Doppler effect — டாப்ளர் விளைவு

E

Eccentric angle — கோட்டக் கோணம்
Effect — விளைவு
Elastic string — மீள்சக்தி இழை
Electric field strength — மின் புல வலிமை
Electric potential — மின் பொடன்ஷியல்
Electric unit — மின் அலகு
Electromagnetic theory — மின்காந்தக் கொள்கை
Electrostatic — மின் நிலையியல்
Element — தனிமம்
Element of length — நீளத் தனிமம்
Ellipse — நீள் வட்டம்
Elliptically polarised light — நீள் வட்டத்தில் தள விளைவு கொள்ளும் ஒளி
Energy — ஆற்றல்
Equation — சமன் பாடு
Equation of continuity — தொடர்ச்சிச் சமன்பாடு
Equilibrium — சம நிலை
Estuary — கழி முகம்
Ether — ஈதர்
Euler's Dynamical equation — ஆயிலரின் இயக்கச் சமன்பாடு
Expression — கோவை
Extention — நீட்சி
External force — புறவிசை

F

Ferromagnetism — ஃபெரோ காந்தம்

Finite — அளவுள்ள, முடிவுள்ள

First order of small quantity — முதல்வரிசைச் சிறிய மதிப்பு
Fixed — நிலையான
Fixed end — நிலையான முனை
Fluctuating field — ஏற்ற விறக்கப் புலம்
Fluid — பாய்பொருள்
Focus — குவியம்
Fourier analysis — ஃ போரியரின் பகுப்பாய்வு
Fourier Series — ஃ போரியரின் தொடர்
Fractional change — பின்ன வேறுபாடு
Free end — கட்டற்ற முனை
Free space — கட்டற்ற வெளி

Free surface — கட்டற்ற மேற்பரப்பு
Frequency — நிகழ்வெண்
Fresnell's formula — ஃபரஸ்னல்லின் வாய்பாடு
Friction — உராய்வு
Function — சார்பு
Fundamental — அடிப்படைச்சுரம்
Fundamental normal mode — அடிப்படை இயல்நிலை வகை
Furrow — ஆழ்வடு

G

Gausian wave packet — கவுஸியனின் அலைப் பெட்டகம்
Generalise — பொதுப்படுத்து
Generalised Lagender's Equation — பொதுப்படுத்தப்பட்ட லஜெண்டரின் சமன்பாடு
Gravity — புவிஈர்ப்பு
Green's theorem — கிரீனின் தேற்றம்
Group velocity — குழுத்திசைவேகம்

H

Half-width — அரை-அகலம்
Harmonics — ஒத்திசைகள்
Harmonic waves — இசை அலைகள்
Heat waves — வெப்ப அலைகள்
Homogenecus — சம படித்தான
Hook's law — ஹூக்கின் விதி
Horizontal acceleration — கிடைமுடுக்கம்

Horizontal axis — கிடை ஆய அச்சு
Horizontal plane — கிடைத்தளம்
Horizontal velocity — கிடைத்திசை வேகம்
Hyperbolic function — அதிபரவளைச் சார்பு

I

Identical — முற்றொருமை, சர்வசமம்
Impulse — தாக்களவை
Incident wave — வீழ் அலை
Incompressible — அழுந்தாத் தன்மையது
Independent — சார்பற்றது
Infinite — கந்தழி
Infra-red waves — புறச் சிவப்பு அலைகள்
Initial condition — தொடக்கக் கட்டுப்பாடு
Initial line — முதற்கோடு
In-phase — உள்மாறுபாடு
Integer — முழுவெண்
Intensity — (ஒலியின்) செறிவு
Intercept — வெட்டுத்துண்டு
Interference — குறுக்கீட்டு விளைவு
Internal friction — உள் உராய்வு
Internal reflection — அக எதிரொளிப்பு, முழு எதிரொளிப்பு
Interval — இடைவெளி
Inversely — நேர்மாறாக
Irrotational — சுழற்சியற்றது

K

Kinetic energy — இயக்க ஆற்றல்

L

Laplace's equation — லெப்லாஸின் சமன்பாடு
Laplacian — லெப்லாஸியன்
Law — விதி
Linear — ஒருபடித்தானது
Linear combination — ஒருபடிச் சேர்க்கை
Linear function — ஒருபடிச் சார்பு
Liquid waves — திரவத்தில் அலைகள்
Longitudinal — நீளப்பாங்கு
Long waves in shallow water — ஆழமற்ற நீரில் நீள அலைகள்

M

Macroscopic phenomena — பேரளவு நிகழ்ச்சி
Magnetic field strength — காந்தப் புலவலிமை
Magnetic induction — காந்தத் தூண்டல்
Magnetic potential — காந்தப் பொடன்ஷியல்
Magnitude — பரும அளவு, பருமன்
Major axis — பேரச்சு
Mass — பொருண்மை, திணிவு
Material — சடப் பொருள்
Matter — பருப்பொருள்
Maximum — மீப்பெரு மதிப்பு
Maxwell's equations — மாக்ஸ்வெல்லின் சமன்பாடுகள்
Maxwell's relation — மாக்ஸ்வெல்லின் தொடர்பு
Mean position — இடைநிலை
Mechanics — இயக்கவியல்
Medium — ஊடகம்
Membrane — சவ்வு
Metalic conduction — உலோகக் கடத்தி
Minimum — மீச்சிறுமதிப்பு
Minor axis — சிற்றச்சு
Modulus — எண்ணளவு
Modulus of decay — தேய்வுக் குணகம்
Motion — இயக்கம்

N

Necessary and sufficient condition — வேண்டிய மற்றும் போதுமான நிபந்தனை
Negative — கழிவு மதிப்பு
Nodal circle — கணு வட்டம்
Nodal plane — கணுத் தளம்
Node — கணு, அதிர்வில் புள்ளி
Non-conducting medium — கடத்தா ஊடகம்
Normal — செங்கோடு
Normal co-ordinates — இயல்நிலை ஆயக்கூறு
Normal mode — இயல்நிலை வகை
Note — தனி ஒலியிசை
Number — எண்

O

Observer — நோக்குநர்
Operation — செய்கை
Orbit — ஒழுக்கு
Order — வரிசை
Order of magnitude — பரிமாண வரிசை
Origin — ஆதி
Original length — இயல் நீளம்
Orthogonal — செங்குத்தான
Oscillation — அலைவு
Oscillatory motion — ஊசல் இயக்கம்
Out of phase — வெளிமாறுபாடு
Overtones — மேற்சுரங்கள்

P

Parabolic distribution — பரவளையப் பரவல்
Partial amplitude — பகுப்பு வீச்சு
Partial differentiation — பகுப்பு வகைக்கெழு
Particle — துகள்
Particular integral — சிறப்புத் தீர்வு
Pendulum — ஊசல்
Period — காலக் கூறு
Period Equation — காலக்கூறுச் சமன்பாடு
Periodic — காலவட்ட ஒழுங்குடைய
Permeability — உட்புகுத் திறன்
Phase — மாறுபாட்டுப்படி
Piston — உந்து தண்டு
Pitch — சுருதி
Plane — தளம்
Plane harmonic waves — தள இசை அலைகள்
Plane of incidence — படுதளம், வீழ்தளம்
Plane of polarisation — தள விளைவுத் தளம்
Plane polar co-ordinates — தளப் போலார் ஆயக்கூறுகள்
Plane wave — தள அலை
Poisson equation — பாய்ஸானின் சமன்பாடு
Polarisation — தள விளைவு
Polarising angle — தள விளைவுக் கோணம்
Polynomial — பல்லுருப்புக் கோவை

Positive — கூட்டு மதிப்பு
Positive direction — நேர்திசை
Potential — பொடன்ஷியல்
Potential energy — நிலை ஆற்றல்
Poynting vector — பாயின்டிங் வெக்டார்
Principle — கோட்பாடு
Principle of superposition — ஒருங்கிணைக்கும் கோட்பாடு
Pressure — அழுத்தம்
Problem — தீர்வாய்வு
Progressive waves — முன்னேறும் அலைகள்
Propagation — செலுத்துதல்
Proportional — அளவொத்தது
Pulse — துடிப்பு

Q

Quadrant — கால் பகுதி
Quadratic — இருபடிக் கணியன்

R

Radially — ஆரையாக
Radial velocity — ஆரத்திசை வேகம்
Radio waves — வானொலி அலைகள்
Range — வீச்செல்லை, இடைவெளி
Rarefaction — அடர் குறைப்பு
Ratio — விகிதம், தகவு
Rate of dissipation of energy — ஆற்றல் அழிவு வீதம்
Real part — மெய்ப்பகுதி
Rectangular co-ordinates — செவ்வக ஆயக் கூறுகள்
Rectangular tank — செவ்வகக் குளம்
Reduction to steady motion — சீரியக்கத்திற்கு மாற்றியமைத்தல்
Reflection — எதிரொளிப்பு
Reflection at a boundary — எல்லையில் எதிரொளிப்பு
Reflection coefficient — எதிரொளிப்புக் கெழு
Refracted waves — ஒளி விலகல் அலைகள்
Refraction — ஒளி விலகல்
Refractive index — ஒளிவிலகல் எண்
Relative velocity — சார்வேகம்
Resistance — தடை

Resultant — விளைவு
Resultant force — விளைவு விசை
Retarded potential — சுணக்கப் பொடடன்ஷியல்
Retarded time — சுணக்க நேரம்
Ridges — கூர்வரை
Right handed set of axes — வலக்கைப் பண்புடைய அச்சுக்கள்
Rigid support — உறுதியான ஆதாரம்
Ripples — சிற்றலைகள்

S

Scalar — திசையிலி
Scalar product — எண்ணிப் பெருக்கி
Separation constant — பிரித்தல் மாறிலி
Separation of variables — மாறிகளைப் பிரித்தல்
Shape — வடிவம்
Signal — சைகை
Similar — வடிவொத்த
Simple Harmonic Motion — சாமானிய சீரிசையியக்கம்
Single valued function — ஒரு மதிப்புடைச் சார்பு
Singularity — இயன் மாறுதல்
Slab — பாளம்
Smooth — வழுவழுப்பான
Solid angle — திண்மக் கோணம்
Solution — தீர்வு
Source — மூலம்
Source of sound — ஒலி மூலம்
Space — வெளி
Spherical co-ordinates — கோள ஆயக்கூறுகள்
Spherical polar co-ordinates — கோள-போலார் ஆயக்கூறுகள்
Spherical symmetry — கோளச் செவ்வொழுங்கு
Spherical waves — கோள அலைகள்
Spring — சுருள்வில்
Square term — வர்க்க உறுப்பு
Standard form — திட்டவடிவம்
Star — விண்மீண்
Stationary waves — நிற்கும் அலைகள்
Steady motion — சீரியக்கம்
Stream function — பாய்வளிச் சார்பு

Stream line — பாய்வளிக் கோடு
Strength (of a spring) — (சுருள் வில்லின்) வீறு
Stress — தகைவு
String — கயிறு
Suffix — கீழ்க் குறி
Summation tone — கூட்டுத் தொனி
Surface — மேற்பரப்பு
Surface tension — புறப்பரப்பு இழுவிசை
Surface waves — மேற்பரப்பு அலைகள்
Symmetric — செவ்வொழுங்கு

T

Tangent — தொடுகோடு
Tangent plane — தொடு தளம்
Taylor's theorem — டெய்லரின் தேற்றம்
Temperature — வெப்பநிலை
Tends to — அணுகும்பொழுது
Tension — இழுவிசை
Tidal waves — நீள அலைகள்
Time of relaxation — தளர்ச்சிக் காலம்
Tone — தொனி
Total differential coefficient — முழுவகைக் கெழு
Total reflection — முழு எதிரொளிப்பு, அக எதிரொளிப்பு
Transcendental equation — கடந்தச் சமன்பாடு
Transformation — மாற்றம்
Transmission coefficient — செலுத்துகைக்கெழு
Transmitted wave — செலுத்தும் அலை
Transverse velocity — குறுக்குத் திசைவேகம்
Transverse vibration — குறுக்கு அதிர்வு
Trivial case — சாரமற்ற வகை
Ultra-violet waves — புற-ஊதா அலைகள்
Unit — ஒருமம்
Unit distance — ஒரும தூரம்
Unit range — ஒரும வீச்செல்லை
Unit time — ஒரும காலம்
Unstable equilibrium — உறுதியற்ற சமநிலை

V

Vector — வெக்டார், திசையி

Vector potential — வெக்டார் பொடன்ஷியல்
Vector product — வெக்டார் குறுக்குப் பெருக்கி
Velocity — திசை வேகம்
Velocity potential — திசைவேகப் பொடன்ஷியல்
Vertical — நிலைக்குத்து
Vertical acceleration — நிலைக்குத்து முடுக்கம்
Vertical axis — நிலைக்குத்து ஆய அச்சு
Vibration — அதிர்வு
Visible region — கட்புலனுக்குட்பட்ட பகுதி

W

Wave front — அலைத் தளம்
Wave length — அலை நீளம்
Wave number — அலையெண்
Wave packet — அலைப்பெட்டகம்
Wave profile — அலை முகப்பு
Wireless waves — கம்பியில்லா அலைகள்
Without loss of generality — பொது விதி காண்பதற்கு முரண்பாடின்றி
Work — வேலை

X

X-rays — X-கதிர்கள்
γ-rays — γ-கதிர்கள்